

الطبعة
الثانية

سلسلة ملخصات شوم
نظريات ومسائل في

الدوائر الكهربائية

تأليف
جوزيف أ. دمنستر

يحتوي الكتاب على أكثر من ٣٤٥
مسألة محلولة حلاً كاملاً



دار ماكجرو هيل للنشر

الدار الدولية للنشر والتوزيع

ملخصات مشوم

نظريات ومسائل في الدوائر الكهربائية

تأليف
جوزيف أ. ادمنستر
عضو الجمعية الهندسية
استاذ مساعد الهندسة الكهربائية - جامعة أكرون
نسق نسخة النظام المترى

ج. أ. سوان
محاضر أول في الهندسة الكهربائية
كلية سلو لل تكنولوجيا

ترجمة
الدكتور محمود أحمد أبوزيد
كلية العلوم - قسم الفيزياء
جامعة المنصورة
جمهورية مصر العربية

مراجعة
الأستاذ الدكتور محمد عبد المقصود النادى
نائب رئيس جامعة المنصورة
جمهورية مصر العربية

دار ماجروهيل للنشر
الدار الدولية للنشر والتوزيع



حقوق النشر

- الطبعة الإنجليزية : حقوق التأليف © ١٩٦٥ دار ماكجروهيل للنشر ، إنك - جميع الحقوق محفوظة .
Edminster : Electric circuits “Schaum”
07-094453-9
- الطبعة العربية الأولى : حقوق الطبع والنشر © ١٩٨٠ دار ماكجروهيل للنشر ، إنك - جميع الحقوق محفوظة .
- الطبعة العربية الثانية : حقوق الطبع والنشر © ١٩٨٩ جميع الحقوق محفوظة للناشر :

الدار الدولية للنشر والتوزيع

٣٨ ش الأهرام - روكسى - مصر الجديدة
ص . ب : ٥٥٩٩ هليوبوليس غرب - القاهرة
ت : ٢٥٨٢٨٨٧
تلكس : ٢٠٠٧١/٢٠٠٧٠ PBCRB UN
فاكس : ٠٠٢٠٢/٢٩١٨٠٥٩

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى وجه أو
بأى طريقة سواء كانت إلكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو بالتسجيل أو خلاف ذلك إلا بموافقة
الناشر على هذا كتابة ومقدماتاً .

مقدمة الناشر

المعرفة هي أصل الحضارة ،
والكلمة هي مصدر المعرفة ،
والكلمة المطبوعة هي أهم مكون في هذا المصدر .
وقد كانت الكلمة المطبوعة ولا تزال أهم وسائل الثقافة والإعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً ،
حيث حملت إلقاء حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضاراتها وإضاءة
الطريق بنور العلم والمعرفة .

والكلمة تبقى مجرد فكرة. لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ثم
توزيعها ، وذلك وحده هو الذى يكفل لها أداء رسالتها .

وعالم الكتب العلمية عالم رحب ممتد الآفاق ، متسع الجنبات ، والعلم لا وطن له ولا حدود ، ويوم
يحظى القارئ العربى بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية هو اليوم الذى تتطلع له الأمة العربية جمعاء .

والدار الدولية للنشر والتوزيع تشعر بالرضا عن مساهمتها في هذا المجال بتقديم الطبقات العربية للكتب
العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب الاتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير احتياجات
القارئ العربى استاذاً وباحثاً وممارساً .

ومن جانب آخر فنحن نمد يدنا إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والهيئات الثقافية
للتعاون معنا في إصدار طبقات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية تخدم التقدم العلمى والحضارى
للقارئ العربى

والله ولى التوفيق

محمد وفائى كامل

مدير عام

الدار الدولية للنشر والتوزيع

مقدمة

وضع هذا الكتاب لاستخدامه كتكملة لكافة المراجع المتاحة حالياً أو كمرجع لمقرر منهج أولى في تحليل الدوائر الكهربائية ، وخاصة في القوانين الأساسية والنظريات والطرق التكنيكية الشائعة في مختلف الاتجاهات الواردة في المراجع الأخرى .

وقد قسمت المادة العلمية إلى فصول تغطي مجالات معروفة للنظرية والدراسة ويبدأ كل فصل بصيغ للتعريفات الواضحة والمبادئ والنظريات بالإضافة إلى المادة التوضيحية والوصفية اللازمة ، يعقبها مجموعة من المسائل المحلولة والإضافية ، والمسائل المحلولة توضح وتفند النظرية وطرق التحليل الواردة ، كما أنها مصدر للأمثلة العملية هذا فضلاً عن إبراز النقاط الهامة التي تمكن الطالب من التطبيق السليم الواعي للمبادئ الأساسية . ويمثل العدد الكبير من المسائل الإضافية عرضاً وافياً للمادة العلمية في كل فصل .

وتشمل الموضوعات استجابة الدائرة الأساسية وتحليل الأشكال الموجية ونظام العدد المركب والتميز المطاور والدوائر المتصلة على التوالي والتوازي والقدرة وتصحيح عامل القدرة وظاهرة الرنين . وقد تم استخدام المصفوفات والمحددات في معالجة طريقتي تيار الشبكة وجهد العقدة في تحليل الدوائر بصورة مركزة .

وقد طبقت أيضاً طرق المصفوفات في استنتاج تحويلات $\Delta - Y$ ونظريات الشبكات الكهربائية مثل نظريتي التراكب ، والتبادل . كما تم توضيح الدوائر المترابطة ذاتياً ، وكذلك الدوائر المتعددة الأطوار لجميع الأنواع وبصفة خاصة على دائرة الفرع الواحد المكافئة ذات التطبيقات الهامة . وقد عولجت متسلسلات فورير للدوال ذات النسب المثلثية والأسية معاً بغرض توضيح تحويل معاملات إحداها إلى معاملات الأخرى لتحديد العلاقة بينهما . كما تم تناول التيارات المستمرة والمترددة العابرة بأستخدام المعادلات التفاضلية التقليدية ، ويمكن أن يسبق هذا الموضوع الترميز المطاور الوارد في الفصل الخامس ، وبالنسبة لذوى المستوى الخاص في الرياضيات فإننا نوصي بأن يسبق هذا موضوع الترميز المطاور الوارد في الفصل الخامس .

وقد أدخلت طريقة تحويل لابلاس وطبقت على عديد من المسائل التي تم علاجها بالمعادلات التفاضلية في الفصل السادس عشر مما يسمح بإجراء مقارنة بين الطريقتين وتأكيد النقاط القوية في طريقة لابلاس .

وأنتهز هذه المناسبة كي أعبر عن شكري إلى هيئة مؤسسة شوم للنشر خاصة السيد نيقولا ميراكابللو ، لما أبدوه من اقتراحات بناءة وتعاون صادق ، كما أوجه شكري الخالص إلى زوجتي نينا لمعاونتها وتشجيعها المستمر لإنجاز هذه المحاولة .

جامعة أكرون

٢١ أغسطس ١٩٦٥

جوزيف أ. آدمستر

مقدمة الطبعة العربية

يؤكد تاريخ العلوم أن الحضارة الحديثة تدّين بازدهارها أساساً للحضارة العربية الإسلامية بما نقلت عنها من أصول العلم وتفرعاته . كما أن الأمة العربية تواجه اليوم تحدياً بأن تطوع لغتها لتشمل وتستوعب كل النظريات والاكتشافات سريعة التطور والتجدد ، مما يساعدها على استعادة مركزها الذي تخلفت عنه زمناً طويلاً .

ولا شك أن المكتبة العربية تفتقر كثيراً إلى الكتب العلمية في مختلف فروع العلم النظرية والتطبيقية والتكنولوجية ، كما أن الدراسة في جامعاتنا العربية لازالت في أمس الحاجة إلى وجود العديد من المراجع المكتوبة باللغة العربية في تخصصات هذه العلوم . والعمل على سد هذا النقص يسهم إلى حد كبير في إعداد الأجيال التي نريد لها أن تبني صرح النهضة والحضارة على أسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم .

ومن هذا المنطلق ، استهلت دار ماكجروهيل للنشر McGraw-Hill Book Company نشاطها بالشروع في إصدار الطبعة العربية من سلسلة شوم Schaum Series التي لقيت في طبعها الأصلية نجاحاً لامثيل له . وهناك فكرة أساسية بسيطة تكن وراء سلسلة ملخصات شوم Schaum Outline Series مؤداها أن كل عنوان من عناوينها يتناول رقعة خاصة بموضوع معين حدد تحديداً جيداً ، مثل نظرية الاحتمالات ، أو حساب التفاضل والتكامل ، أو الإحصاء ، أو الدوائر الكهربائية ، فيقدم عرضاً تمهيدياً للنظرية الأساسية لهذه الموضوعات . وكتب شوم تصلح ككتب مدرسية ، أو مذكرات تكميلية معينة ، أو ككتب للمطالعة بقصد التقويم والمراجعة ، أو باعتبارها مراجع يحال إليها .

المحتويات

صفحة

الفصل الأول : تعريفات وبارامترات (متغيرات) الدائرة

وحدات أساسية . الوحدات المشتقة . الشحنة . فرق الجهد . القدرة . الطاقة . مقاوم ، ملف ،
مكثف . مقاومة . حث . سعة . قانونا كيرشوف ٢٠ - ١

الفصل الثاني : القيم المتوسطة والفعالة

الأشكال الموجبة . القيمة المتوسطة . جذر متوسط مربع القيمة أو القيمة الفعالة . ج م م قيمة
حدود من الجيب وجيب التمام . عامل الشكل ٣١ - ٢١

الفصل الثالث : التيار والجهد الجيبيان

مقدمة . التيارات الجيبية . الجهود الجيبية . المعاوقة . راوية الطور . دائرة متصلة على التوالي
والتوازي ٤٧ - ٣٢

الفصل الرابع : الأعداد المركبة

الأعداد الحقيقية . الأعداد التخيلية . الأعداد المركبة . أشكال أخرى للأعداد المركبة . مترافق عدد
مركب . مجموع وفرق الأعداد المركبة . ضرب الأعداد المركبة . قسمة الأعداد المركبة . جذور
الأعداد المركبة . لوغاريتم العدد المركب . استخدام المسطرة الحاسبة في الأعداد المركبة . عمليات
باستخدام الجيب والظل الممتد ٦٠ - ٤٨

الفصل الخامس : المعاوقة المركبة والترميز المطاور

مقدمة . المعاوقة المركبة . الترميز المطاور ٧٦ - ٦١

الفصل السادس : الدوائر المتصلة على التوالي والتوازي

مقدمة . دوائر متصلة على التوالي . دوائر متصلة على التوازي . دائرة بفرعين متصلين على
التوازي . مساحة الدائرة . تحويل ZY ٩٥ - ٧٧

الفصل السابع : القدرة وتصحيح عامل القدرة

مقدمة . القدر في الحالة الجيبية المستقرة . متوسط القدرة . القدرة الظاهرية . القدرة المفاعلية .
مثلث القدرة . القدرة المركبة . تصحيح عامل القدرة ٩٦ - ١١٦

الفصل الثامن : رنين التوالى والتوازي

مقدمة . رنين التوالى . رنين التوازي . دائرة RLC نقية . رنين التوازي ، دائرة من فرعين .
عامل الجودة . أشكال المحل الهندسى . أشكال المحل الهندسى للتيار ١١٧ - ١٤٢

الفصل التاسع : تحليل الشبكات الكهربائية بطريقة تيار الشبكة

مقدمة . تيارات الشبكة . اختيار تيارات الشبكة . إيجاد العدد اللازم من تيارات الشبكة .
معادلات الشبكة عن طريق الفحص . مصفوفات . جمع المصفوفات . ضرب المصفوفات .
التعاكس . محددة المصفوفة المربعة . المحددات والعوامل المشتركة . قيمة المحددة . خواص
المحددات . حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات . قاعدة كرامر . طريقة المصفوفة في تحليل
الدوائر . نقطة المعاوقة المحركة . معاوقة الانتقال ١٤٣ - ١٦٩

الفصل العاشر : تحليل الشبكات بطريقة جهد العقدة

مقدمة . جهود العقدة . عدد معادلات جهد العقدة . معادلات العقدة عن طريق الفحص . المساحة
المحركة . مساحة الانتقال ١٧٠ - ١٩١

الفصل الحادى عشر : نظريتا ثفنين ونورتن

مقدمة . نظرية ثفنين . نظرية نورتن . دائرتى ثفنين ونورتن المكافئتين ١٩٢ - ٢١٢

الفصل الثانى عشر : نظريات الشبكات الكهربائية

مقدمة . تحويلات نجمة - دلتا . نظرية التراكب . نظرية التبادل . نظرية المعادلة . نظريات
انتقال أكبر قدرة ٢١٣ - ٢٤٣

الفصل الثالث عشر : الحث التبادلى

مقدمة - الحث الذاتى . الحث التبادلى . معامل الربط . تحليل الدوائر المترابطة . التيار الطبيعى .
قاعدة النقطة للملفات المترابطة . الدوائر المكافئة المرتبطة توصيلياً ٢٤٤ - ٢٦٤

الفصل الرابع عشر : الانظمة المتعددة الأطوار

مقدمة . النظام ذو الطورين ، نظام الأطوار الثلاثة . جهد . ام الأطوار الثلاثة . اتزان أحمال
نظام الأطوار الثلاثة . الدائرة ذات الفرع الواحد المكافئة للأحمال المتزنة . الأحمال غير
المتزنة المتصلة على شكل دلتا . الأحمال غير المتزنة على شكل نجمة ، أربعة أسلاك . الأحمال غير
المتزنة على شكل نجمة ، ثلاثة أسلاك . طريقة إزاحة نقطة التعادل لأحمال غير متزنة على شكل نجمة
ثلاثة أسلاك . قدرة أحمال متزنة ذات ثلاثة أطوار . الواتيمتر والأحمال على شكل نجمة ، أربعة
أسلاك . الطريقة باستخدام اثنين من الواتيمتر . تطبيق طريقة اثنين من الواتيمتر على أحمال متزنة ٢٩٧ - ٢٩٥

الفصل الخامس عشر : طريقة فورير لتحليل الشكل الموجي

مقدمة . متسلسلة فورير المثلثية . متسلسلة فورير الأساسية . تماثل الشكل الموجي . الطيف
الخطي . تركيب الشكل الموجي . القدرة والقيمة انفعالة . تطبيقات على تحليل الدوائر ... ٢٩٨ - ٢٢٧

الفصل السادس عشر : الحالات العابرة للدوائر

مقدمة . الحالات العابرة للتيار المستمر . دائرة RL في حالة عابرة . دائرة RC في الحالة
العابرة . الشحنة في حالة عابرة للدائرة RC . دائرة RLC في حالة عابرة . التيارات المترددة
العابرة . التيارات الجيبية العابرة في دائرة RL . التيارات الجيبية العابرة في دائرة RC .
التيارات العابرة الجيبية في دائرة RLC . تيارات الانتقال الشبكييتين فرعيتين ... ٣٢٨ - ٣٦٢

الفصل السابع عشر : دراسة الظواهر العابرة بطريقة تحويل لابلاس

مقدمة . تحويل لابلاس . تطبيقات على تحويل الدوائر . طرق الفك . نظرية القيمة الابتدائية .
نظرية القيمة النهائية . دوائر نطاق S ... ٣٩٣ - ٣٩٢

معجم المصطلحات ... ٣٩٣ - ٤٠٠

فهرس أبجدي ... ٤٠١ - ٤٠٧

الفصل الأول

تعريفات وبارامترات (متغيرات) الدائرة

وحدات أساسية

يستخدم النظام المتري الدولي الآن (SI) في الهندسة الكهربائية . والوحدات الميكانيكية الأساسية في هذا النظام هي المتر (m) ، والطول ، والكيلوجرام (kg) للكتلة ، والثانية (s) للزمن . أما الوحدات الكهربائية الأساسية فهي الأمبير (A) للتيار الكهربى ، الذى يعرف بدوره بدلالة القوة (F) لكل وحدة طول بين موصلين يحملان تيارا بالعلاقة .

$$F = k \frac{II'}{d}$$

حيث d المسافة بين موصلين مستقيمين متوازيين لانهايين ، I و I' التياران و k ثابت الأبعاد الذى قيمته في النظام المتري هي $\mu_0/2\pi$ حيث $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 0.4\pi \mu\text{H/m}$. وتعرف μ_0 بمعامل النفاذية في الفراغ ومن الوجه العملية هو نفسه معامل نفاذية الهواء . وعموما فإن $F = \mu II'/2\pi d$ newton / meter حيث $\mu = \mu_r \mu_0$ و μ_r هو ثابت بدون أبعاد يسمى معامل النفاذية النسبى للمادة بين الموصلين و μ هو معامل النفاذية للمادة و μ_0 معامل نفاذية الفضاء الحر .

وتعرف وحدة التيار ، الأمبير ، على أنها قيمة التيار الذى لو مر في موصلين مستقيمين متوازيين لانهايين موضوعين في الفراغ ، لكانت القوة بين الموصلين $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$. وأجزاء الأمبير هي

$$1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ أمبير}$$

$$1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ أمبير}$$

ولقد اتفق على أن يكون الاتجاه الموجب للتيار عكس اتجاه حركة الالكترونات . أنظر الشكل ١ - ١ .



← حركة الالكترونات
→ اتجاه التيار

شكل ١ - ١

الوحدات المشتقة

الشحنة q

ينساب التيار الكهربى في موصل عندما تنتقل شحنة q من نقطة إلى أخرى في نفس الموصل . والتيار هو معدل سريان الشحنة بالنسبة للزمن أى أن

$$i \text{ (amperes)} = \frac{dq \text{ (coulombs)}}{dt \text{ (seconds)}}$$

وبعض المؤلفين يعتبرون الكولوم (C) هو الوحدة الكهربائية الأساسية ، وفي هذه الحالة فإن القوة (F) بين شحنتين q و q' متمركزتين في نقطتين يعبر عنها بقانون كولوم

$$F = k \frac{qq'}{d^2}$$

حيث k ثابت أبعاد ، قيمته في النظام المترى هي $1/4\pi\epsilon_0$ حيث $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$ 8.854 pF/m .

عندما لا يكون الوسط المحيط فراغاً ، فإن القوة الناتجة عن وجود شحنات في "وسط" تتقل من محصلة القوة بين الشحنات الحرة المعمورة في الوسط . وتعطى القوة النهائية الآن بالمعادلة $F = qq'/4\pi\epsilon d^2 \text{ newtons}$. وللوهاء فإن ϵ يريد قلباً عن ϵ_0 ويؤخذ لمعظم الأغراض مساوياً لـ ϵ_0 وسواءً لأخرى فإن ϵ تعطى بـ $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ حيث ϵ_r ثابت بدون أبعاد ويسمى السماحية النسبية للمادة التي بين الشحنات ، ويسمى ϵ سماحية المادة و ϵ_0 سماحية الفضاء الحر . وفي الفراغ فإن $\epsilon_r = 1$ و $\epsilon = \epsilon_0$.

وتعرف وحدة الشحنات coulomb على أنها قيمة الشحنة التي إذا وضعت في الفراغ على بعد متر واحد من شحنة مساوية ومماثلة لها لتنافرت معها بقوة مقدارها $1/4\pi\epsilon_0 \text{ N}$ ، وأجزاء الكولوم هي

$$1 \text{ ميكروكولوم} = 10^{-6} \text{ كولوم} \quad 1 \mu\text{C} =$$

$$1 \text{ بيكوكولوم} = 10^{-12} \text{ كولوم} \quad 1 \text{ pC} =$$

إن شحنة الإلكترون ($-e$) أو البروتون ($+e$) هي $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ coulombs}$.

فوق الجهد v

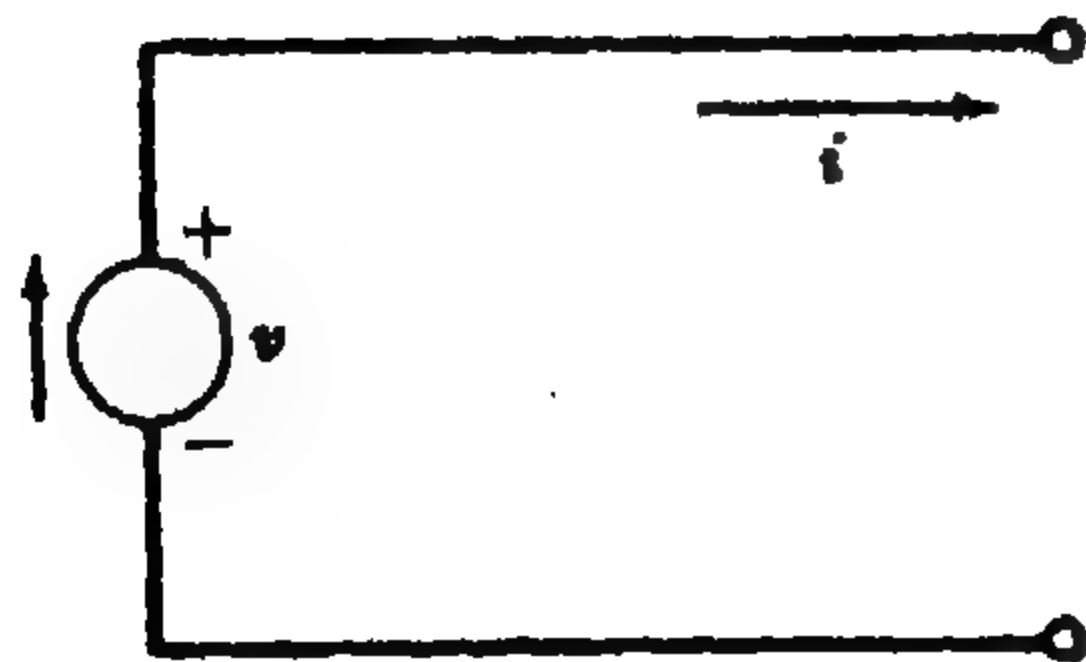
يقاس فرق الجهد v بين نقطتين بمقدار الشغل اللازم بذله لنقل وحدة الشحنات من نقطة إلى أخرى . والفولت هو فرق الجهد بين نقطتين عندما يكون الشغل المبذول في تحريك شحنة مقدارها كولوم واحد هو جول واحد :

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule/coulomb}$$

إذا كان فرق الجهد بين نقطتين في دائرة خارجية هو v ، فإن شحنة q تبذل شغلا مقداره qv عندما تنتقل من النقطة التي جهدها أعلى إلى النقطة التي جهدها أقل .

وأي عامل مثل بطارية أو مولد له قوة دافعة كهربية (ق.د.ك) إذا بذل شغلا على الشحنة التي تتحرك خلاله ، والشحنة تكتسب طاقة كهربية عندما تتحرك من الجانب الأقل إلى الأعلى جهداً . والقوة الدافعة الكهربائية تقاس بفرق الجهد بين طرفي المولد عندما لا يرسل تياراً .

القدرة p



القدرة الكهربائية p هي حاصل ضرب فرق الجهد المؤثر v في التيار الناتج i .

$$p (\text{watts}) = v (\text{volts}) \cdot i (\text{amperes})$$

والتيار الموجب (بالتمريف) يكون في اتجاه السهم عند مصدر الجهد وهو يتحرك المصدر عند الطرف الموجب كما في الشكل ١ - ٢ . وتكون قيمة p موجبة عندما يعطى المصدر طاقة للدائرة .

شكل ١ - ٢

إذا كانت القدرة p دالة دورية في الزمن t وزمن دورتها T ، فإن متوسط القدرة يعطى بـ

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$$

الطاقة W

بما أن القدرة p هي معدل تغيير الطاقة المنتقلة بالنسبة للزمن ، فإن

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p dt \quad \cdot \quad p = \frac{dw}{dt}$$

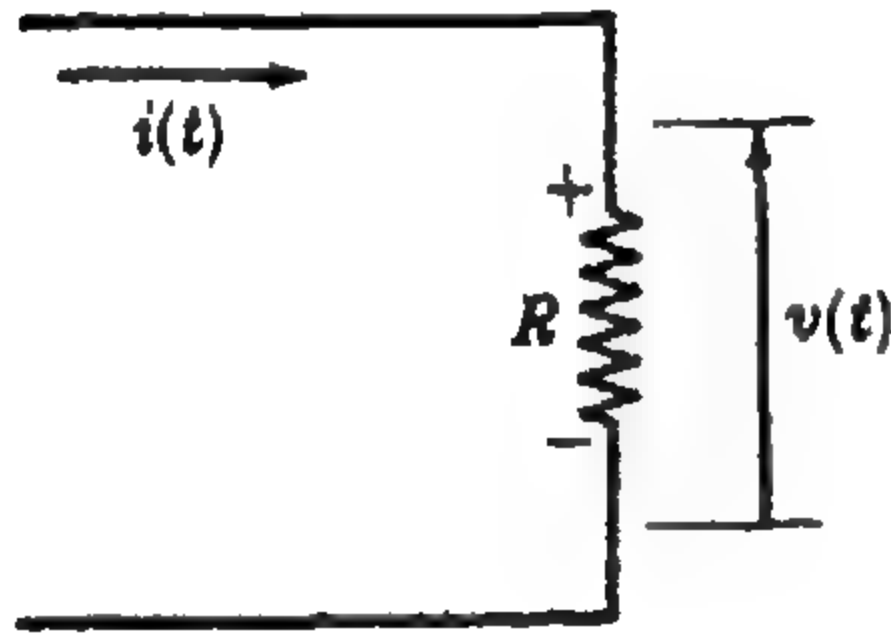
حيث W الطاقة المنتقلة خلال الفترة الزمنية .

مقاوم ، ملف ، مكثف

عندما تعطى طاقة كهربائية لعنصر دائرة ، فإنه يستجيب بطريقة أو أكثر من الطرق الثلاث الآتية : إذا استهلكت الطاقة ، فإن عنصر الدائرة مقاوم نقي . إذا اختزنت الطاقة في مجال مغناطيسي ، فإن العنصر ملف نقي . أما إذا اختزنت الطاقة في مجال كهربائي ، فإن العنصر مكثف نقي . وأجهزة الدوائر العملية تتميز بأكثر من طريقة وربما الثلاثة في وقت واحد ولكن أحدهما ربما يكون سائدا . وربما يصمم الملف على أن يكون له حث كبير ، ولكن السلك الذي يلف منه الملف له بعض المقاومة ، ولذلك فإنه يوجد للملف خاصيتان .

مقاومة R

يتناسب فرق الجهد $v(t)$ عبر طرفي مقاومة نقية R تناسباً طردياً مع التيار المار $i(t)$ ، ويعرف ثابت التناسب R بأنه مقاومة المقاوم ويعبر عنه بـ volts/ampere أو ohms .



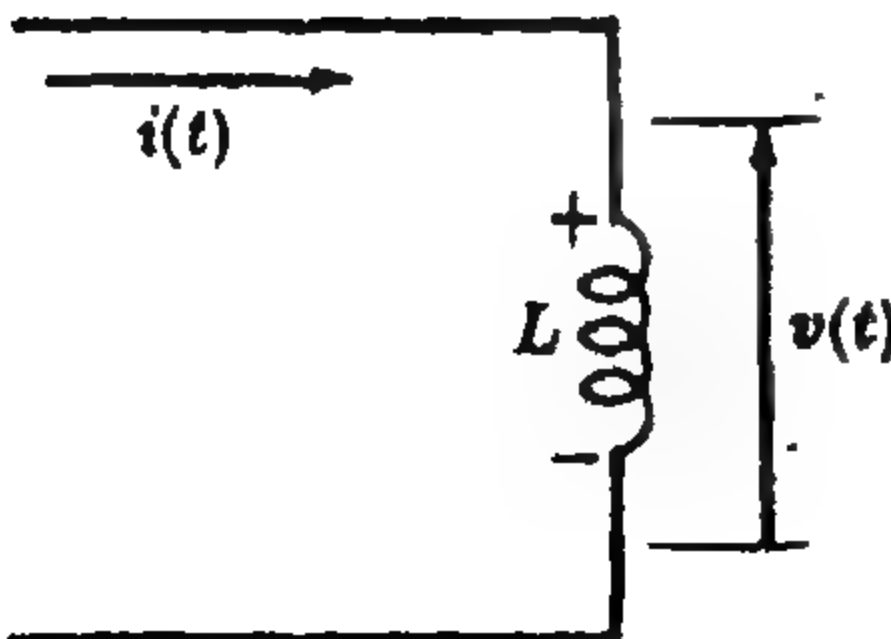
شكل ١ - ٣

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \quad \text{و} \quad v(t) = R i(t)$$

لا توجد أي شروط على $v(t)$ أو $i(t)$ ، فربما يكونان ثابتين مع الزمن ، كما هو الحال في حالة دوائر التيار المستمر ، أو ربما يتبعان دالة جيبية أو جيب تمام . . . الخ .

الحروف الصغرى (v, i, p) تبنى دوال في الزمن ، أما الحروف الكبيرة (V, I, P) فتبنى كيات ثابتة ، والقيمة أو القيمة العظمى تميز برمز سفلي (V_m, I_m, P_m) .

حث L

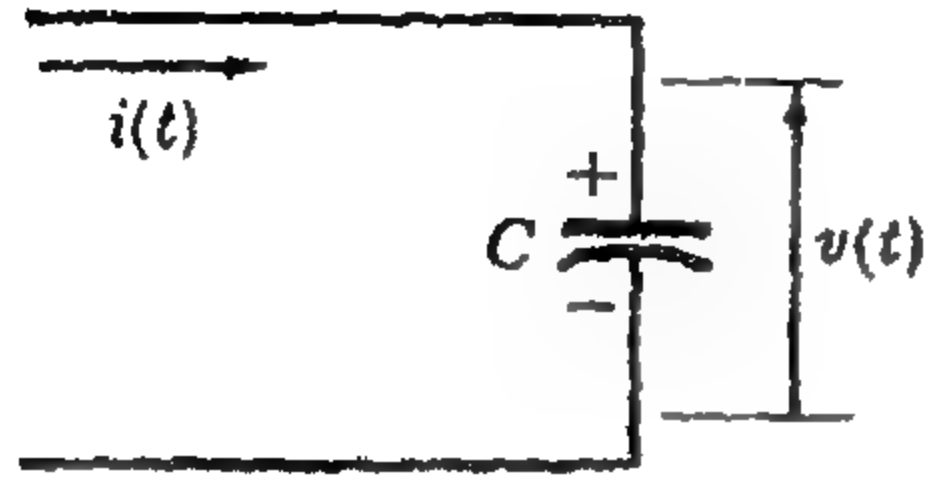


شكل ١ - ٤

عندما يتغير التيار في دائرة ، فإنه يتغير الفيض المغناطيسي المار خلال نفس الدائرة وهذا التغيير في الفيض ينتج عنه ق.د.ك . مستحثه في الدائرة . وتناسب ق.د.ك الناتجة بالحث مع معدل تغيير التيار بالنسبة للزمن وذلك عند ثبوت النفاذية . ويسمى ثابت التناسب معامل الحث الذاتي أو حث الدائرة .

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt \quad \text{و} \quad v(t) = L \frac{di}{dt}$$

وعندما تكون v بـ volt و di/dt بـ amperes/sec فإن L تكون بـ volt seconds/ampere أو henrys .
ويكون الحث الذاتي لدائرة واحد هنرى (henry) إذا كانت ق.د.ك المستحدثة في الدائرة واحد فولت (volt) عندما يتغير التيار بمعدل واحد أمبير / ثانية (1 ampere/second) .



سعة C

يتناسب فرق الجهد v عبر طرفي مكثف مع الشحنة على المكثف . ويسمى ثابت التناسب C بسعة المكثف .

شكل ١ - ٥

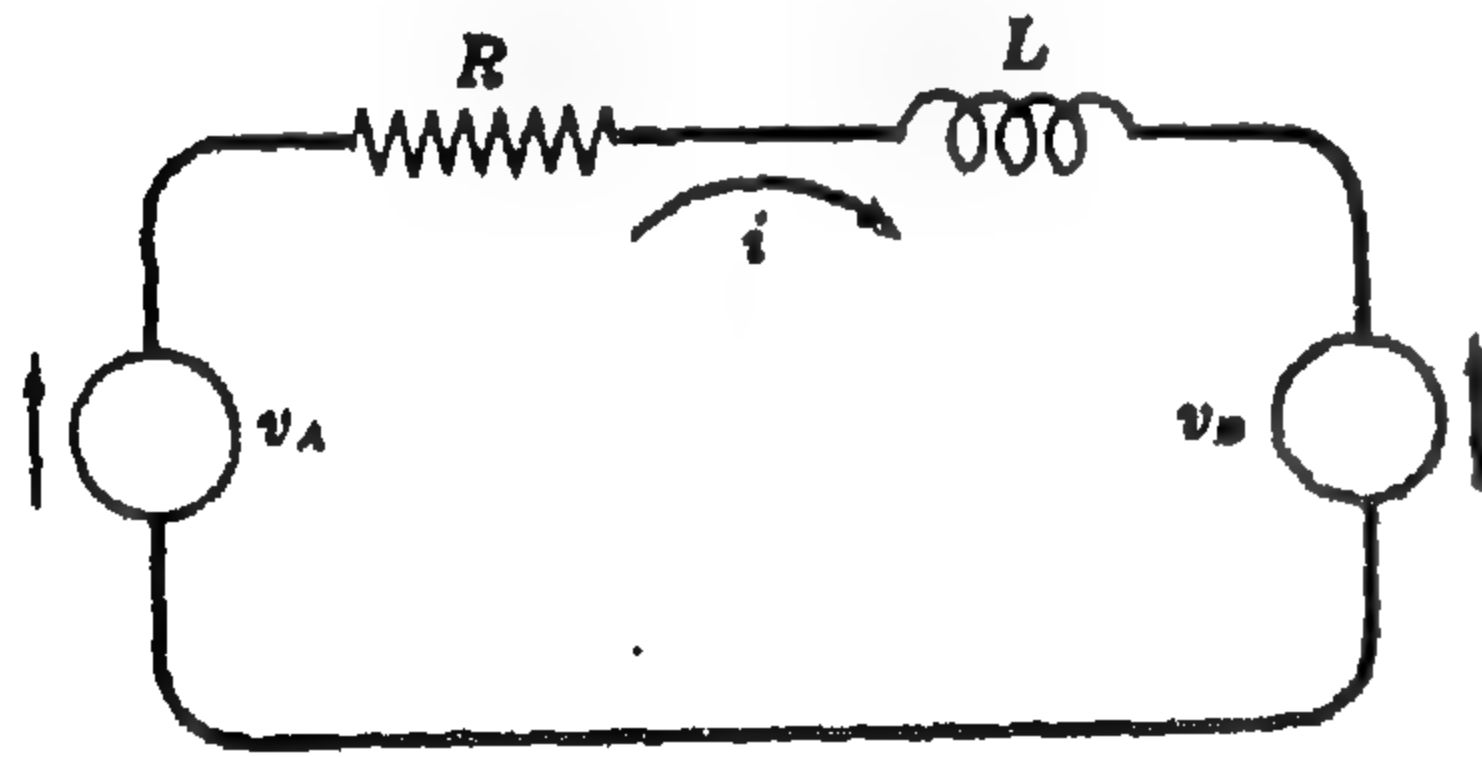
$$q(t) = C v(t), \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}, \quad v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$$

وعندما تكون q بـ coulombs و v بـ volts فإن C تكون بـ coulombs/volt أو farads . وتكون سعة المكثف واحد فاراد (farad) إذا احتاج لشحنة مقدارها واحد كولوم coulomb لرفع فرق الجهد بين طرفيه واحد فولت volt . وأجزاء الفاراد farad هي :

$$1 \mu F = 1 \text{ microfarad} = 10^{-6} F \text{ and } 1 \text{ pF} = 1 \text{ picofarad} = 10^{-12} F$$

قانونا كيرثسوف :

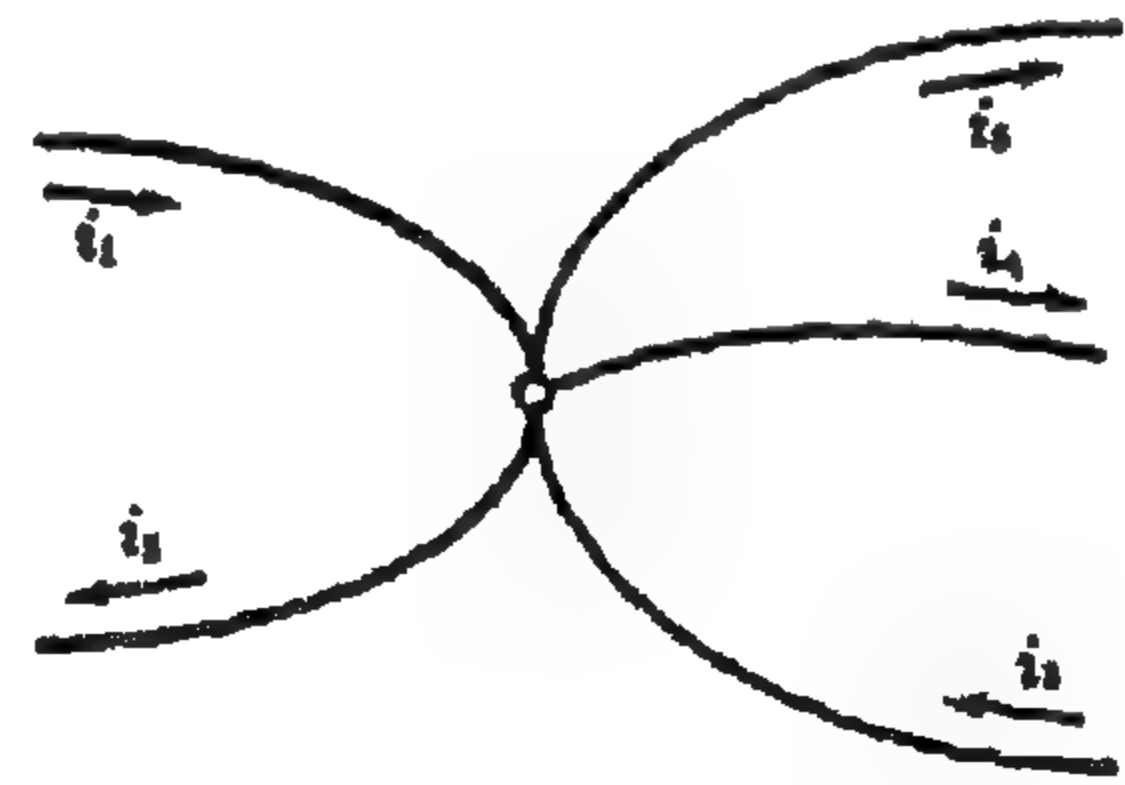
١ - مجموع التيارات الداخلة إلى نقطة اتصال يساوى مجموع التيارات الخارجة منها . فإذا اعتبرنا التيارات الداخلة إلى نقطة موجبة والتيارات الخارجة من نفس النقطة سالبة ، فإن هذا القانون ينص على أن المجموع الجبرى لجميع التيارات المتلانية في نقطة مشتركة يساوى صفر ١ .



مجموع الارتفاع في الجهد = مجموع الهبوط في الجهد

$$v_A - v_B = Ri + L(di/dt) \quad \text{أو} \quad v_A - v_B - Ri - L(di/dt) = 0$$

شكل ١ - ٧



مجموع التيارات الداخلة = مجموع التيارات الخارجة

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4 \quad \text{أو} \quad i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0$$

شكل ١ - ٦

٢ - مجموع الارتفاع في الجهد حول أى دائرة مغلقة يساوى مجموع الهبوط في الجهد في نفس الدائرة . وبعبارة أخرى ، المجموع الجبرى لفروق الجهد حول دائرة مغلقة يساوى صفرا . وفي حالة وجود عدة مصادر غير متفقة في الاتجاه ، فإن جهد المصدر يعتبر موجبا إذا كان في الاتجاه المفروض للتيار .

استجابة دائرة بعنصر واحد

| العنصر | فرق جهد على العنصر | التيار المار في العنصر |
|------------|--------------------------------|--------------------------------|
| مقاومة R | $v(t) = R i(t)$ | $i(t) = \frac{v(t)}{R}$ |
| حث L | $v(t) = L \frac{di}{dt}$ | $i(t) = \frac{1}{L} \int v dt$ |
| سعة C | $v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$ | $i(t) = C \frac{dv}{dt}$ |

الوحدات في النظام المنزى الدولي (SI)

| الكمية | الوحدة | الكمية | الوحدة |
|-------------|---------------|-------------|--------------|
| طول l | متر m | شحنة Q, q | كولوم C |
| كتلة m | كيلوجرام kg | جهد V, v | فولت V |
| زمن t | ثانية s | تيار I, i | أمبير A |
| قوة F, f | نيوتن N | مقاومة R | أوم Ω |
| طاقة W, w | جول J | حث L | هنرى H |
| قدرة P, p | وات W | سعة C | فاراد F |

مسائل محلولة

١ - ١ في الدائرة الموضحة في الشكل ٨-١ ، يؤثر فرق جهد ثابت : $V = 45 \text{ volts}$. أوجد التيار والهبوط في الجهد على كل مقاوم . والقدرة في كل مقاوم .

مجموع الارتفاع في الجهد يساوى مجموع الهبوط في الجهد حول أى مسار مغلق ، إذن

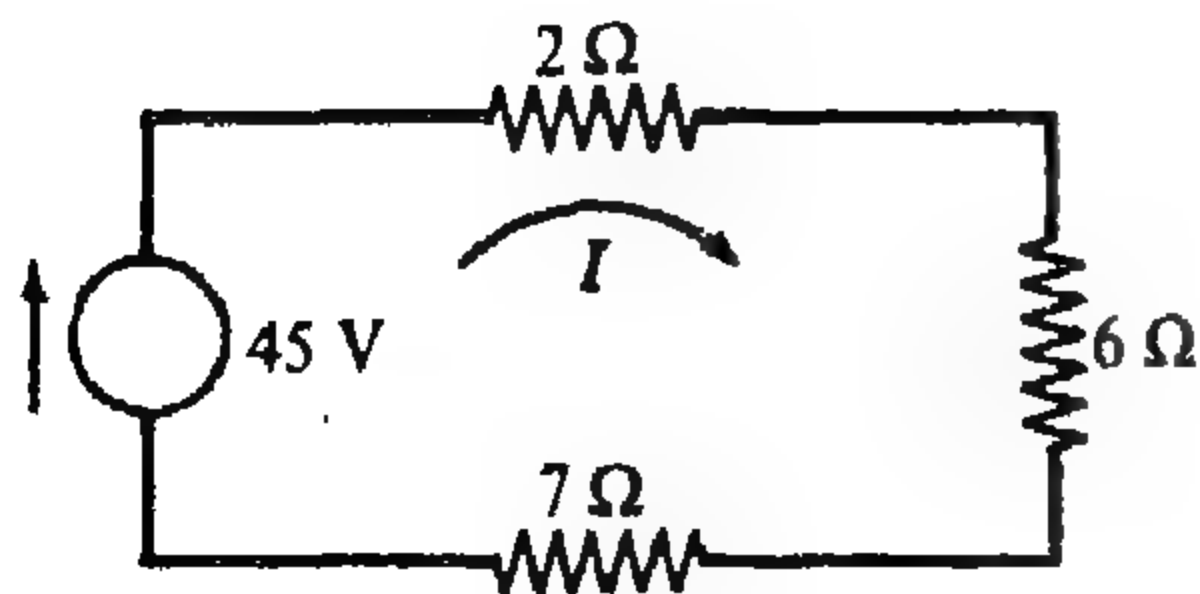
$$V = I(2) + I(6) + I(7), \quad 45 = 15I, \quad I = 3 \text{ A}$$

الهبوط في الجهد على المقاوم 2Ω هو $V_2 = IR_2 = 3(2) = 6 \text{ V}$

وبالمثل $V_6 = 3(6) = 18 \text{ V}$ و $V_7 = 21 \text{ V}$

القدرة في المقاوم 2Ω هي $P_2 = V_2 I = 6(3) = 18 \text{ W}$

أو $P_6 = V_6 I = 54 \text{ W}$ وبالمثل $P_7 = I^2 R_7 = 3^2(7) = 63 \text{ W}$

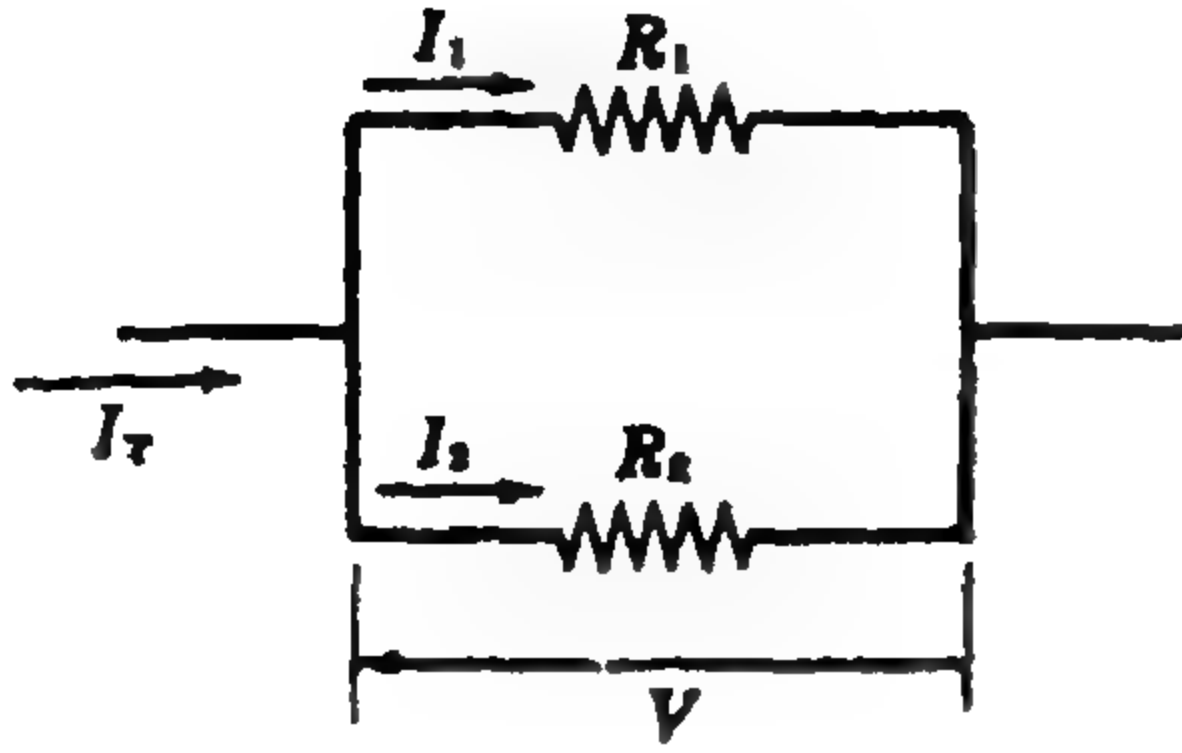


شكل ٨-١

٢-١ ينقسم تيار I_T بين فرعين متوازيين مقاومتها R_1 و R_2 على الترتيب ، كما هو موضح في الشكل ١-٩ .
أوجد صيغة لتيارين I_1 و I_2 المارين في الفرعين المتوازيين .

حيث أن الهبوط في فرق الجهد على الفرعين متساو ، أى أن

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad \text{إذن}$$



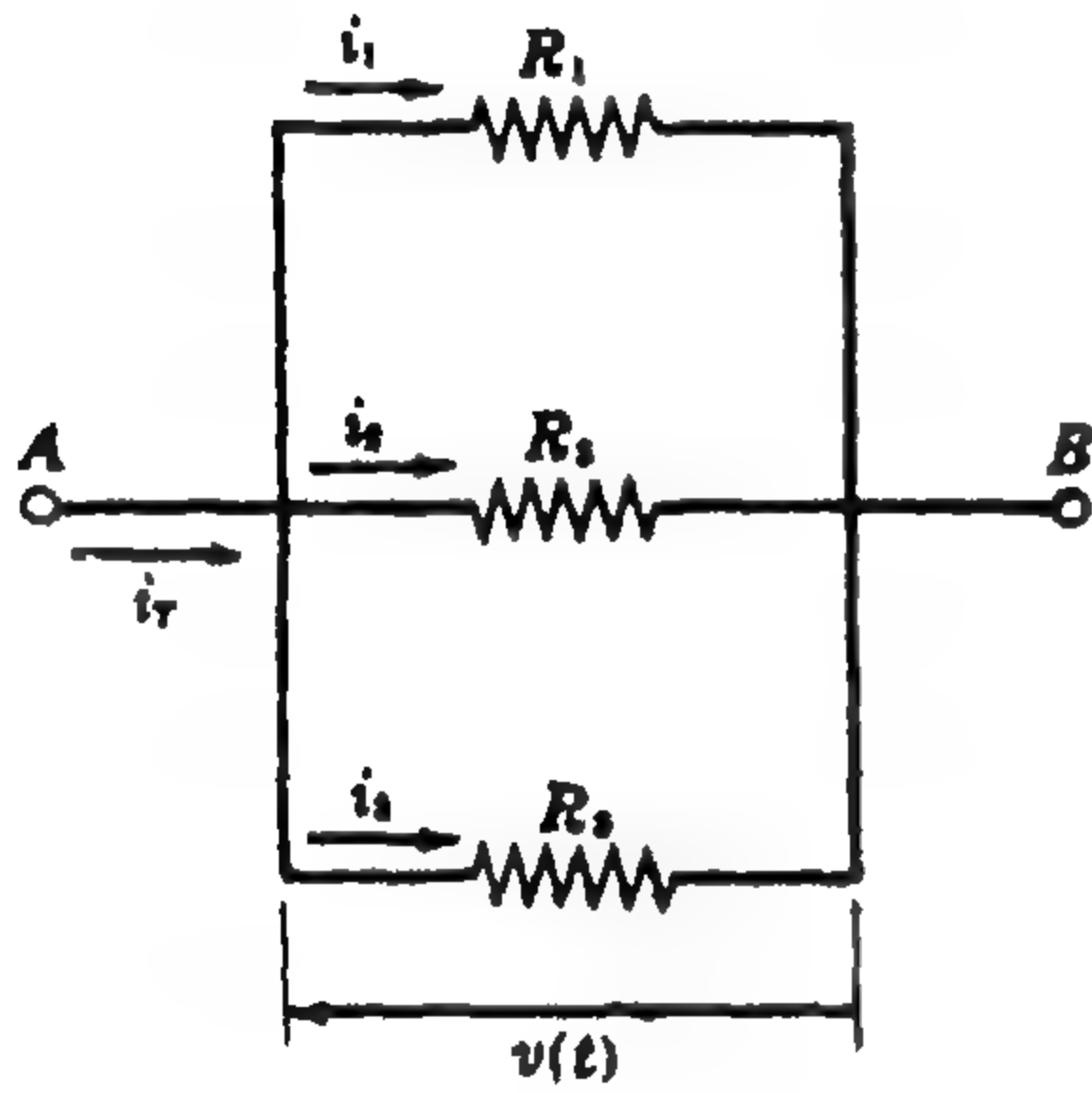
شكل ١-٩

$$I_T = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$= I_1 R_1 \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \right) = I_1 \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2} \right)$$

ومنها نجد $I_1 = I_T \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$ وبالمثل $I_2 = I_T \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$

٣-١ ثلاث مقاومات R_1 و R_2 و R_3 متصلة على التوازي كما هو موضح في الشكل ١-١٠ . أوجد صيغة للمقاومة المكافئة R_e للشبكة .



شكل ١-١٠

نفرض جهد A بالنسبة لـ B هو $v(t)$ وأن التيارات المارة في R_1 و R_2 و R_3 هي $i_1(t)$ و $i_2(t)$ و $i_3(t)$ على الترتيب . إذن التيار المار في R_e يجب أن يكون التيار الكلي $I_T(t)$.

$$v(t) = R_1 i_1(t) = R_2 i_2(t) = R_3 i_3(t) = R_e i_T(t)$$

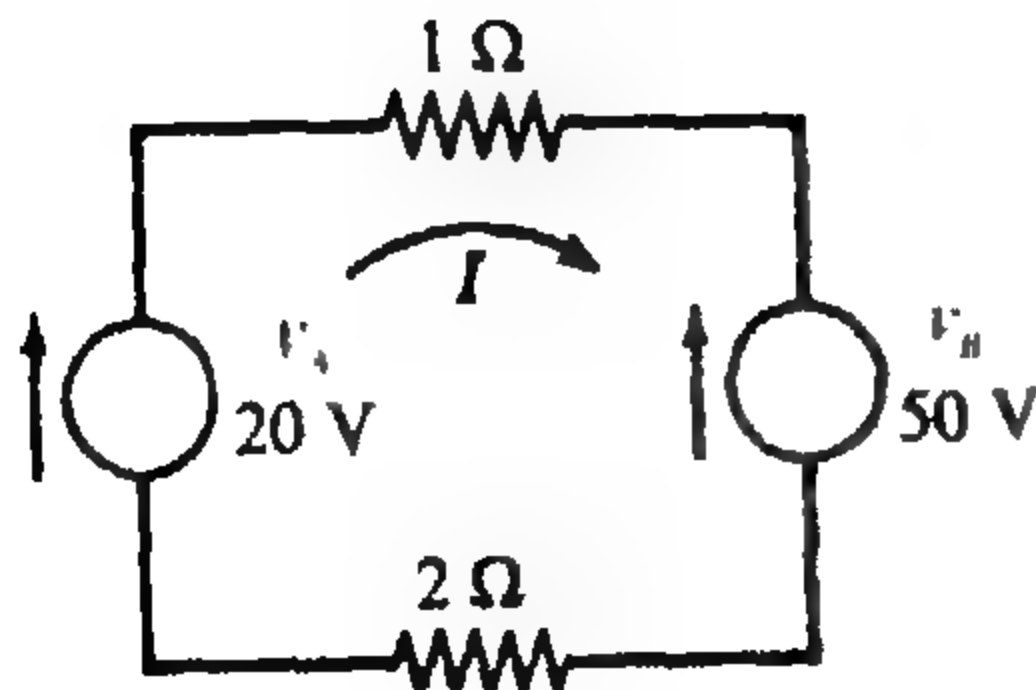
$$\text{وأن } i_T(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$\text{أو } \frac{v(t)}{R_e} = \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} + \frac{v(t)}{R_3}$$

$$\text{أو } \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\text{ولدائرة من فرعين على التوازي نجد } \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{أو} \quad R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

٤-١ يؤثر مصدرى فرق جهد ثابتين V_A و V_B على دائرة واحدة كما هو موضح في الشكل ١-١١ . احسب القدرة التي يعطيها كل مصدر .



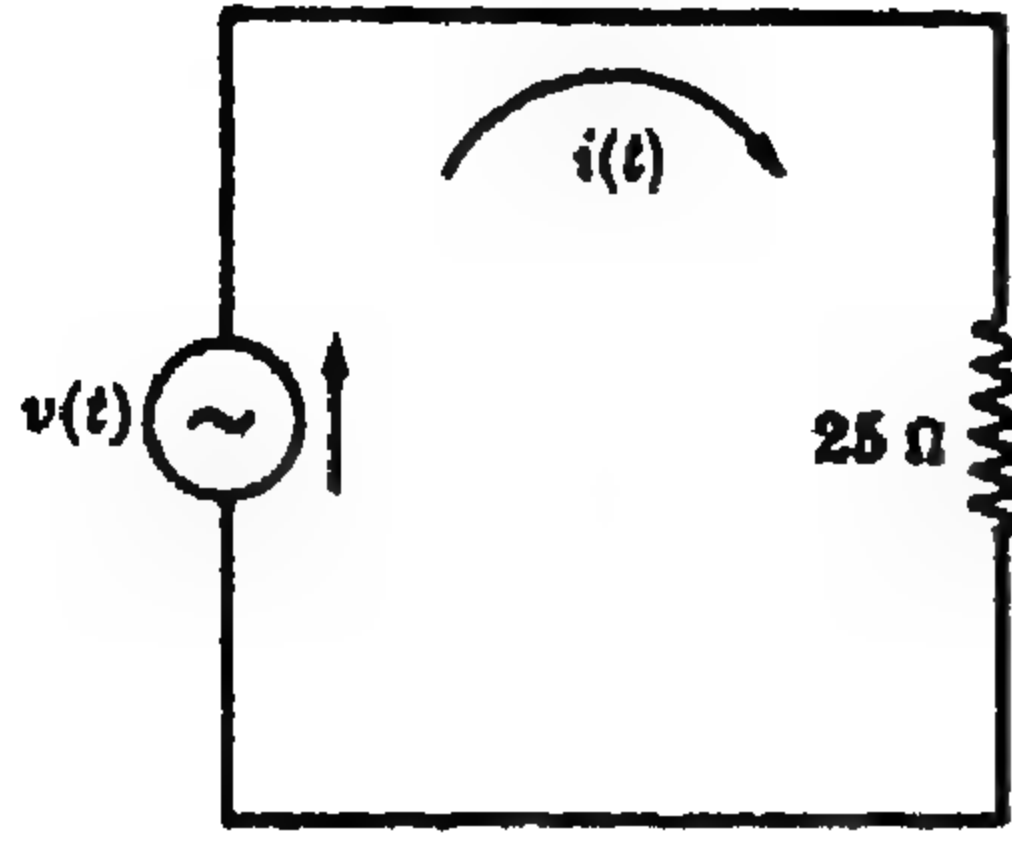
مجموع الارتفاع في الجهد حول الدائرة المغلقة يساوى مجموع الهبوط في الجهد ، إذن

$$20 - 50 = I(1) + I(2), \quad I = -10 \text{ A}$$

القدرة المعطاة بالمصدر V_A تساوى $V_A I = 20(-10) = -200 \text{ W}$
القدرة المعطاة بالمصدر V_B تساوى $V_B I = 50(-10) = -500 \text{ W}$

شكل ١-١١

١-٥ في الدائرة الموضحة في الشكل ١-١٢ (أ) ، يعطى فرق الجهد بالدالة $v(t) = 150 \sin \omega t$ ، أوجد التيار $i(t)$ والدائرة المحظية $p(t)$ ومتوسط القدرة P .



شكل ١-١٢ (أ)

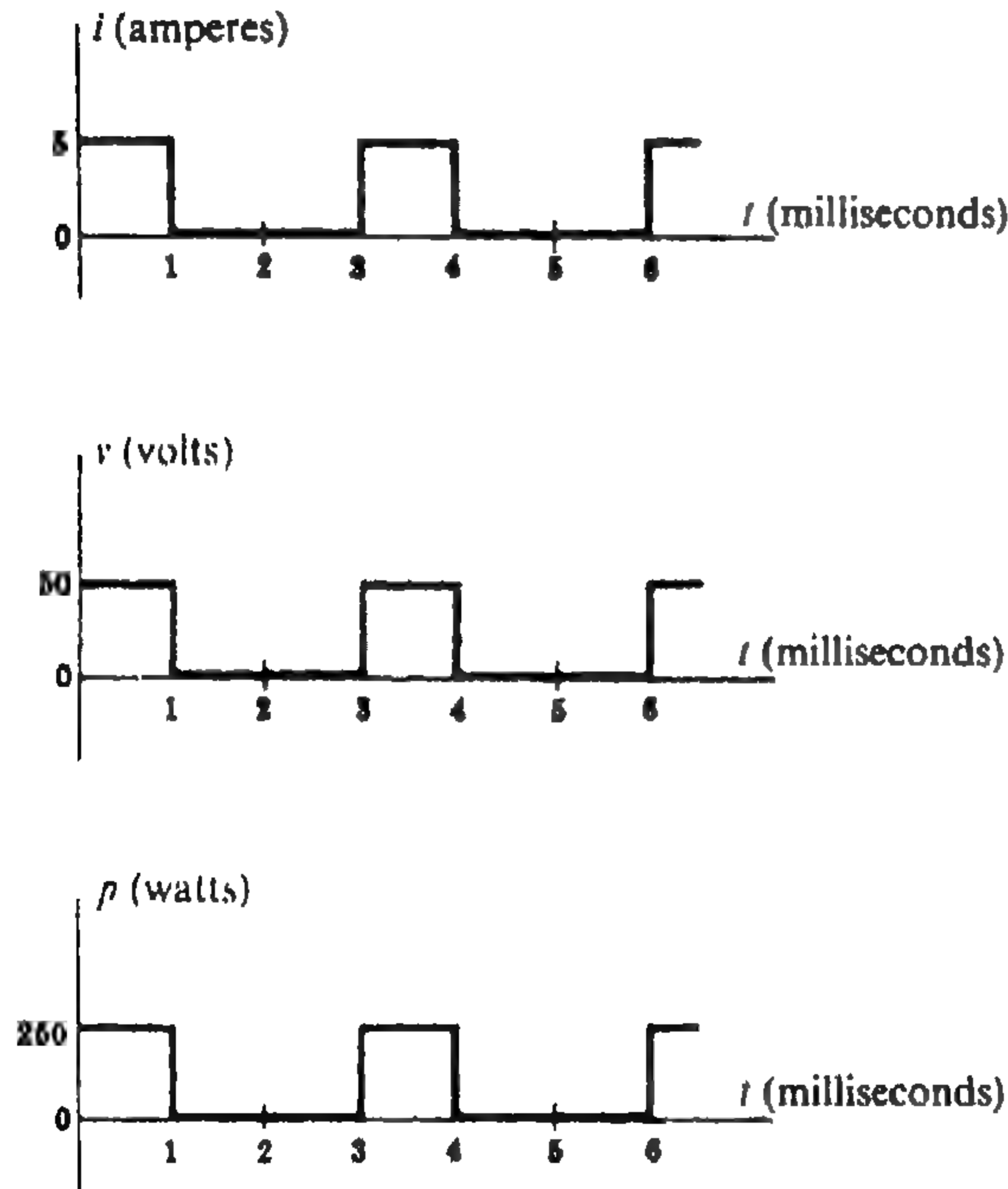
$$i(t) = \frac{1}{R} v(t) = \frac{150}{25} \sin \omega t = 6 \sin \omega t \text{ amperes}$$

$$p(t) = v(t) i(t) = (150 \sin \omega t)(6 \sin \omega t) = 900 \sin^2 \omega t \text{ watts}$$

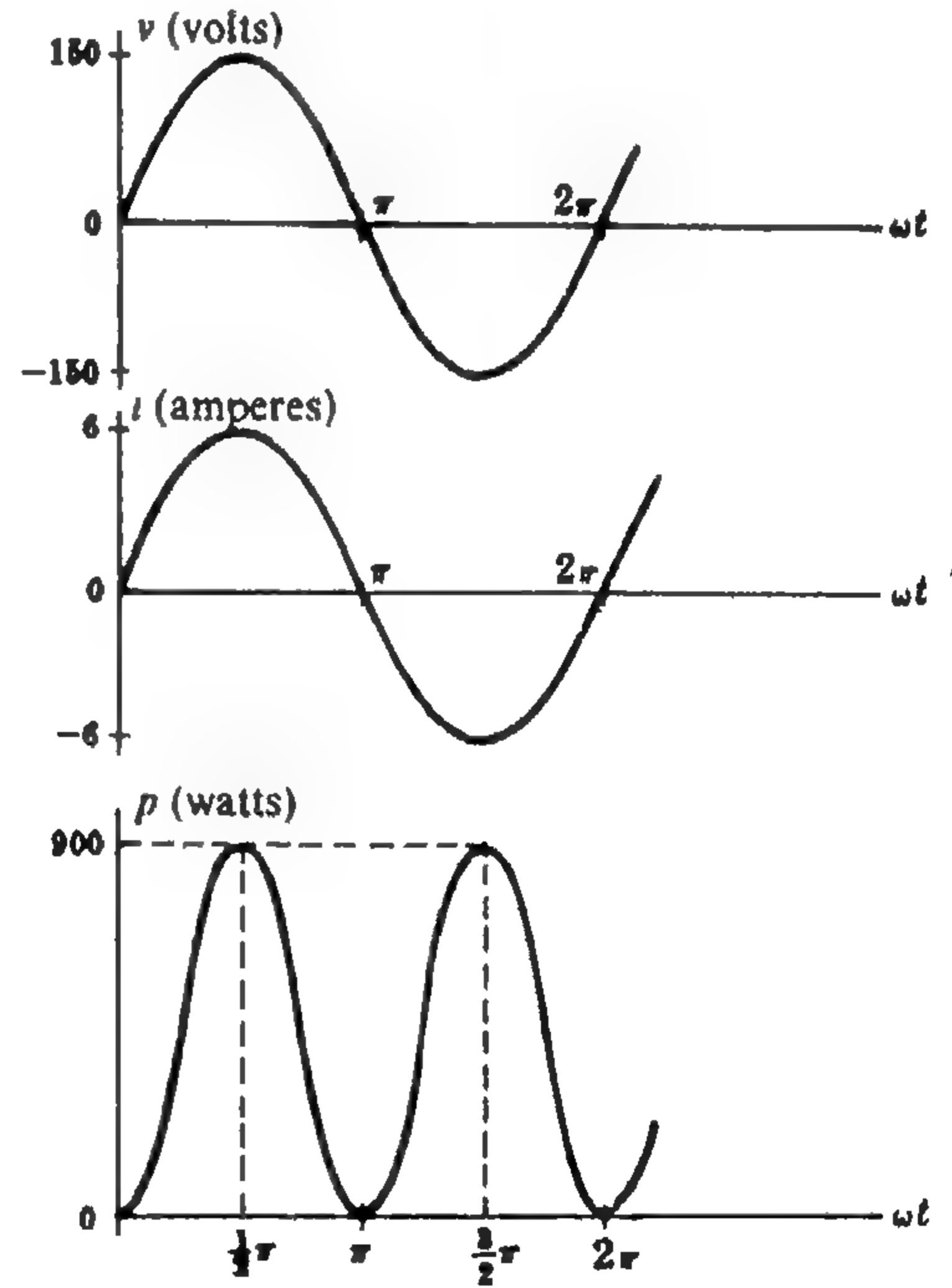
$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 900 \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{900}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) d(\omega t)$$

$$= \frac{900}{2\pi} \left[\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right]_0^{\pi} = 450 \text{ W}$$

نلاحظ أن التيار $i(t)$ يرتبط مع فرق الجهد $v(t)$ بالثابت R . ويمكن الحصول على منحني القدرة المحظية وذلك من حاصل ضرب v في i نقطة بنقطة كما هو موضح في الشكل ١-١٢ (ب) . لاحظ أن v و i إما موجبين معا أو سالبين في كل لحظة ، ولذلك فإن حاصل ضربهما لا بد وأن يكون دائماً موجبا . وهذا يتفق مع الصيغة القائلة بأنه إذا كان التيار يمر في مقاوم فإن المصدر يعطي طاقة كهربائية .



شكل ١-١٣



شكل ١-١٢ (ب)

١-٦ يمثل التيار الموضح في الشكل ١-١٣ بدالة موجية مربعة متكررة ، فإذا كان هذا التيار يؤثر على مقاوم نقي قيمته 10 ohms ، فارسم منحني الجهد $v(t)$ والقدرة $p(t)$.

بما أن فرق الجهد يتناسب طردياً مع التيار ، إذن $v(t) = R i(t)$.

وبذلك تكون أكبر قيمة لفرق الجهد هي 50 V . $R i_{\max} = 5(10)$

وبما أن القدرة المخزنة هي $p = vi$ إذن يعطى منحنى القدرة بحاصل الضرب نقطة بنقطة ، والقيمة العظمى للقدرة

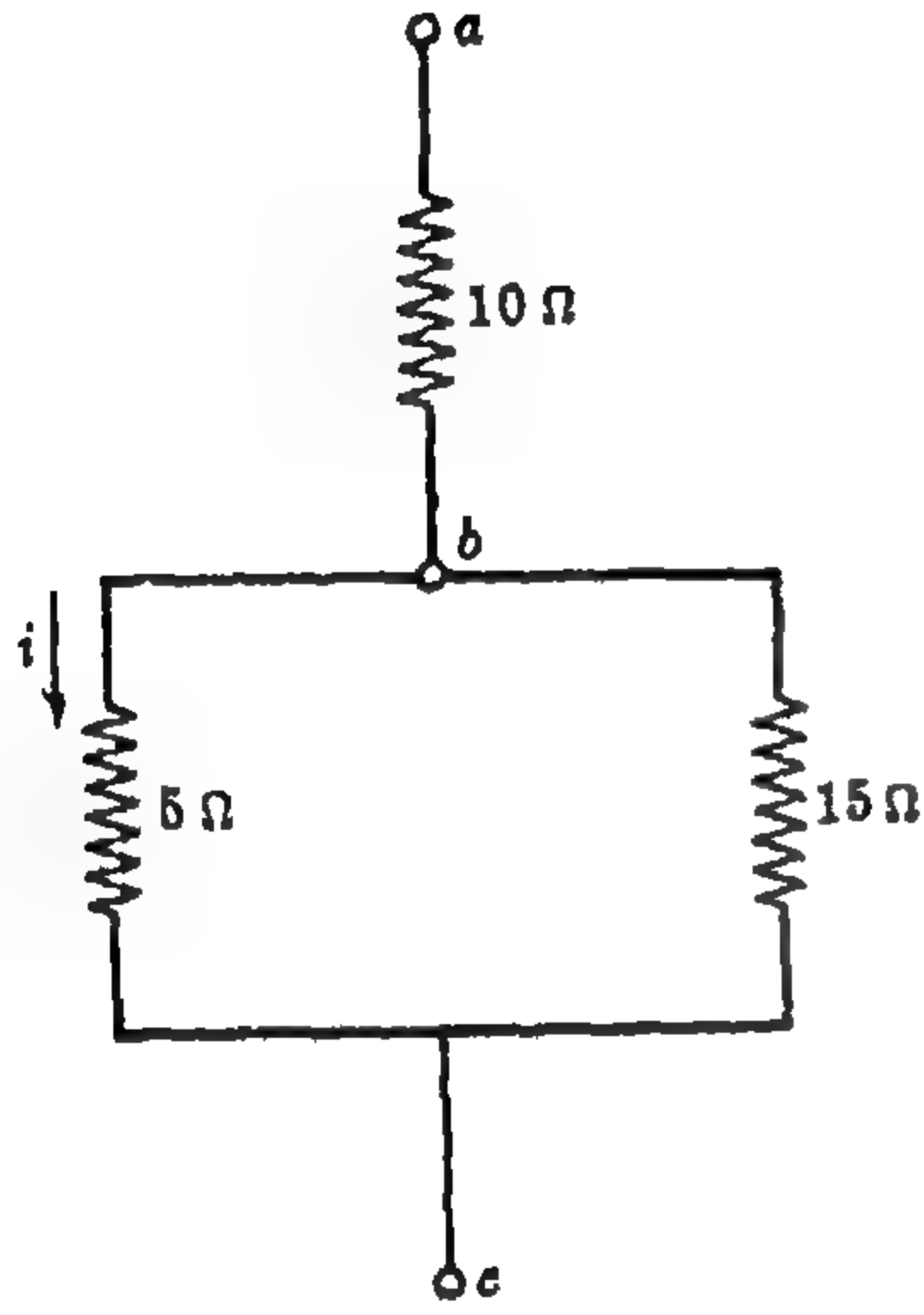
$$i_{\max} v_{\max} = 50(5) = 250 \text{ W. هي}$$

١ - v يمثل التيار الموضح في الشكل ١-١ بدالة سن منشار مكررة ، فإذا كان هذا التيار يؤثر على مقاوم نقي قيمته 5 ohms أوجد $v(t)$ و $p(t)$ وكذلك القدرة المتوسطة P .

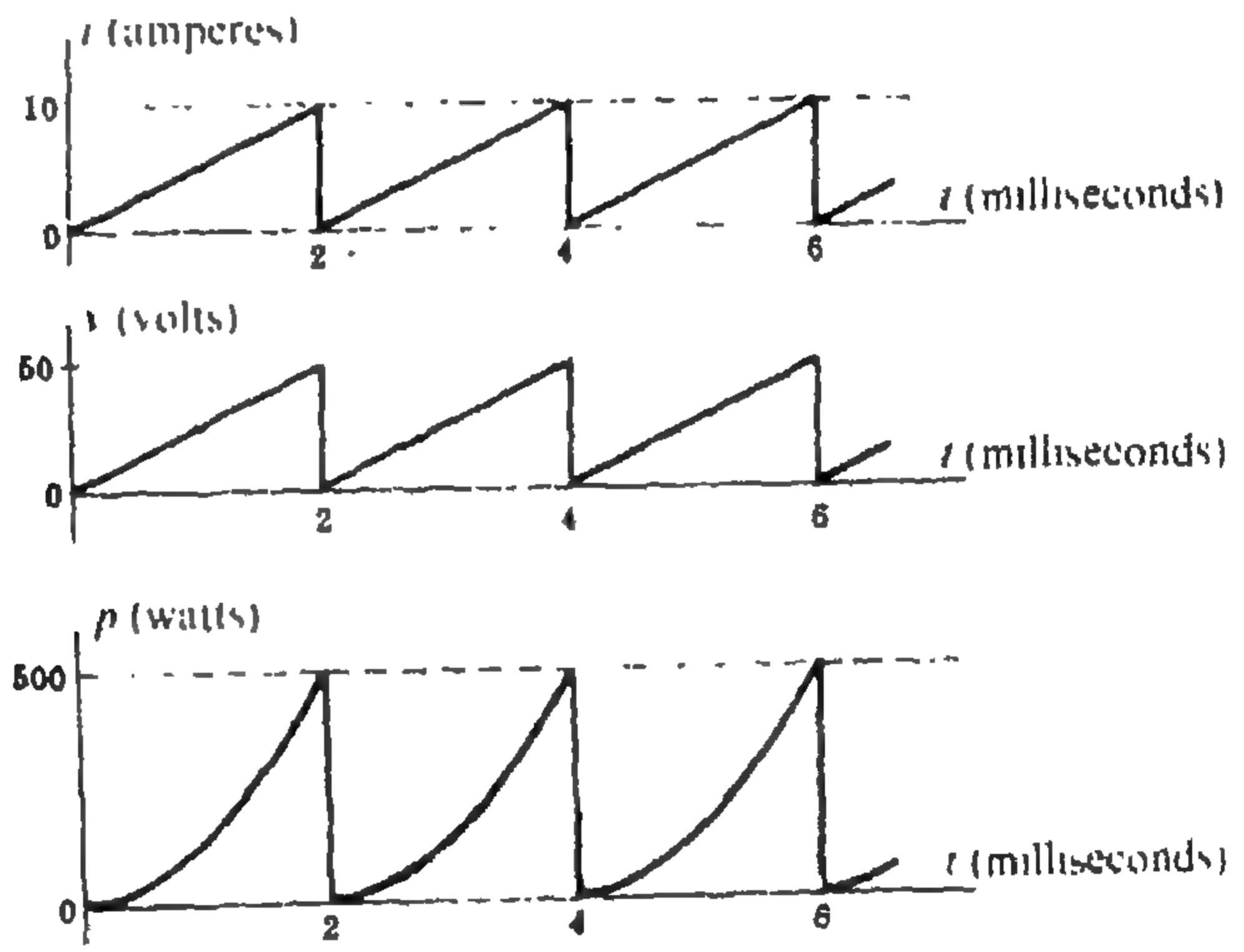
$$\text{بما أن } Ri_{\max} = 5(10) = 50 \text{ V} \quad v(t) = Ri(t), v_{\max}$$

$$\text{وعندما } 0 < t < 2 \times 10^{-3} \text{ s فإن } i = \frac{10}{2 \times 10^{-3}} t = 5 \times 10^3 \text{ amperes}$$

$$v = Ri = 25 \times 10^3 t \text{ volts, } p = vi = 125 \times 10^6 t^2 \text{ watts, } P = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} \int_0^{2 \times 10^{-3}} 125 \times 10^6 t^2 dt = 167 \text{ W}$$



شكل ١٠ - ١



شكل ١١ - ١

١ - أ في الدائرة الموضحة بالشكل ١٠ - ١ يؤثر تيار قيمته $i(t) = 6 \sin \omega t$ amperes على مقاوم قيمته 5Ω ،

(أ) عين قيمة التيار في المقاومين 15Ω و 10Ω والجهد من a إلى b وكذلك من b إلى c .

(ب) أوجد القدرة المخزنة ومتوسط القدرة المستنفذة على كل مقاوم .

(١) بما أن فرق الجهد v_{bc} عبر المقاومين 5Ω و 15Ω واحد ، فإن

$$i_{15} = v_{bc} / R_{15} = 2 \sin \omega t \text{ amperes} \quad \text{و} \quad v_{bc} = i_5 R_5 = (6 \sin \omega t)(5) = 30 \sin \omega t \text{ volts}$$

$$\text{والآن بحسب أن} \quad v_{ab} = i_{10} R_{10} = 80 \sin \omega t \text{ volts} \quad \text{و} \quad i_{10} = i_{15} = i_5 = 8 \sin \omega t \text{ amperes}$$

(ب) القدرة المخزنة هي $p = vi$. إذن $p_s = (30 \sin \omega t)(6 \sin \omega t) = 180 \sin^2 \omega t \text{ watts}$. بالمثل

$$p_{10} = 640 \sin^2 \omega t \text{ watts.} \quad \text{و} \quad p_{15} = 60 \sin^2 \omega t \text{ watts}$$

ومتوسط القدرة على المقاوم 5Ω هي

$$P_s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 180 \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 180 \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \right] d(\omega t) = 90 \text{ W}$$

$$\text{وبالمثل} \quad P_{10} = 320 \text{ W} \quad \text{و} \quad P_{15} = 30 \text{ W}$$

١ - ٩ مقاوم قيمته 2Ω يؤثر عليه فرق جهد $v(t)$ يعطى بالعلاقة

$$v(t) = 50 \left[1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \dots \right] \text{ volts}$$

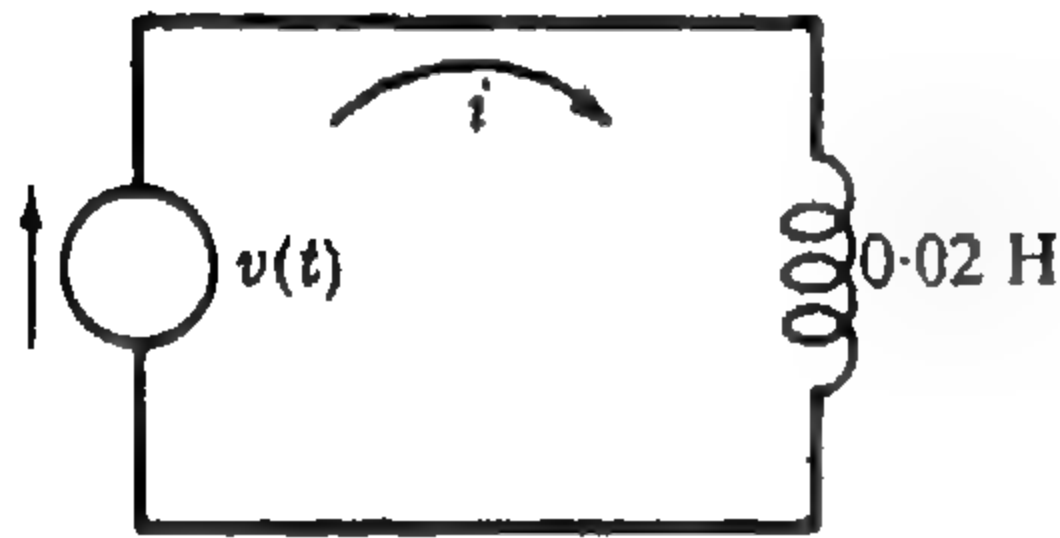
عين التيار والقدرة في هذه الدائرة الوحيدة العنصر .

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ نجده } x$$

إذن $P = 625 \text{ W}$ ، $v(t) = 50 \cos \omega t \text{ volts}$ ، $i(t) = 25 \cos \omega t \text{ amperes}$ ، $p(t) = 1250 \cos^2 \omega t \text{ watts}$

١ - ١٠ ملف نقي معامل حثه $L = 0.02$ يؤثر عليه جهد $v(t) = 150 \sin 1000t \text{ volts}$ يعطى بالعلاقة

عين التيار $i(t)$ والقدرة اللحظية $p(t)$ ومتوسط القدرة P .



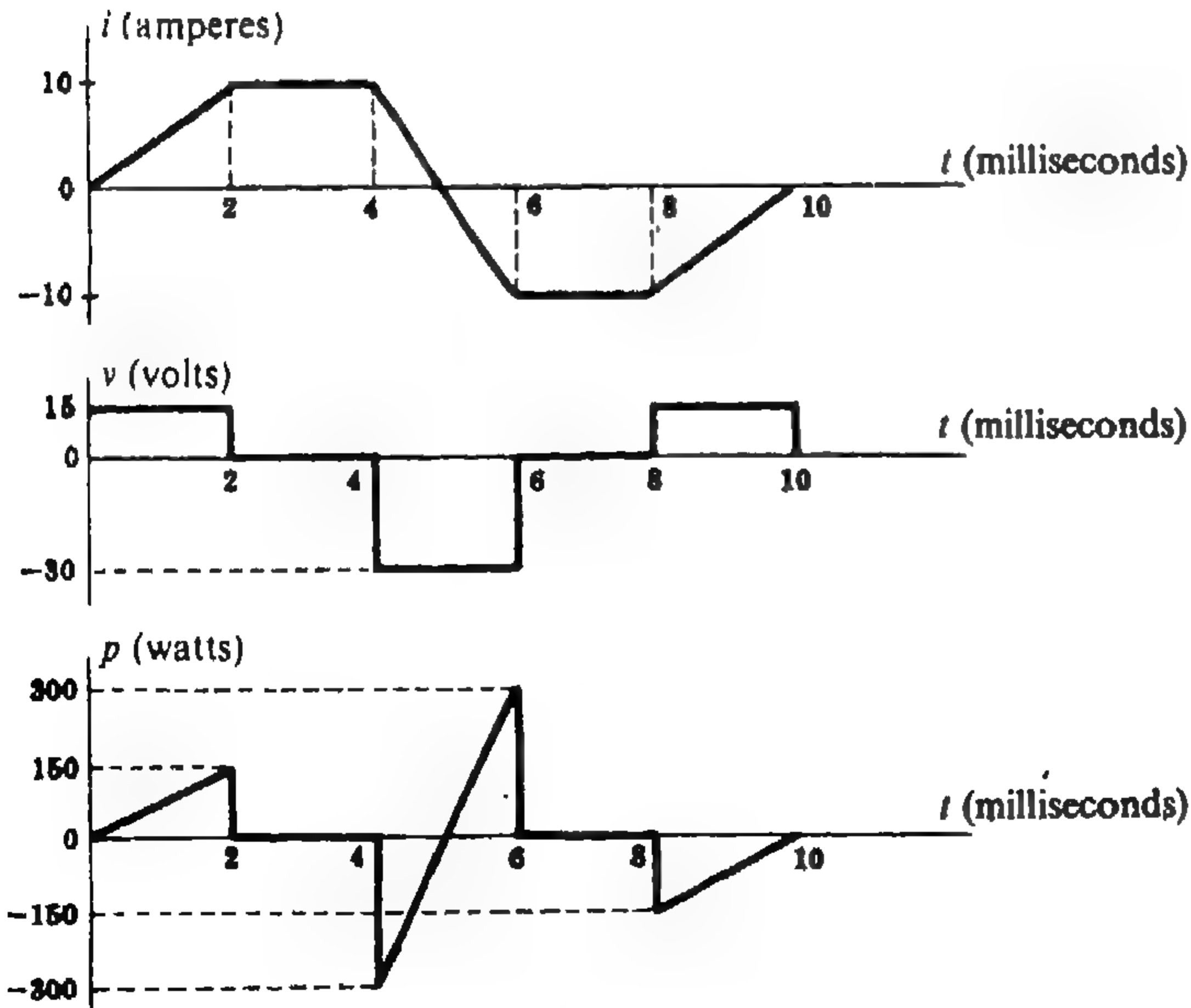
شكل ١ - ١٦ (أ)

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt = \frac{1}{0.02} \int 150 \sin 1000t dt \text{ watts}$$

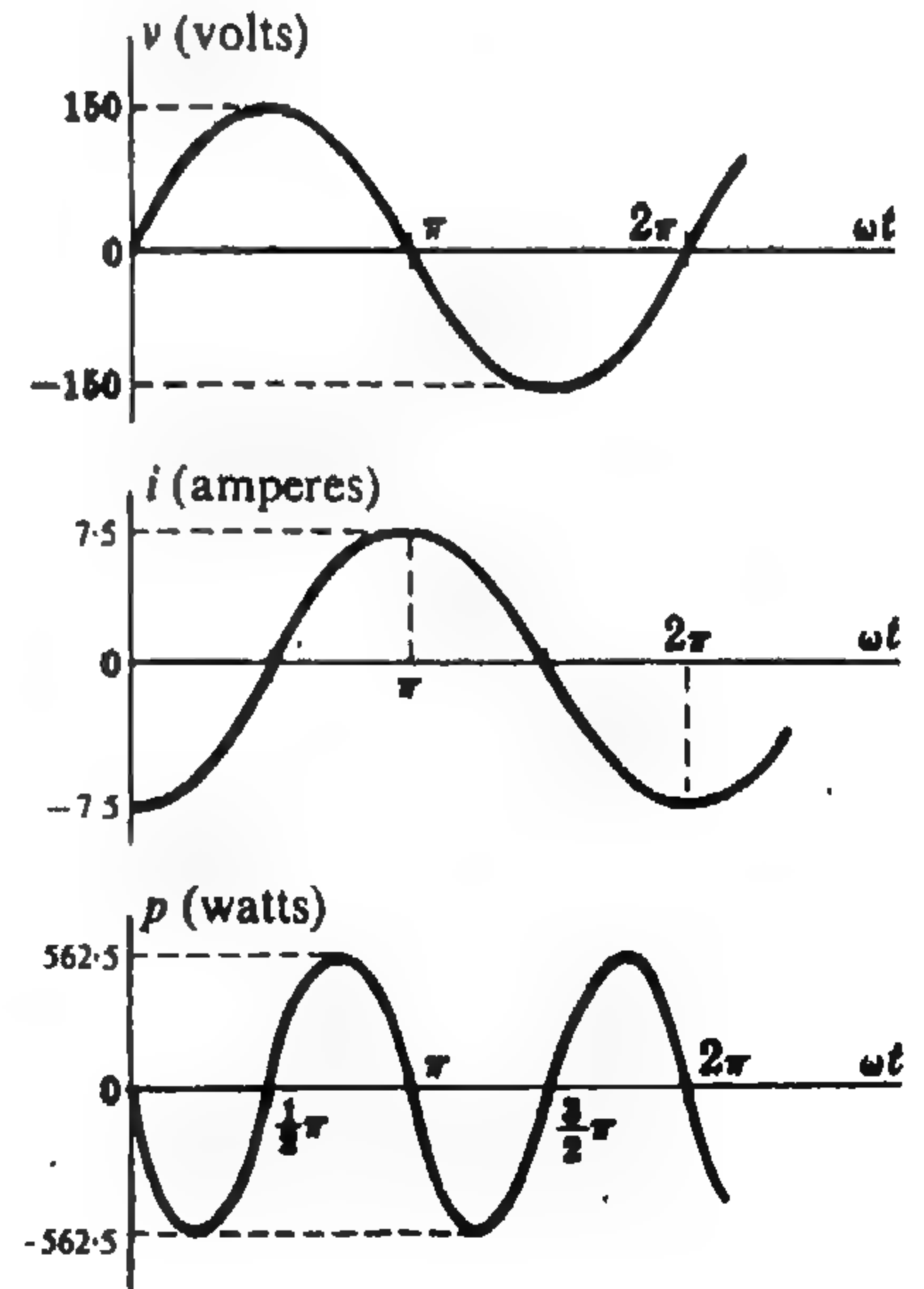
$$\frac{150}{0.02} \left(-\frac{\cos 1000t}{1000} \right) = -7.5 \cos 1000t \text{ amperes}$$

$$[\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x] \text{ لاحظ أن } p = vi = 150(7.5) \left(\frac{1}{2} \sin 2000t \right) = -562.5 \sin 2000t$$

ومن الواضح أن القدرة المتوسطة P تساوى صفراً كما نرى من الشكل ١ - ١٦ (ب)



شكل ١ - ١٧



شكل ١ - ١٦ (ب)

١١ - ١ ملف ذو معامل حثه 3 mH يمرر تيار شكله الموجي الموضح في الشكل ١ - ١٧ . عين مع الرسم الجهد $v(t)$ والقدرة اللحظية $p(t)$ وكذلك متوسط القدرة P .

يعطى التيار اللحظي $i(t)$ (أنظر الشكل ١ - ١٧) بالعلاقة

$$(١) \text{ عندما } 0 < t < 2 \text{ ms} \text{ فإن } i = 5 \times 10^3 t \text{ amperes}$$

$$(٢) \text{ عندما } 2 < t < 4 \text{ ms} \text{ فإن } i = 10 \text{ A}$$

$$(٣) \text{ عندما } 4 < t < 6 \text{ ms} \text{ فإن } i = 10 - 10 \times 10^3(t - 4 \times 10^{-3}) = 50 - 10 \times 10^3 t \text{ amperes}$$

$$(٤) \text{ عندما } 6 < t < 8 \text{ ms} \text{ فإن } i = -10 \text{ A}$$

$$(٥) \text{ عندما } 8 < t < 10 \text{ ms} \text{ فإن } i = -10 + 5 \times 10^3(t - 8 \times 10^{-3}) = -50 + 5 \times 10^3 t \text{ amperes}$$

ويعطى الجهد المقابل بـ

$$(١) v_L = L \frac{di}{dt} = 3 \times 10^{-3} \frac{d}{dt}(5 \times 10^3 t) = 15 \text{ V}$$

$$(٢) v_L = L \frac{di}{dt} = 3 \times 10^{-3} \frac{d}{dt}(10) = 0$$

$$(٣) v_L = L \frac{di}{dt} = 3 \times 10^{-3} \frac{d}{dt}(50 - 10 \times 10^3 t) = -30 \text{ V}$$

أما القدرة اللحظية المقابلة فتعطى بـ

$$(١) p = vi = 15(5 \times 10^3 t) = 75 \times 10^3 t \text{ watts}$$

$$(٢) p = vi = 0(10) = 0$$

$$(٣) p = vi = -30(50 - 10 \times 10^3 t) = -1500 + 300 \times 10^3 t \text{ watts}$$

ومن الواضح أن القدرة المتوسطة P تساوى صفراً .

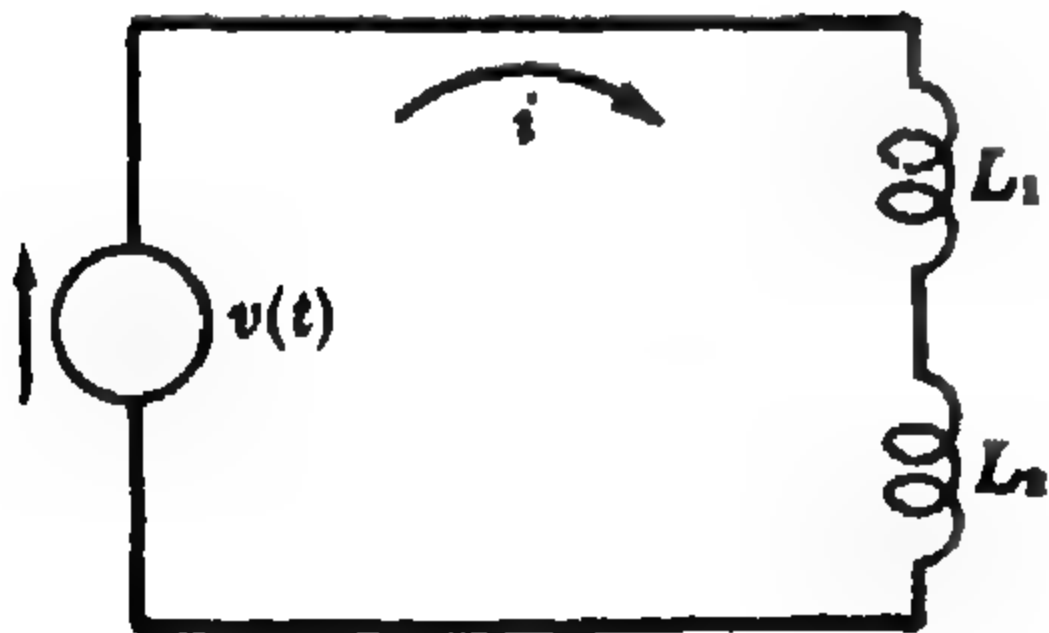
١٢ - ١ فرق جهد $v(t)$ يؤثر على ملفين متصلين على التوالي حثهما L_1 و L_2 عين الحث المكافئ L_e الذي يمكن استبدالهما به بحيث يعطى نفس التيار .

الجهد المؤثر = الهبوط في الجهد على L_1 + الهبوط في الجهد على L_2 .

$$v(t) = L_e \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt}$$

ومن هذه المعادلة نجد $L_e = L_1 + L_2$

شكل ١ - ١٨



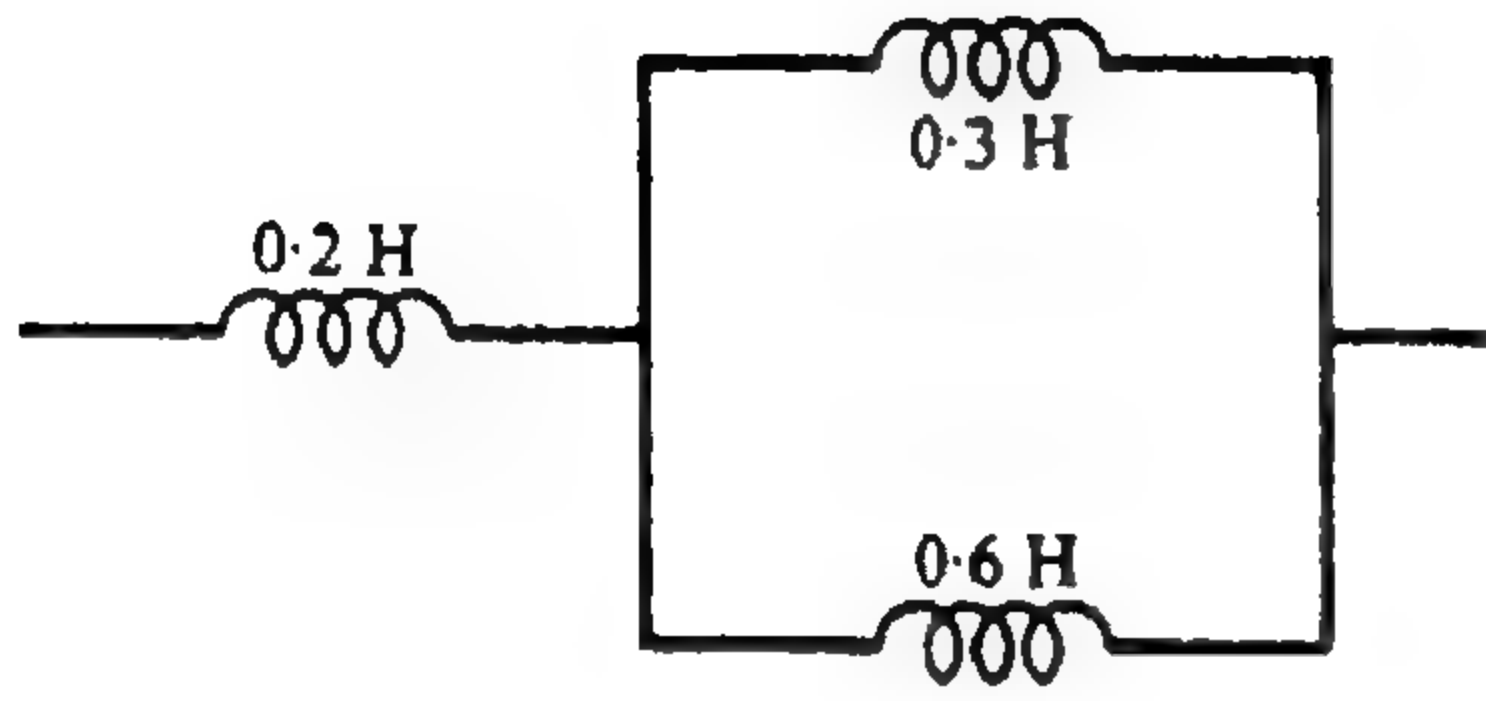
١٣ - ١ عين الحث المكافئ L_e للملفين متصلين على التوازي وحثهما L_1 و L_2 كما هو موضح في الشكل ١ - ١٩ .

نفرض أن جهد $v(t)$ يؤثر على المجموعة المتصلة على التوازي وأن التيار المار في L_1 و L_2 هو i_1 و i_2 على الترتيب . وحيث أن التيار الكلي i يساوي مجموع تيارى الفرعين ، إذن

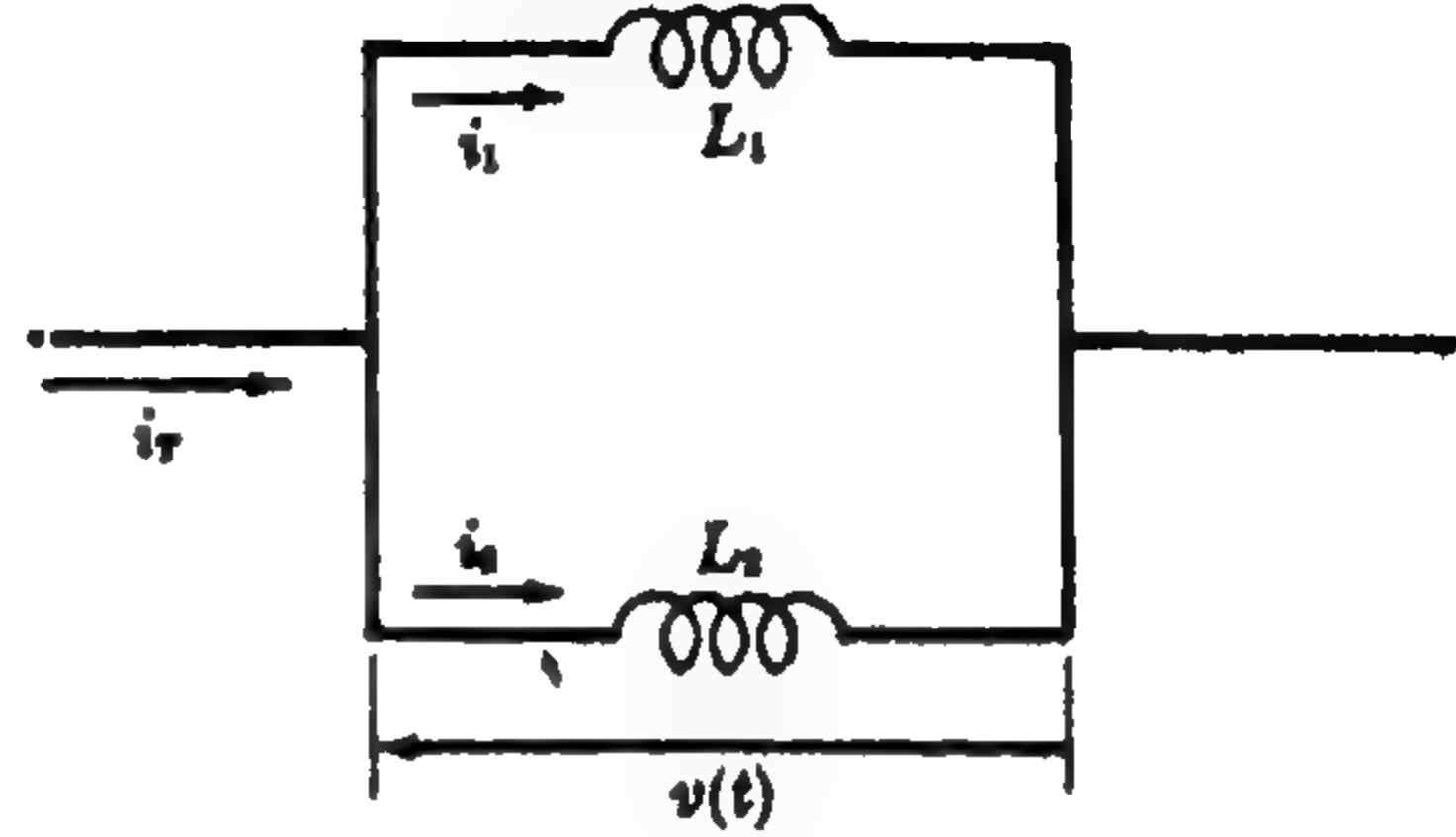
$$\frac{1}{L_s} \int v dt = \frac{1}{L_1} \int v dt + \frac{1}{L_2} \int v dt \quad , \quad i_s = i_1 + i_2$$

$$L_s = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad , \quad \frac{1}{L_s} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{ومنها نجد أن}$$

مقلوب الحث المكافئ لأي عدد من الملفات متصلة على التوازي يساوى مجموع مقلوبات حث الملفات المختلفة .



شكل ٢٠ - ١



شكل ١٩ - ١

١ - ١٨ ثلاثة ملفات كما في الشكل ٢٠ - ١ - أوجد الحث المكافئ L_p الذى يمكن استبداله به .

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{0.3(0.6)}{0.3 + 0.6} = 0.2 \text{ H} \quad \text{الحث المكافئ } L_p \text{ للمجموعة المتصلة على التوازي}$$

$$L_s = 0.2 + L_p = 0.4 \text{ H} \quad \text{إذن الحث المكافئ المطلوب هو}$$

١ - ١٩ ملف نقى يحمل تيار $i(t) = I_m \sin \omega t$ amperes فإذا فرضنا أن الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسى تساوى صفراً عندما $t = 0$ ، فاشتق دالة الطاقة $w(t)$ وارسمها .

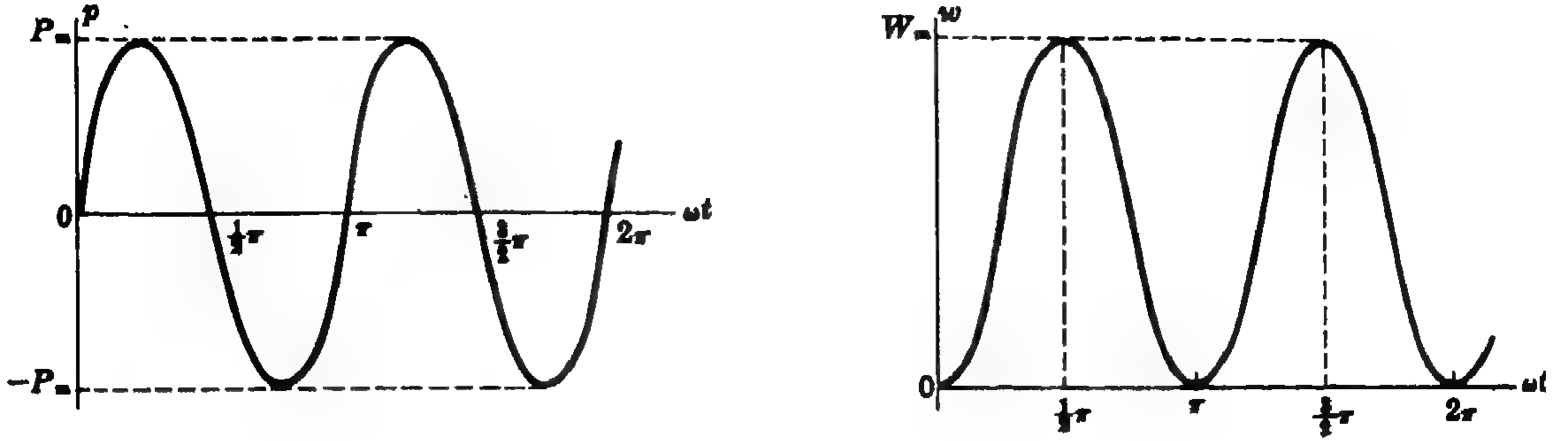
$$v(t) = L \frac{d}{dt} (I_m \sin \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t \text{ volts}$$

$$p(t) = vi = \omega L I_m^2 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \omega L I_m^2 \sin 2\omega t \text{ watts}$$

$$w(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \omega L I_m^2 \sin 2\omega t dt = \frac{1}{4} L I_m^2 [-\cos 2\omega t + 1] = \frac{1}{4} L I_m^2 \sin^2 \omega t \text{ joules}$$

عند القيم : « الخ $5\pi/2$ و $3\pi/2$ و $\pi/2$ » تكون الطاقة المخزونة نهاية عظمى وتساوى $\frac{1}{4} L I_m^2$.
وعند القيم « الخ $2\pi, 3\pi$ و π و 0 » تكون الطاقة المخزونة تساوى صفراً (أنظر الشكل ١ - ٢١) .

عندما تكون $p(t)$ موجبة فإن انسياب الطاقة يكون اتجاها الحمل وبذلك تزداد الطاقة المخزونة . أما عندما تكون $p(t)$ سالبة فإن الطاقة تعود من المجال المغناطيسى للملف إلى المصدر . وفى الملف النقى لا تسفد طاقة وعلى ذلك فإن القدرة المتوسطة تساوى صفراً ولا يوجد انتقال صافى للطاقة .



شكل ١ - ٢١

١٦ - ١ فرق جهد يعطى بالعلاقة : $v(t) = V_m \sin \omega t$ volts يؤثر على مكثف نقى . أوجد معادلات التيار $i(t)$ والقدرة $p(t)$ والشحنة $q(t)$ والطاقة المخزنة في المجال الكهربائي $w(t)$ بفرض أن $w(t) = 0$ عندما $t = 0$

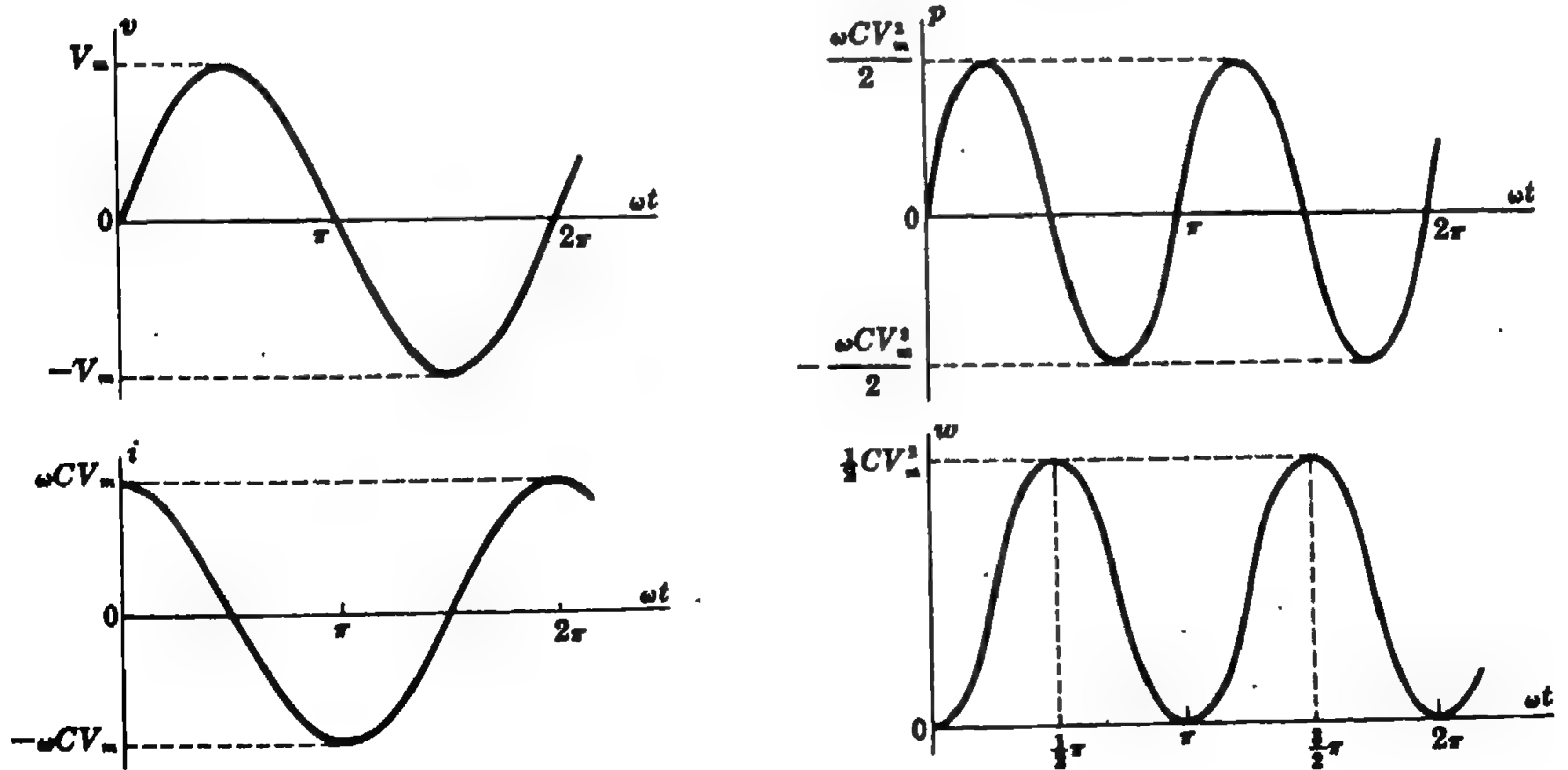
$$i(t) = C dv/dt = \omega C V_m \cos \omega t \text{ amperes}$$

$$p(t) = vi = \frac{1}{2} \omega C V_m^2 \sin 2\omega t \text{ watts}$$

$$q(t) = Cv = C V_m \sin \omega t \text{ coulombs}$$

$$w(t) = \int_0^t p dt = \frac{1}{2} C V_m^2 (1 - \cos 2\omega t) = \frac{1}{2} C V_m^2 \sin^2 \omega t \text{ joules}$$

عند القيم ، « الخ $5\pi/2$ و $3\pi/2$ و $\pi/2$ » تكون الطاقة المخزنة نهاية عظمى وتساوى $\frac{1}{2} C V_m^2$.
وعند القيم ، « الخ 3π و 2π و π و 0 » تكون الطاقة المخزنة تساوى صفراً . أنظر الشكل ١ - ٢٢ .
عندما تكون $p(t)$ موجبة فإن انسياب الطاقة يكون من المصدر إلى المجال الكهربائي للمكثف وبذلك تزداد الطاقة المخزنة $w(t)$. أما عندما تكون $p(t)$ سالبة فإن الطاقة المخزنة تعود إلى المصدر والقدرة المتوسطة P تساوى صفراً ولا يوجد انتقال صافى للطاقة .



شكل ١ - ٢٢

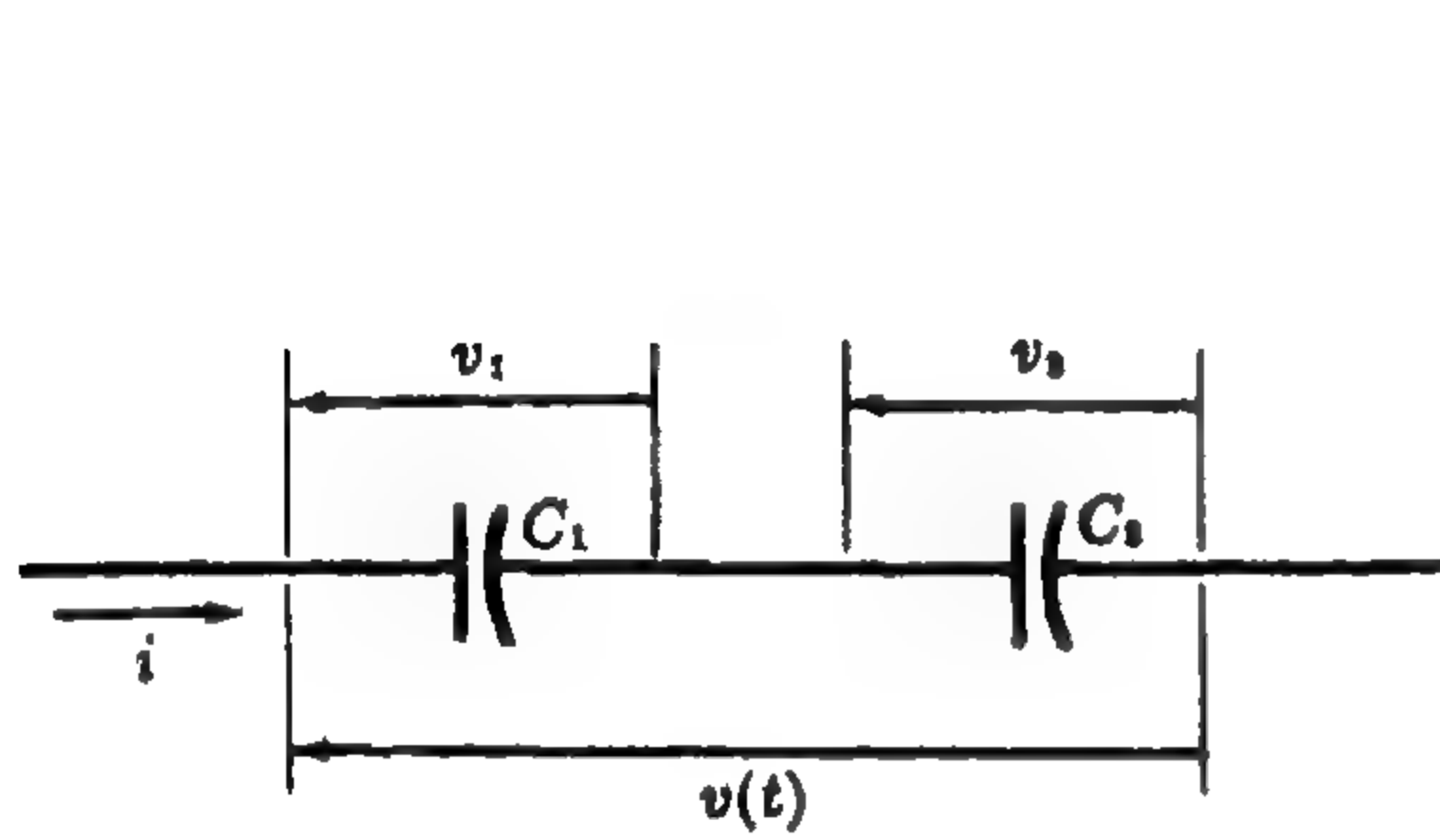
١٧-١ أوجد السعة المكافئة C_e لمكثفين C_1 و C_2 متصلين على التوازي كما في الشكل ٢٣-١ .

نفرض وجود فرق جهد $v(t)$ يؤثر على المجموعة المتصلة على التوازي . فإذا كان التيار المار في C_1 هو i_1 وفي C_2 هو i_2 ، إذن التيار الكلي i_T هو

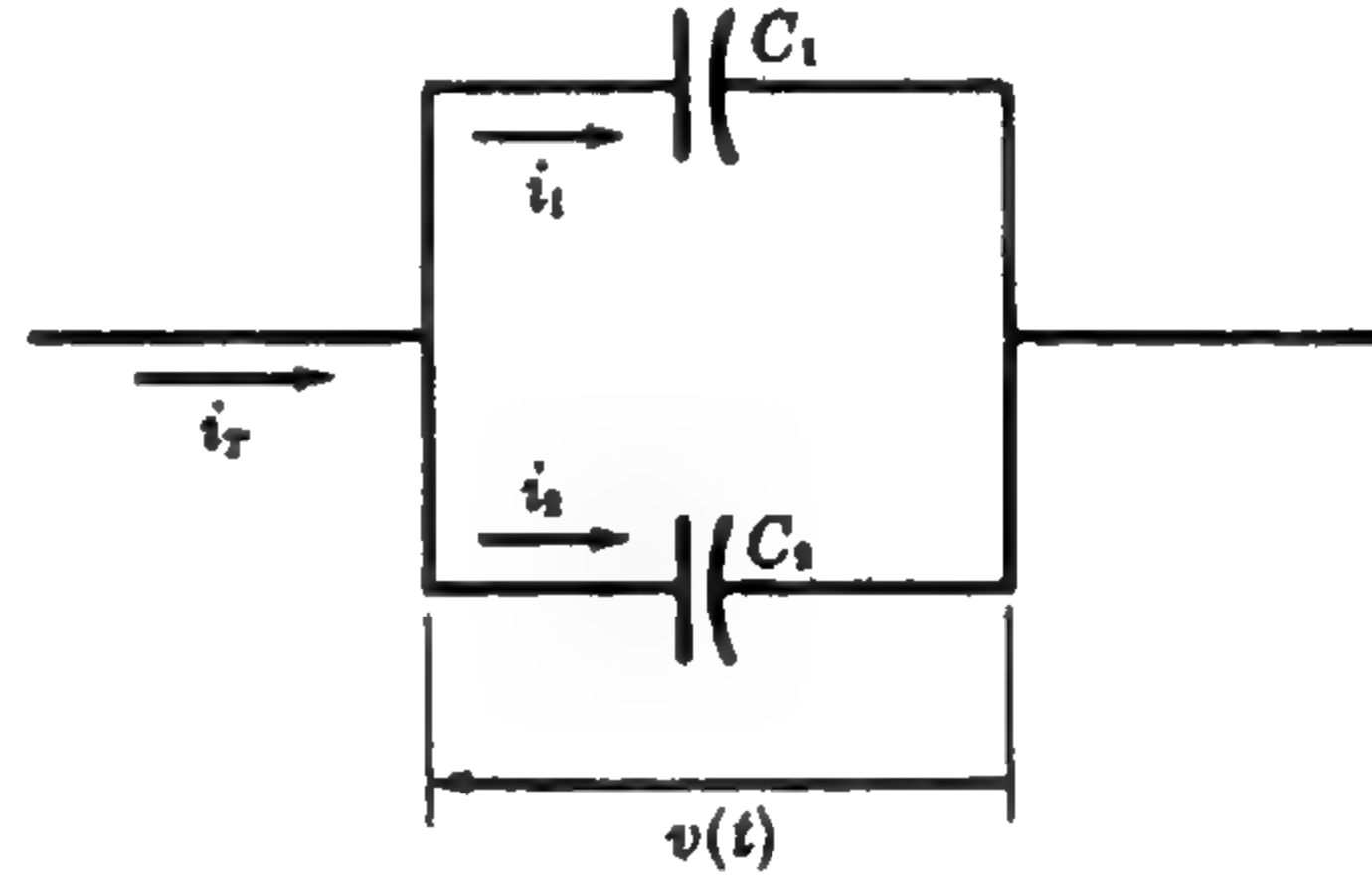
$$C_e \frac{d}{dt} v(t) = C_1 \frac{d}{dt} v(t) + C_2 \frac{d}{dt} v(t) \quad \text{أو} \quad i_T = i_1 + i_2$$

وبالتالي فإن $C_e = C_1 + C_2$

إذن السعة المحصلة (المكافئة) لأي عدد من المكثفات متصلة على التوازي تساوي مجموع سمات المكثفات .



شكل ٢٤-١



شكل ٢٣-١

١٨-١ عين السعة المكافئة C_e لمكثفين C_1 و C_2 متصلين على التوالي كما في الشكل ٢٤-١ .

نفرض وجود جهد يؤثر على الدائرة المتصلة على التوالي إذن

فرق الجهد المؤثر = الهبوط في الجهد على C_1 + الهبوط في الجهد على C_2

$$\frac{1}{C_e} \int i(t) dt = \frac{1}{C_1} \int i(t) dt + \frac{1}{C_2} \int i(t) dt$$

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{إذن}$$

إذن مقلوب السعة المحصلة (المكافئة) لأي عدد من المكثفات متصلة على التوالي يساوي مجموع مقلوب سمات المكثفات كل على حدة .

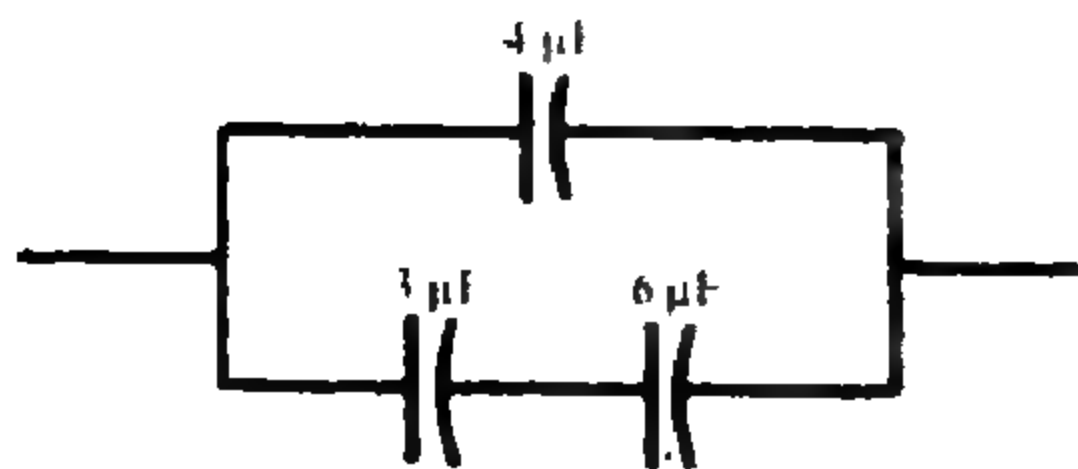
١٩-١ أوجد السعة المكافئة C_e لمجموعة المكثفات الموضحة في الشكل ٢٥-١

السعة المكافئة للفرع المتصل على التوالي هي

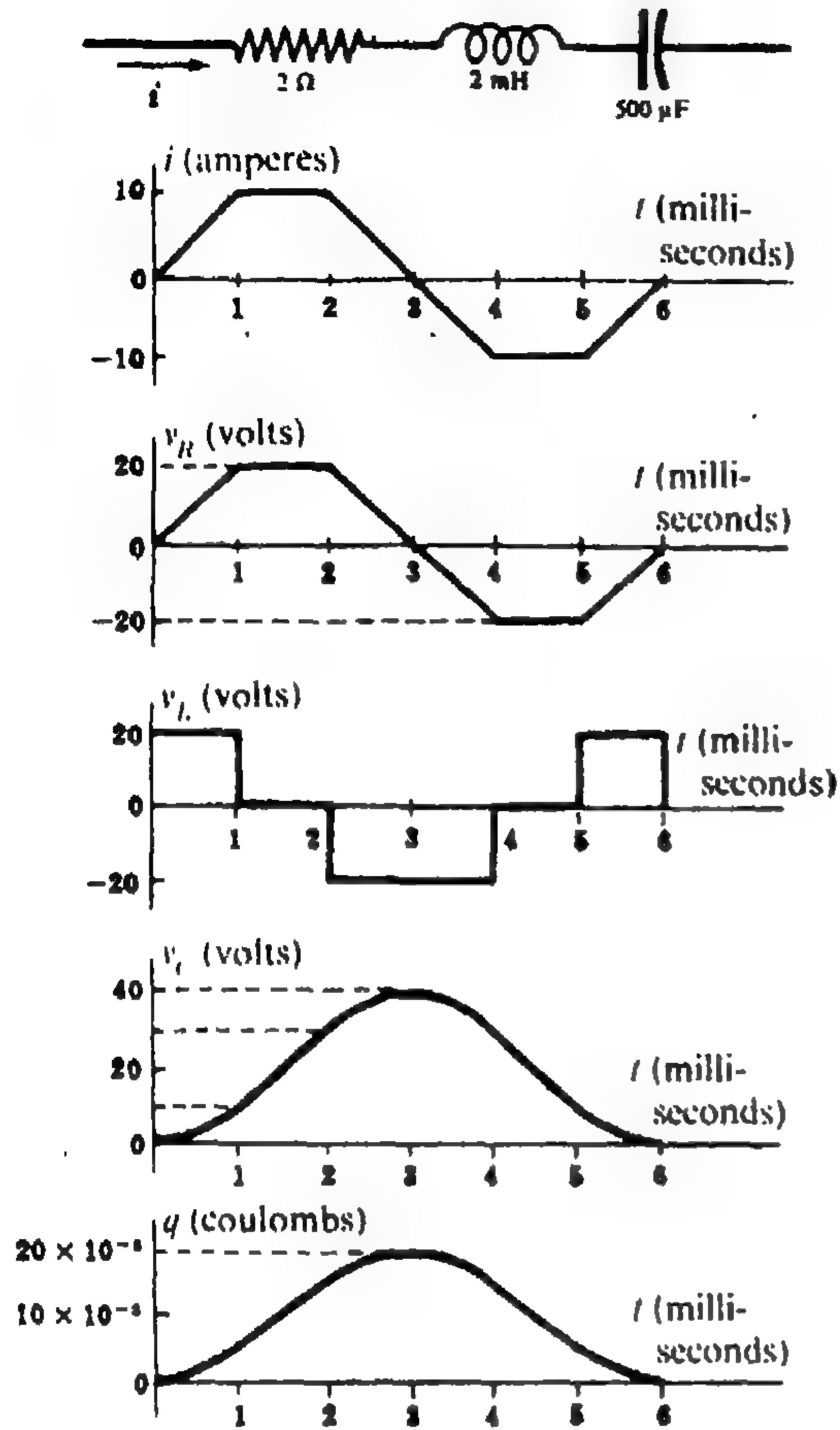
$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3(6)}{3+6} = 2 \mu F$$

إذن السعة المكافئة المطلوبة هي

$$C_e = 4 + C_s = 6 \mu F$$



شكل ٢٥-١



شكل ١ - ٢٦

١ - ٢٠ الشكل ١ - ٢٦ يوضح الشكل الموجي لتيار $i(t)$ المار في الدائرة المعطاة المتصلة على التوالي . أوجد فرق الجهد على كل عنصر ، ثم ارسم كل فرق جهد مستخدماً مقياساً واحداً للزمن . ارسم أيضاً الشحنة $q(t)$ على المكثف

$$v_R = Ri \text{ هو فرق الجهد على المقاوم}$$

إذن منحنى v_R هو ضعف منحنى دالة التيار وقيمته عند القمة هي : $2(10) = 20 \text{ V}$

$$v_L = L \frac{di}{dt} \text{ هو فرق الجهد على الملف هو}$$

(١) عندما : $0 < t < 1 \text{ ms}$ فإن

$$i = 10 \cdot 10^3 \text{ amperes}$$

$$v_L = (2 \cdot 10^{-3})(10 \cdot 10^3) = 20 \text{ V}$$

(٢) عندما : $1 < t < 2 \text{ ms}$ فإن $i = 10 \text{ A}$

$$v_L = (2 \cdot 10^{-3})(0) = 0$$

... الخ

$$v_C = \frac{1}{C} \int i dt \text{ هو فرق الجهد على المكثف هو}$$

(١) عندما : $0 < t < 1 \text{ ms}$ فإن

$$v_C = \frac{1}{500 \times 10^{-6}} \int_0^t (10 \times 10^3 t) dt = 10 \times 10^3 t^2 \text{ volts}$$

$$v_C = 10 + \frac{1}{500 \times 10^{-6}} \int_{10^{-3}}^t (10) dt \text{ عندما } 1 < t < 2 \text{ ms} \text{ فإن}$$

$$= 10 + 20 \times 10^3 (t - 10^{-3}) \text{ volts}$$

... الخ

يمكن بسهولة الحصول على منحنى الشحنة q باستخدام العلاقة $q = Cv_C$. ونلاحظ أنه عندما يكون i موجباً فإن كلا من q و v_C يزداد ، أى يزداد كلا من الشحنة على المكثف وفرق الجهد على المكثف ، وعندما يكون i سالباً فإن كليهما يتناقص .

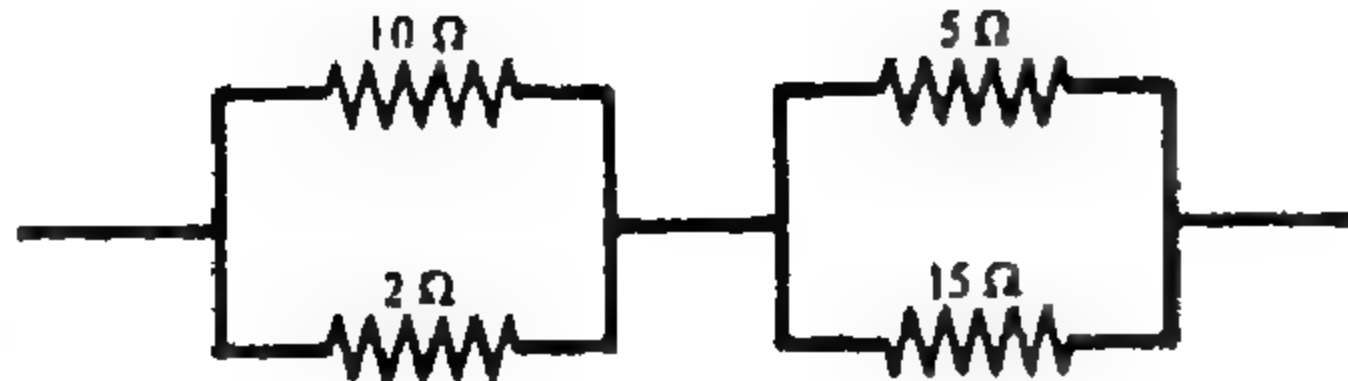
مسائل إضافية

١ - ٢١ ثلاث مقاومات R_1 و R_2 و R_3 متصلة على التوالي ويؤثر عليهم فرق جهد ثابت V . فإذا كان فرق الجهد على R_1 يساوى 20 V والقوة في R_2 هي 25 W ، وقيمة R_3 هي 2Ω . فأوجد فرق الجهد V علماً بأن التيار 5 A . الجواب : 35 volts

٢٢-١ مقاومات R_1 و R_2 متصلان على التوازي والمقاومة المكافئة لها R_e تساوى $10/3 \Omega$ ، فإذا كان التيار الداخل للدائرة المتصلة على التوازي ينقسم في المقاومين بنسبة 1 إلى 2 فعين قيمتي R_1 و R_2 .

الجواب : $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$

٢٣-١ (أ) عين R_e للاربع مقاومات في الدائرة الموضحة بالشكل ٢٧-١ .



شكل ٢٧-١

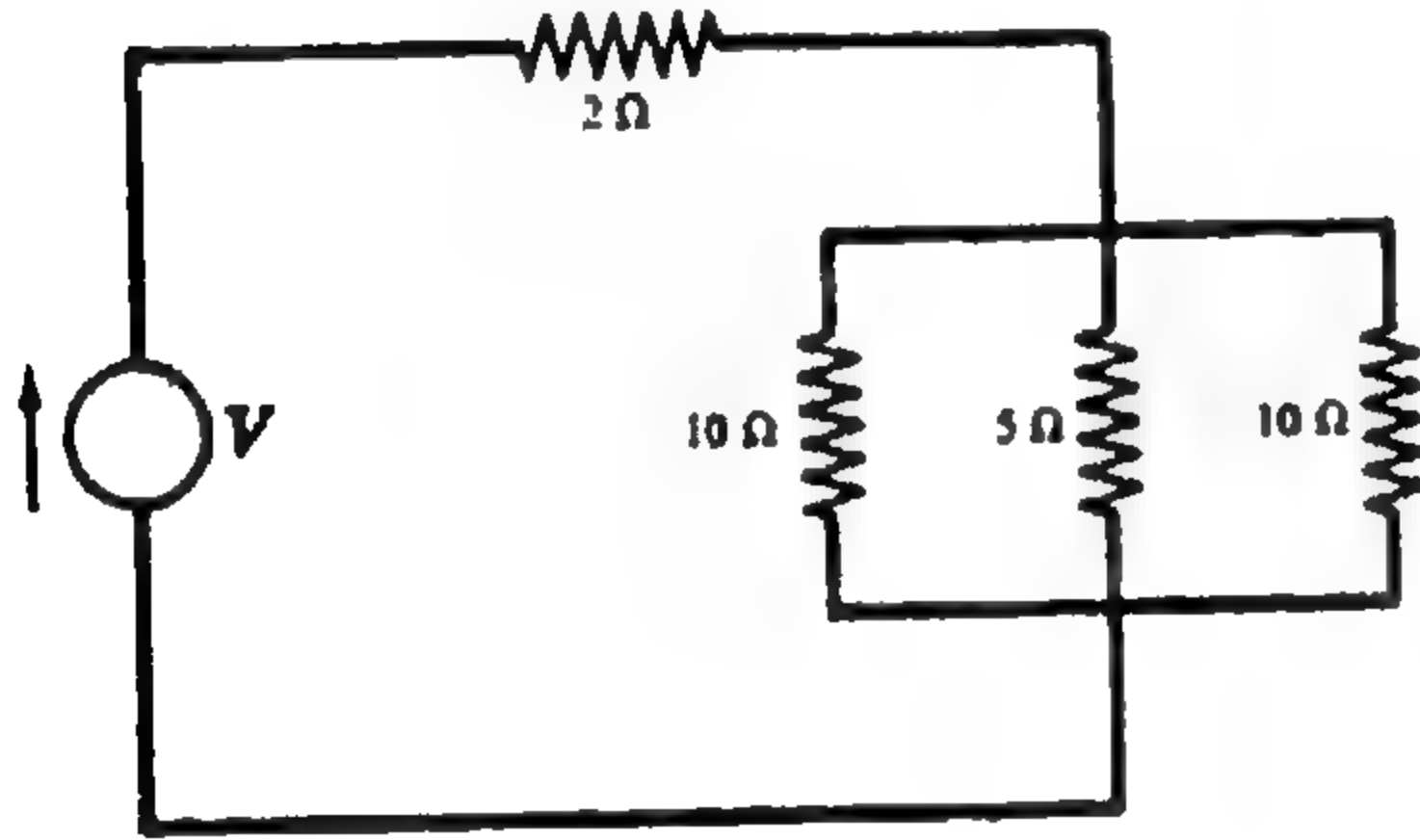
(ب) إذا أثر بفرق جهد ثابت مقداره : $V = 100 \text{ V}$ فأى المقاومات لها أكبر قدرة ؟

الجواب : (أ) $R_e = 5.42 \Omega$

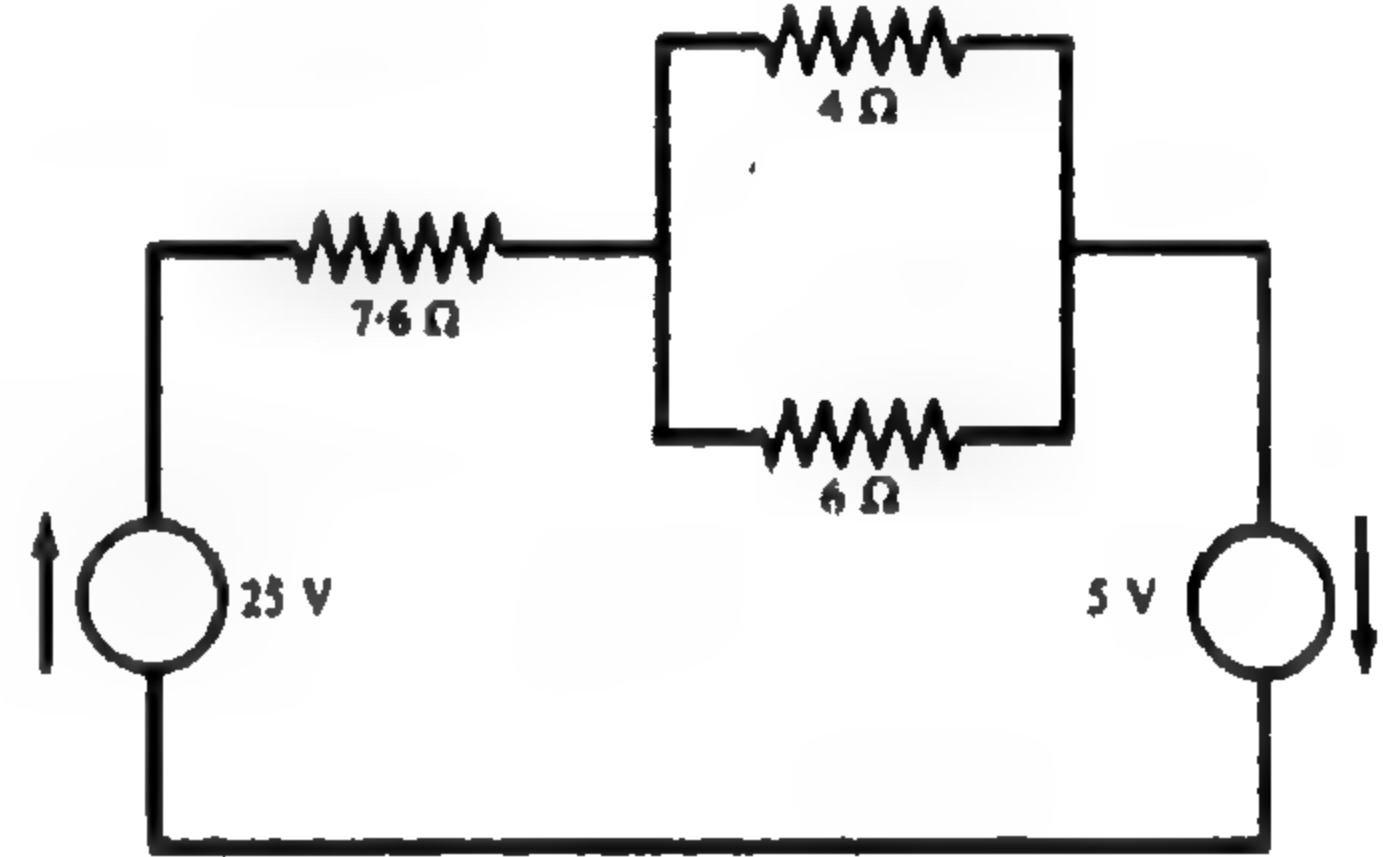
(ب) القدرة $P = 957 \text{ W}$ ، المقاوم 5Ω

٢٤-١ يؤثر مصدران ثابتان لفرق الجهد على الدائرة الموضحة بالشكل ٢٨-١ أوجد القدرة P التي يعطيها كل مصدر للدائرة .

الجواب : $P_{25} = 75 \text{ watts}$, $P_5 = 15 \text{ watts}$



شكل ٢٩-١



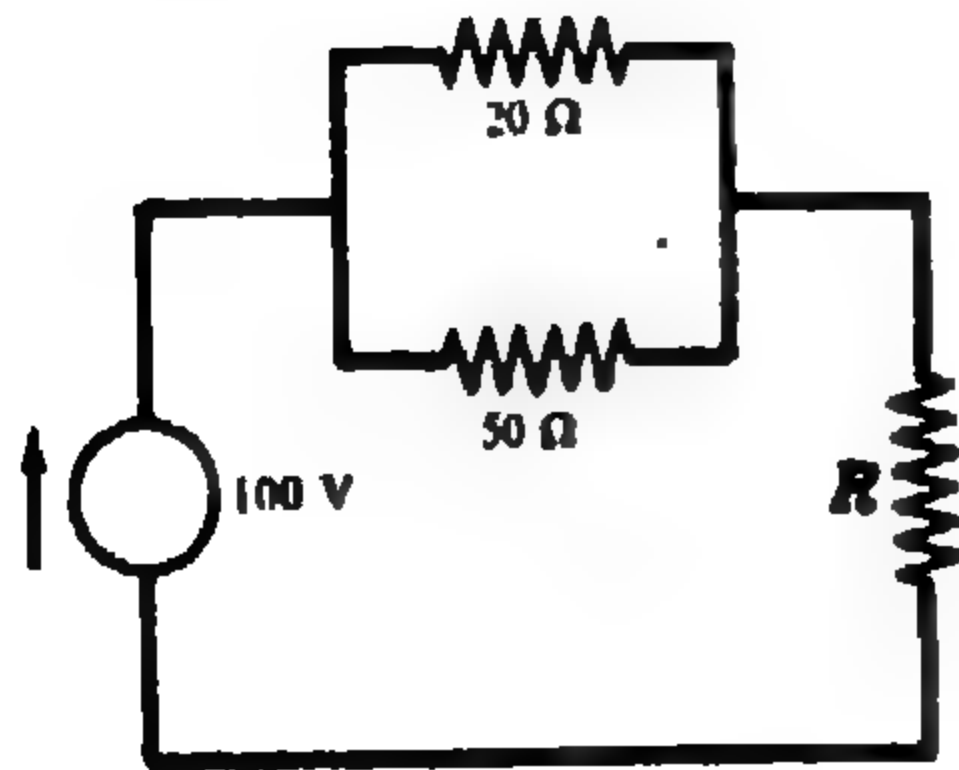
شكل ٢٨-١

٢٥-١ في الدائرة الموضحة في الشكل ٢٩-١ ، عين فرق الجهد الثابت V إذا كان التيار المار في المقاوم 5Ω هو 14 amperes .

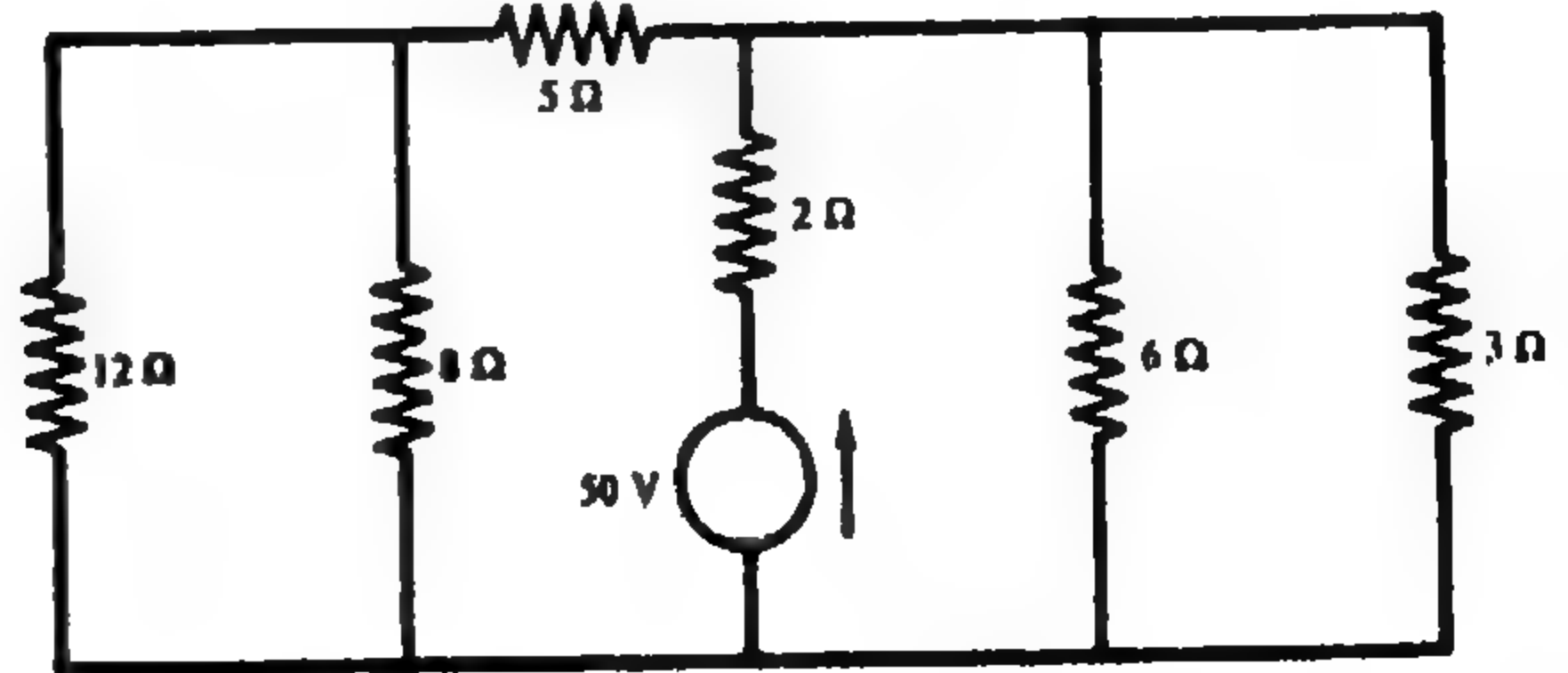
الجواب : 126 volts

٢٦-١ احسب التيار الذي يعطيه المنبع 50 V لشبكة المقاومات الموضحة بدائرة الشكل ٣٠-١ .

الجواب : 13.7 A

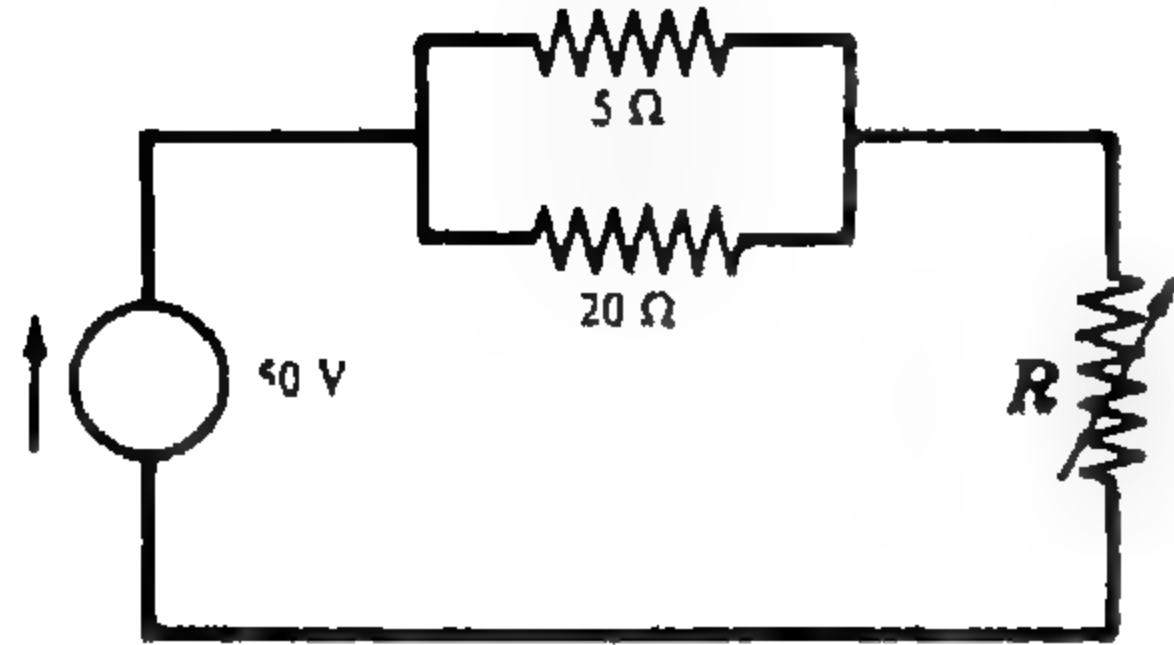


شكل ٣١-١



شكل ٣٠-١

- ٢٧-١ عين قيمة المقاومة R في الدائرة الموضحة في الشكل ٣١-١ إذا كان المهبوط في فرق الجهد عليها يساوي 25 volts .
الجواب : 4.76 ohms



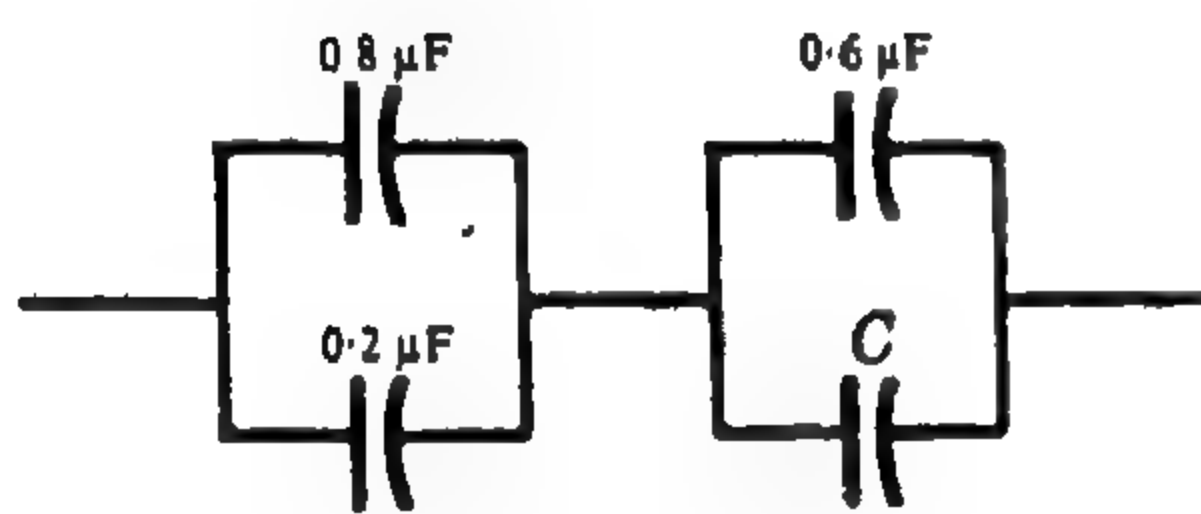
شكل ٣٢-١

- ٢٨-١ إلى أي قيمة يجب ضبط قيمة المقاوم R في الدائرة الموضحة بالشكل ٣٢-١ ، حتى تكون قدرة المقاوم 5 ohms تساوي 20 W .
الجواب : 16 ohms

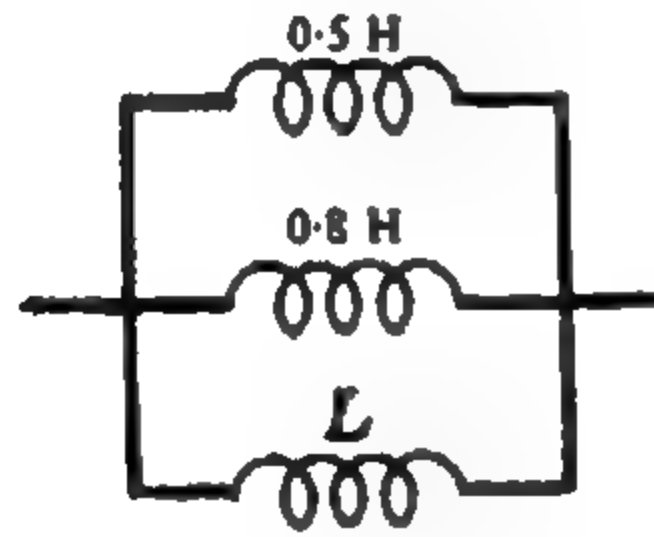
- ٢٩-١ مقاومان 5Ω و 15Ω متصلان على التوازي ويتصل معهم على التوالي مقاوم قيمته 10Ω . فإذا كان التيار الثابت في المقاوم 5Ω هو 6 A ، فاحسب القدرة المستنفذة في الثلاث مقاومات .
الجواب : 880 W

- ٣٠-١ إذا كان الحث المكافئ L_e لمجموعة الملفات الموضحة في الشكل ٣٣-١ هو 0.7H ، فاحسب قيمة L_1 و L_2 إذا كانت النسبة بين قيمتهما هي $L_1 : L_2 = 1 : 2$.
الجواب : $L_1 = 0.6H, L_2 = 0.3H$

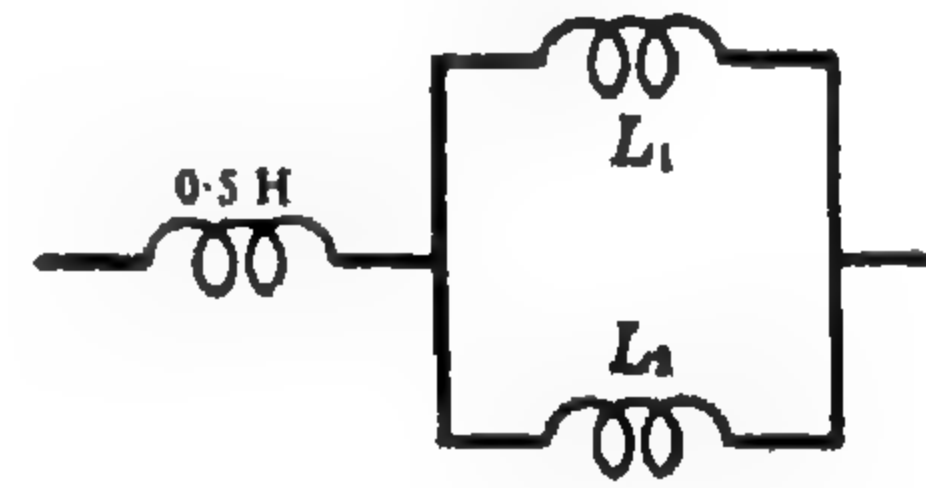
- ٣١-١ ثلاث ملفات متصلة على التوازي كما هو موضح في الشكل ٣٤-١ . فإذا كان الحث المكافئ لهم L_e يساوي 0.0755H . (أ) أوجد قيمة الحث المجهول L . (ب) هل توجد قيمة للحث L بحيث يصبح L_e مساويا 0.5H ؟ (ج) أوجد أكبر قيمة للحث المكافئ L_e إذا كانت L يمكن أن تأخذ أية قيمة .
الجواب : (أ) $L = 0.1 H$ (ب) لا (ج) 0.308 H



شكل ٣٥-١

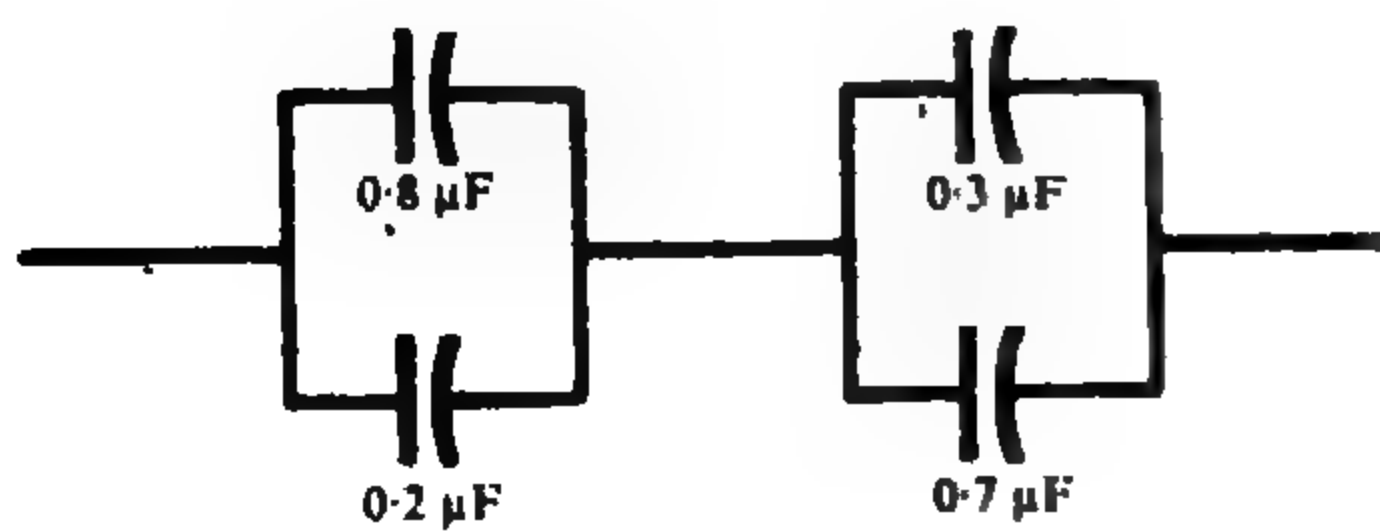


شكل ٣٤-١



شكل ٣٣-١

- ٣٢-١ احسب قيمة السعة C في مجموعة المكثفات الموضحة في الشكل ٣٥-١ بحيث تصبح السعة المكافئة $C_e = 0.5\mu F$.
الجواب : 0.4μF



شكل ٣٦-١

- ٣٣-١ احسب قيمة الشحنة q على كل مكثف من الأربعة مكثفات الموضحة في الشكل ٣٦-١ إذا أثربنا عليها بفرق جهد ثابت مقداره 100 V .

الجواب : $q_{0.8} = 40 \mu C, q_{0.2} = 10 \mu C$
 $q_{0.3} = 15 \mu C, q_{0.7} = 35 \mu C$

٣٤ - ١ شحن المكثفان الموضحان في الشكل ٣٧-١ لحظياً وذلك

بتوصيلهما بفرق جهد ثابت مقداره 50 V عند الطرفين AB

ثم وصل الطرفين A و B ببعضهما بدون المصدر 50 V

عين الشحنة النهائية على كل مكثف

الجواب : $q_{20} = 444\frac{1}{3} \mu C$, $q_{40} = 888\frac{2}{3} \mu C$



شكل ٣٧ - ١

٣٥ - ١ بين أنه إذا أثر فرق جهد $v = I_m \sin \omega t$ على مقاوم R فإن الطاقة تعطى بالعلاقة $\frac{V_m^2}{2R} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right)$

٣٦ - ١ مكثف حثه L يمر به تيار قيمته $I_m [1 - e^{-\frac{R}{L}t}]$ بين أن القيمة العظمى للطاقة المخزونة W_m في المجال المغناطيسي

تعطى بالعلاقة $W_m = \frac{1}{2} L I_m^2$ (عندما $t < 0$)

٣٧ - ١ مكثف سعته C يمر به تيار قيمته $\frac{V_m}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ بين أن القيمة العظمى للطاقة المخزونة في المجال الكهربائي تعطى

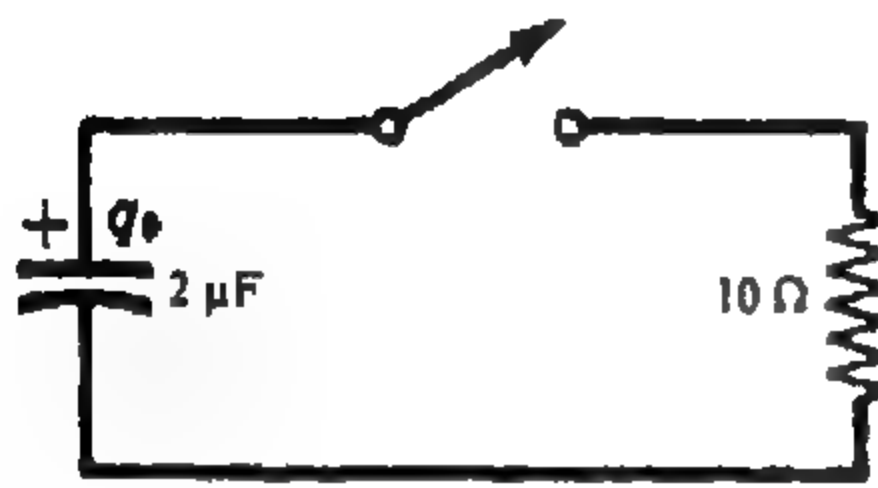
بالعلاقة $W_m = \frac{1}{2} C V_m^2$ (عندما $t = 0$)

٣٨ - ١ في دائرة RC الموضحة في الشكل ٣٨-١ تستنفذ طاقة مقدارها

$3.6 \cdot 10^{-3} \text{ joules}$ في المقاوم 10Ω وذلك عند غلق المفتاح .

احسب الشحنة الابتدائية q_0 التي كانت على المكثف .

الجواب : $q_0 = 120 \mu C$



شكل ٣٨ - ١

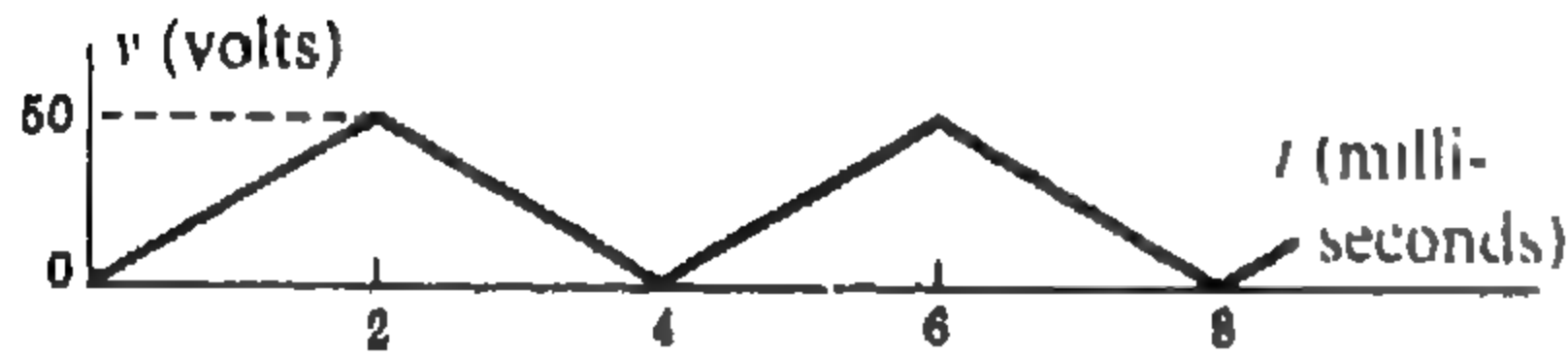
٣٩ - ١ بين أن لكل من المقدارين $\frac{1}{2} CV^2$ و $\frac{1}{2} LI^2$ نفس وحدات الطاقة

٤٠ - ١ مكثف نقي سعته $60 \mu F$ يؤثر عليه فرق جهد شكله

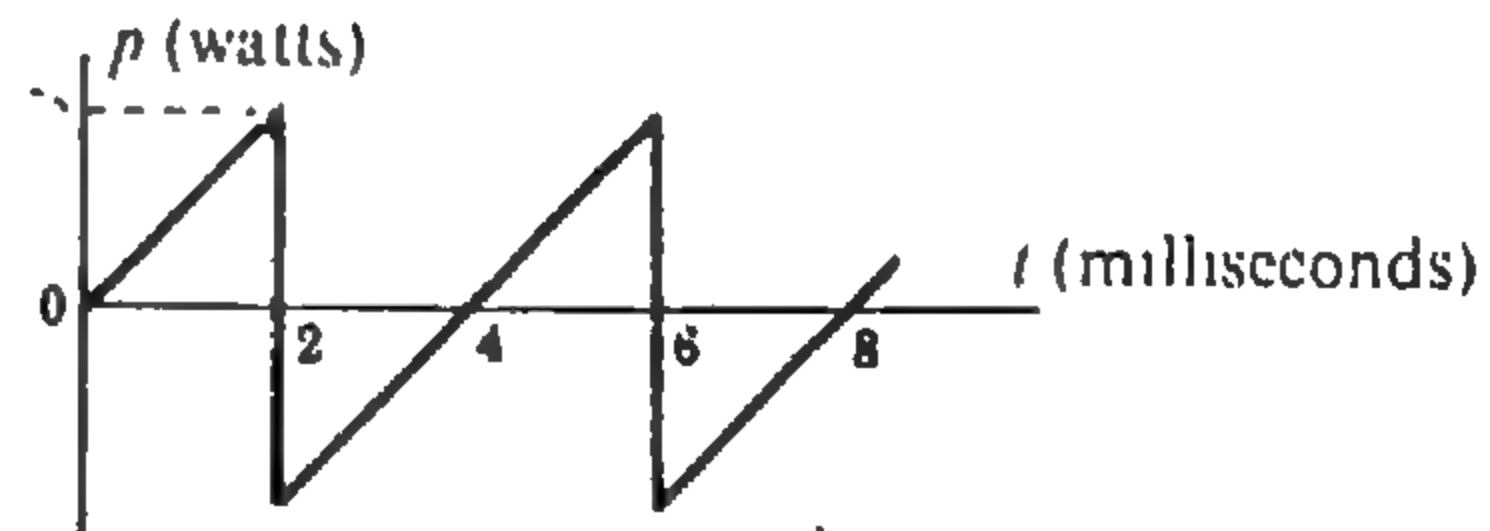
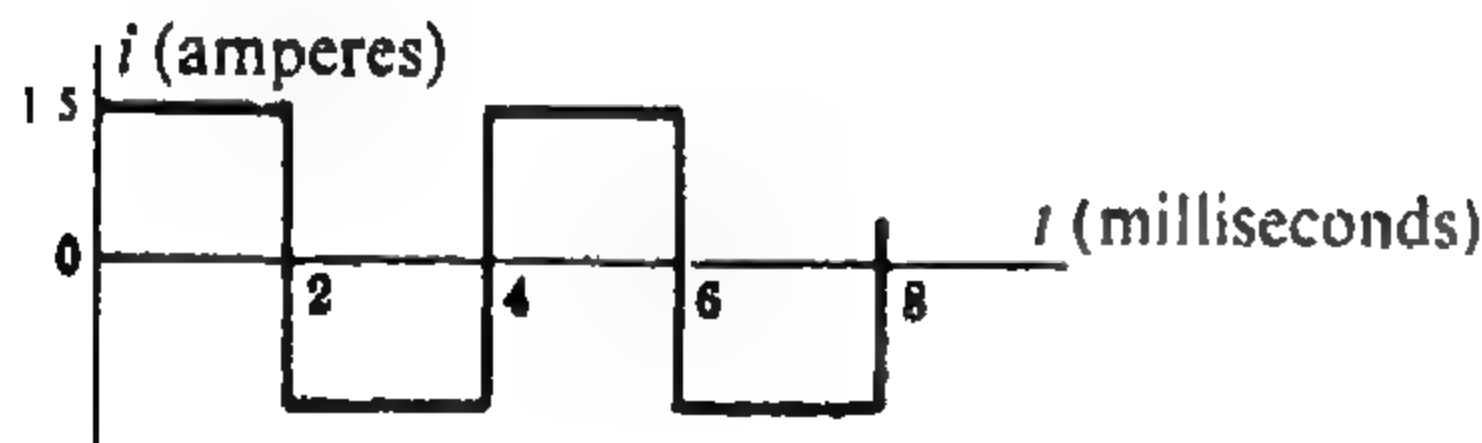
الموجي معطى بالشكل ٣٩-١ . ارسم $i(t)$

و $p(t)$ وعين I_m و P_m .

الجواب : $I_m = 1.5 A$, $P_m = 75 W$



شكل ٣٩ - ١



٤١ - ١ إذا كان فرق الجهد المؤثر على مكثف نقي يعطى بالعلاقة

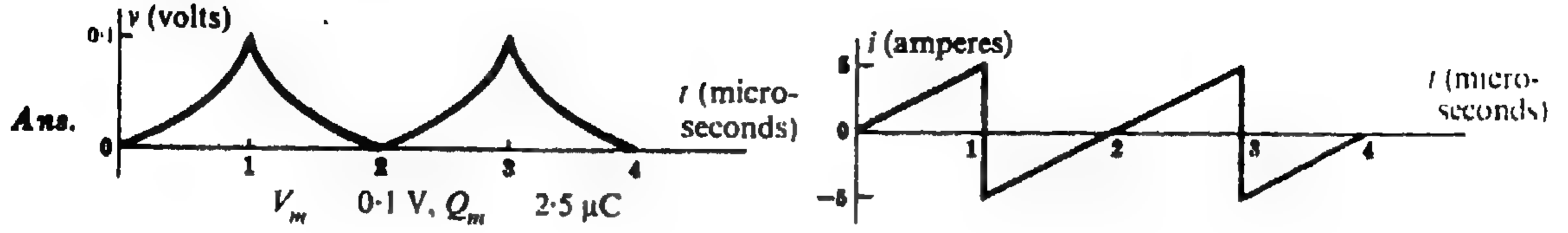
$$v = V_m \left[\omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \frac{(\omega t)^7}{7!} + \dots \right]$$

فأوجد علاقة التيار المار بالمكثف .

الجواب : $i = \omega C V_m \cos \omega t$ و $i = \omega C V_m \left[1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \dots \right]$

١ - ٢ : تيار شكله الموجي موضح بالشكل ١-١ يمر في مكثف ثقت $C = 25 \mu F$. ارسم الشكل الموجي لفرق الجهد وعين كلا من V_m و Q_m .

الجواب :

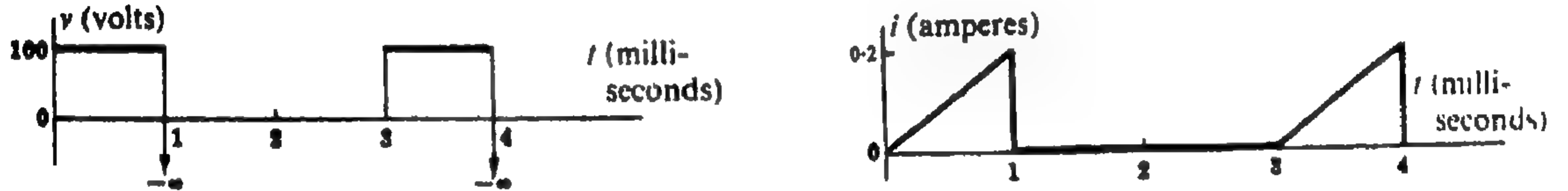


شكل ١-١

١ - ٣ : مكثف سته $2 \mu F$ ، تعطى الشحنة عليه بالداه $q = 100 [1 - e^{-5 \times 10^4 t}] \mu C$ عبر دالتى فرق الجهد والتيار المقابلين . الجواب : $v = 50 [1 - e^{-5 \times 10^4 t}] \text{ volts}$, $i = -5e^{-5 \times 10^4 t} \text{ amperes}$

١ - ٤ : يوضح الشكل ١-١ الشكل الموجي لتيار يمر في ملف ثقت L . فإذا كان الشكل الموجي لفرق الجهد المقابل له ثقت قيمتها 100 V ، فاهى قيمة L ؟ . ارسم الشكل الموجي لفرق الجهد .

الجواب : $L = 0.5 \text{ H}$

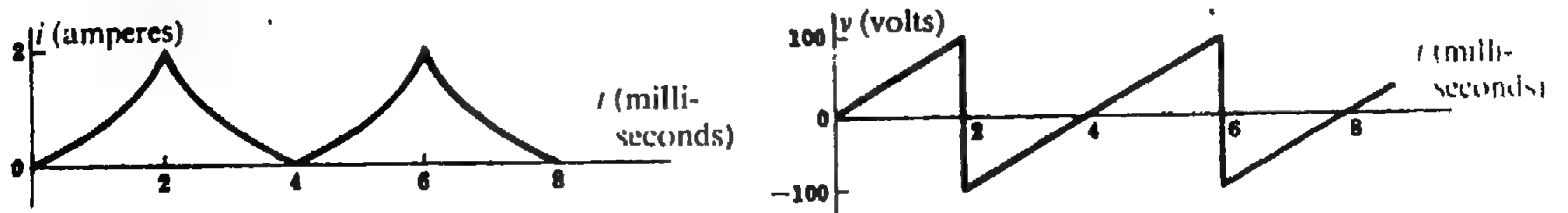


شكل ١-١

ملحوظة : في الحالة العملية لا يمكن للتيار المار في الملف أن يأخذ شكل دالة غير متصلة كما هو موضح بالشكل الموجي للتيار عند $t = 1 \text{ ms}$ و $t = 4 \text{ ms}$. وبما أن فرق الجهد يساوى المشتقة الأولى لدالة مضروبة في L ، وهذه المشتقة لها قيمة سالبة غير محددة عند نقط انقطاع الدالة ، فإن الشكل الموجي لفرق الجهد يأخذ قيما سالبة غير محددة عند تلك النقط .

١ - ٥ : ملف ثقت 0.05 H يؤثر عليه جهد شكله الموجي معطى بالشكل ١-٢ . ارسم الشكل الموجي للتيار وأوجد علاقة التيار في الفترة $0 < t < 2 \text{ ms}$.

الجواب : $i = 5 \times 10^{-2} \text{ amperes}$



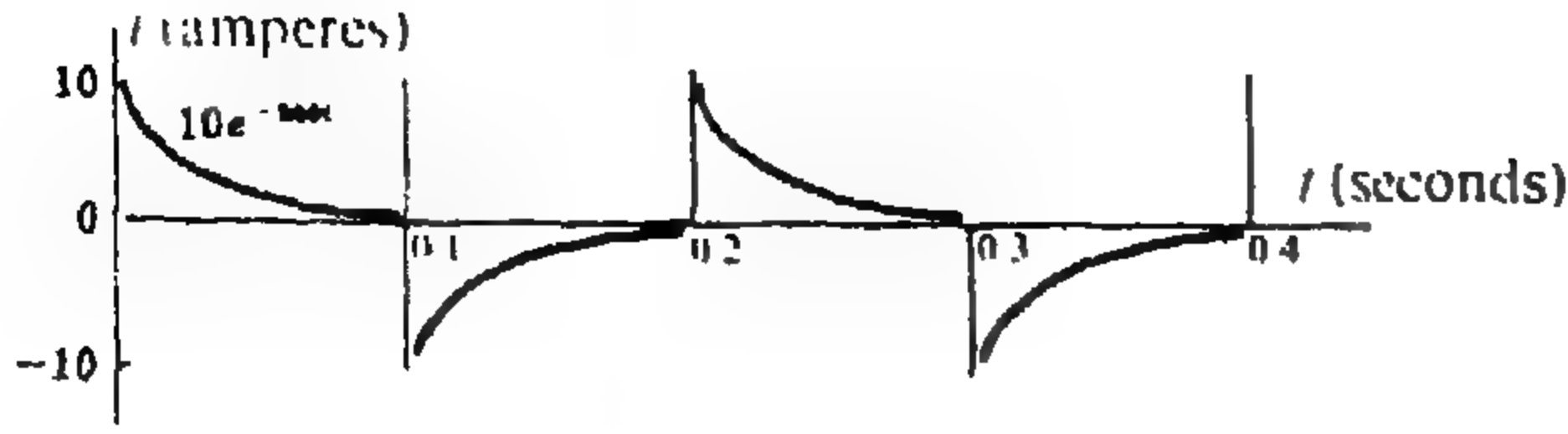
شكل ١-٢

١-٦ : يوضح الشكل ١-٣ : الشكل الموجي للتيار

المرار في دائرة متصلة على التوالي تتكون من

الجهود v_L على المقاومة و فرق الجهد v_L على

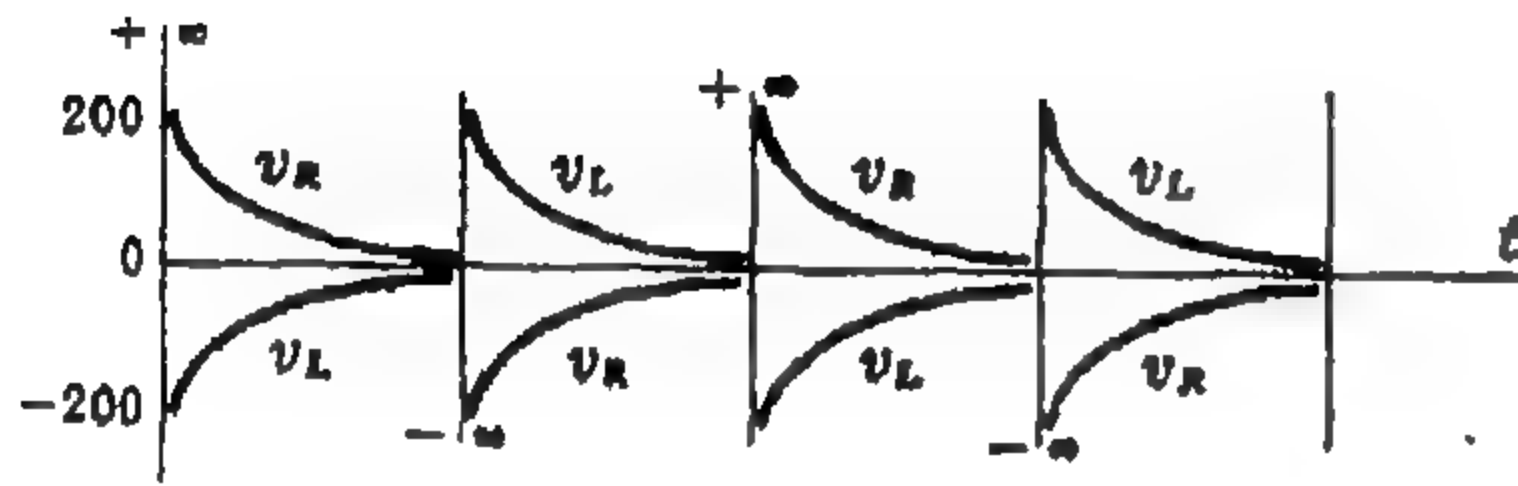
الملف وكذلك مجموعهما .



الجواب : عندما $0 < t < 0.15$

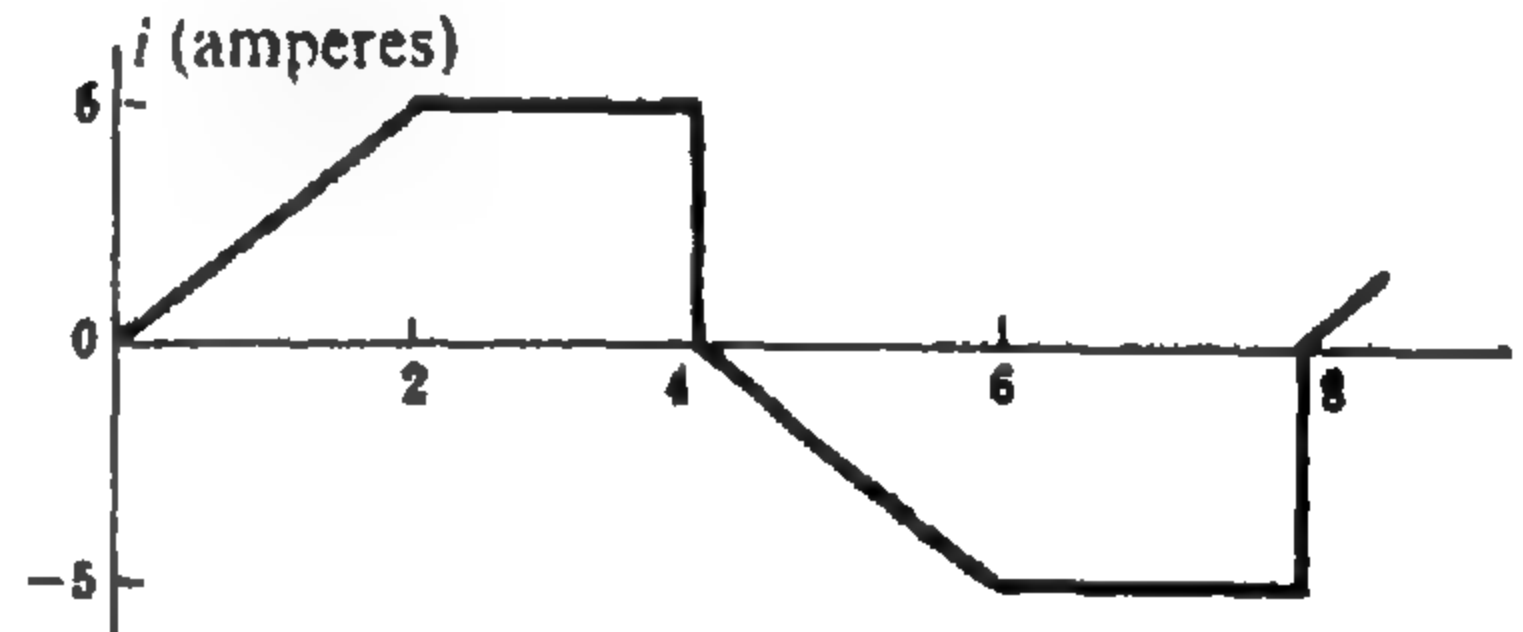
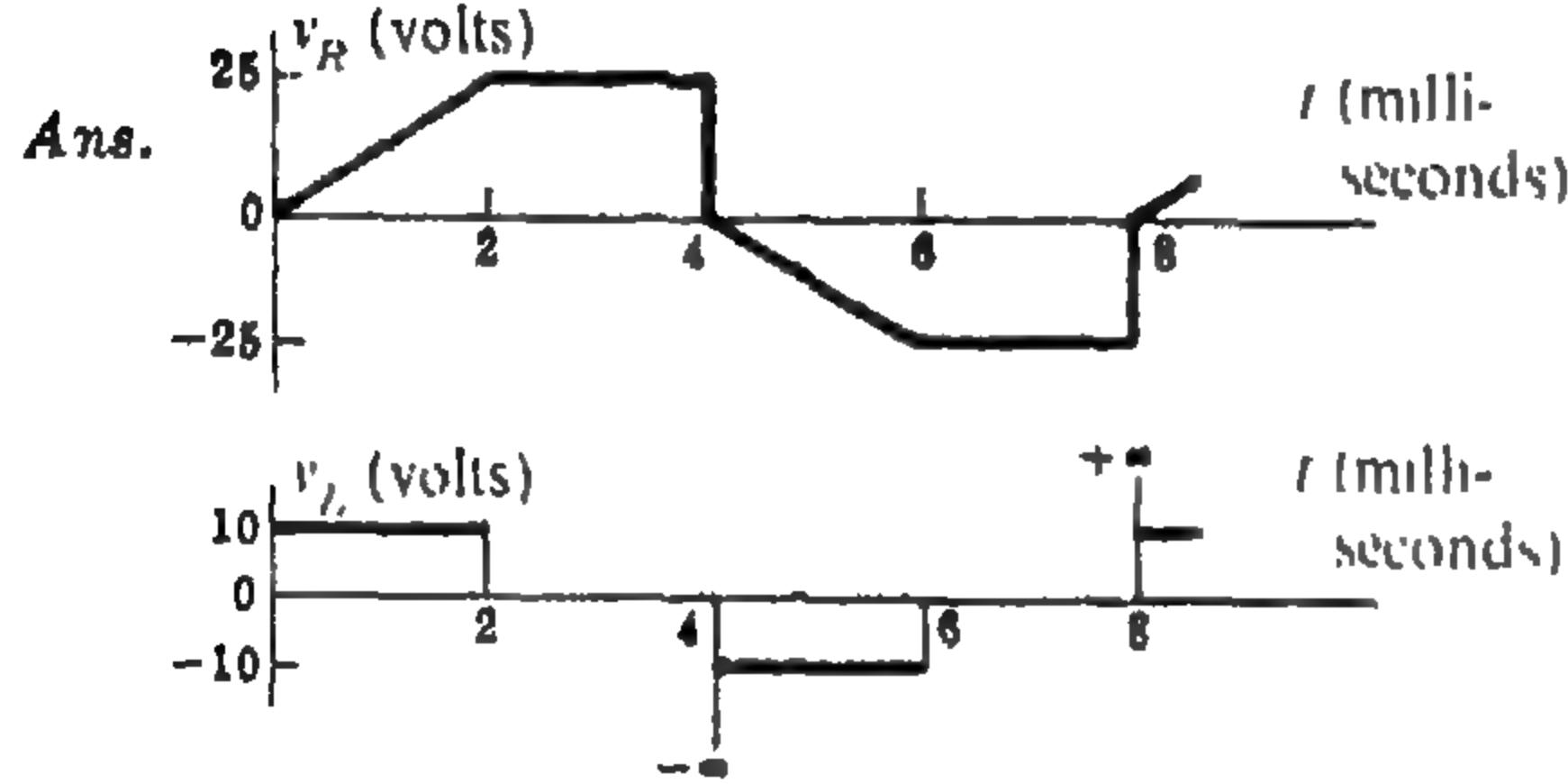
شكل ١-٣

$$v_R = 200e^{-200t} \text{ volts, } v_L = -200e^{-200t} \text{ volts, } v_T = 0$$



١-٧ : دائرة RL على التوالي فيها $L = 0.004 \text{ H}$ ، $R = 5 \Omega$ يمر فيها تيار شكله الموجي موضح في الشكل ١-٤ :

ارسم v_L و v_R .



شكل ١-٤

١-٨ : دائرة RL على التوالي فيها $R = 10 \Omega$ و $L = 0.5 \text{ H}$ يؤثر عليها فرق جهد يعطى بمنحنى جيبي ، فإذا

كان التيار المرار يعطى بالعلاقة : $i = 0.822e^{-20t} + 0.822 \sin(377t - 86.96^\circ)$ amperes فعين كاد

من v_R و v_L و v_T .

$$\begin{aligned} v_R &= 8.22e^{-20t} + 8.22 \sin(377t - 86.96^\circ) \text{ volts} \\ v_L &= -8.22e^{-20t} + 155 \cos(377t - 86.96^\circ) \text{ volts} \\ v_T &= 155 \sin 377t \text{ volts} \end{aligned}$$

الجواب :

١-٩ : دائرة RL على التوالي فيها $R = 100 \Omega$ و $L = 0.05 \text{ H}$ فإذا كان التيار المرار بها يعطى بالدالة الموضحة

بمعدنيين v_L و v_M في كل فترة .

$$0 < t < 10 \times 10^{-3} \text{ s, } i = 5[1 - e^{-2000t}] \text{ amperes (١)}$$

$$10 \times 10^{-3} < t, i = 5e^{-2000(t - 10 \times 10^{-3})} \text{ amperes (٢)}$$

$$v_R = 500[1 - e^{-2000t}] \text{ volts, } v_L = 500e^{-2000t} \text{ volts (١)}$$

$$v_R = 500e^{-2000(t - 10 \times 10^{-3})} \text{ volts, } v_L = 500e^{-2000(t - 10 \times 10^{-3})} \text{ volts (٢)}$$

الجواب :

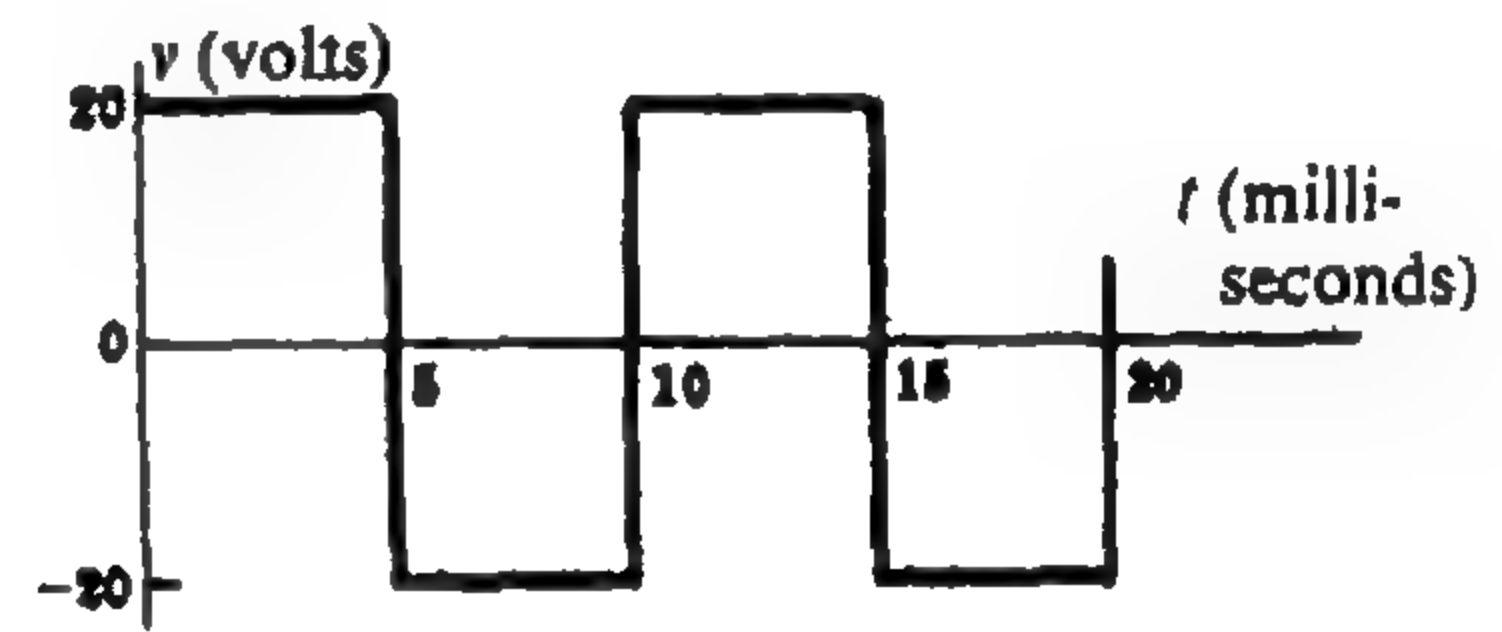
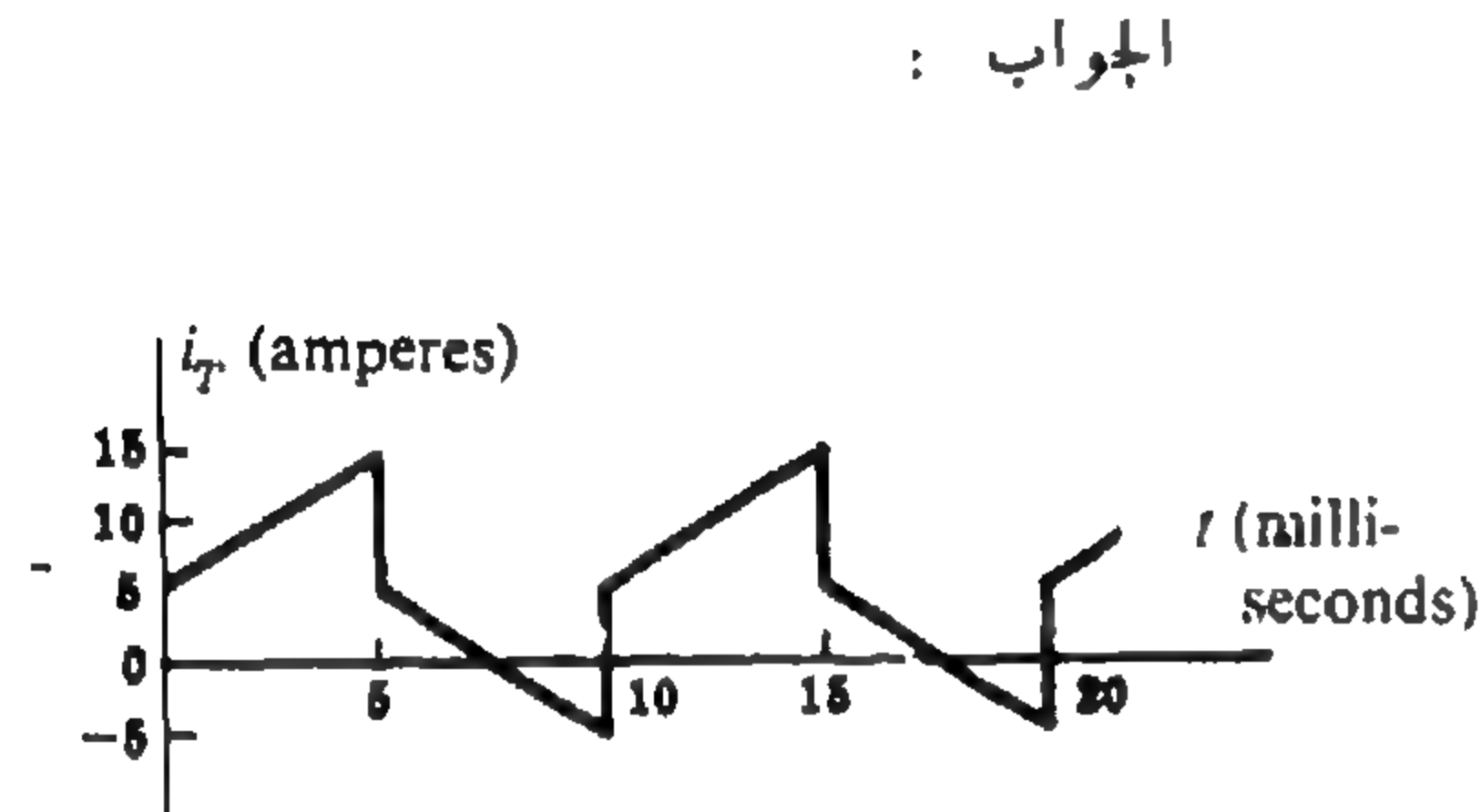
٥٠ - ١ إذا كان التيار المار في دائرة RC على التوالي هو $i = 10 e^{-500t}$ amperes. وكانت لا توجد شحنة في البداية على المكثف ثم أصبح على المكثف شحنة مقدارها 0.02 coulombs. بعد مرور القيار . فعين كلا من v_R و v_C علما بأن فرق الجهد المؤثر هو $V = 100$ volts. و فرق الجهد على المكثف هو $v_C = 100[1 - e^{-500t}]$ volts.
 الجواب $C = 200 \mu F, v_R = 100 \cdot e^{-500t}$ volts

٥١ - ١ دائرة LC على التوالي بها $L = 0.02$ H و $C = 30 \mu F$ فإذا كان التيار المار فيها يعطى بالعلاقة $i = 1.5 \cos 1000t$ amperes. فوحد فرق الجهد الكلي v_T .
 الجواب $v_T = 20 \sin 1000t$ volts

٥٢ - ١ دائرة RL على التوازي يؤثر عليها فرق جهد يعطى بموجة مربعة كما هو موضح في الشكل ٤٥-١. عين التيار الكلي.



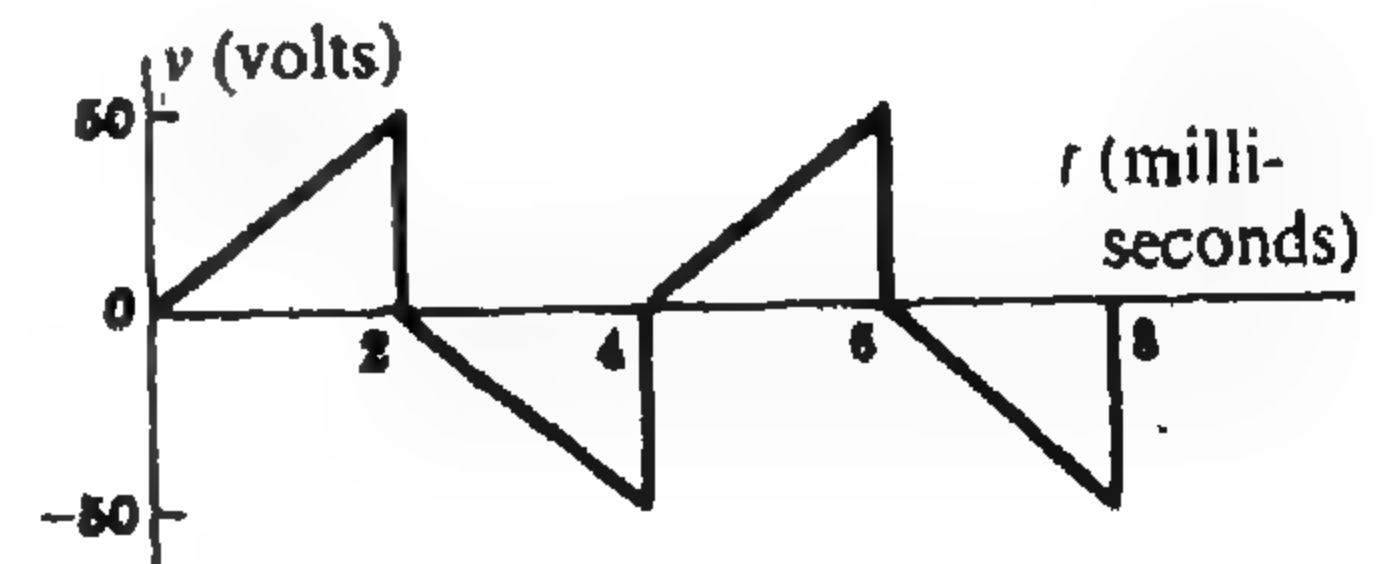
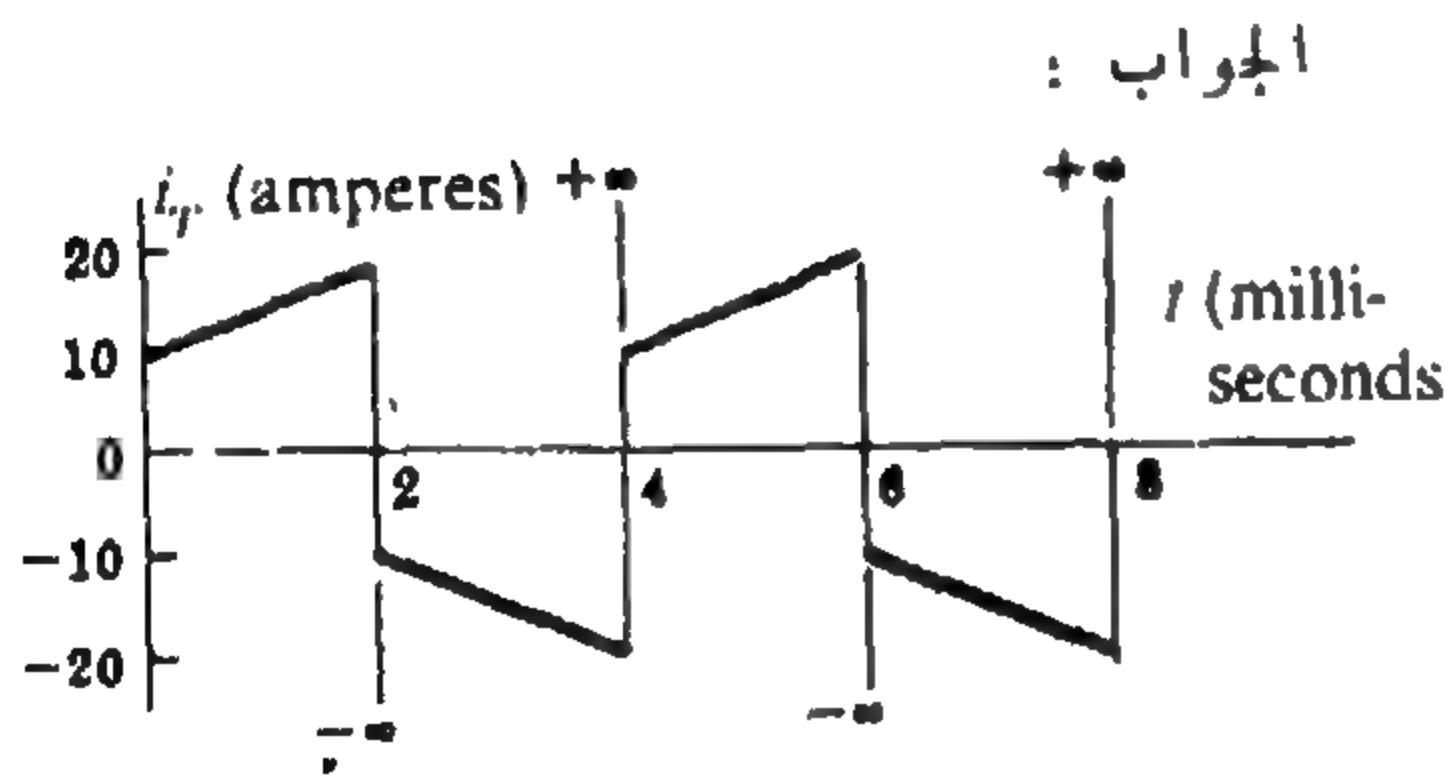
شكل ٤٥-١



٥٣ - ١ دائرة RC على التوازي يؤثر عليها فرق جهد شكله الموجي موضح في الشكل ٤٦-١. عين التيار الكلي i_T .



شكل ٤٦-١

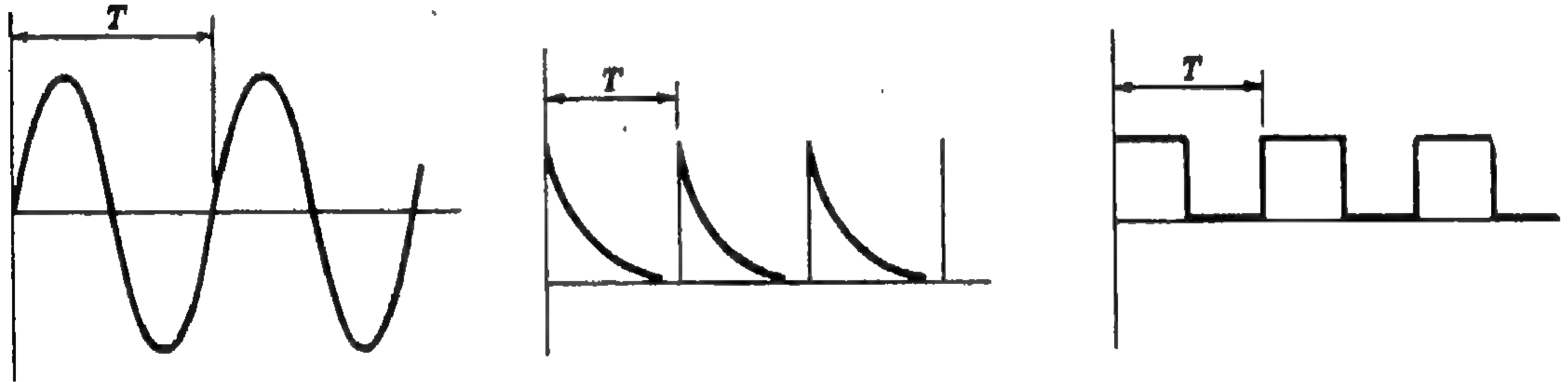


الفصل الثاني

القيم المتوسطة والفعالة

الأشكال الموجية :

التمثيل التصوري أو منحنيات الدوال $v(t)$ و $i(t)$ و $p(t)$ الخ هي عبارة عن الأشكال الموجية لفرق الجهد والتيار والقدرة على الترتيب . والتحليل المبدئي للدوائر يختص فقط بالدوال الدورية ، أى تلك الدوال التي لها $f(t) = f(t + nT)$ حيث n عدد صحيح و T الدورة ، كما هو موضح في الشكل ١ - ٢ . وإذا كانت الدالة دورية فإنه يلزم على الأقل دورة واحدة حتى يسمى الرسم شكلاً موجياً .



شكل ١ - ٢ أشكال موجية دورية

ودوال فرق الجهد والتيار $v(t)$ و $i(t)$ هي صيغ رياضية تأخذ غالباً عدة أشكال . فمثلاً دوال الجيب وجيب التمام يمكن التعبير عنها بمسلسلة قوى لانهائية . ويجب التأكيد على تطبيق المعادلات الأساسية للتيار وفرق الجهد لعناصر الدائرة الثلاثة بنفس النظر عن الأشكال الرياضية .

القيمة المتوسطة :

القيمة المتوسطة Y_{av} لدالة دورية $y(t)$ بدورة T تعطى بالمعادلة

$$Y_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

جذر متوسط مربع القيمة أو القيمة الفعالة :

التيار $i(t)$ المار في مقاوم R ينتج قدرة $p(t)$ قيمتها المتوسطة P . ويمكن أن تنتج نفس القيمة P في R من مرور تيار ثابت I . في هذه الحالة يقال إن $i(t)$ له قيمة فعالة I_{rms} تساوى ذلك التيار الثابت I . نفس الشيء يمكن تطبيقه على دوال فرق الجهد حيث يرمز V_{rms} للقيمة الفعالة . وعموماً فللدالة $y(t)$ التي لها دورة T قيمة فعالة Y_{rms} تعطى بالمعادلة

$$Y_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \overline{v(t)}^2 dt}$$

القيمة الفعالة للدوال $a \sin \omega t$ و $a \cos \omega t$ هي $a/\sqrt{2}$. انظر المسألة ٢-٢ .

جذر متوسط مربع (ج.م.م) قيمة حدود من الجيب وجيب التمام :

الدالة $v(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots) + (b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots)$ لها قيمة فعالة

$$Y_{rms} = \sqrt{a_0^2 + (A_1^2 + A_2^2 + \dots) + (B_1^2 + B_2^2 + \dots)}$$

تعطى بالتالي

وأيضاً إذا كانت A هي القيمة الفعالة للدالة $a_1 \cos \omega t$ ، فإن $A_1 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ ، $A_2 = \frac{a_2}{2}$ ، والقيمة الفعالة هي

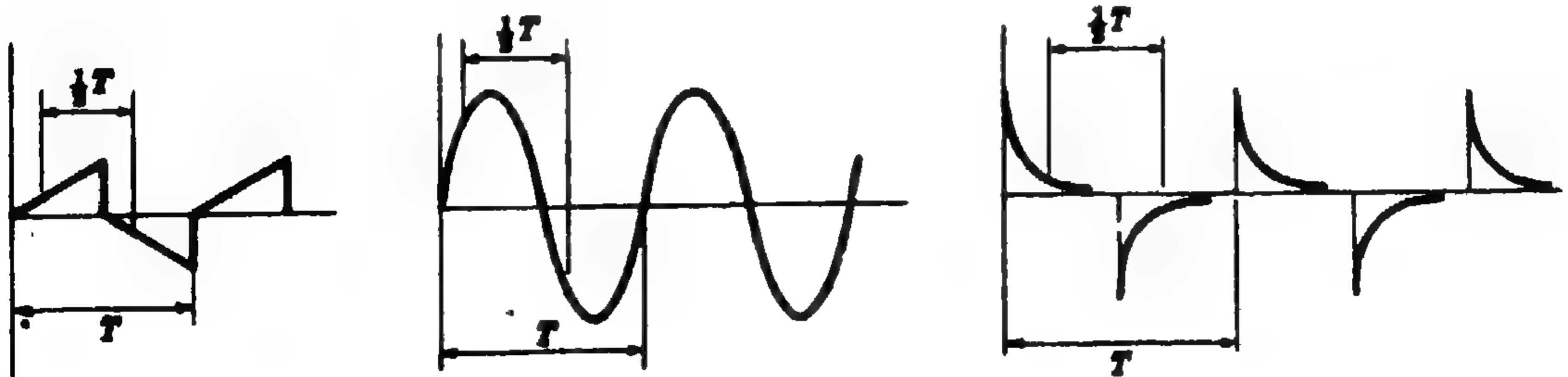
$$Y_{rms} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \dots) + \frac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2 + \dots)}$$

عامل الشكل :

تسمى النسبة بين القيمة الفعالة والقيمة المتوسطة بعامل الشكل F . الشكل الموجي . وعامل الشكل له استخدامات في توليد فرق الجهد وأجهزة تصحيح الموامل .

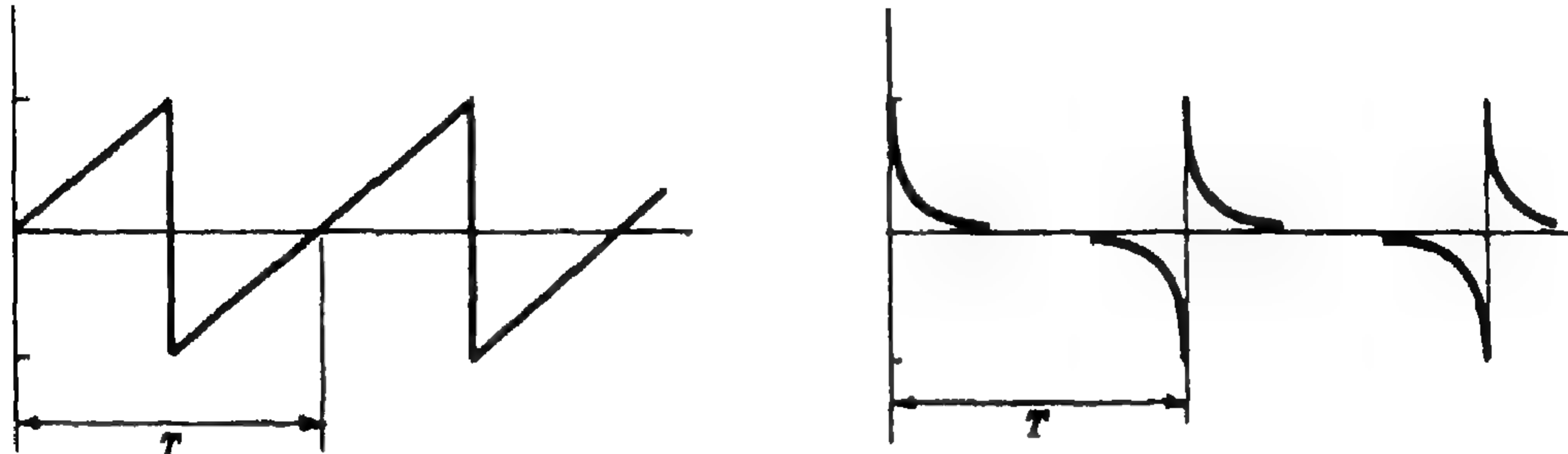
$$\text{عامل الشكل} = \frac{Y_{rms}}{Y_{av}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \overline{v(t)}^2 dt}}{\frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt}$$

القيمة المتوسطة للشكل الموجي الذي له تماثل نصف موجي ، أي $f(t) = -f(t + \frac{1}{2}T)$ ، تساوي صفراً ، كما هو موضح في الشكل ٢-٢ . ولهذه الأشكال الموجية ، التي منها الموجه الجيبية كشال ، نحسب Y_{av} على نصف الدورة الموجب . وتسمى أحياناً متوسط نصف الدورة .



شكل ٢-٢ تماثل نصف موجي

بعض الأشكال الموجية قيمتها المتوسطة تساوى صفراً بالرغم من أنه ليس لها تماثل نصف موجي ، كما هو موضح في الشكل ٢ - ٣ . ولحساب قيمة Y_{av} لاستخدامها في عامل الشكل فإننا نختار نصف دورة واحدة كما هو الحال في الأشكال الموجية التي لها تماثل نصف موجي .



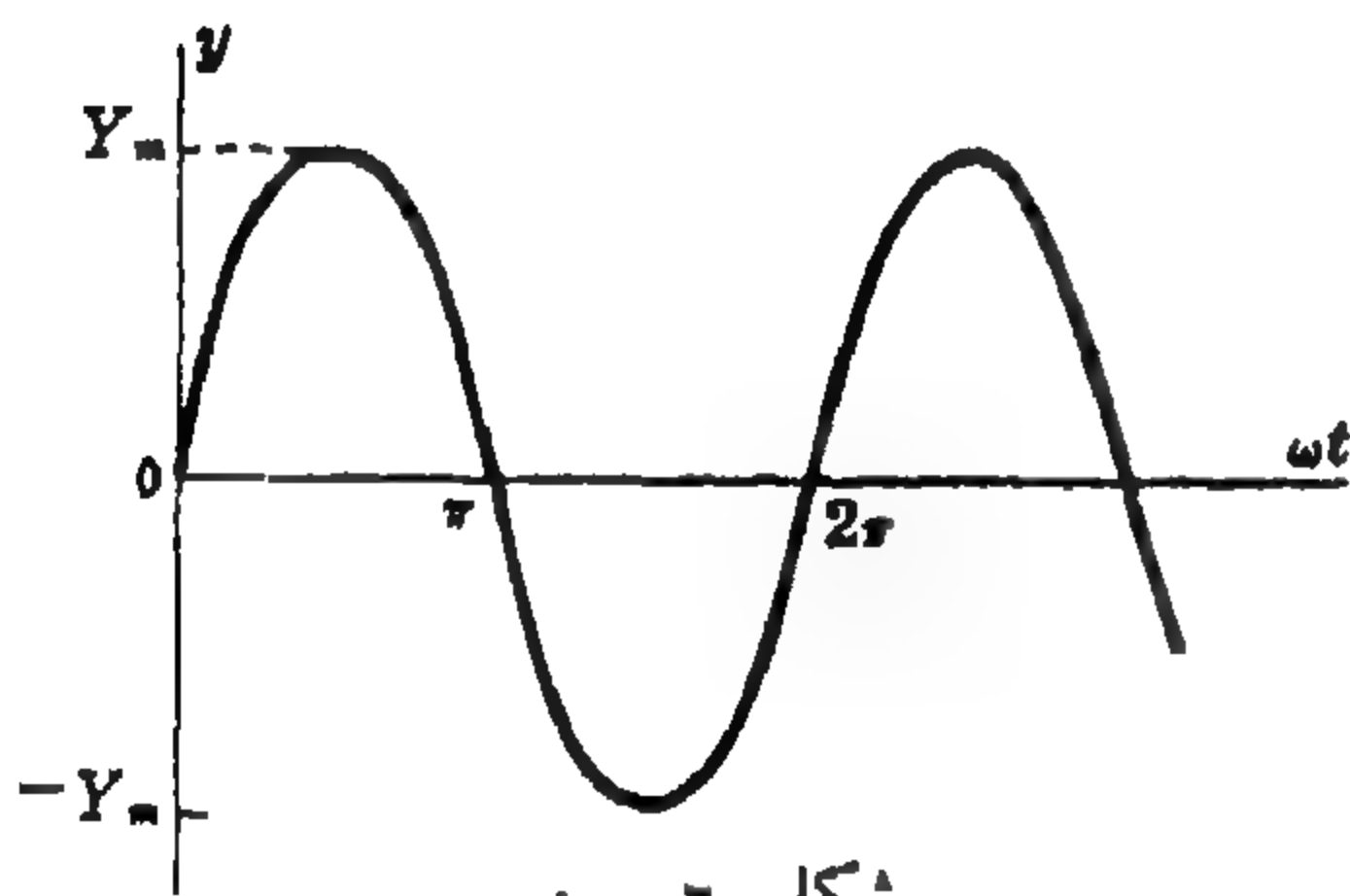
شكل ٢ - ٣

مسائل محلولة

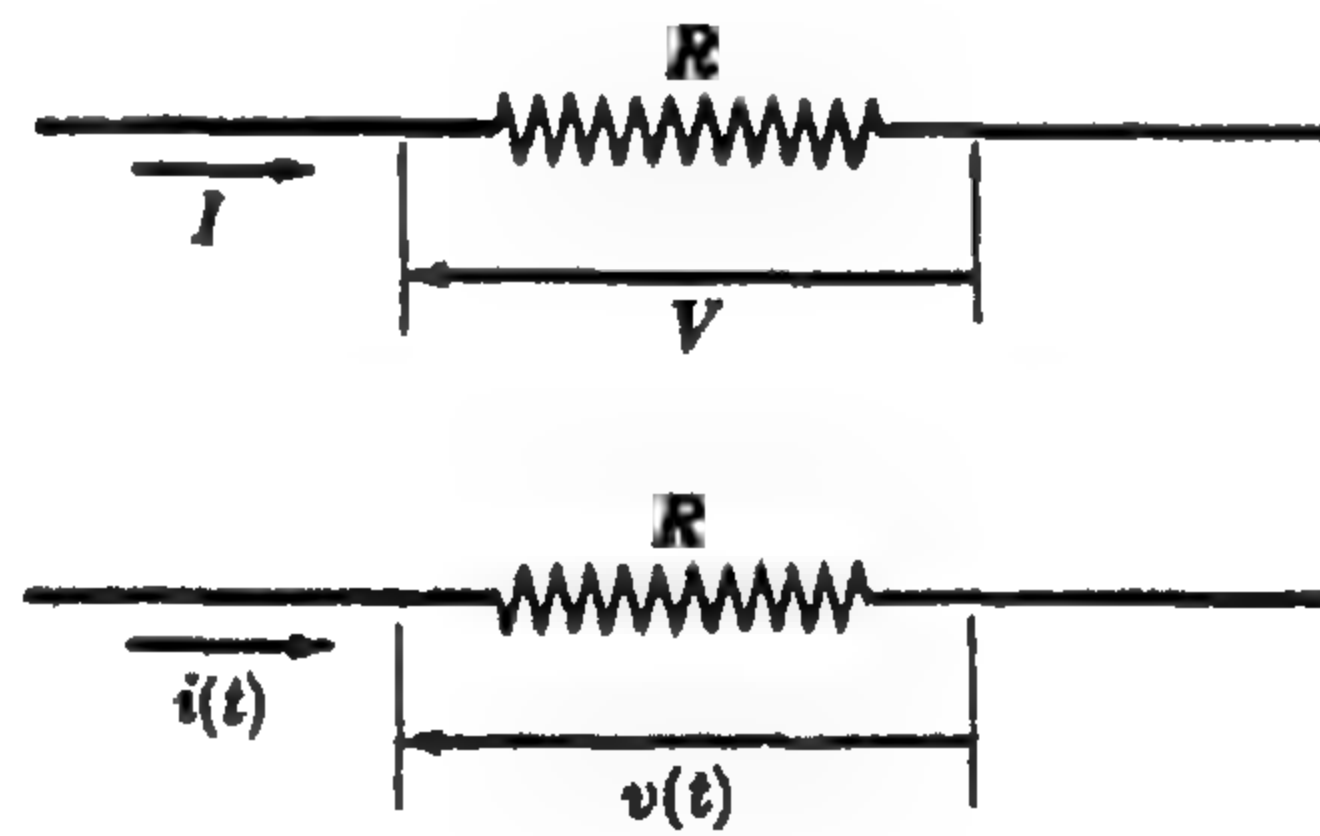
١-٢ مقاوم يحمل (أ) تيار ثابت I و (ب) تيار دوري $i(t)$ دورته T . انظر الشكل ٢ - ٤ . بين أن متوسط القدرة P متساو في الحالتين إذا كان $I_{rms} = I$.

للتيار الثابت I نجد أن $P = VI = I^2 R$.

وللتيار الدوري $i(t)$ نجد أن $p = vi = i^2 R$ و $P = \left(\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \right) R = I_{rms}^2 R$.



شكل ٢ - ٥



شكل ٢ - ٤

٢-٢ أوجد القيمة المتوسطة والفعالة (ج . م . م) للدالة $v(t) = Y_m \sin(\omega t)$.

إن الدورة تساوى 2π . ويوضح الشكل ٢ - ٥ منحنى الدالة مع اعتبار ωt كتغير مطلق .

$$Y_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_m \sin \omega t d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} Y_m [-\cos \omega t]_0^{2\pi} = 0$$

$$Y_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Y_m \sin \omega t)^2 d(\omega t)} = \frac{Y_m}{\sqrt{2}} = 0.707 Y_m$$

إذن نجد . م . م . م قيمة دالة جيئية أو جيب تمامية تقليد به يساوى $1/\sqrt{2}$ أو 0.707 مضروباً في القيمة العظمى للدالة .

٢-٢ احسب القيمة المتوسطة للقوة P في مقاومة نقية قيمتها 10Ω وتحمل تياراً يعطى بالعلاقة

$$i(t) = 14.14 \cos \omega t \text{ amperes?}$$

بما أن : $p = R i^2 = 2000 \cos^2 \omega t \text{ watts}$ وأذ دورة القدرة p تساوى π فإن متوسط القدرة هو

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2000 \cos^2 \omega t d(\omega t) = 1000 \text{ W}$$

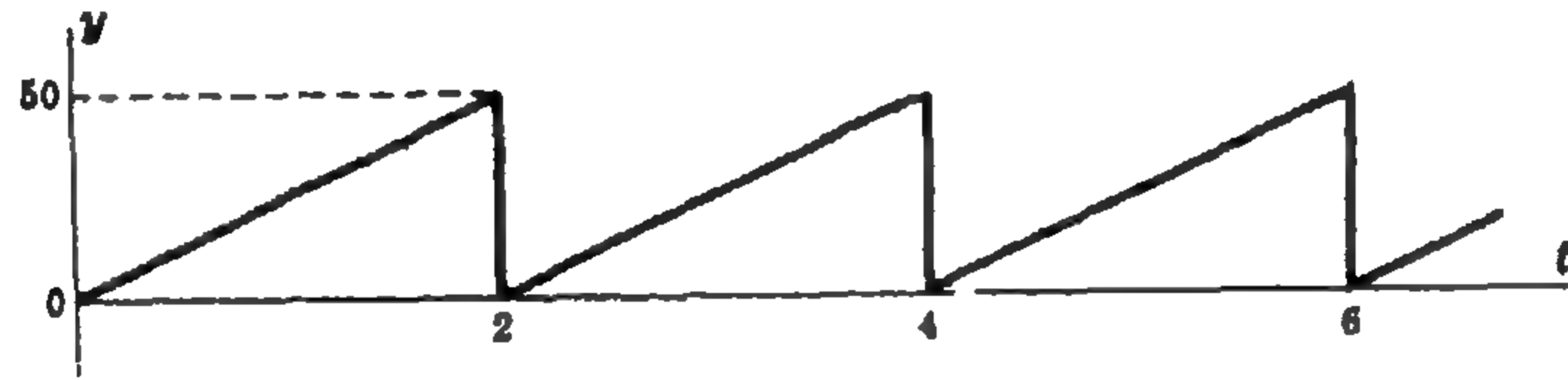
طريقة ثانية : يعطى متوسط القدرة في مقاوم نقي R بحمل تياراً دورياً $i(t)$ بالعلاقة

$$P = I_{rms}^2 R = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (14.14 \cos \omega t)^2 d(\omega t) \right\} 10 = (14.14/\sqrt{2})^2 (10) = 1000 \text{ W}$$

٢-٤ أوجد القيمة المتوسطة والقيمة الفعالة لشكل موجى على هيئة سن منشار كما هو موضح في الشكل ٢-٦ .

بالفحص نجد أن $Y_{av} = 25$ وفي الفترة $0 < t < 2$ نجد $y = 25t$ ، إذن

$$Y_{rms} = 28.9 \quad , \quad Y_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^2 625t^2 dt = 854$$



شكل ٢-٦

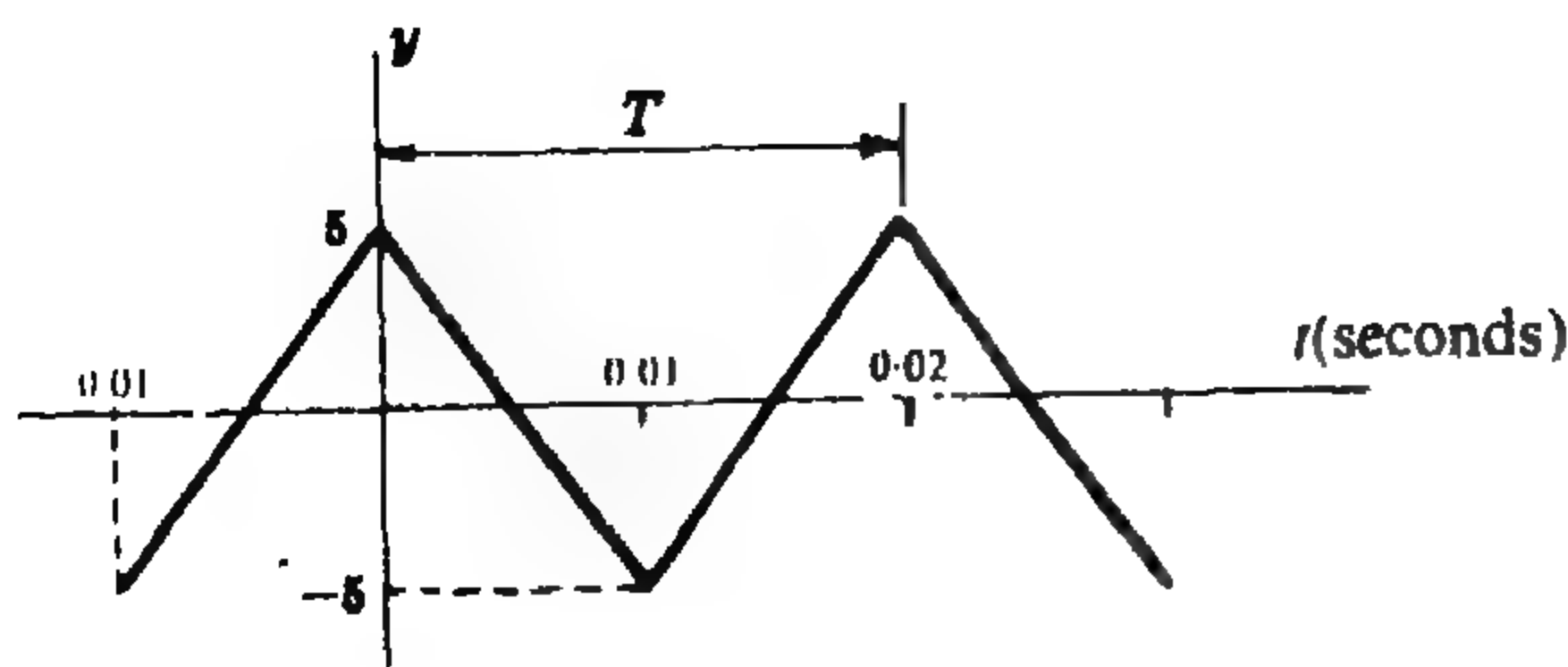
٢-٥ عين القيمة المتوسطة و ج.م.م القيمة للشكل الموجى الموضح في الشكل ٢-٧ علماً بأن $y = 10e^{-200t}$ في الفترة الأولى .

$$Y_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T y dt = \frac{1}{0.05} \int_0^{0.05} 10 e^{-200t} dt = \frac{10}{0.05(-200)} \left[e^{-200t} \right]_0^{0.05}$$

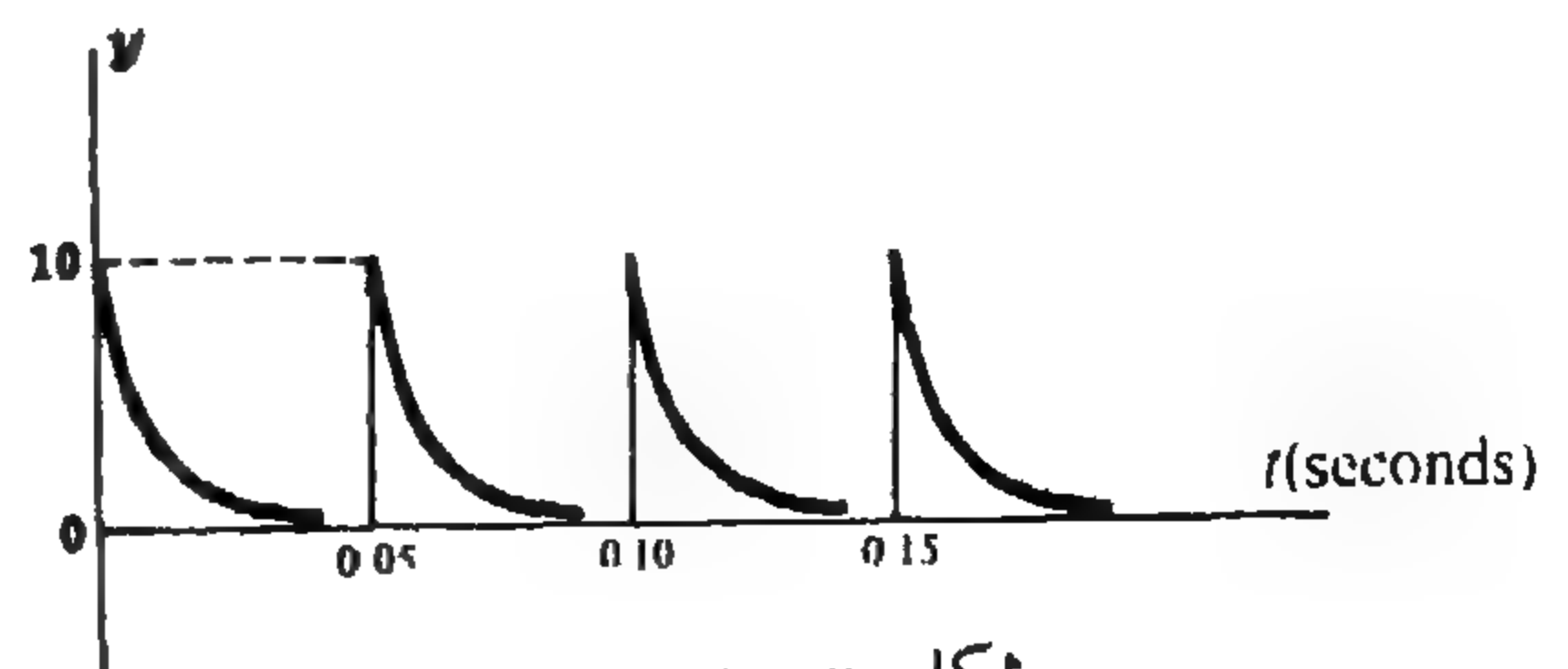
$$= -1[e^{-10} - e^0] = 1.00$$

$$Y_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt = \frac{1}{0.05} \int_0^{0.05} 100 e^{-400t} dt = 5.00,$$

$$Y_{rms} = 2.24 \text{ إذن}$$



شكل ٢-٨



شكل ٢-٧

٢-٦ أوجد عامل الشكل للموجة المثلثة الشكل الموضحة في الشكل ٢-٨

$$0.01 \leq t \leq 0: y(t) = 1000t + 5; \quad \overline{y(t)^2} = 10^4 t^2 + 10^4 t + 25$$

$$0 \leq t \leq 0.01: y(t) = -1000t + 5; \quad \overline{y(t)^2} = 10^4 t^2 - 10^4 t + 25$$

$$Y_{rms}^2 = \frac{1}{0.02} \left\{ \int_{-0.01}^0 (10^4 t^2 + 10^4 t + 25) dt + \int_0^{0.01} (10^4 t^2 - 10^4 t + 25) dt \right\} = 8.33, \quad r_{ms} = 2.89$$

بما ان الشكل الموجي له تماثل نصف موجي فإننا نأخذ المتوسط في الجزء الموجب ، إذن

$$Y_{av} = \frac{1}{0.01} \left\{ \int_{-0.01}^0 (1000t + 5) dt + \int_0^{0.01} (-1000t + 5) dt \right\} = 2.5$$

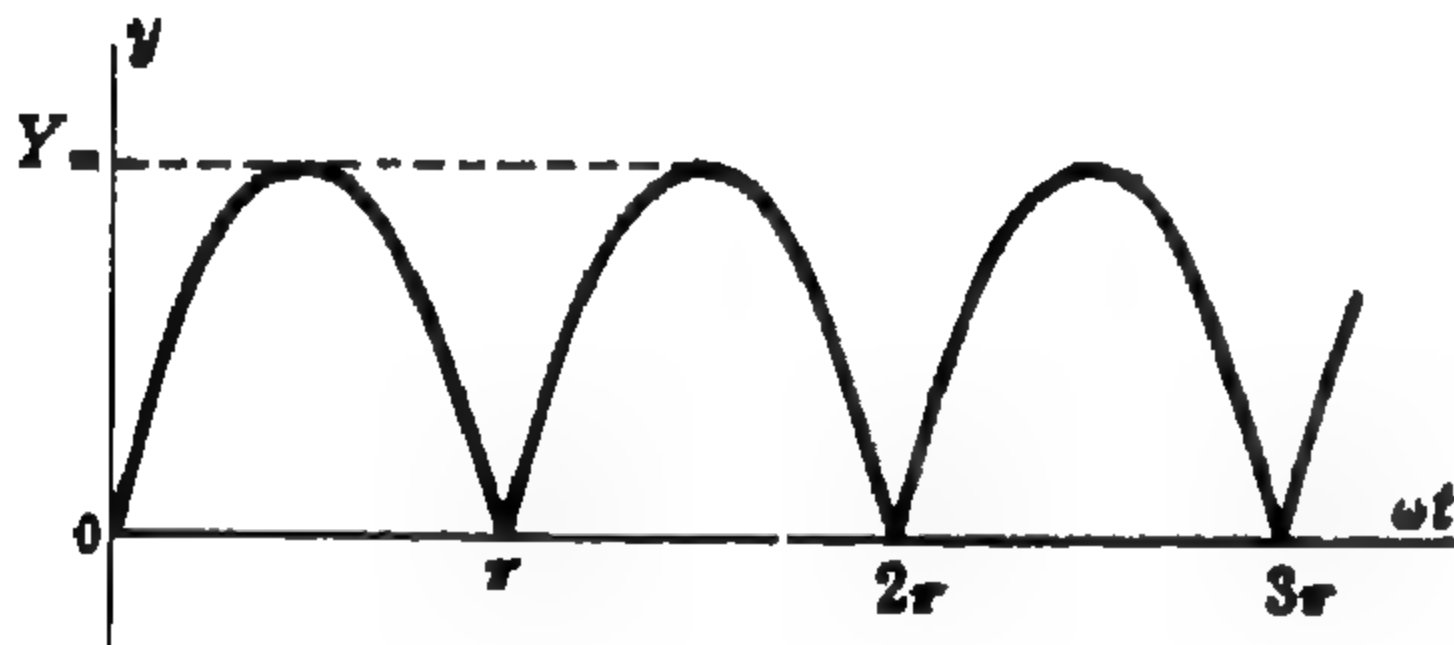
$$\text{عامل الشكل} = \frac{Y_{rms}}{Y_{av}} = \frac{2.89}{2.5} = 1.16$$

٢-٧ أوجد القيمة المتوسطة والقيمة الفعالة للموجة الجيبية المقومة نصف تقويم والموضحة في الشكل ٢-٩ .

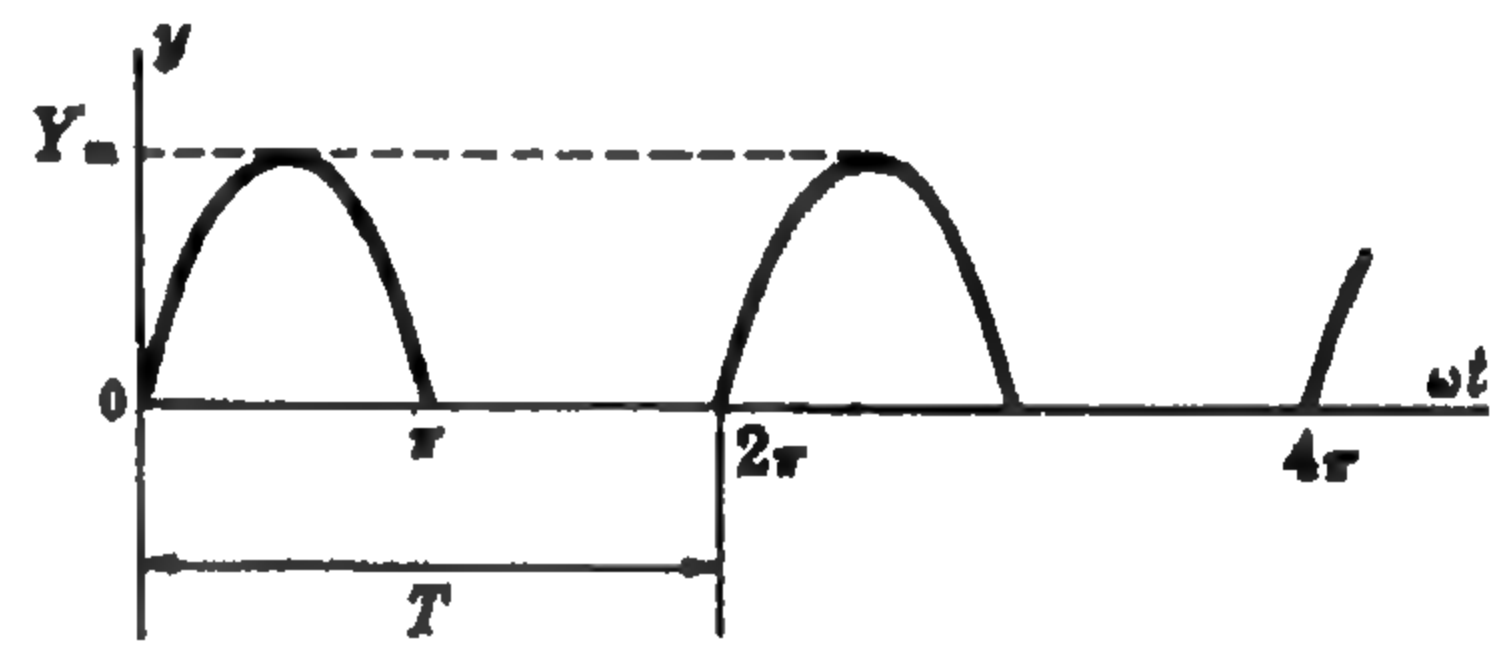
عندما $0 < \omega t < \pi$ فإن $y = Y_m \sin \omega t$; وعندما $\pi < \omega t < 2\pi$ فإن $y = 0$ والدورة تساوي 2π

$$Y_{av} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi Y_m \sin \omega t d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} 0 d(\omega t) \right\} = 0.318 Y_m$$

$$Y_{rms}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (Y_m \sin \omega t)^2 d(\omega t) = \frac{1}{2} Y_m^2, \quad Y_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_m$$



شكل ٢-١٠



شكل ٢-٩

٢-٨ أوجد القيمة المتوسطة و ج.م.م القيمة للموجة الجيبية المقومة تقويمياً كاملاً والموضحة في الشكل ٢-١٠ علماً بأن الدورة تساوي π .

$$Y_{av} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Y_m \sin \omega t d(\omega t) = 0.637 Y_m$$

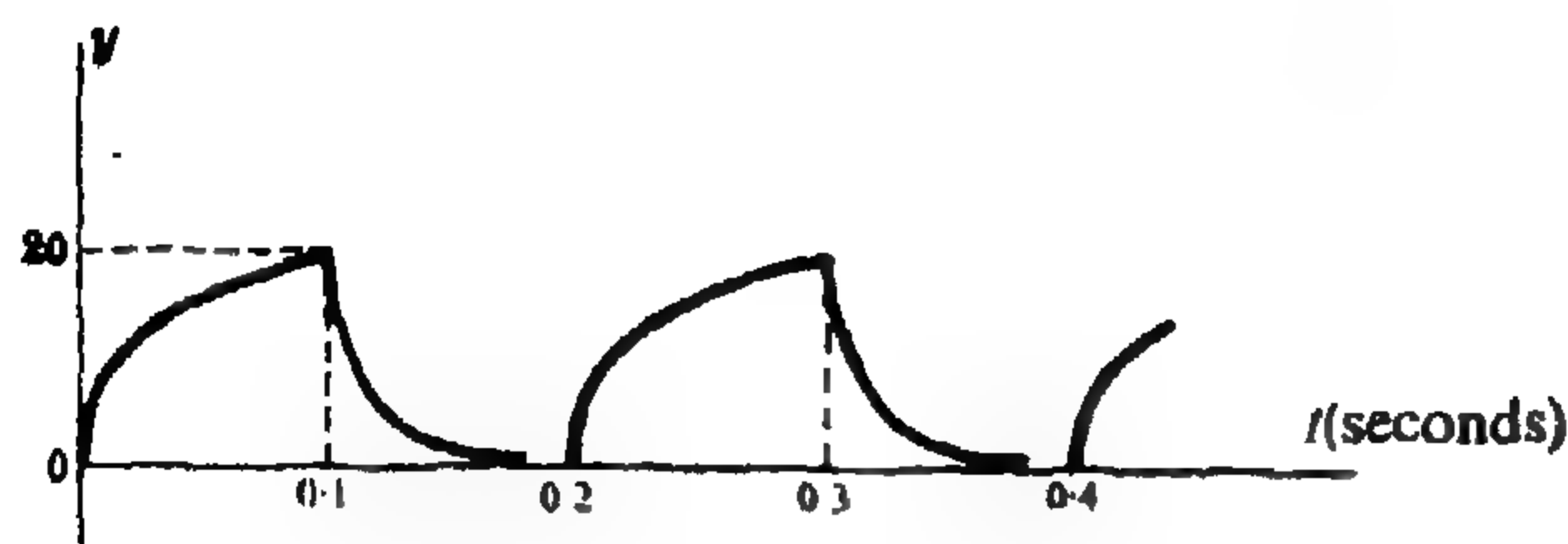
$$Y_{rms}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (Y_m \sin \omega t)^2 d(\omega t) = \frac{Y_m^2}{2}, \quad Y_{rms} = 0.707 Y_m$$

٢-٩ أوجد القيمة المتوسطة والفعالة للموجة المربعة الموضحة في الشكل ٢-١١ .

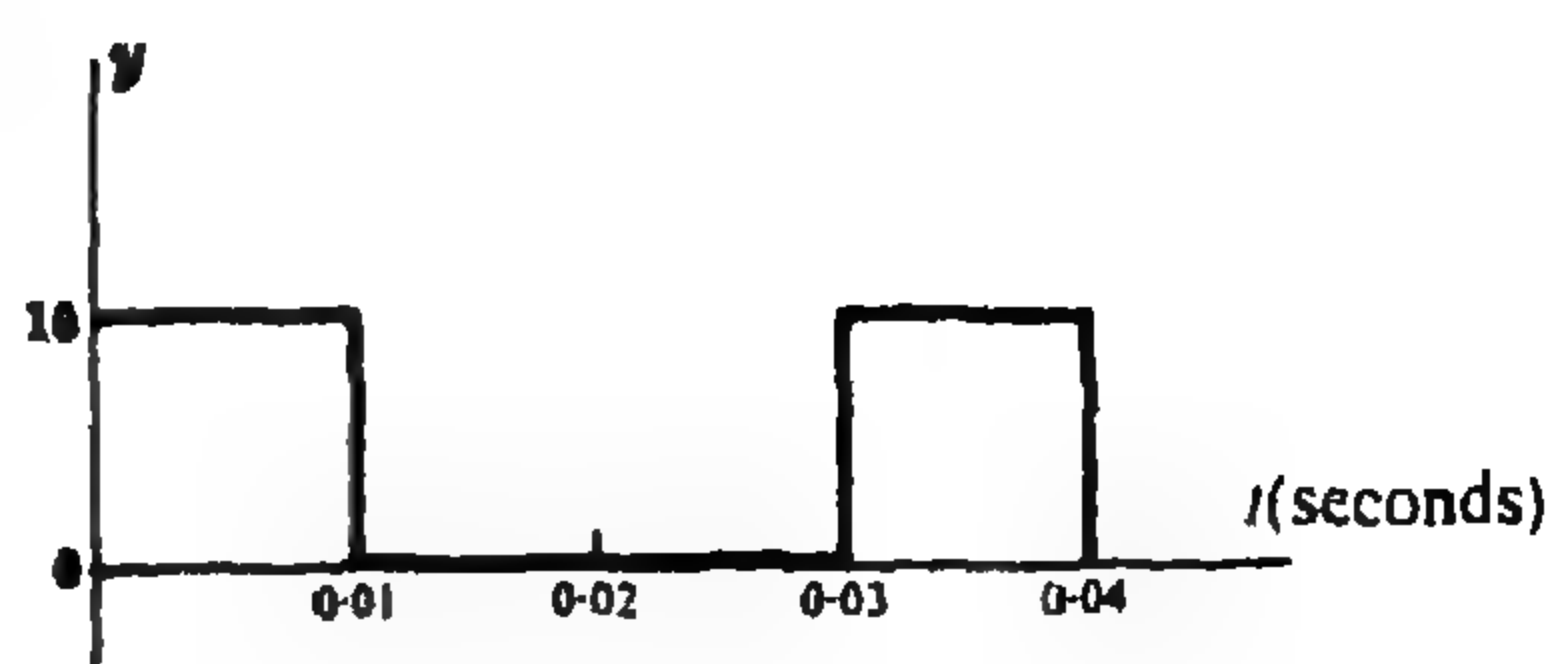
عندما $0 < t < 0.01$ فإن $y = 10$ وعندما $0.01 < t < 0.03$ فإن $y = 0$ والدورة تساوي 0.03 s .

$$Y_{av} = \frac{1}{0.03} \int_0^{0.01} 10 dt = \frac{10(0.01)}{0.03} = 3.33$$

$$Y_{rms}^2 = \frac{1}{0.03} \int_0^{0.01} 10^2 dt = 33.3, \quad Y_{rms} = 5.77$$



شكل ٢ - ١٢



شكل ٢ - ١١

٢-١٠ أوجد ج.م.م قيمة الدالة الموضحة في الشكل ٢-١٢ والمعطاة بما يلي :

$$0 < t < 0.1 \quad v = 20(1 - e^{-100t}); \quad 0.1 < t < 0.2 \quad v = 20 e^{-50(t-0.1)}$$

$$\begin{aligned} Y_{rms}^2 &= \frac{1}{0.2} \left\{ \int_0^{0.1} 400(1 - 2e^{-100t} + e^{-200t}) dt + \int_{0.1}^{0.2} 400 e^{-100(t-0.1)} dt \right\} \\ &= 2000 \left\{ \left[t - 0.02 e^{-100t} - 0.005 e^{-200t} \right]_0^{0.1} + \left[-0.01 e^{-100(t-0.1)} \right]_{0.1}^{0.2} \right\} \\ &= 190, \end{aligned}$$

$$Y_{rms} = 13.78 \quad \text{و (الحدود في } e^{-10} \text{ و } e^{-20} \text{ ليس لها معنى)}$$

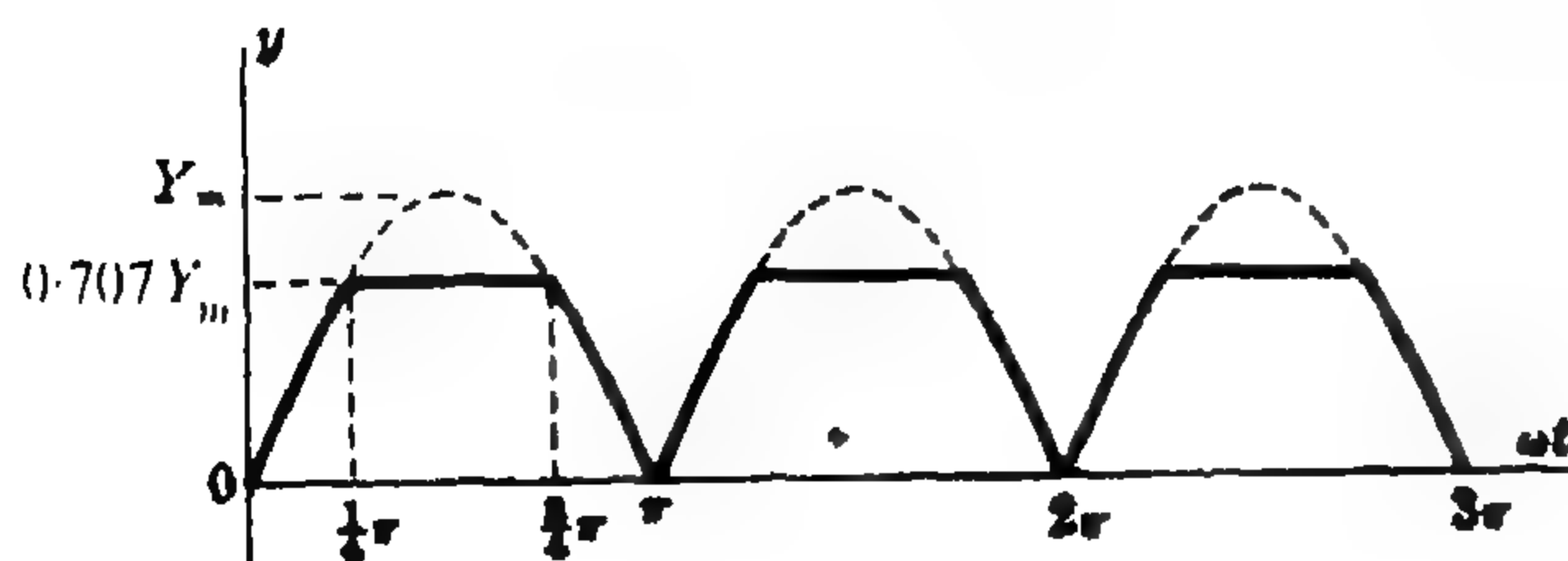
٢-١١ أوجد القيمة الفعالة للدالة $v = 50 + 30 \sin \omega t$.

$$\begin{aligned} Y_{rms}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2500 + 3000 \sin \omega t + 900 \sin^2 \omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{1}{2\pi} [2500(2\pi) + 0 + 900\pi] = 2950, \quad Y_{rms} = 54.3 \end{aligned}$$

$$Y_{rms} = \sqrt{(50)^2 + \frac{1}{2}(30)^2} = \sqrt{2950} = 54.3 \quad \text{طريقة أخرى :}$$

٢-١٢ أوجد القيمة الفعالة لفرق الجهد المعطى بالدالة : $v = 50 + 141.4 \sin \omega t + 35.5 \sin 3\omega t$ volts

$$V_{rms} = \sqrt{(50)^2 + \frac{1}{2}(141.4)^2 + \frac{1}{2}(35.5)^2} = 114.6 \text{ V}$$



شكل ٢ - ١٣

٢-١٣ أوجد القيمة المتوسطة وج.م.م القيمة للدالة

جيبية مقوية تقوياً كاملاً إذا قطع منها الجزء

الأعلى عند 0.707 من قيمتها العظمى ، كما

هو موضح في الشكل ٢-١٣ .

لاحظ أن الدورة تساوي π والدالة تعطى

بالمعادلات الآتية

$$\begin{aligned} \text{عندما } 0 < \omega t < \pi/4 \quad \text{فإن } y &= Y_m \sin \omega t \\ \text{عندما } \pi/4 < \omega t < 3\pi/4 \quad \text{فإن } y &= 0.707 Y_m \\ \text{عندما } 3\pi/4 < \omega t < \pi \quad \text{فإن } y &= Y_m \sin \omega t \end{aligned}$$

$$Y_{av} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/4} Y_m \sin \omega t d(\omega t) + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 0.707 Y_m d(\omega t) + \int_{3\pi/4}^{\pi} Y_m \sin \omega t d(\omega t) \right\} = 0.54 Y_m$$

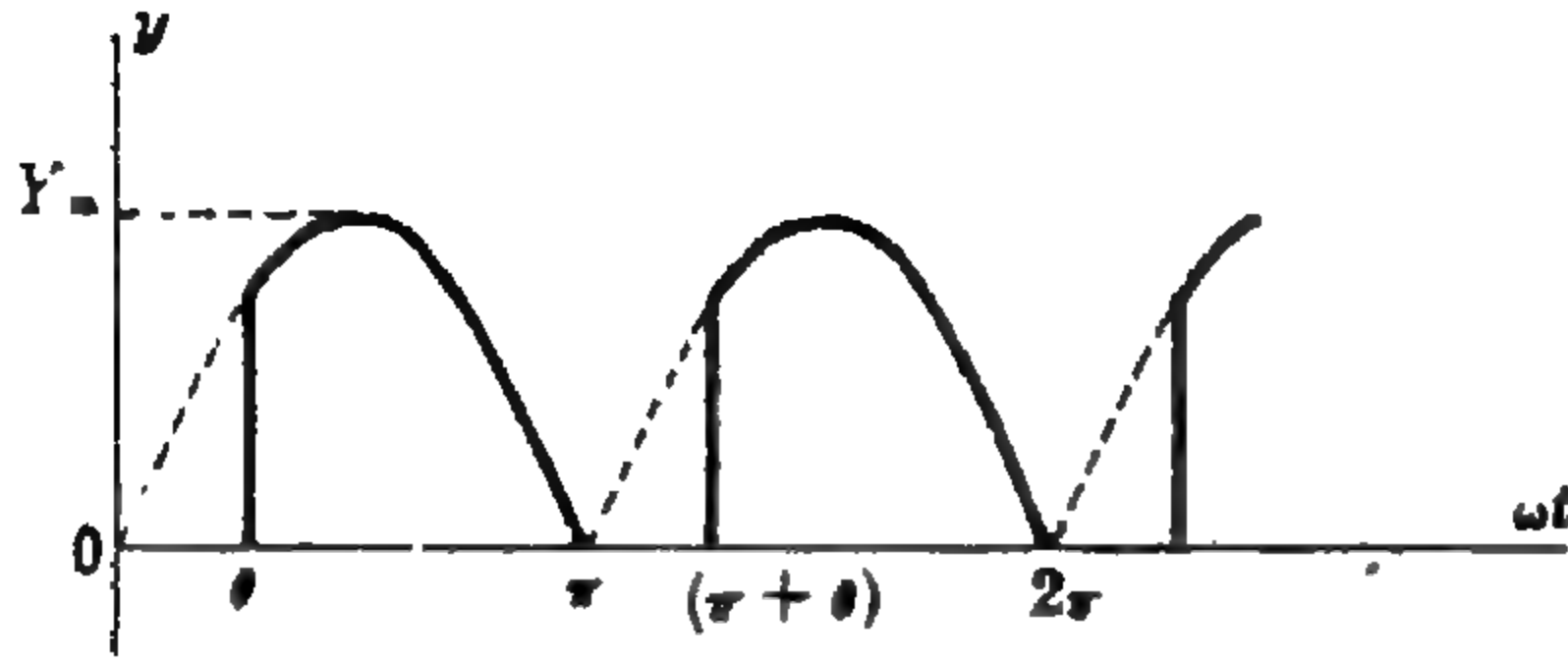
$$Y_{rms}^2 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/4} (Y_m \sin \omega t)^2 d(\omega t) + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (0.707 Y_m)^2 d(\omega t) + \int_{3\pi/4}^{\pi} (Y_m \sin \omega t)^2 d(\omega t) \right\}$$

$$= 0.341 Y_m^2, \quad Y_{rms} = 0.584 Y_m$$

٢-١٤ إذا كانت القيمة المتوسطة لدالة جيبيه معوقة ومقومة

تقريباً كاملاً تساوى نصف قيمتها العظمى كما هو

موضح في الشكل ٢-١٤ . فاوجد الزاوية θ .



شكل ٢-١٤

$$Y_{av} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} Y_m \sin \omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{Y_m}{\pi} (-\cos \pi + \cos \theta)$$

إذن $0.5 Y_m = (Y_m / \pi)(1 + \cos \theta)$, $\cos \theta = 0.57$, $\theta = 55.25^\circ$

٢-١٥ إذا كان الشكل الموجي المعطى في المسألة ٢-١٤ يمثل التيار المار في مقاوم قيمته 2Ω وكانت القيمة العظمى للتيار

تساوى 5 amperes . والقدرة المتوسطة في المقاوم تساوى 20 watts فاوجد الزاوية θ .

$$P = I_{rms}^2 R, \quad 20 = I_{rms}^2 (2), \quad I_{rms}^2 = 10$$

إذن

$$I_{rms}^2 = 10 = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} (5 \sin \omega t)^2 d(\omega t) = \frac{25}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_{\theta}^{\pi} = \frac{25}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right)$$

ومنها نجد أن $\sin 2\theta = 2\theta - 10\pi/25$. $\theta = 60.5^\circ$ (حل تخميني) .

مسائل إضافية

٢-١٦ إذا كانت القدرة المتوسطة لمقاوم قيمته 25Ω هي 400 watts فمبن أكبر قيمة لدالة التيار إذا كانت الدالة (أ) جيبيه ،

(ب) مثلثة الشكل . الجواب : (أ) 5.66 A ، (ب) 6.93 A

٢-١٧ عين القيمة الفعالة V_{rms} لدالة الجهد المعطاة بالمعادلة : $v(t) = 100 + 25 \sin 3\omega t + 10 \sin 5\omega t$ volts

الجواب : 101.8 V

٢-١٨ إذا كان التيار المار في مقاوم قيمته 25Ω يعطى بالمعادلة : $i(t) = 2 + 3 \sin \omega t + 2 \sin 2\omega t + 1 \sin 3\omega t$ amperes

فاحسب متوسط القدرة في المقاوم . الجواب : 275 W

١٩-٢ احسب Y_{rms} إذا كانت $y(t) = 50 + 40 \sin \omega t$ الجواب : 57.4

٢٠-٢ احسب Y_{rms} إذا كانت $y(t) = 150 + 50 \sin \omega t + 25 \sin 2\omega t$ الجواب : 155.3

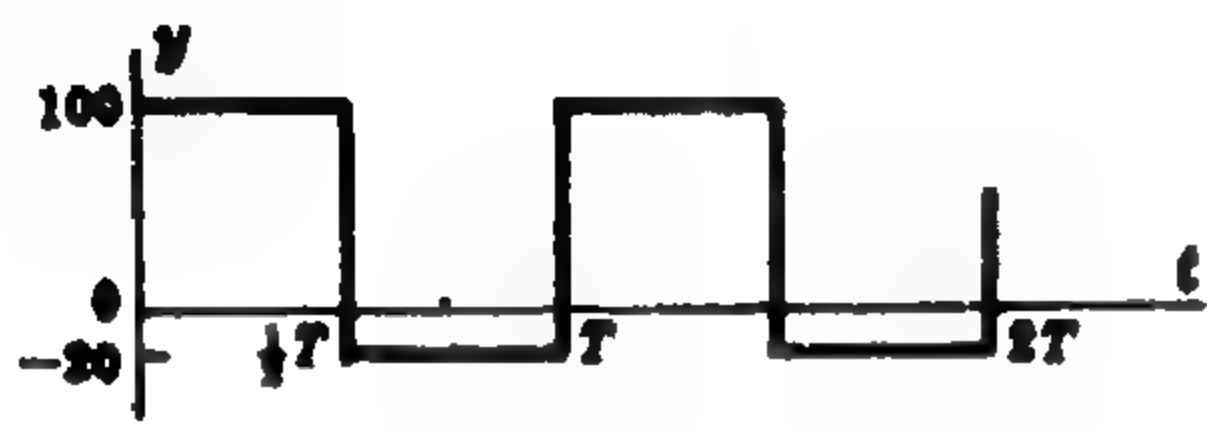
٢١-٢ إذا كانت القيمة الفعالة للدالة $y(t) = 100 + A \sin \omega t$ هي 103.1 ، فعين السعة A .

الجواب : 35.5

٢٢-٢ إذا كانت دالة ما تحتوي على حد ثابت ولها توافقان أساسيان وثالث ، وكانت القيمة المعظمى للتوافق الأساسي تساوي 80%

من قيمة الحد الثابت ، والقيمة المعظمى للتوافق الثالث تساوي 50% من قيمة الحد الثابت ، وكانت القيمة الفعالة

للدالة تساوي 180.3 ، فأوجد قيم الحد الثابت والتوافقين . الجواب : 150, 120, 75



شكل ١٥-٢

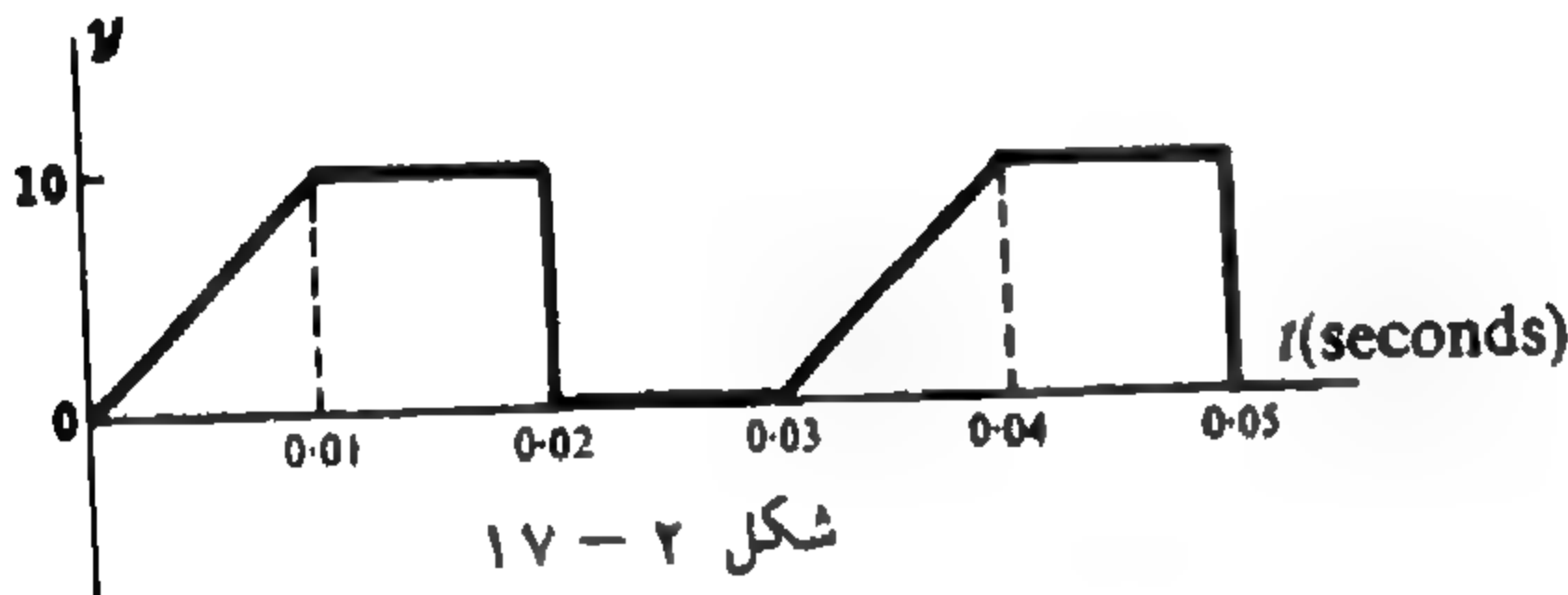
٢٣-٢ إذا كانت القيمة الفعالة لدالة جيبية مقومة نصف تقويم

هي 20 فأقيمها المتوسطة ؟ الجواب : 12.7

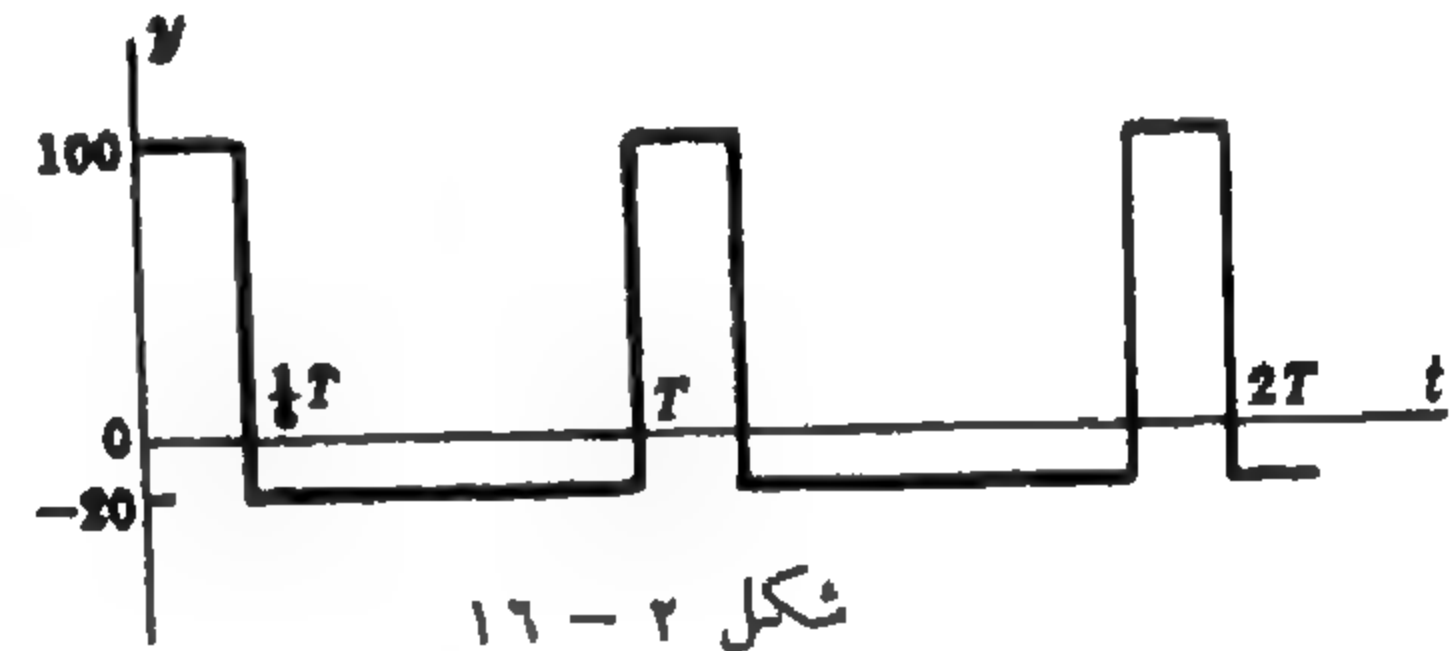
٢٤-٢ احسب Y_{rms} و Y_{av} للشكل الموجي الموضح في الشكل

١٥-٢ الجواب : $Y_{rms} = 72.1$ و $Y_{av} = 40$.

٢٥-٢ احسب Y_{rms} و Y_{av} للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٦-٢ . الجواب : $Y_{rms} = 52.9$ و $Y_{av} = 10$



شكل ١٧-٢



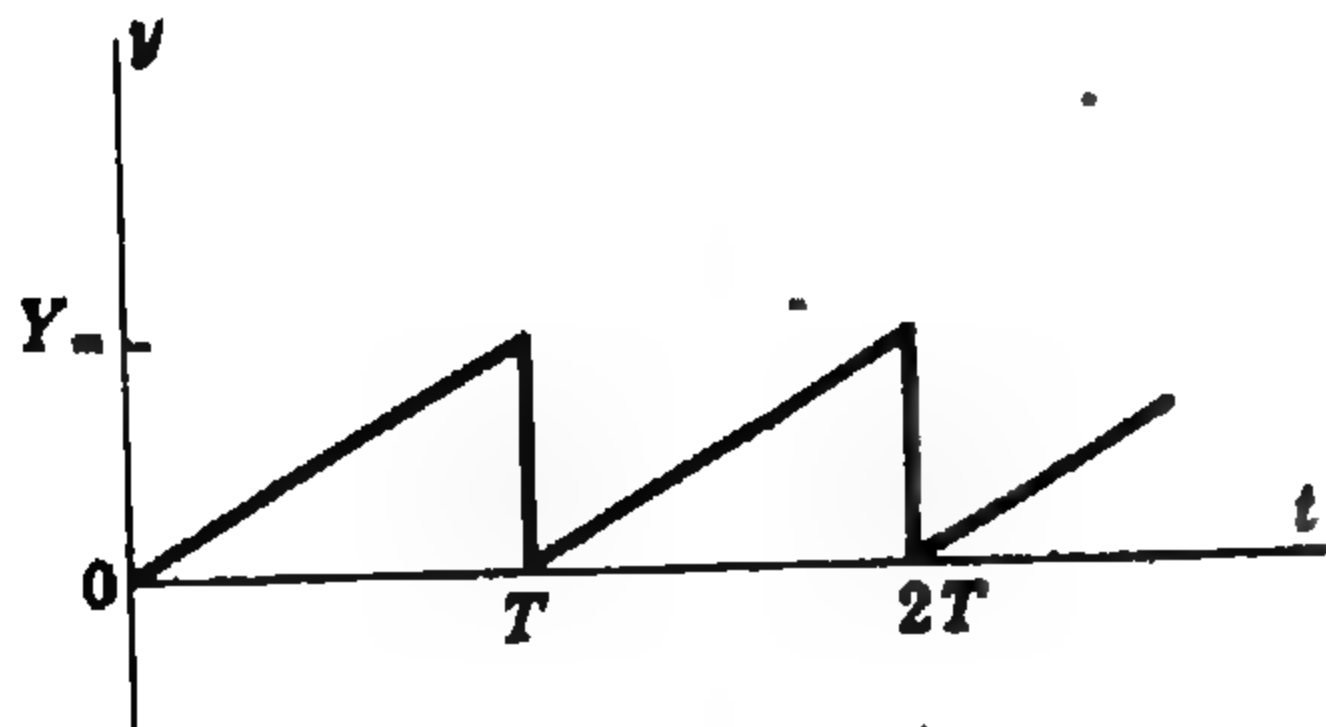
شكل ١٦-٢

الجواب : $Y_{rms} = 6.67$

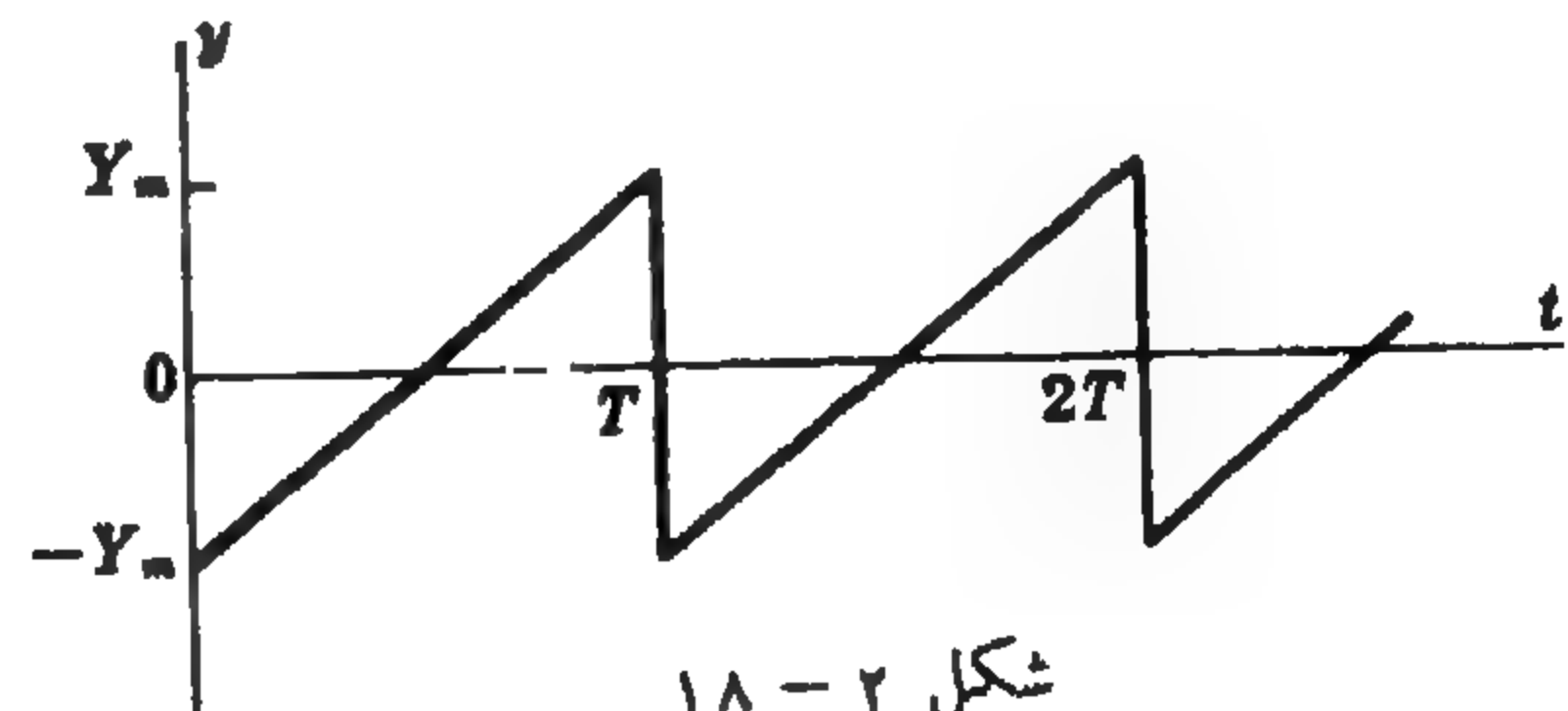
٢٦-٢ عين Y_{rms} للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٧-٢ .

الجواب : $Y_{rms} = Y_m / \sqrt{3} = 0.577 Y_m$

٢٧-٢ عين Y_{rms} للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٨-٢ .



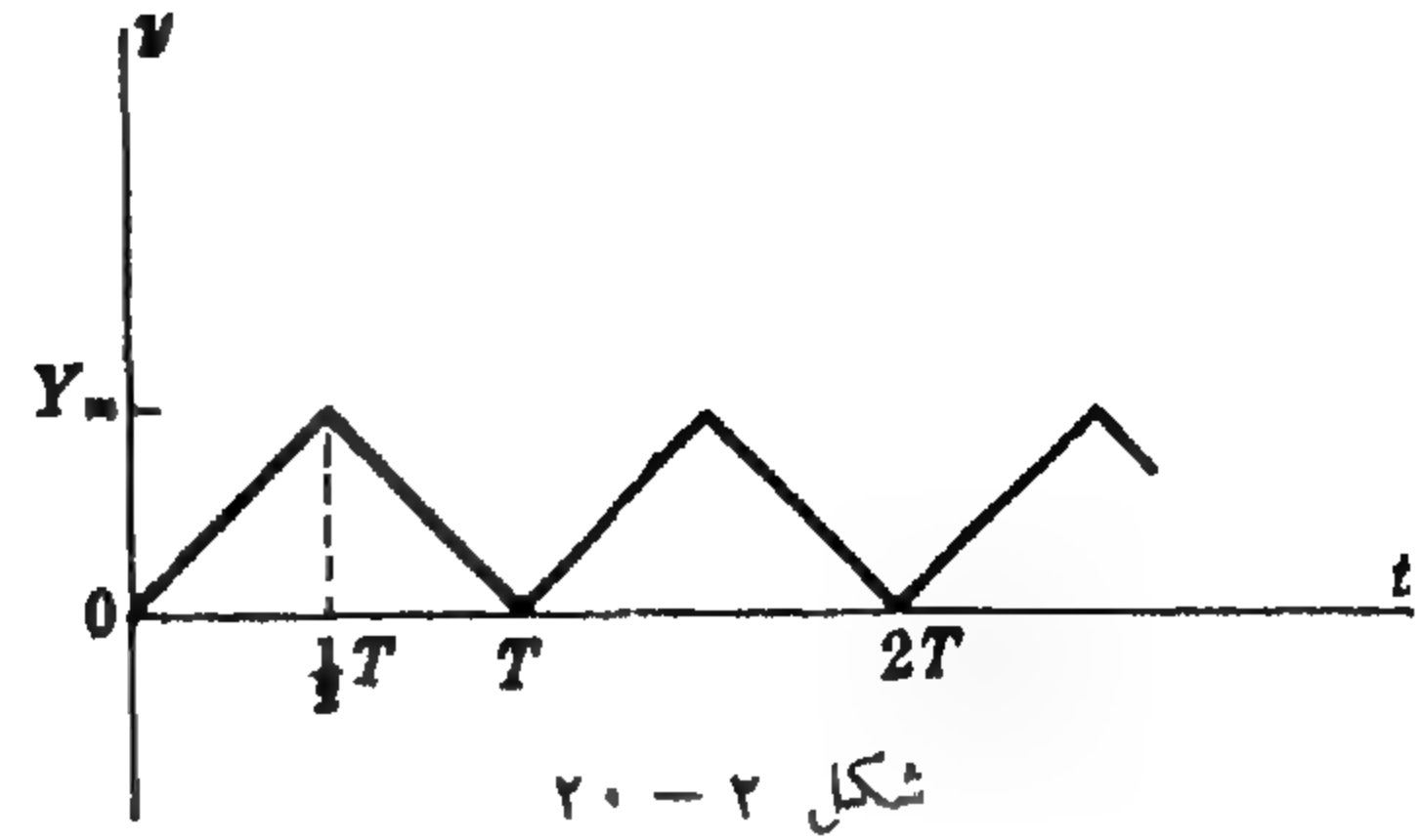
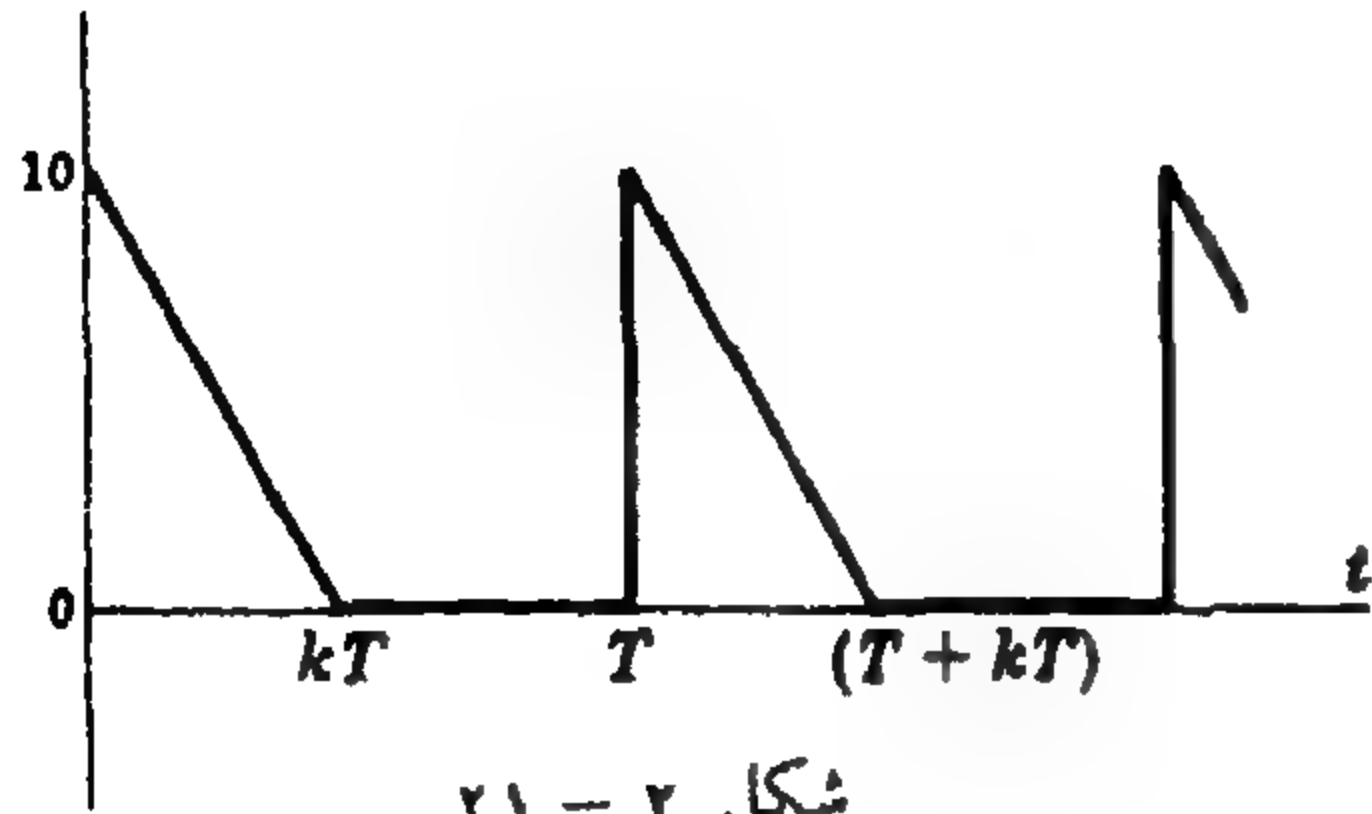
شكل ١٩-٢



شكل ١٨-٢

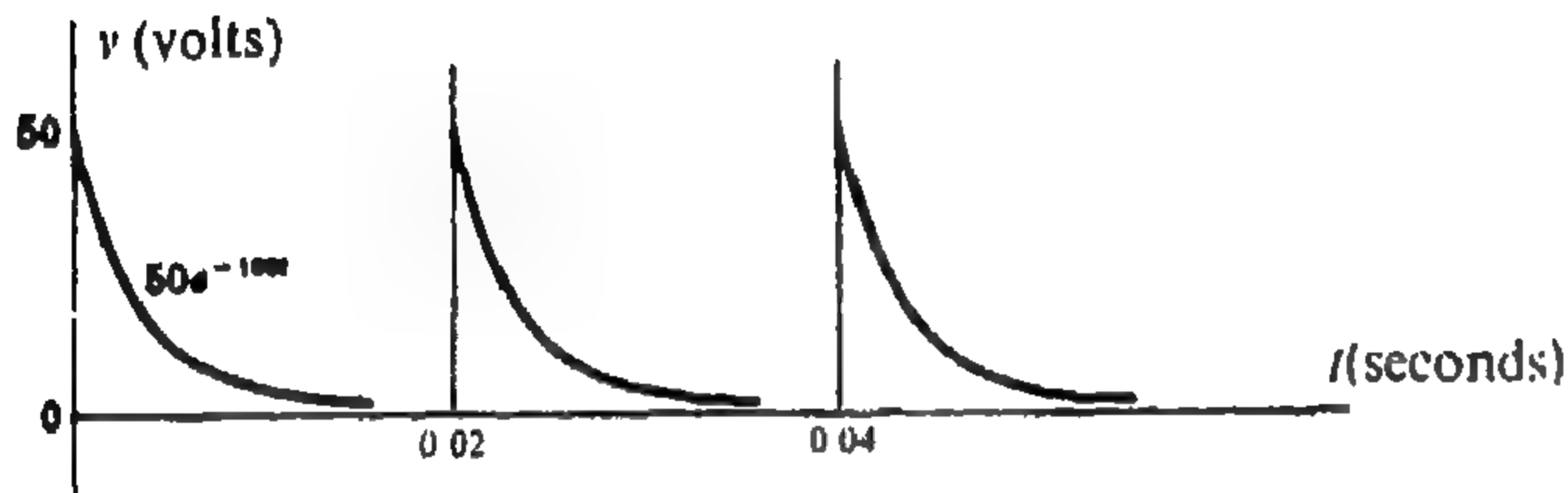
٢٨-٢ احسب القيمة الفعالة للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٩-٢ . ثم قارن بالمسألة ٢٧-٢ .

٢٩-٢ عين القيمة الفعالة للدالة المثلثة الشكل الموضح في الشكل ٢٠-٢ . ثم قارن بالمسألة ٢٧-٢ .



٢ - ٢٠ عين k في الشكل الموجي الموضح بالشكل ٢ - ٢١ ، حيث k جزء من الدورة T وذلك إذا كانت القيمة الفعالة تساوى (أ) 2 ، (ب) 5 . إذا كانت k متغيرة فاعلى أكبر قيمة فعالة ممكنة .
الجواب : (أ) 0.12 ، (ب) 0.75 ، 5.77 عندما $k = 1$

٢ - ٢١ أوجد V_{rms} ، V_{av} للشكل الموجي الموضح في الشكل ٢ - ٢٢ .
الجواب :



٢ - ٢٢ بالإشارة إلى المسألة ٢ - ٣١ ، عين V_{rms} و V_{av} إذا كانت الدالة في الفترة الأولى تعطى

(أ) $50e^{-200t}$ volts

(ب) $50e^{-500t}$ volts

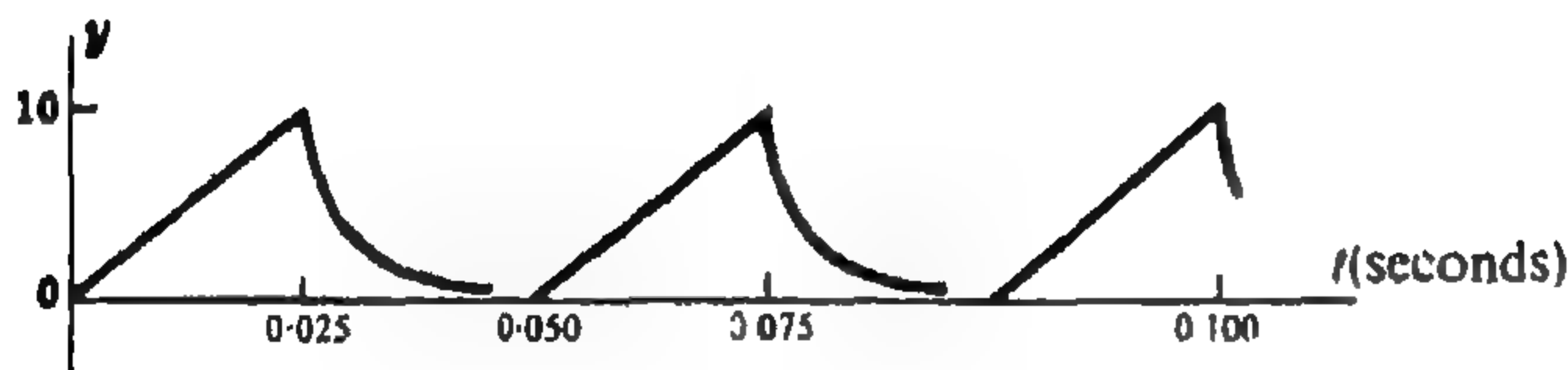
الجواب : (أ) $V_{av} = 12.25$ V

$V_{rms} = 17.67$ V

(ب) $V_{av} = 5.0$ V

$V_{rms} = 11.18$ V

٢ - ٢٣ عين Y_{rms} و Y_{av} للشكل الموجي الموضح بالشكل ٢ - ٢٣ .

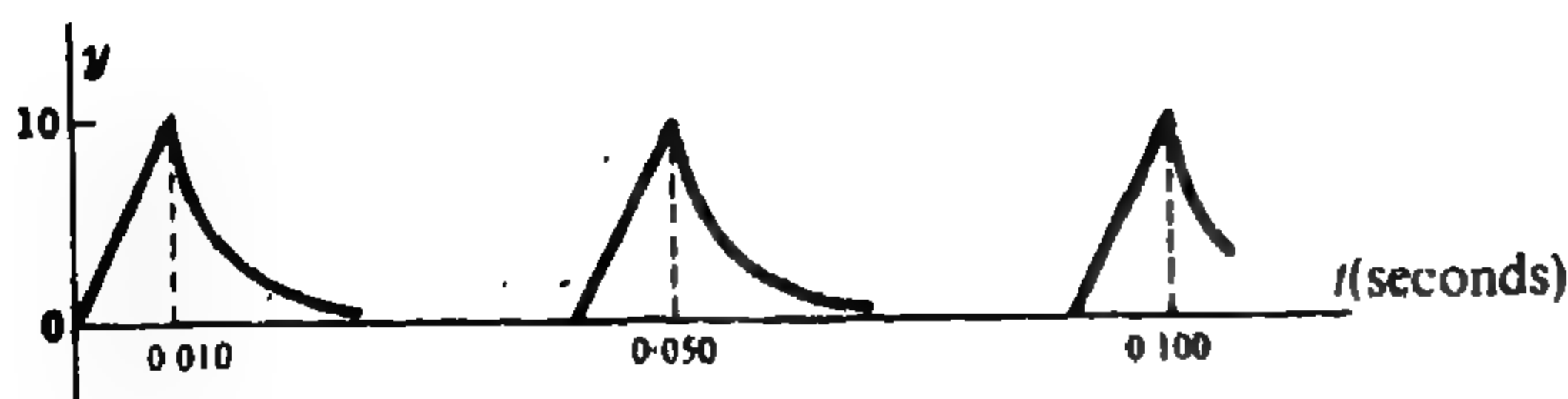


$$\begin{aligned} 0 < t < 0.025 & \quad y(t) = 4(10)t \\ 0.025 < t < 0.050 & \quad y(t) = 10 e^{-1000(t-0.025)} \end{aligned}$$

الجواب :

$Y_{av} = 2.7$ و $Y_{rms} = 4.2$

٢ - ٢٤ إذا كان الشكل الموجي الموضح في الشكل ٢ - ٢٤ مشابهاً لما في المسألة ٢ - ٢٣ ولكن بزمان ارتفاع أقصر فعين Y_{rms} ، Y_{av} علماً بأن



$$\begin{aligned} 0 < t < 0.01 & \quad y(t) = 1000t \\ 0.01 < t < 0.05 & \quad y(t) = 10 e^{-1000(t-0.01)} \end{aligned}$$

الجواب : $Y_{av} = 1.2$ ، $Y_{rms} = 2.77$

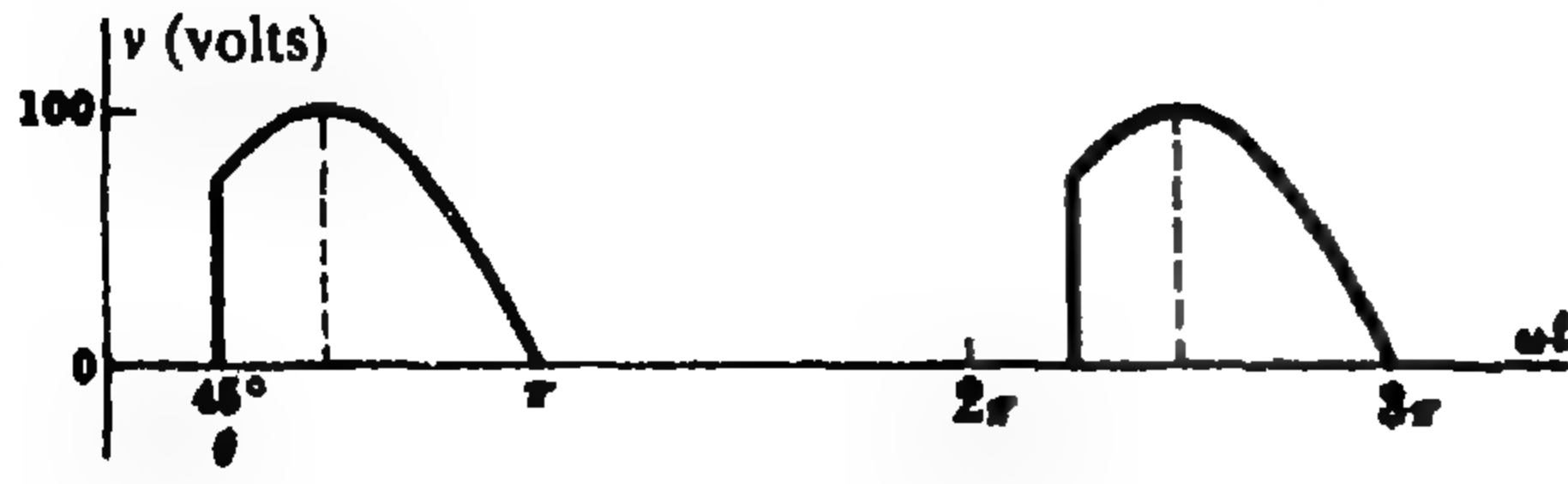
٢-٣٥ أوجد V_{av} ، V_{rms} لدالة الجهد

الجيبية المعوقة والمقومة نصف تقويم

والموضحة في الشكل ٢-٣٥ . إذا

كانت زاوية التمويق تساوي 45° .

الجواب :



شكل ٢-٣٥

$$V_{av} = 27.2 \text{ V}, V_{rms} = 47.7 \text{ V}$$

٢-٣٦ بالاشارة إلى الشكل الموجي في المسألة ٢-٣٥ ، عين V_{rms} ، V_{av} إذا كانت زاوية التمويق تساوي

$$\theta = 90^\circ \text{ (أ) ، } \theta = 135^\circ \text{ (ب)}$$

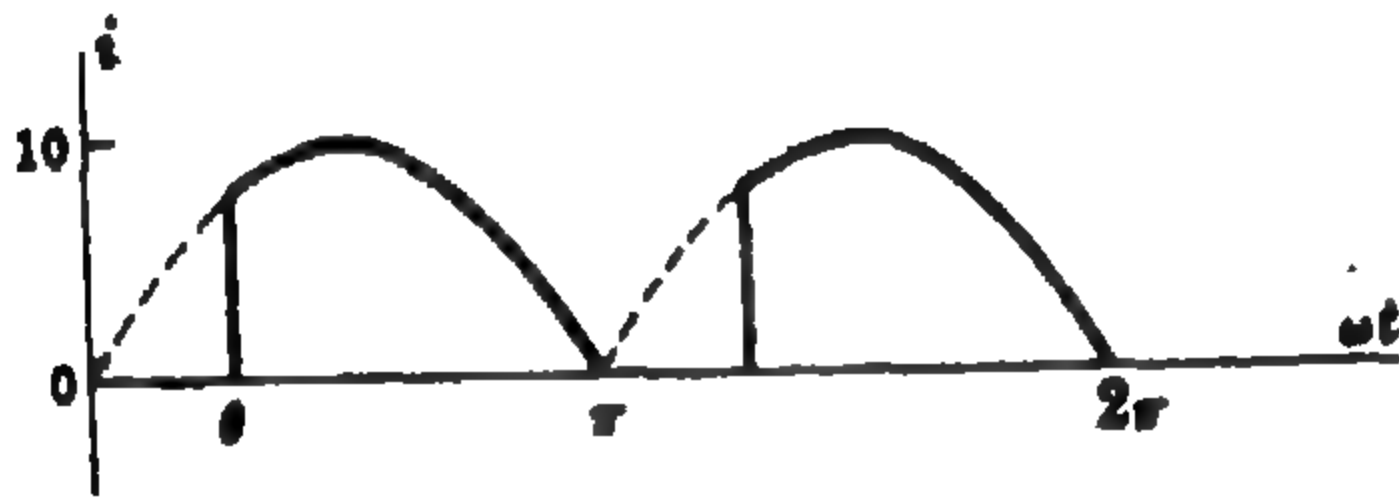
الجواب :

$$V_{av} = 15.95 \text{ V}, V_{rms} = 35.4 \text{ V} \quad \text{(أ)}$$

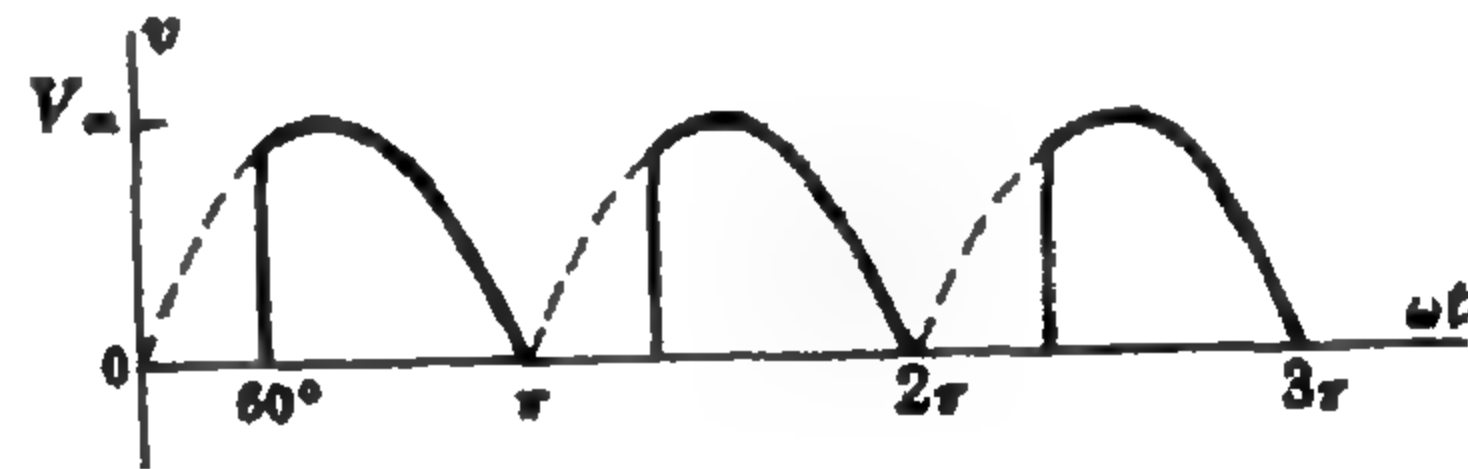
$$V_{av} = 4.66 \text{ V}, V_{rms} = 15.06 \text{ V} \quad \text{(ب)}$$

٢-٣٧ إذا كانت زاوية التمويق للدالة الجيبية المقومة تقويمياً كاملاً والموضحة في الشكل ٢-٣٦ هي 60° فاحسب V_{av} ، V_{rms}

$$V_m \text{ بدلالة } V_m \text{ : الجواب } V_{av} = 0.478 V_m, V_{rms} = 0.633 V_m$$



شكل ٢-٣٧



شكل ٢-٣٦

٢-٣٨ إذا أمكن تغيير زاوية تمويق الشكل الموجي التيار الموضح في الشكل ٢-٣٧ بواسطة دائرة تحكم ، بحيث يكون للقيمة الفعالة حد أدنى 2.13 amperes وحد أعلى 7.01 amperes فأوجد الزاويتين .

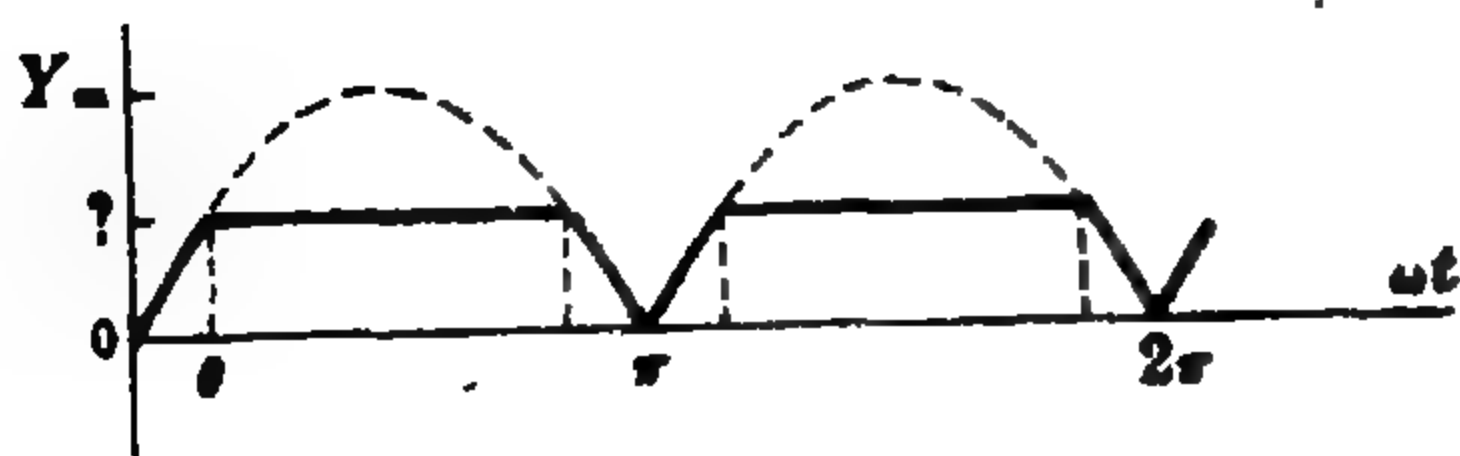
$$\theta_1 = 135^\circ \text{ و } \theta_2 = 25^\circ \text{ : الجواب}$$

٢-٣٩ أوجد القيمة الفعالة للدالة الجيبية المقومة تقويمياً كاملاً ، إذا قطع منها جزء مساو لنصف قيمتها كما هو موضح في

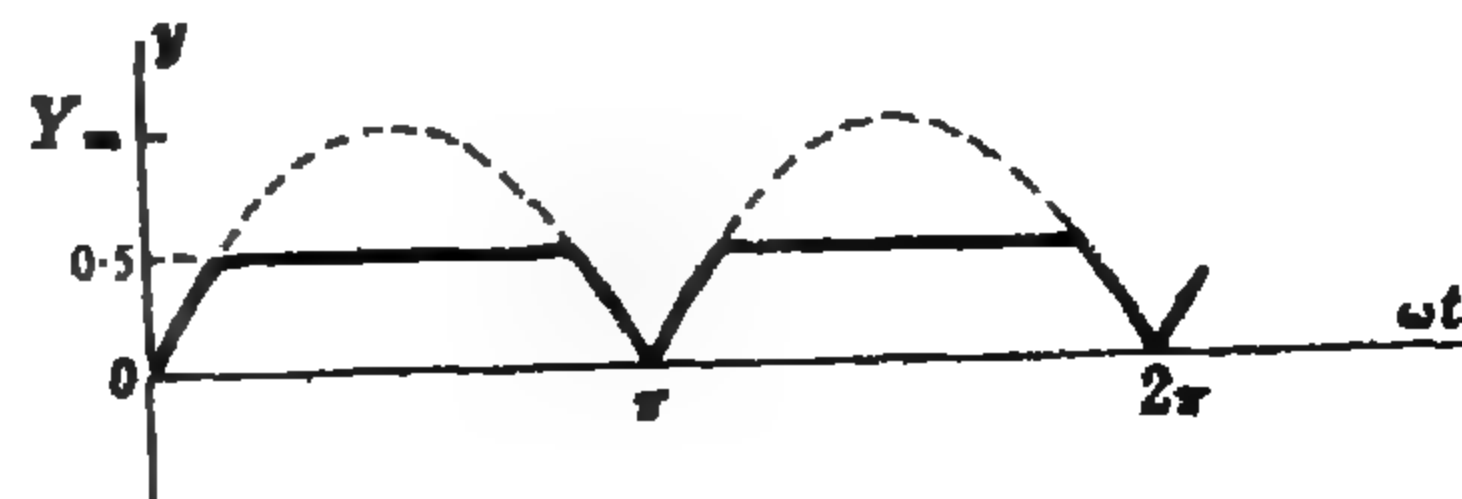
$$Y_{rms} = 0.422 Y_m \text{ . الجواب}$$

٢-٤٠ بالاشارة إلى المسألة ٢-٣٩ ، احسب القيمة الفعالة إذا قطع من الدالة الجزء المقابل للزاوية 60° أو $\pi/3$ زاوية

$$\text{نصف قطرية . الجواب : } Y_{rms} = 0.668 Y_m$$



شكل ٢-٣٩



شكل ٢-٣٨

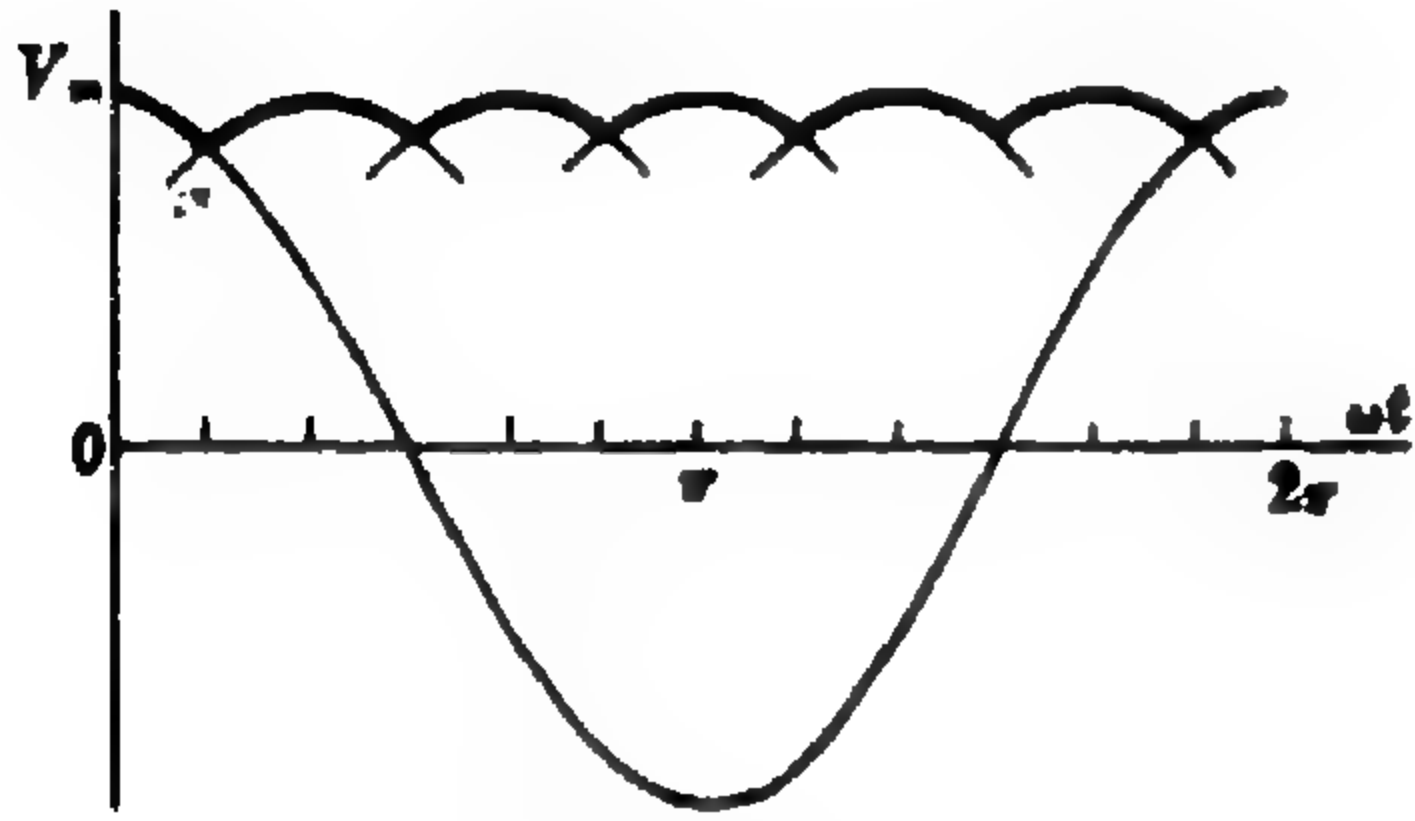
٢ - ٤١ إذا قطع جزء من دالة جيبية مقومة تقويمياً كاملاً بحيث كانت قيمتها الفعالة تساوى $0.5 Y_m$ كما هو موضح في الشكل ٢-٢٩ فأوجد السعة التي قطع عندها الشكل الموجي .
الجواب : $0.581 Y_m$ أو $\theta = 35.5^\circ$

٢ - ٤٢ أوجد متوسط القيمة الفعالة للشكل الموجي الناتج من دائرة نصف تقويم لجهودى ثلاثة أطوار والموضح في الشكل ٢-٣٠

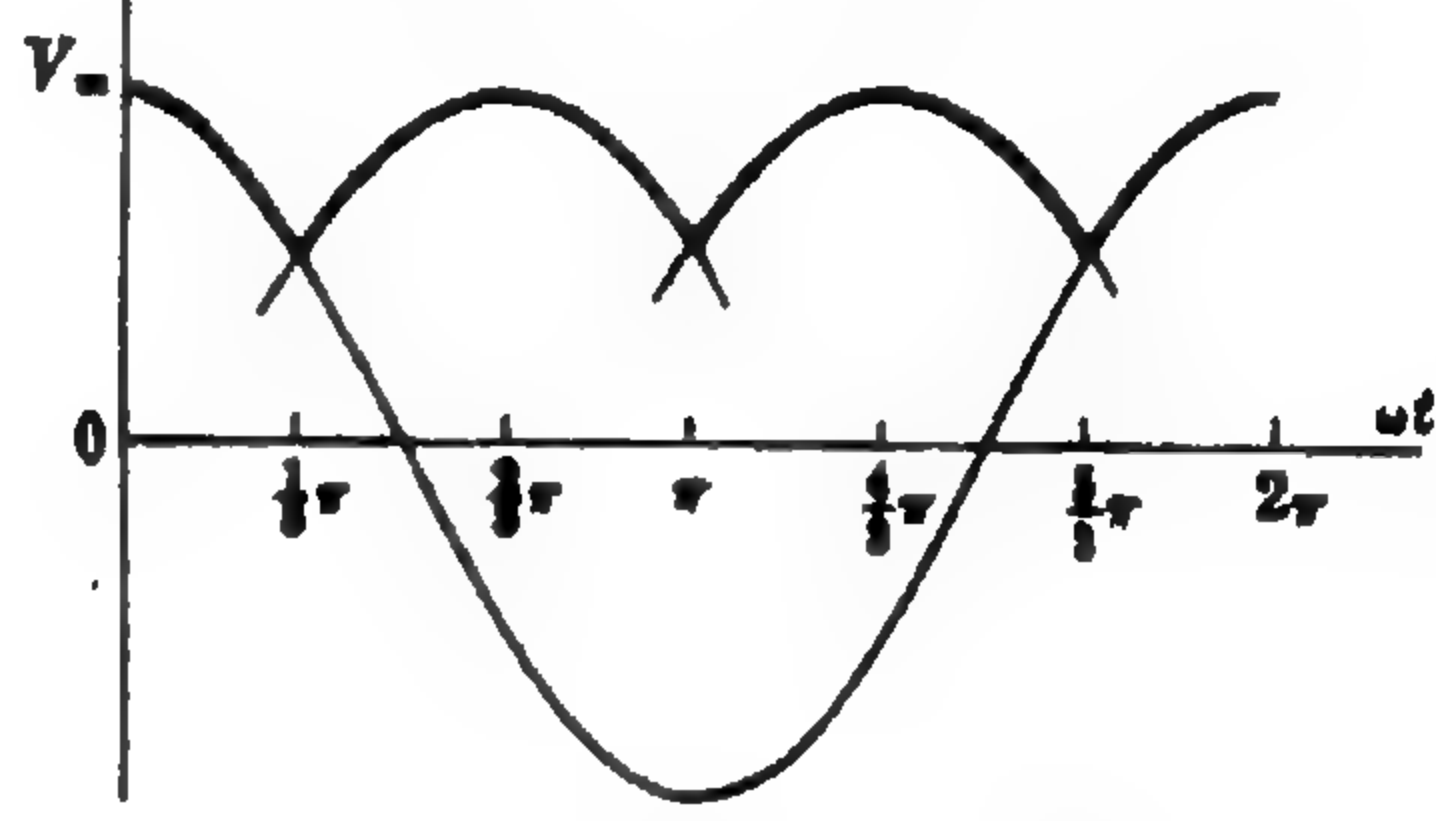
الجواب : $V_{av} = 0.827 V_m, V_{rms} = 0.0840 V_m$

٢ - ٤٣ احسب V_{av} و V_{rms} للشكل الموجي الناتج من دائرة نصف تقويم لجهودى ستة أطوار والموضح في الشكل ٢-٣١

الجواب : $V_{av} = 0.955 V_m, V_{rms} = 0.956 V_m$



شكل ٢ - ٣١



شكل ٢ - ٣٠

الفصل الثالث

التيار والجهد الجيبيان

مقدمة :

عند تطبيق قوانين كيرشوف على دائرة ما ينتج لدينا معادلة تكاملية تفاضلية ، يمكن حلها باستخدام الطرق الكلاسيكية للمعادلات التفاضلية . وباستخدام هذه الطرق نجد أن التيار الناتج عن جهد مؤثر يتكون من جزئين ، يسمى أحدهما بالتيار العابر ، وهو يدوم عادة لجزء من الثانية ويسمى الجزء الآخر بالتيار المطرد أو المستقر وهو يدوم إلى أن يحدث تغير آخر في الدائرة .

سندرس في هذا الفصل الجزء المطرد أو المستقر من التيار دون الإشارة إلى التيار العابر ، وذلك نظرا لأن الطالب الذي يدرس تحليل الدوائر الكهربائية عادة ما يكون غير ملم بالمسائل جيدا بطرق حل المعادلات التفاضلية . ولذلك فإن القارئ غير المتفهم للمعادلات التفاضلية سيحقق استفادة كبيرة في تطبيق طرق هذه المعادلات هنا على الدوائر الكهربائية . وسيناقش في الفصل السادس عشر المعادلات التفاضلية الكلاسيكية مع عدد من الأمثلة التي تشرح حلول هذه المعادلات في الحالتين العابرة والمستقرة .

التيارات الجيبية :

عندما يكون التيار المار في العناصر النقية R ، L ، C تيارا جيبيا ، فإن الجهد عبر كل عنصر يكون كما هو موضحا في الجداول ١ - ٣ .

جدول ٣ - ١

الجهد عبر كل عنصر في حالة تيار جيبى

| العنصر | الجهد في حالة تيار عام i | الجهد في حالة تيار $i = I_m \sin \omega t$ | الجهد في حالة تيار $i = I_m \cos \omega t$ |
|------------|-------------------------------|---|--|
| مقاومة R | $v_R = Ri$ | $v_R = RI_m \sin \omega t$ | $v_R = RI_m \cos \omega t$ |
| حث L | $v_L = L \frac{di}{dt}$ | $v_L = \omega LI_m \cos \omega t$ | $v_L = \omega LI_m (-\sin \omega t)$ |
| سعة C | $v_C = \frac{1}{C} \int i dt$ | $v_C = \frac{I_m}{\omega C} (-\cos \omega t)$ | $v_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t$ |

جدول ٣ - ٢

التيار المار في عنصر نقي نتيجة لجهد جيبى :

| العنصر | التيار نتيجة جهد عام v | التيار نتيجة جهد $v = V_m \sin \omega t$ | التيار نتيجة جهد $v = V_m \cos \omega t$ |
|------------|-------------------------------|---|---|
| مقاومة R | $i_R = \frac{v}{R}$ | $i_R = \frac{V_m}{R} \sin \omega t$ | $i_R = \frac{V_m}{R} \cos \omega t$ |
| حث L | $i_L = \frac{1}{L} \int v dt$ | $i_L = \frac{V_m}{\omega L} (-\cos \omega t)$ | $i_L = \frac{V_m}{\omega L} \sin \omega t$ |
| سعة C | $i_C = C \frac{dv}{dt}$ | $i_C = \omega C V_m \cos \omega t$ | $i_C = \omega C V_m (-\sin \omega t)$ |

الجهود الجيبية :

عندما يكون الجهد المؤثر على العناصر الثلاثة جهدا جيبيا ، فإن التيار المار في كل عنصر يكون كما هو مبين في الجدول ٣ - ٢

المعاوقة :

تعرف معاوقة العنصر أو معاوقة الدائرة كلها بأنها النسبة بين الجهد والتيار .

$$\frac{\text{دالة الجهد}}{\text{دالة التيار}} = \text{المعاوقة}$$

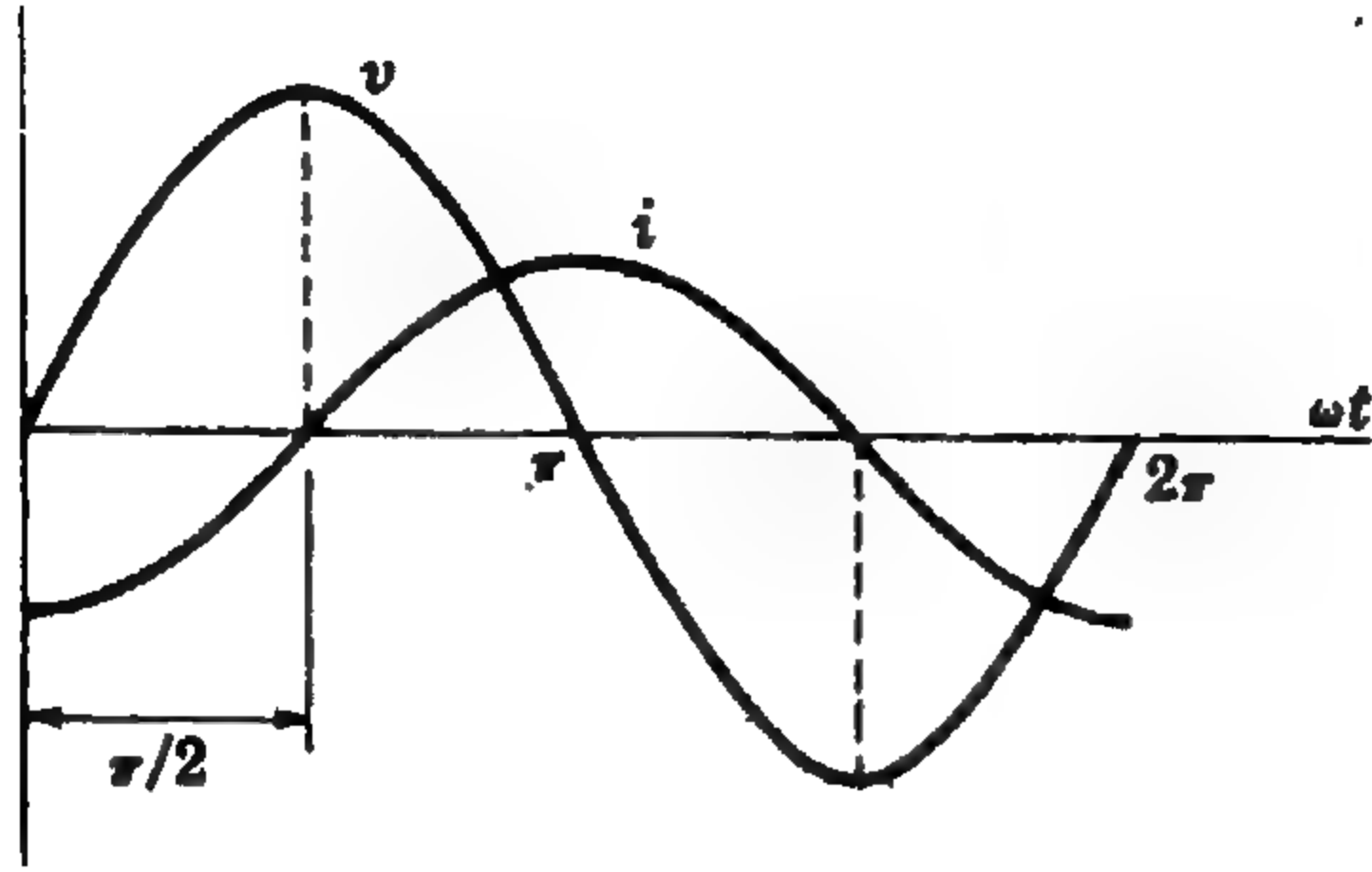
وإذا كان كل من الجهد والتيار جيبيا فإن هذه النسبة يكون لها مقدار وزاوية اتجاه . وسنعتبر الآن مقدار المعاوقة فقط ، بينما سنعالج في الفصل الخامس المعاوقة بالتفصيل مع اعتبار زاوية اتجاهها .

وفيما يلي سنأخذ الزاوية بين v و i على أنها زاوية الطور

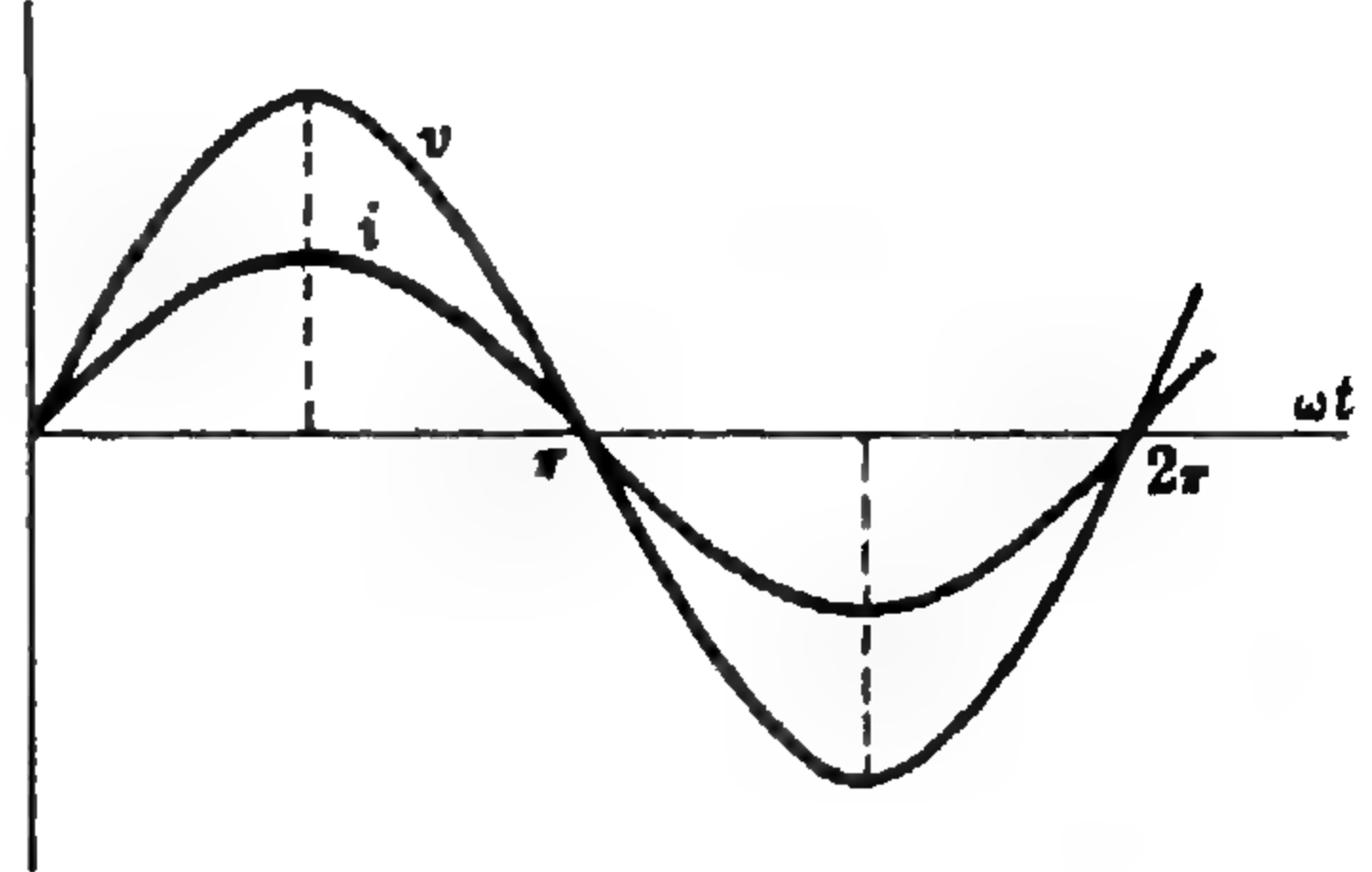
زاوية الطور :

إذا كان كل من الجهد والتيار يمثل بدالة جيبية في الزمن ، فإذا رسمنا كلا منهما على نفس مقياس الزمن فإننا نلاحظ وجود إزاحة بينهما ما عدا في حالة مقاومة نقية . وهذه الإزاحة هي زاوية الطور وهي لا يمكن أن تزيد أبدا عن 90° أو $\pi/2$ زاوية نصف قطرية . ومن المتفق عليه أن هذه الزاوية تصور « موضع التيار i » بالنسبة للجهد v ، أى أن التيار يكون سابقا للجهد بزاوية قدرها 90° في حالة مكثف نقي ، وفي حالة دائرة مكونة من R و L متصلين على التوالي يكون التيار لاحقا للجهد بزاوية مقدارها 45° إذا كانت R تساوى ωL . وفي حالة مقاومة نقية لا توجد زاوية طور بين التيار والجهد ، وهكذا . وتوضح الرسومات التالية كلا من المعاوقة وزاوية الطور .

مقاومة نقية R . لا توجد زاوية طور بين التيار والجهد في حالة مقاومة نقية . أنظر الشكل ١ - ٣ . وفي حالة المقاومة في هذه الحالة تساوي R .



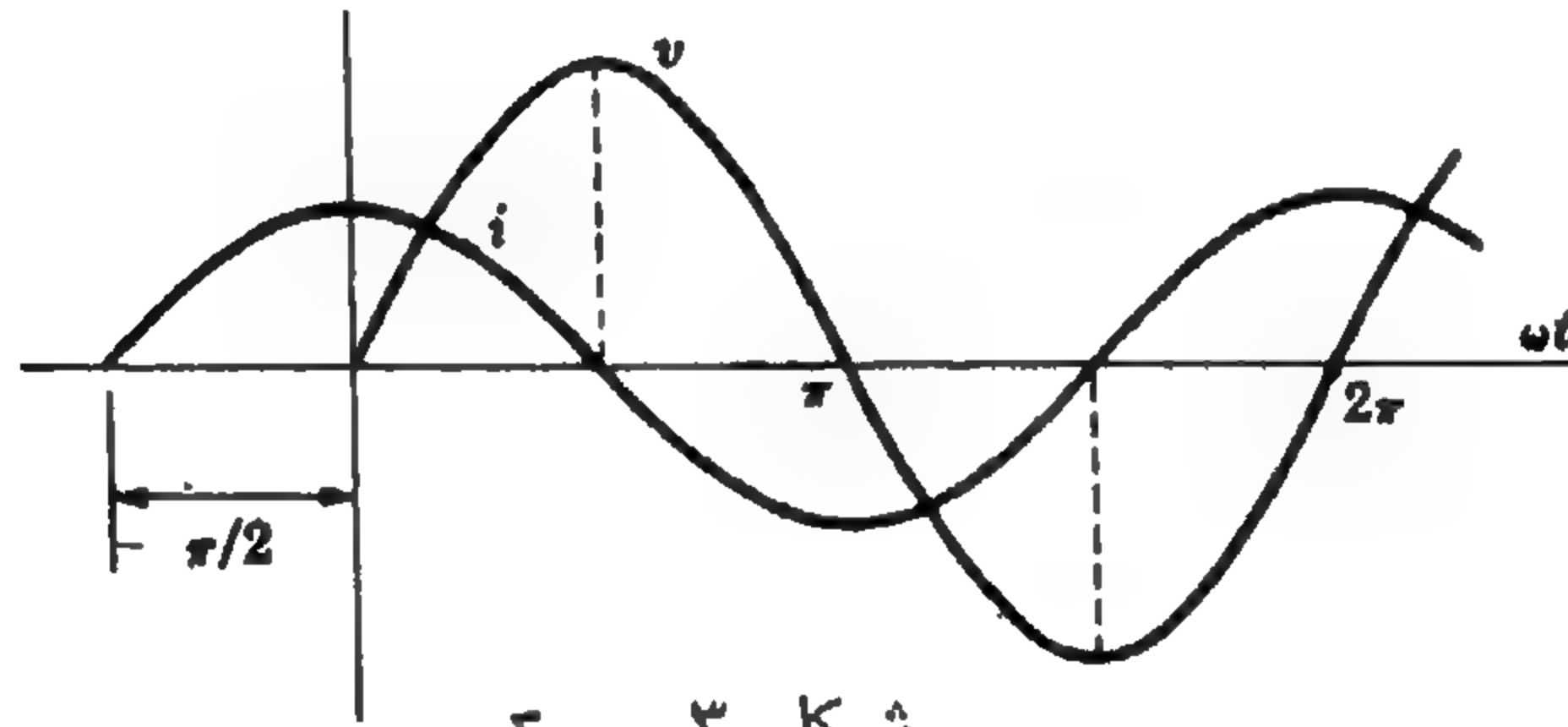
شكل ٣ - ٢



شكل ٣ - ١

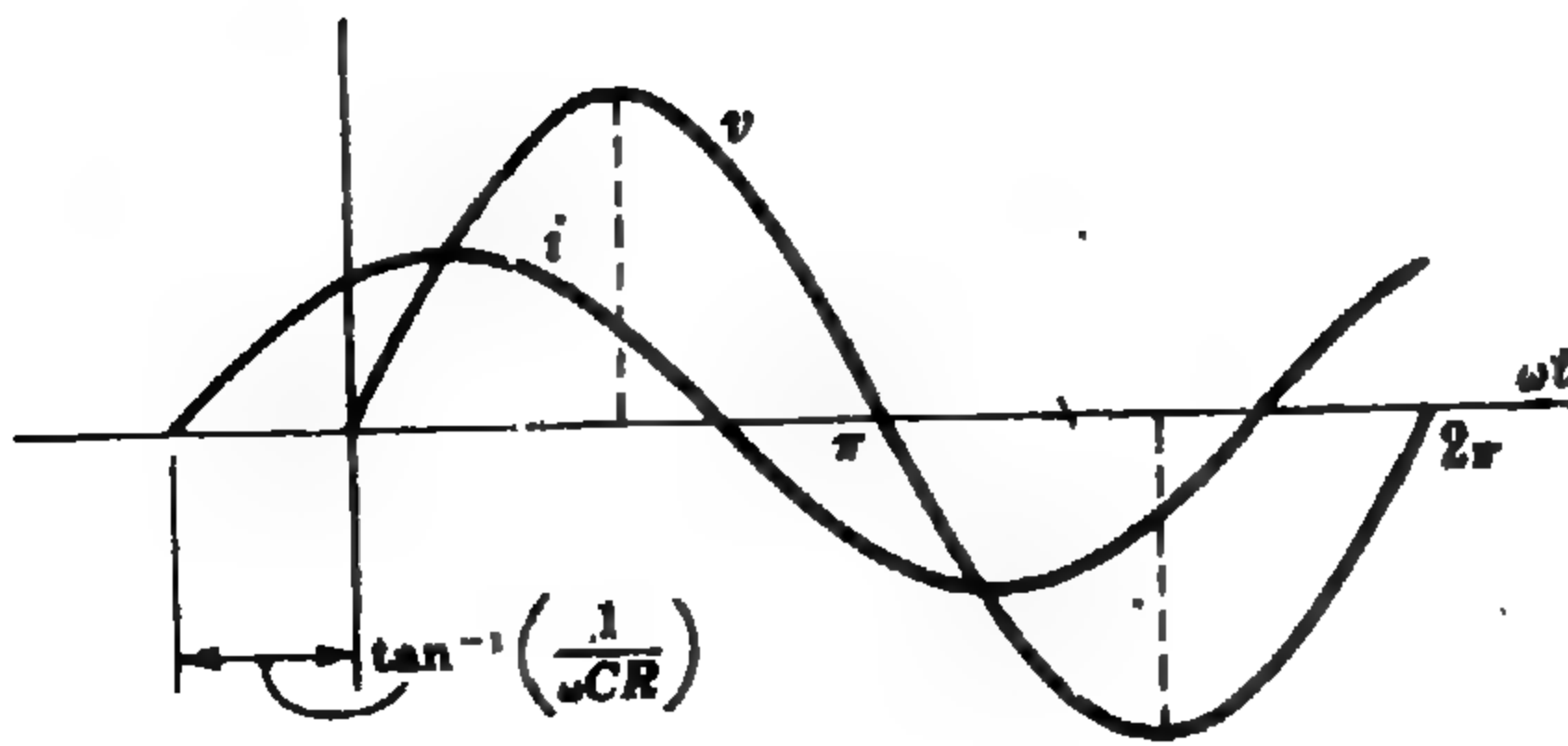
حث نقي L . يكون التيار لاحقاً للجهد (أى متأخراً عنه) بزاوية مقدارها 90° ، أو $\pi/2$ وذلك في حالة حث نقي . أنظر الشكل ٢ - ٣ . وفي حالة المقاومة في هذه الحالة تساوي ωL .

سعة نقية C . يكون التيار سابقاً للجهد (أى متقدماً عنه) بزاوية مقدارها 90° أو $\pi/2$ وذلك في حالة سعة نقية . أنظر الشكل ٣ - ٣ . وفي حالة المقاومة في هذه الحالة تساوي $1/\omega C$.

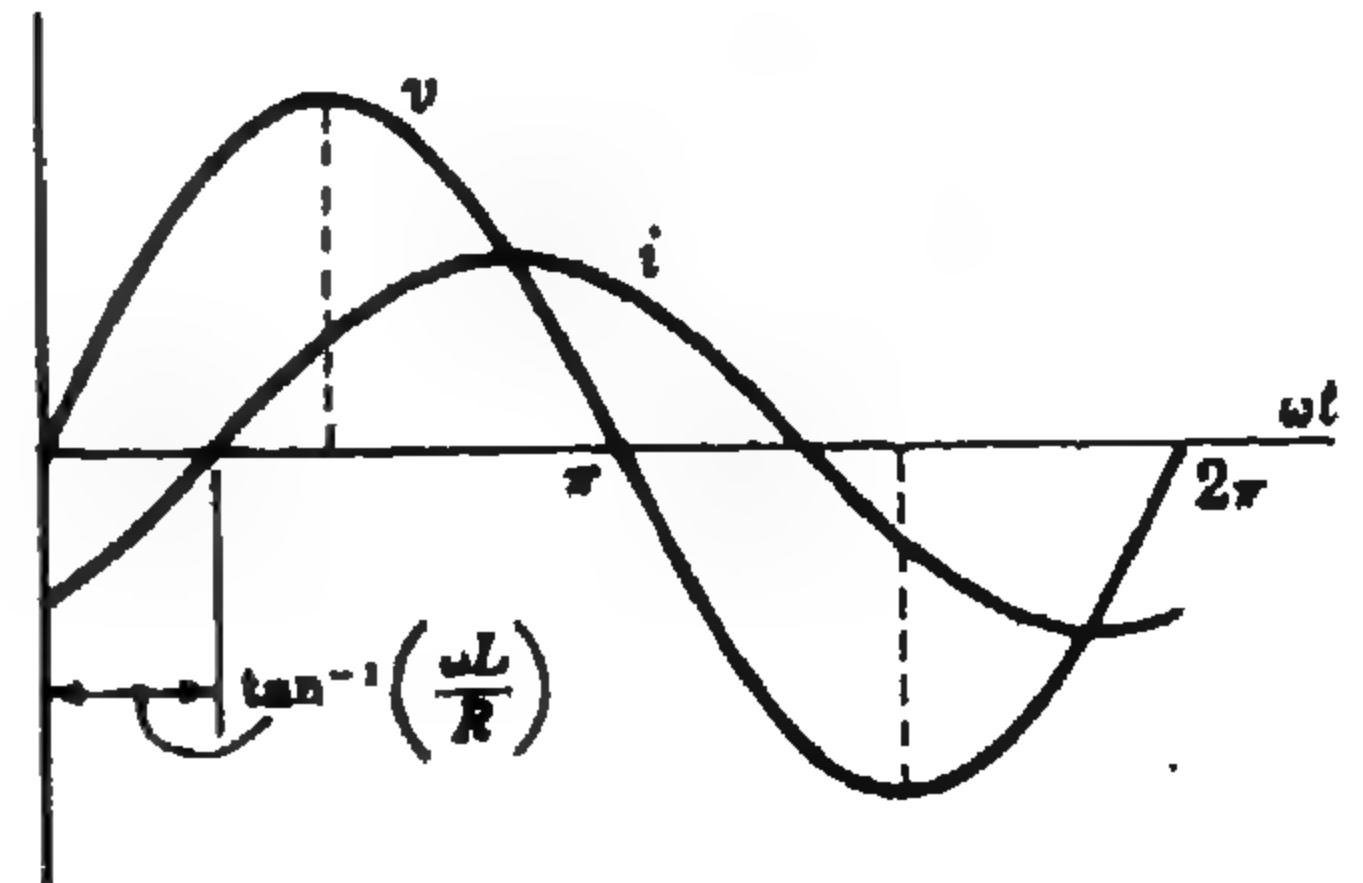


شكل ٣ - ٢

RL على التوالي . يكون التيار لاحقاً للجهد بزاوية مقدارها $\tan^{-1}(\omega L/R)$ وذلك في حالة دائرة RL على التوالي . أنظر الشكل ٤ - ٣ . وفي حالة المقاومة في هذه الحالة تساوي $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.



شكل ٣ - ٥

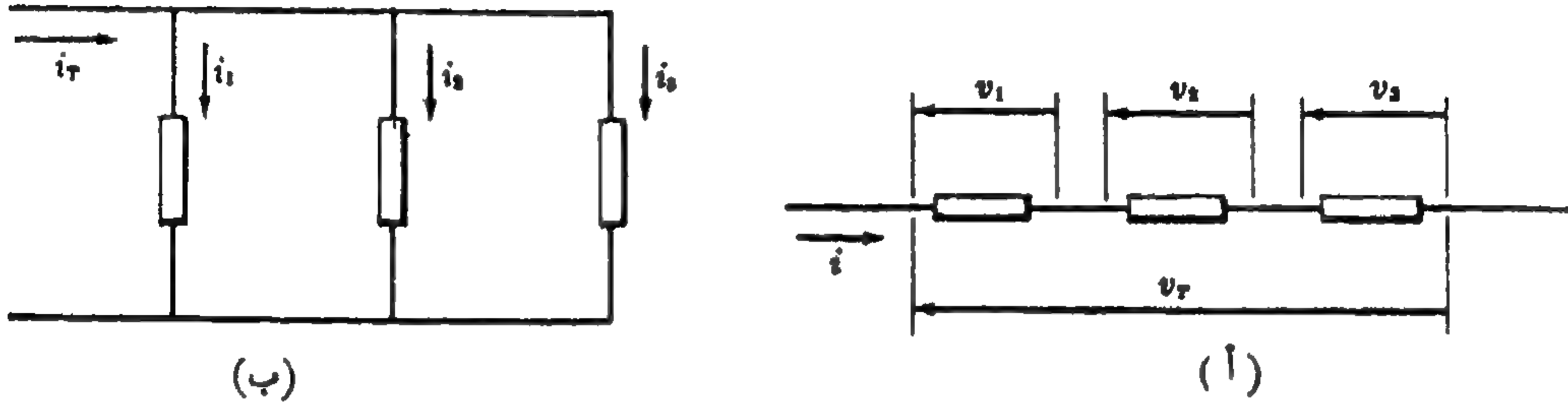


شكل ٣ - ٤

RC على التوالي . يكون التيار سابقا للجهد بزاوية مقدارها $\tan^{-1}(1/\omega CR)$ وذلك في حالة دائرة RL على التوالي .
أنظر الشكل ٣ - ٥ . وقيمة المعاوقة في هذه الحالة تساوى $\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$

دوائر متصلة على التوالي والتوازي

إذا كان هناك عدة عناصر متصلة في دائرة على التوالي فإن الجهد الكلى يساوى مجموع الجهود عبر كل عنصر من العناصر . وعلى ذلك ففي الشكل ٣ - ٦ نجد أن $v_T = v_1 + v_2 + v_3$

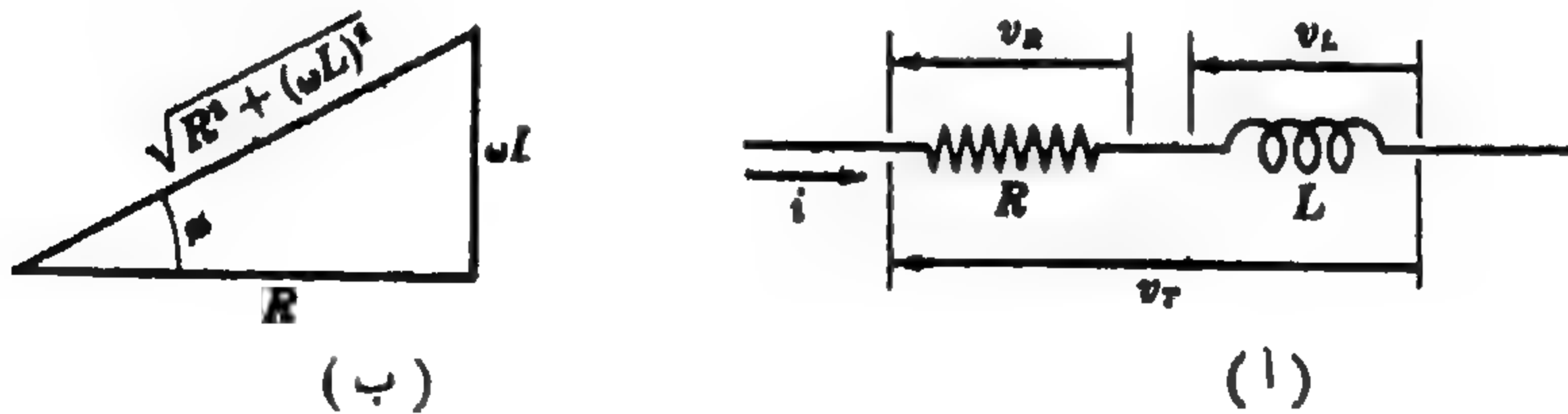


شكل ٣ - ٦

أما في حالة توصيل عدة معاوقات على التوازي فإن التيار الكلى الذى تأخذه الدائرة يساوى مجموع التيارات المسارة في الأفرع المختلفة . وعلى هذا نجد في الشكل ٣ - ٦ (ب) أن $i_T = i_1 + i_2 + i_3$. ومن الواضح أن هذا تطبيق لقانون كيرشوف للتيار حيث أن التيارات الأربعة لها نقطة اتصال مشتركة .

مسائل محلولة

٣ - ١ دائرة توالى تتكون من $R \Omega$ و L henrys كما هو موضح في الشكل ٣ - ٧ (أ) ، يمر فيها تيار معادلك $i = I_m \sin \omega t$. أوجد تعبيرا للجهد المؤثر v_T كدالة جيبية .



شكل ٣ - ٧

$$(١) \quad v_T = v_R + v_L = RI_m \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t$$

وحيث أن أى عدد من الجيود على شكل جيب أو جيب تمام لها نفس التردد يمكن جمعها في حد واحد على شكل جيب أو جيب تمام سته A وزاوية طوره ϕ ، إذن يمكن أن نكتب

$$(٢) \quad v_T = A \sin (\omega t + \phi) = A \sin \omega t \cos \phi + A \cos \omega t \sin \phi$$

وبمساواة معاملات $\sin \omega t$ في المعادلتين (١) و (٢) ، ثم معاملات $\cos \omega t$ نجد أن

$$RI_m = A \cos \varphi, \quad \omega LI_m = A \sin \varphi$$

والآن (أنظر الشكل ٣-٧ (ب)) نجد أن

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\omega L}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad A = \frac{RI_m}{\cos \varphi} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m,$$

ومنها نجد أن

$$v_T = A \sin (\omega t + \varphi) = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m \sin (\omega t + \tan^{-1} \omega L/R)$$

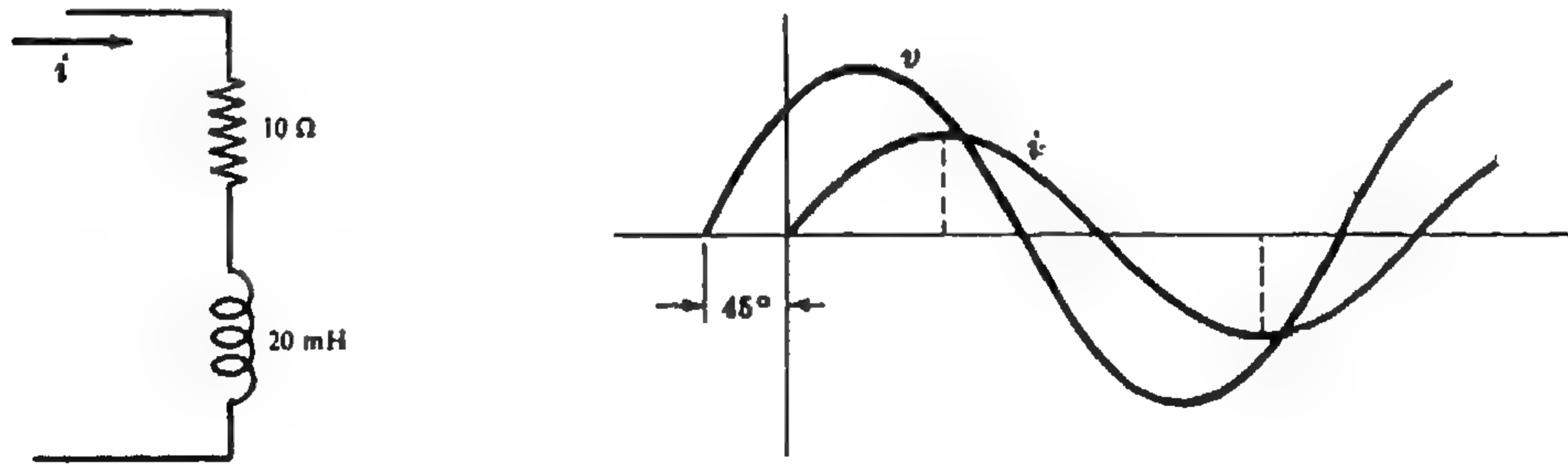
والتي يتضح منها أن التيار لاحق للجهد بزاوية طور مقدارها $\varphi = \tan^{-1} \omega L/R$.

ويكون مقدار المعاوقة هو $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

إذا كانت $R \gg \omega L$ ، إذن $\omega L/R \rightarrow 0$ و $\varphi \rightarrow 0$ ، وهي النتيجة التي حصلنا عليها في حالة مقاومة
نقية ، أما إذا كانت $\omega L \gg R$ ، إذن $\omega L/R \rightarrow \infty$ و $\varphi \rightarrow \pi/2$ وهي النتيجة التي حصلنا عليها في حالة
حث نقي .

وعلى ذلك ففي الدوائر التي فيها R و L متصلان على التوالي يكون التيار لاحقاً للجهد بزاوية تتراوح من 0°
إلى 90° تبعاً للقيم النسبية لكل من R و ωL .

٢-٢ في الدائرة الموضحة بالشكل ٣-٨ ، يمر تيار يعطى بالمعادلة $i = 2 \sin 500t$ amperes
احسب الجهد الكلي المؤثر .



شكل ٣-٨

$$v_T = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m \sin (\omega t + \tan^{-1} \omega L/R) = 28.28 \sin (500t + 45^\circ) \text{ volts}$$

$$R = 10 \Omega, \omega L = 500(0.02) = 10 \Omega, \tan^{-1} \omega L/R = 45^\circ, I_m = 2 \text{ A} \quad \text{حيث}$$

وبما أن في هذه الحالة $R = \omega L$ فإن التيار يكون لاحقاً للجهد بزاوية مقدارها 45°

٢-٢ في دائرة توالي كانت $R = 20 \Omega$ و $L = 0.06 H$ وكان التيار لاحقاً للجهد بزاوية مقدارها 80° . أوجد ω .

$$\tan \phi = \omega L / R, \tan 80 = 5.68 = \omega(0.06) / 20, \omega = 1893 \text{ rad/s}$$

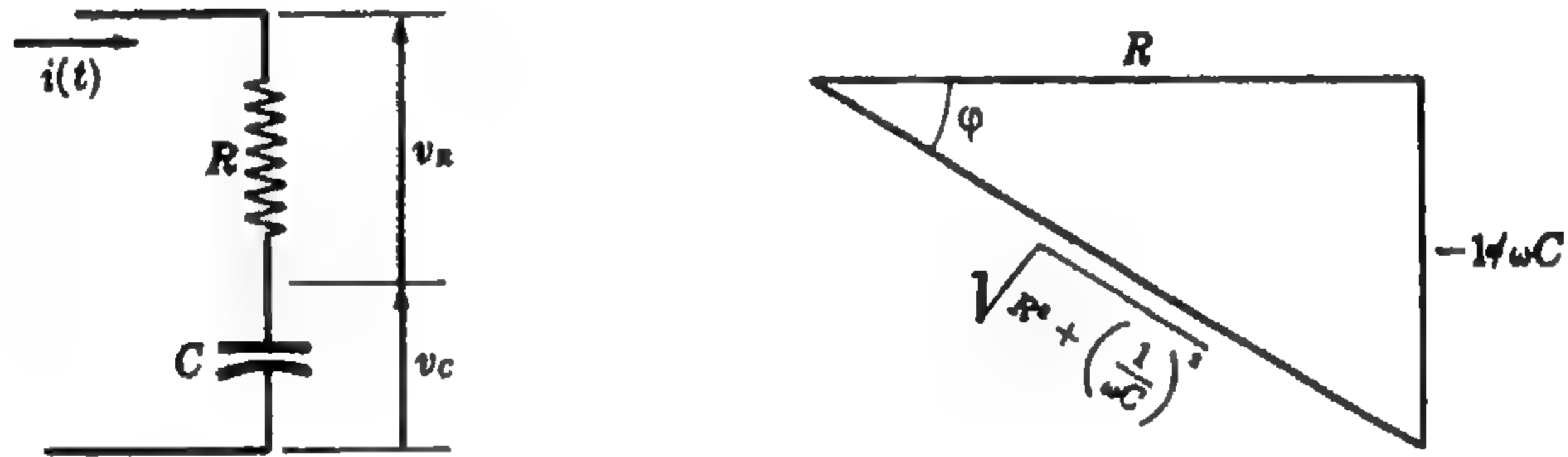
٣-٤ في دائرة RL على التوالي كانت $L = 0.02 H$ وكانت معاوقة الدائرة تساوي 17.85Ω ، فإذا كان الجهد المؤثر جهداً جيبيًا والتيار لاحقاً للجهد بزاوية مقدارها 63.4° ، فأوجد كلا من R و ω .

$$\tan \phi = \omega L / R, \tan 63.4 = 2 = 0.02\omega / R, R = 0.01\omega$$

$$17.85 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{(0.01\omega)^2 + (0.02\omega)^2}$$

$$\omega = 800 \text{ rad/s and } R = 0.01\omega = 8 \text{ ohms}$$

٣-٥ دائرة توالي تتكون من R ohms و C farads كما هو موضح في الشكل ٣-٩ ، يمر فيها تيار $i = I_m \cos \omega t$ أوجد الجهد المؤثر كدالة واحدة على شكل جيب تمام .



شكل ٣-٩

$$(١) \quad v_T = v_R + v_C = RI_m \cos \omega t + (1/\omega C)I_m \sin \omega t$$

بالتعبير عن v_T بحد واحد على شكل جيب تمام سعة A وزاوية طور ϕ نجد أن

$$(٢) \quad v_T = A \cos(\omega t + \phi) = A \cos \omega t \cos \phi - A \sin \omega t \sin \phi$$

وبمساواة معاملات $\cos \omega t$ في المعادلتين (١) و (٢) ثم معاملات $\sin \omega t$ نجد أن

$$RI_m = A \cos \phi, \quad (1/\omega C)I_m = A \sin \phi$$

$$\text{وحيث أن } \tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = -\frac{1}{\omega CR}, \quad \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}, \quad A = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} I_m,$$

إذن المعادلة المطلوبة هي

$$v_T = A \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} I_m \cos(\omega t - \tan^{-1} 1/\omega CR)$$

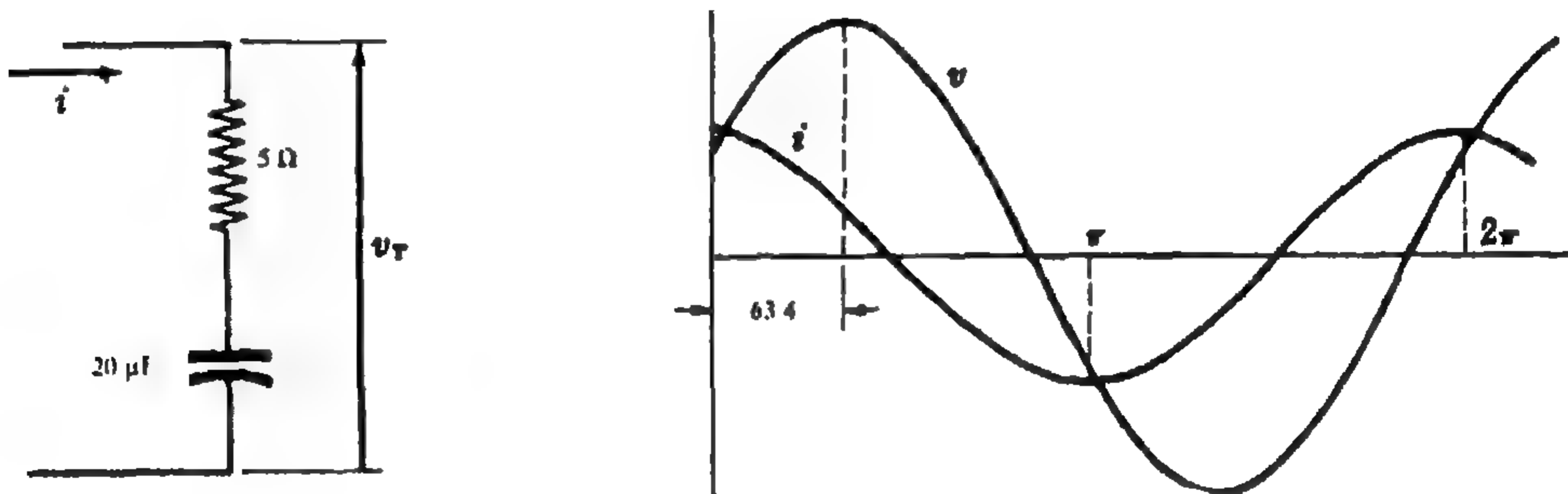
وهي تعني أن التيار سابق للجهد . (حيث أن $\sin \phi$ سالب و $\cos \phi$ موجب ، إذن ϕ في الربع الرابع)

وتكون قيمة المعاوقة تساوى $\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$.

وإذا كانت $R \gg 1/\omega C$ إذن $1/\omega CR \rightarrow 0$ و $\phi \rightarrow 0$ ، وهى النتيجة التى حصلنا عليها فى حالة مقاومة نقية . أما إذا كانت $1/\omega C \gg R$ إذن $1/\omega CR \rightarrow \infty$ و $\phi \rightarrow \pi/2$ ، وهى النتيجة التى حصلنا عليها فى حالة سعة نقية .

مما تقدم نجد أنه فى حالة توصيل R و C على التوالي يكون التيار سابقاً للجهد بزاوية تتراوح قيمتها من 0° إلى 90° تبعاً للقيم النسبية لكل من R و $1/\omega C$.

٣-٦ فى دائرة التوالي الموضحة فى الشكل ٣-١٠ ، يمر تيار معادله $i = 2 \cos 5000t$ amperes . أوجد الجهد الكلى المؤثر v_T .



شكل ٣ - ١٠

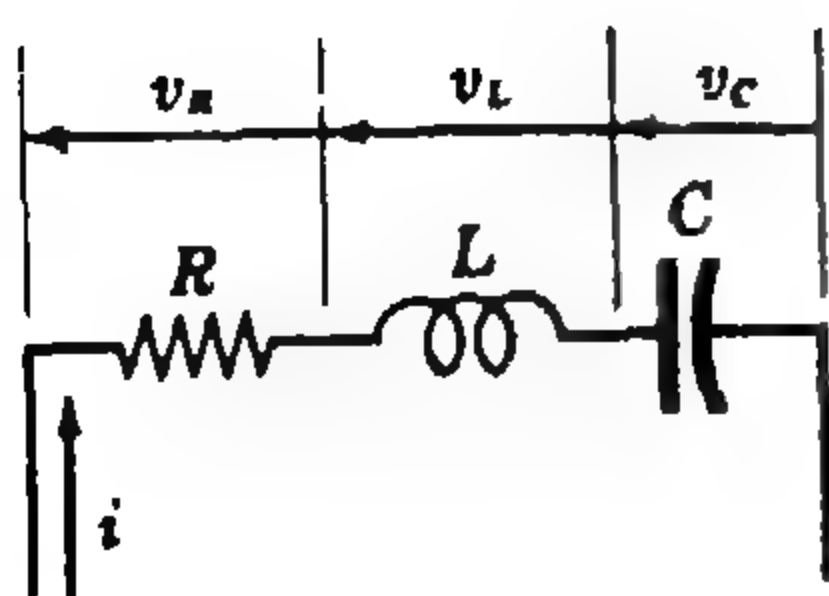
$$v_T = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} I_m \cos(\omega t - \tan^{-1} 1/\omega CR) = 22.4 \cos(5000t - 63.4) \text{ volts}$$

حيث $R = 5 \Omega, 1/\omega C = 1/(5000 \cdot 20 \cdot 10^{-6}) = 10 \Omega, \tan^{-1} 1/\omega CR = \tan^{-1} 10.5 = 63.4^\circ, I_m = 2 \text{ A}$

أى أن التيار سابق للجهد بزاوية طور مقدارها 63.4° ، والقيمة المطلقة للمعاوقة هى 11.18 ohms .

٣-٧ دائرة توالى تتكون من R و L و C ، يمر فيها تيار $i = I_m \sin \omega t$

عين الجهد عبر كل عنصر . أنظر الشكل ٣-١٢ .

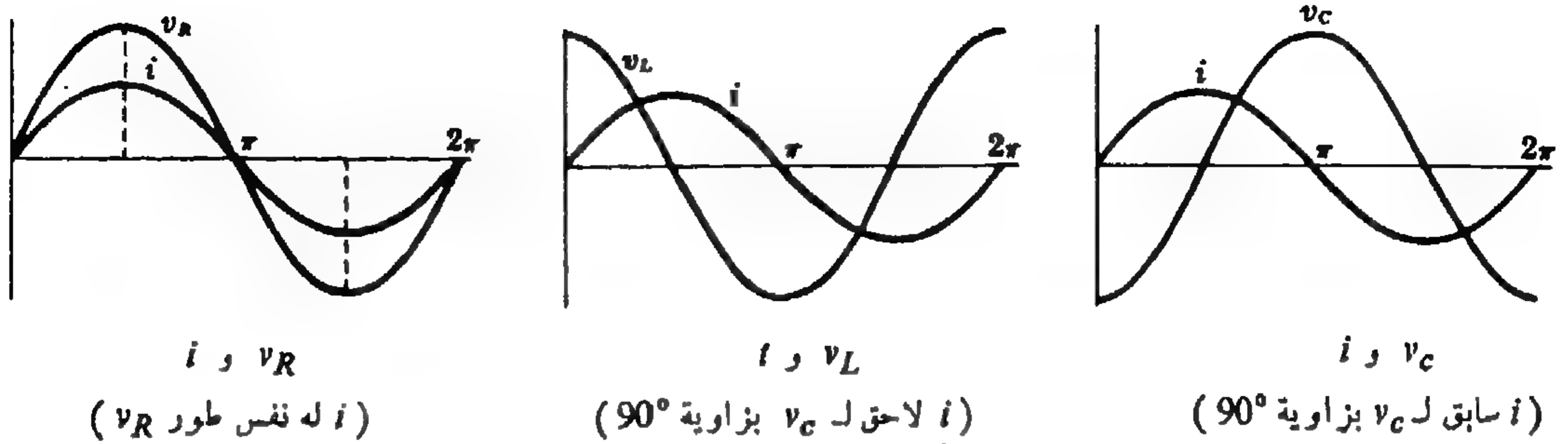


شكل ٣ - ١١

$$v_R = Ri = RI_m \sin \omega t$$

$$v_L = L \frac{d}{dt}(I_m \sin \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int I_m \sin \omega t dt = \frac{1}{\omega C} I_m (-\cos \omega t)$$



شكل ٣ - ١٢

٣ - ٨ في المسألة ٣ - ٧ ، عبر عن الجهد الكلي v_T المؤثر على عناصر الدائرة الثلاثة كدالة جيبية واحدة .

$$(١) \quad v_T = v_R + v_L + v_C = RI_m \sin \omega t + (\omega L - 1/\omega C)I_m \cos \omega t$$

وبالتعبير عن v_T كدالة جيبية واحدة بسعة A وزاوية طور φ نجد ،

$$(٢) \quad v_T = A \sin (\omega t + \varphi) \\ A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi$$

وبمساواة معاملات $\sin \omega t$ في المعادلتين (١) ، (٢) ، ثم معاملات $\cos \omega t$ نجد أن

$$RI_m = A \cos \varphi, \quad I_m(\omega L - 1/\omega C) = A \sin \varphi$$

$$\text{والآن لدينا } \tan \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad A = \frac{RI_m}{\cos \varphi} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} I_m$$

$$v_T = A \sin (\omega t + \varphi) = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} I_m \sin [\omega t + \tan^{-1} (\omega L - 1/\omega C)/R] \quad \text{إذن}$$

حيث $\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ القيمة المطلقة للمعاوقة ، $\tan^{-1} (\omega L - 1/\omega C)/R$ زاوية الطور .

إذا كان $\omega L > 1/\omega C$ تكون زاوية الطور φ موجبة ، ويكون التيار لاحقاً للجهد والتأثير العام للدائرة تأثير. حث .

أما إذا كان $\omega L < 1/\omega C$ تكون زاوية الطور φ سالبة ، ويكون التيار سابقاً للجهد والتأثير العام للدائرة تأثير مكثف .

وفي حالة $\omega L = 1/\omega C$ تكون زاوية الطور φ تساوى صفراً ، ويكون لكل من التيار والجهد نفس الطور ، وتكون قيمة المعاوقة مساوية R . ويسمى هذا الشرط شرط رنين التوالى .

٣-٩ بين أن وحدات ωL و $1/\omega C$ تعطى بـ ohms في حالة التعبير عن ω بـ rad/s و L بـ henrys و C بـ frads.

$$\begin{aligned} \omega L &= \frac{\text{radians}}{\text{seconds}} \cdot \text{henrys} = \frac{1}{\text{seconds}} \cdot \frac{\text{volt seconds}}{\text{amperes}} = \frac{\text{volts}}{\text{amperes}} = \text{ohms} \\ \frac{1}{\omega C} &= \frac{1}{\frac{\text{seconds}}{\text{radians}} \cdot \frac{1}{\text{farads}}} = \frac{1}{\text{seconds}} \cdot \frac{\text{volts}}{\text{amperes seconds}} = \frac{\text{volts}}{\text{amperes}} = \text{ohms} \end{aligned}$$

لاحظ أن مقياس الزاوية عدد مطلق ليس له وحدات .

٣-١٠ في دائرة توالى تتكون من $R = 15 \text{ ohms}$ و $L = 0.08 \text{ henrys}$ و $C = 30 \mu \text{ farads}$ كانت ذبذبة الجهد المؤثر تساوى 500 rad/s . بين إذا كان التيار لاحقاً أو سابقاً للجهد المؤثر وبأى زاوية .

$$\begin{aligned} \omega L &= 500(0.08) = 40 \text{ ohms}, \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500(30 \times 10^{-6})} = 66.7 \text{ ohms} \\ \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} &= \tan^{-1} \frac{40}{15} = 69.4^\circ \end{aligned}$$

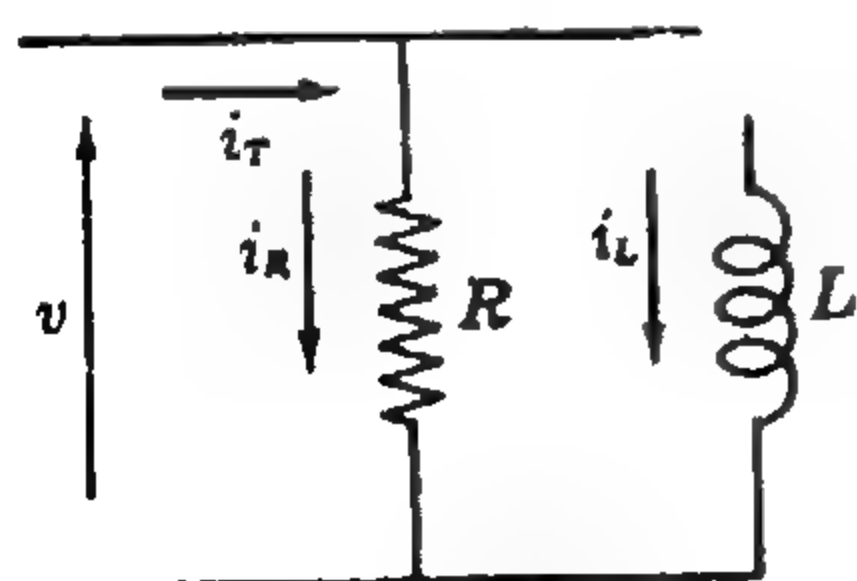
نلاحظ أن المعاوقة $1/\omega C$ الناتجة عن السعة أكبر من المعاوقة ωL الناتجة عن الحث . ولذلك فإن التيار يكون سابقاً للجهد المؤثر بزاوية قدرها 69.4° ، ويكون التأثير العام للدائرة تأثير مكثف . وقيمة المعاوقة تساوى $\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = 30.6 \text{ ohms}$.

٣-١١ إذا كان فرق الجهد المؤثر على دائرة التوازي الموضحة بالشكل ٣-١٣ والتي تتكون من R و L يعطى بالمعادلة $v = V_m \cos \omega t$ ، فأوجد التيار المار في كل فرع ثم عبر عن التيار الكلى i_T كدالة جيب تمام واحدة .

$$i_T = i_R + i_L = \frac{1}{R} v + \frac{1}{L} \int v dt = \frac{V_m}{R} \cos \omega t + \frac{V_m}{\omega L} \sin \omega t$$

$$i_T = \sqrt{(1/R)^2 + (1/\omega L)^2} V_m \cos(\omega t - \tan^{-1} R/\omega L) \quad \text{إذن}$$

والتيار لاحق للجهد المؤثر بزاوية



شكل ٣-١٣

$$\phi = \tan^{-1} R/\omega L$$

إذا كانت $R \gg \omega L$ ، إذن $\phi \rightarrow 90^\circ$

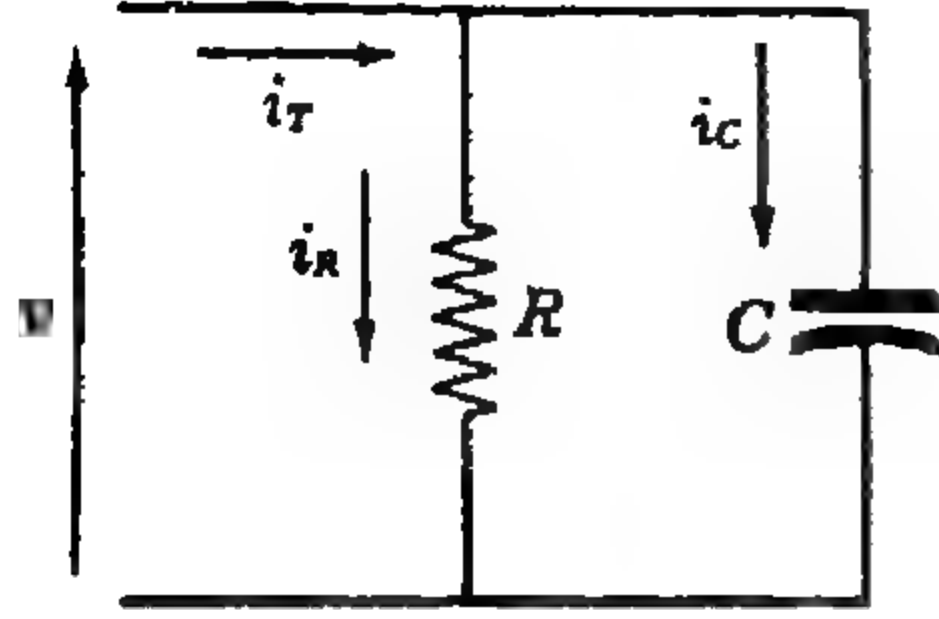
$$i_T \approx (V_m/\omega L) \cos(\omega t - 90^\circ)$$

وبقيمة المقاومة هذه الكبيرة نسبياً يكون التيار المار في فرع المقاومة صغيراً جداً . وعلى هذا فإن التيار الكلى i_T يعطى أساساً بالتيار i_L ، أى أن تيار الملف يتحكم في تحديد قيمة التيار الكلى .

وإذا كان $\omega L \gg R$ ، إذن $\phi \rightarrow 0^\circ$ و $i_T \approx (V_m/R) \cos \omega t$. وفي هذه الحالة يكون لفرع الملف ممانعة كبيرة وعلى ذلك يكون التيار المار به صغيراً بالنسبة للتيار المار بفرع المقاومة . وفي هذه الحالة يكون تيار المقاومة هو الذى يتحكم في تحديد قيمة التيار الكلى .

٣-١٢ إذا كان الجهد المؤثر على دائرة التوازي الموضحة بالشكل ٣-١٤ والتي تتكون من R و C يعطى بالمعادلة $v = V_m \sin \omega t$ ، ووجد التيار المار في كل فرع ثم عبر عن التيار الكلي i_T كدالة جيبية واحدة .

$$i_T = i_R + i_C = \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = \frac{V_m}{R} \sin \omega t + \omega C V_m \cos \omega t$$



شكل ٣-١٤

$$i_T = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C)^2} V_m \sin(\omega t + \tan^{-1} \omega C R) \quad \text{إذن}$$

والتيار لاحق للجهد بزاوية $\phi = \tan^{-1} \omega C R$.

وإذا كانت $R \gg 1/\omega C$ ، إذن $\phi \rightarrow 90^\circ$ ،

و $i_T \approx i_C = \omega C V_m \sin(\omega t + 90^\circ)$ أى أن فرع المكثف يتحكم في قيمة التيار الكلي .

أما إذا كانت $1/\omega C \gg R$ ، إذن $\phi \rightarrow 0^\circ$ ،

و $i_T \approx i_R = (V_m/R) \sin \omega t$ أى أن فرع المقاومة يتحكم في قيمة التيار الكلي .

٣-١٣ إذا كان فرق الجهد المؤثر على دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٣-١٥ والتي تتكون من R و L و C يعطى بالمعادلة $v = V_m \sin \omega t$ فأوجد التيار المار في كل فرع وعبر عن التيار الكلي i_T كدالة جيبية واحدة .

$$\begin{aligned} i_T &= i_R + i_L + i_C = \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int v dt + C \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{V_m}{R} \sin \omega t - \frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t + \omega C V_m \cos \omega t \end{aligned} \quad (1)$$

وبالتعبير عن i_T كدالة جيبية واحدة بسعة A

وزاوية طور ϕ نجد أن

$$\begin{aligned} i_T &= A \sin(\omega t - \phi) \\ &= A \sin \omega t \cos \phi - A \cos \omega t \sin \phi \end{aligned} \quad (2)$$

وبمساواة معاملات $\sin \omega t$ في المعادلتين (١)

و (٢) ، ثم مساواة معاملات $\cos \omega t$ نجد أن

$$V_m/R = A \cos \phi, \quad (\omega C - 1/\omega L) V_m = A \sin \phi$$

$$\tan \phi = \frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}, \quad \cos \phi = \frac{1/R}{\sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}}, \quad A = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2} V_m \quad \text{إذن}$$

$$i_T = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2} V_m \sin[\omega t + \tan^{-1}(\omega C - 1/\omega L)R] \quad \text{و}$$

ومن الواضح أن قيمة جيب زاوية الطور يعتمد على القيم النسبية لكل من ωC و $1/\omega L$.

والتيار المار في فرع الملف لاحق للجهد المؤثر بزاوية 90° . بينما التيار المار في فرع المكثف سابق للجهد المؤثر بزاوية 90° . ويمكن لمذنب التيارين إذا تساوت قيمتهما أن يلاشى كل منهما الآخر . وإذا كان تيار فرع الملف هو الأكبر يكون التيار الكلي لاحقاً للجهد المؤثر ، أما إذا كان تيار فرع المكثف هو الأكبر يكون التيار الكلي سابقاً للجهد المؤثر .

١٤-٣ دائرة توالى تتكون من عنصرين نقيين ، فإذا كان التيار المار فيها والجهد المؤثر يعطيان

$$v = 150 \sin(500t - 10^\circ) \text{ volts, } i = 13.42 \sin(500t - 53.4^\circ) \text{ amperes}$$

فأوجد المنصرين المكونين للدائرة .

بالفحص نجد أن التيار لاحق للجهد بزاوية $63.4^\circ = 53.4^\circ + 10^\circ$ ، إذن الدائرة لابد وأن تحتوى على

L و R .

$$\tan 63.4^\circ = \frac{\omega L}{R}, \quad \frac{\omega L}{R} = 2, \quad \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \frac{150}{13.42} = \sqrt{R^2 + (2R)^2}, \quad R = 5 \text{ ohms}$$

و $L = 2R/\omega = 0.02 \text{ henrys}$ إذن عناصر الدائرة هي مقاوم 5Ω وحث 0.02 H .

١٥-٣ دائرة توالى تتكون من عنصرين نقيين ، فإذا كان التيار المار فيها والجهد المؤثر يعطيان بـ

$$v = 200 \sin(2000t - 50^\circ) \quad i = 4 \cos(2000t - 13.2^\circ) \text{ amperes}$$

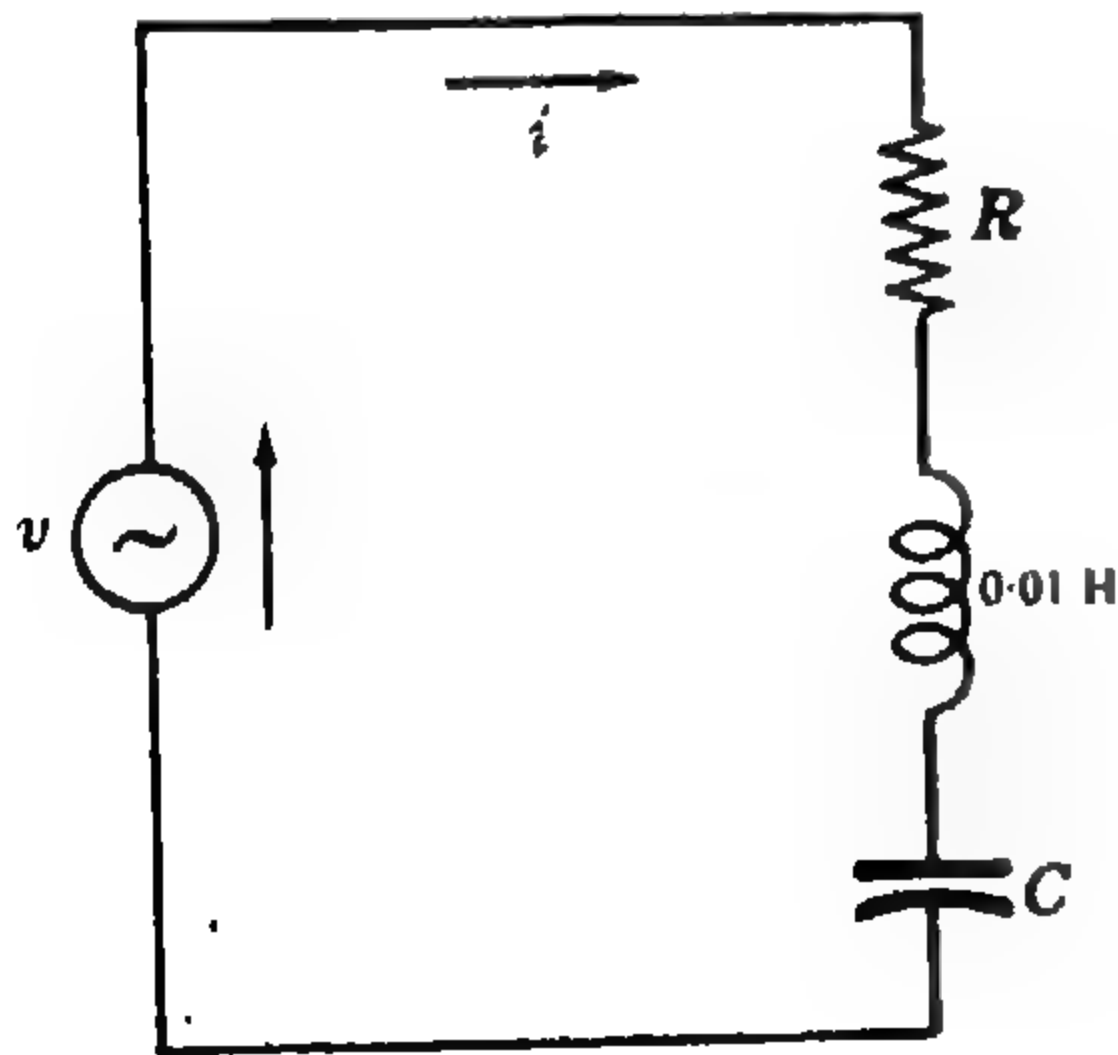
فأوجد المنصرين المكونين للدائرة .

بما أن $\cos x = \sin(x - 90^\circ)$ ، إذن يمكننا كتابة $i = 4 \sin(2000t - 103.2^\circ) \text{ amperes}$. ويكون

التيار سابقاً للجهد بزاوية مقدارها $53.2^\circ = 103.2^\circ - 50^\circ$ ، إذن الدائرة لابد أن تحتوى على C و R .

$$\tan 53.2^\circ = \frac{1/\omega C}{R}, \quad \frac{1/\omega C}{R} = 1.33, \quad \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}, \quad \frac{200}{4} = \sqrt{R^2 + (1.33R)^2},$$

وعنصر الدائرة هما $R = 30 \Omega$ و $C = 1/(1.33\omega R) = 1.25 \cdot 10^{-5} \text{ farads} = 12.5 \mu\text{F}$.



شكل ١٦-٣

١٦-٣ في دائرة التوالى الموضوعة في الشكل ١٦-٣ يعطى التيار والجهد بالمعادلتين

$$v = 353.5 \cos(3000t - 10^\circ) \text{ volts,}$$

$$i = 12.5 \cos(3000t - 55^\circ) \text{ amperes}$$

فإذا كان الحث يساوى 0.01 H ، فأوجد قيمتي R و C .

بما أن التيار لاحق للجهد بزاوية قدرها $45^\circ = 55^\circ - 10^\circ$

إذن ممانعة الملف ωL أكبر ممانعة المكثف $1/\omega C$

$$\tan 45^\circ = 1 = \frac{(\omega L - 1/\omega C)/R}{(\omega L + 1/\omega C)/R}, \quad \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}, \quad \frac{353.5}{12.5} = \sqrt{2R^2}$$

$$R = 20 \text{ ohms}$$

ومن المعادلة $(\omega L - 1/\omega C) = R$ نجد أن

$$C = 3.33 \times 10^{-5} \text{ farads} = 33.3 \mu\text{F}$$

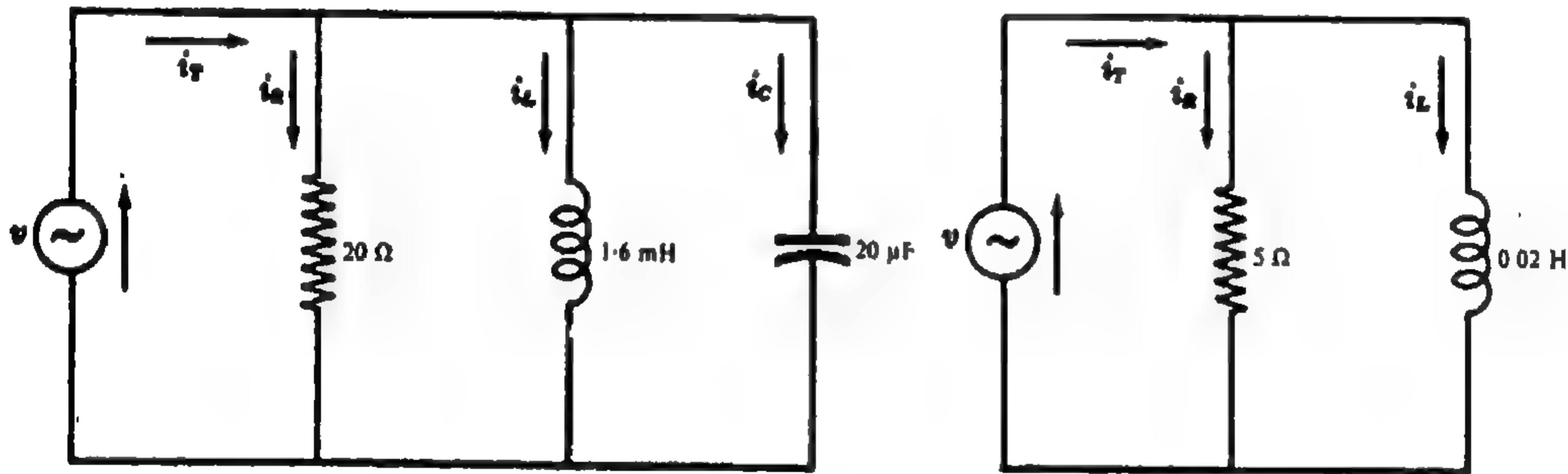
١٧-٣ إذا كانت دالة الجهد المؤثر على دائرة التوازي الموضحة في الشكل ١٧-٣ تعطى بالمعادلة $v = 100 \sin(1000t + 50^\circ)$ volts فمعر عن التيار الكلي كدالة جيبية واحدة .

$$\begin{aligned} i_T &= i_R + i_L = \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int v dt \\ &= 20 \sin(1000t + 50^\circ) - 5 \cos(1000t + 50^\circ) \\ &= A \sin(1000t + 50^\circ) \cos \phi + A \cos(1000t + 50^\circ) \sin \phi \end{aligned}$$

ومنها نجد أن $20 = A \cos \phi$ و $-5 = A \sin \phi$ إذن $\tan \phi = -5.20$ و $\phi = -14.05^\circ$ و $A = 20/(\cos \phi) = 20.6$ إذن

$$i_T = 20.6 \sin(1000t + 50^\circ - 14.05^\circ) = 20.6 \sin(1000t + 35.95^\circ) \text{ amperes}$$

والتيار لاحق للجهد بزاوية قدرها 14.05°



شكل ١٧-٣

شكل ١٨-٣

١٨-٣ إذا كان الجهد المؤثر على الدائرة الموضحة في الشكل ١٨-٣ يعطى بالمعادلة $v = 50 \sin(5000t + 45^\circ)$ volts فأوجد التيار المسار في كل فرع وكذلك التيار الكلي .

باتباع الطريقة الموضحة في هذا الفصل نجد أن

$$\begin{aligned} i_T' &= i_R + i_L + i_C = \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int v dt + C \frac{dv}{dt} \\ &= 2.5 \sin(5000t + 45^\circ) - 6.25 \cos(5000t + 45^\circ) + 5 \cos(5000t + 45^\circ) \\ &= 2.5 \sin(5000t + 45^\circ) - 1.25 \cos(5000t + 45^\circ) \\ &= 2.8 \sin(5000t + 18.4^\circ) \text{ amperes.} \end{aligned}$$

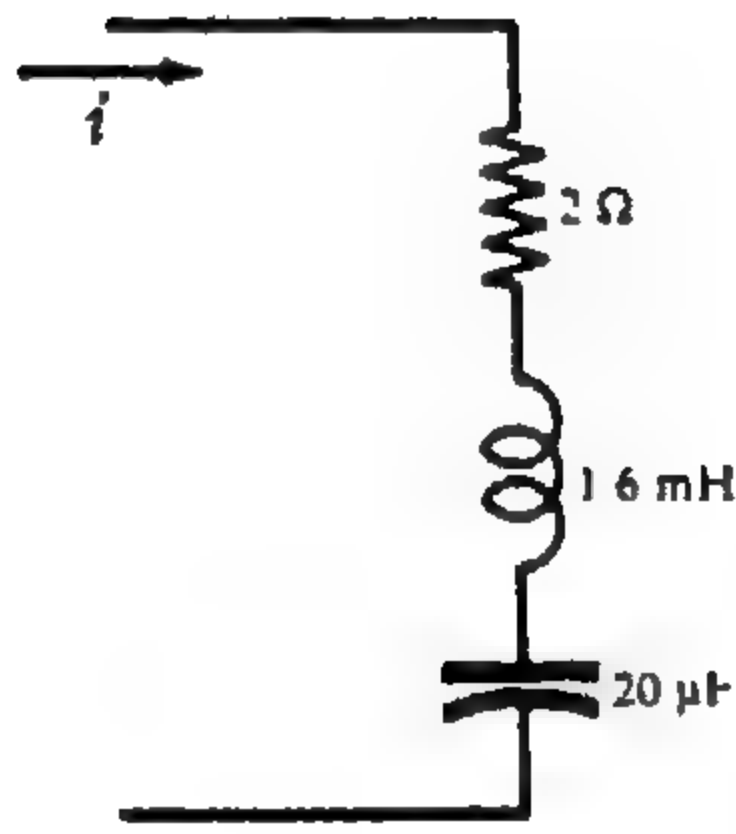
والتيار لاحق للجهد المؤثر بزاوية قدرها $26.6^\circ = 45^\circ - 18.4^\circ$

لاحظ أن القيمة العظمى للتيار الكلى تساوى $2.8 A$ ، وهى أصغر من كل القيم العظمى لتيارى فرعى الملف والمكثف الذى قيمتها $6.25 A$ و $5 A$ على الترتيب .
وتفسير ذلك يتضح من رسم التيارات الثلاثة بمقياس واحد .

٣ - ١٩ إذا كان التيار المار فى دائرة التوالى الموضحة فى الشكل ٣-١٩ والى تتكون من R و L و C يعطى بالمعادلة $i = 3 \cos (5000t - 60^\circ) A$ ، فأوجد الجهد عبر كل عنصر وكذلك الجهد الكلى .

باستخدام الطريقة المتبعة فى هذا الفصل نجد أن

$$\begin{aligned} v_T &= v_R + v_L + v_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \\ &= 6 \cos (5000t - 60^\circ) - 24 \sin (5000t - 60^\circ) + 30 \sin (5000t - 60^\circ) \\ &= 6 \cos (5000t - 60^\circ) + 6 \sin (5000t - 60^\circ) \\ &= 8.49 \cos (5000t - 105^\circ) \text{ volts} \end{aligned}$$



شكل ٣ - ١٩

والتيار سابق للجهد الكلى بزاوية قدرها $105^\circ - 60^\circ = 45^\circ$

لاحظ أن القيمة العظمى للجهد الكلى تساوى $8.49 V$ كما أن الجهد عبر كل من عنصرى الدائرة L و C أكبر من القيمة العظمى للجهد الكلى . وباختيار مقياس رسم مناسب يمكن استعراض هذه الحالة لتوضيح ما حدث .

مسائل اضافية

٣ - ٢٠ إذا كان التيار المار فى ملف نقي حثه $L = 0.01 H$ هو $i = 5 \cos 2000t$ amperes ، فأوجد الجهد عبر هذا المنصر .

الجواب : $100 \cos (2000t - 90^\circ) \text{ volts}$

٣ - ٢١ إذا كان التيار المار فى مكثف نقي سعته $C = 30 \mu F$ هو $i = 12 \sin 2000t$ amperes. ، فأوجد الجهد عبر هذا المنصر .

الجواب : $200 \sin (2000t - 90^\circ) \text{ volts}$

٣ - ٢٢ فى دائرة على التوالى كانت $R = 5 \Omega$ و $L = 0.06 H$ وكان فرق الجهد على الملف هو $v_L = 15 \sin 200t \text{ volts}$ أوجد الجهد الكلى والتيار وزاوية الطور بين i و v_T ومقدار المعاوقة .

$$i = 1.25 \sin (200t - 90^\circ) \text{ amperes}, v_T = 16.25 \sin (200t - 22.65^\circ) \text{ volts}, 67.35, V_m/I_m = 13 \text{ ohms}$$

٣ - ٢٣ فى نفس دائرة التوالى فى المسألة ٣ - ٢٢ كان فرق الجهد عبر المقاومة هو $v_R = 15 \sin 200t \text{ volts}$

أوجد الجهد الكلى والتيار وزاوية الطور بين i و v_T ومقدار المعاوقة

الجواب $i = 3 \sin 200t$ amperes, $v_T = 39 \sin (200t - 67.35^\circ)$ volts, 67.35° , $I_m' / I_m = 13$ ohms

٢٤ - ٣ فى دائرة توالى تتكون من عنصرين نقيين ، إذا كان الجهد المؤثر والتيار الناتج يعطيان بالمعادلتين .

$v_T = 255 \sin (300t - 45^\circ)$ volts, $i = 8.5 \sin (300t - 15^\circ)$ amperes

فأوجد عنصرى الدائرة . الجواب : $L = 0.05$ H و $R = 26$ ohms .

٢٥ - ٣ فى دائرة توالى تتكون من عنصرين نقيين ، إذا كان الجهد المؤثر والتيار الناتج يعطيان بالمعادلتين .

$v_T = 150 \cos (200t - 30^\circ)$ volts, $i = 4.48 \cos (200t - 56.6^\circ)$ amperes

فأوجد عنصرى الدائرة . الجواب : $L = 0.075$ H و $R = 30$ ohms

٢٦ - ٣ عنصران نقيان $R = 12 \Omega$ و $C = 31.3 \mu F$ وصلا على التوالى وأثر عليهم بجهد معادلته $v = 100 \cos (2000t - 20^\circ)$ volts فإذا وصل نفس العنصرين على التوازي وأثر عليهم بنفس الجهد فأوجد التيار الكلى فى كل حالة .

الجواب : على التوالى $i = 33.2 \cos (2000t)$ amperes ، على التوازي

$10.4 \cos (2000t)$ amperes

٢٧ - ٣ مقاومة $R = 27.5 \Omega$ ومكثف $C = 66.7 \mu F$ وصلا على التوالى . فإذا كان فرق الجهد على المكثف $v_C = 50 \cos 1500t$ volts . فأوجد الجهد الكلى v_T وزاوية الطور بين التيار والجهد وكذلك مقدار المعاوقة .

الجواب : 29.3 ohms , $I_m' / I_m = 20$, $v_T = 146.3 \cos (1500t - 70^\circ)$ volts

٢٨ - ٣ مقاومة $R = 5 \Omega$ ومكثف مجهول السعة وصلا على التوالى . فإذا كان الجهد على المقاومة هو $v_R = 25 \sin (2000t + 30^\circ)$ volts ، وكان التيار سابقا للجهد المؤثر بزاوية 60° ، أوجد قيمة سعة المكثف C المجهولة . الجواب : $57.7 \mu F$

٢٩ - ٣ ملف $L = 0.05$ H ومكثف مجهول السعة وصلا على التوالى . فإذا كان الجهد المؤثر والتيار الناتج يعطيان بالمعادلتين .

$v_T = 100 \sin 5000t$ volts, $i = 2 \sin (5000t + 90^\circ)$ amperes

فأوجد سعة المكثف C . الجواب : $C = 0.667 \mu F$

٣٠ - ٣ إذا كان التيار المار فى دائرة RLC على التوالى لاحقا للجهد المؤثر بزاوية 30° ، وكانت القيمة العظمى للجهد عبر الملف تساوى ضعف القيمة العظمى للجهد عبر المكثف . فأوجد قيمتى L و C علما بأن $R = 20 \Omega$.

و $v_T = 10 \sin 1000t$ volts.

الجواب : $L = 23.1$ mH, $C = 86.5 \mu F$

٣١-٣ دائرة توالى تتكون من $R = 5 \Omega$ و $L = 0.02 \text{ H}$ و $C = 80 \mu \text{ F}$. أثر عليهم بفرق جهد جيبى تردده متغير. أوجد قيمة ω التى يكون عندها التيار (أ) سابقا للجهد بزاوية 45° ، (ب) له نفس طور الجهد ، (ج) لاحقا للجهد بزاوية 45° .

الجواب : (أ) 675 rad/s ، (ب) 790 rad/s ، (ج) 925 rad/s .

٣٢-٣ فى دائرة توازى تتكون من فرعين ، كان فى أحد الفرعين مقاومة $R = 50 \Omega$ وفى الفرع الآخر عنصر واحد مجهول . فإذا كان الجهد المؤثر على الدائرة والتيار الناتج يعطيان بالمعادلتين

$$v = 100 \cos(1500t - 45^\circ) \text{ volts}, i_T = 12 \sin(1500t - 135^\circ) \text{ amperes}$$

فأوجد العنصر المجهول . الجواب : $R = 10 \Omega$

٣٣-٣ ملف $L = 0.05 \text{ H}$ ومكثف $C = 0.667 \mu \text{ F}$ وصلا على التوازى . أوجد التيار الكلى الخارج من المنبع إذا كان فرق الجهد المؤثر هو $v = 100 \sin 5000t \text{ volts}$.

الجواب : $i_T = 0.067 \sin(5000t - 90^\circ) \text{ amperes}$

٣٤-٣ وصلت مقاومة $R = 10 \Omega$ مع ملف $L = 0.005 \text{ H}$ على التوازى . فإذا كان التيار المار فى فرع الملف هو $i_L = 5 \sin(2000t - 45^\circ) \text{ amperes}$ ، فأوجد التيار الكلى والزاوية بين i_T والجهد المؤثر .

الجواب : $i_T = 7.07 \sin(2000t - 0^\circ) \text{ amperes}$ و i_T لاحق v بزاوية 45° .

٣٥-٣ مقاومة $R = 5 \Omega$ وصلت على التوازى مع عنصر مجهول ، فإذا كان الجهد المؤثر والتيار الكلى يعطيان بالمعادلتين .

$$v = 10 \cos(50t - 60^\circ) \text{ volts}, i = 5.38 \cos(50t - 8.23^\circ) \text{ amperes}$$

فأوجد العنصر المجهول . الجواب : $L = 0.04 \text{ H}$

٣٦-٣ إذا أثر على عنصرين نقيين $R = 10 \Omega$ و $C = 100 \mu \text{ F}$ متصلين على التوازى بجهد $v = 150 \cos(5000t - 30^\circ) \text{ volts}$. فأوجد التيار الكلى .

الجواب : $i_T = 76.5 \cos(5000t + 48.7^\circ) \text{ amperes}$

٣٧-٣ وصل مكثف $C = 35 \mu \text{ F}$ على التوازى مع عنصر واحد آخر . فإذا كان الجهد، المؤثر والتيار الكلى يعطيان بالمعادلتين $v = 150 \sin 3000t \text{ volts}$ و $i_T = 16.5 \sin(3000t + 72.4^\circ) \text{ amperes}$ على الترتيب فأوجد العنصر الآخر .

الجواب : $R = 30 \Omega$

٣٨-٣ دائرة $L C$ على التوازى يؤثر عليها جهد $v = 50 \cos(3000t - 45^\circ) \text{ volts}$ وكان التيار الكلى يعطى بالمعادلة $i_T = 2 \cos(3000t - 45^\circ) \text{ amperes}$. فإذا كان التيار المار فى فرع الملف خمسة أضعاف التيار المار فى فرع المكثف ، فأوجد قيمتي C و L .

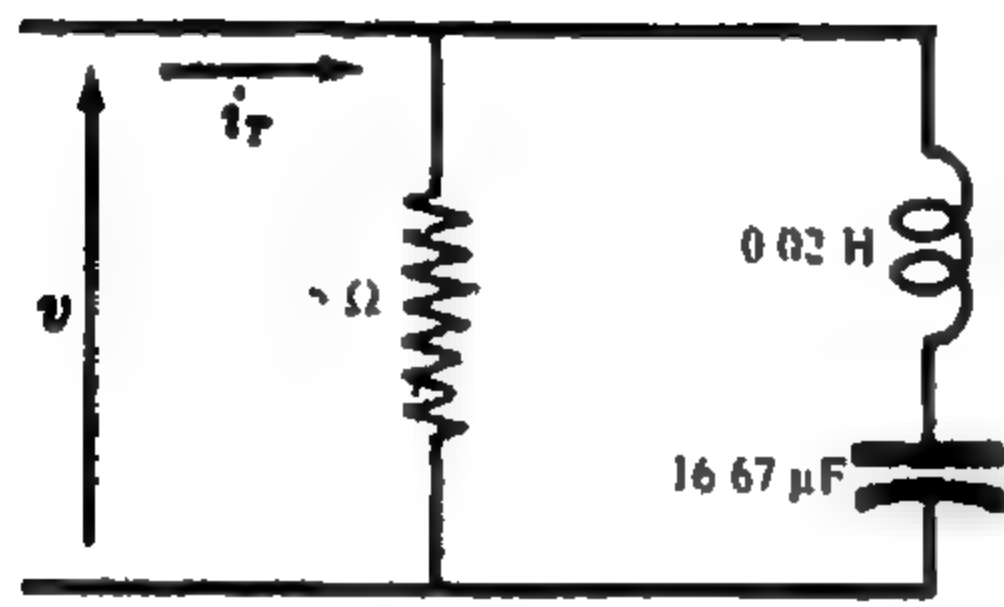
الجواب : $C = 3.33 \mu \text{ F}$ و $L = 6.67 \text{ mH}$

٣-٣٩ ثلاثة أفرع يحتوى كل منها على عنصر نقي ، وصلت على التوازي وأثر عليها بجهد $v = 200 \sin 1000t$ volts ، فإذا كانت عناصر الثلاثة أفرع هي $R = 300 \Omega$ و $L = 0.5 H$ و $C = 10 \mu F$ ، فأوجد التيار الكلي والزاوية بين i_T والجهد المؤثر ومقدار المعاوقة .

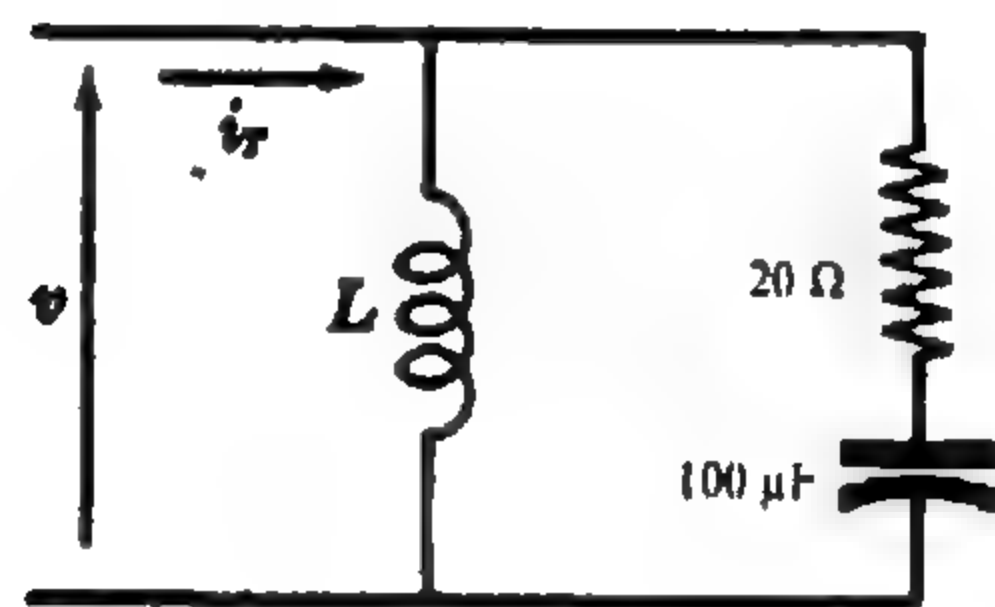
الجواب : $i_T = 1.74 \sin (1000t + 67.4^\circ)$ amperes, 67.4° (i_T leads v), $V_m/I_m = 115$ ohms

٣-٤٠ أوجد قيمة L في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٣-٢٠ علماً بأن فرق الجهد هو $v = 100 \sin 500t$ volts والتيار الكلي هو $i_T = 2.5 \sin 500t$ amperes

الجواب : $L = 0.08 H$



شكل ٣-٢١



شكل ٣-٢٠

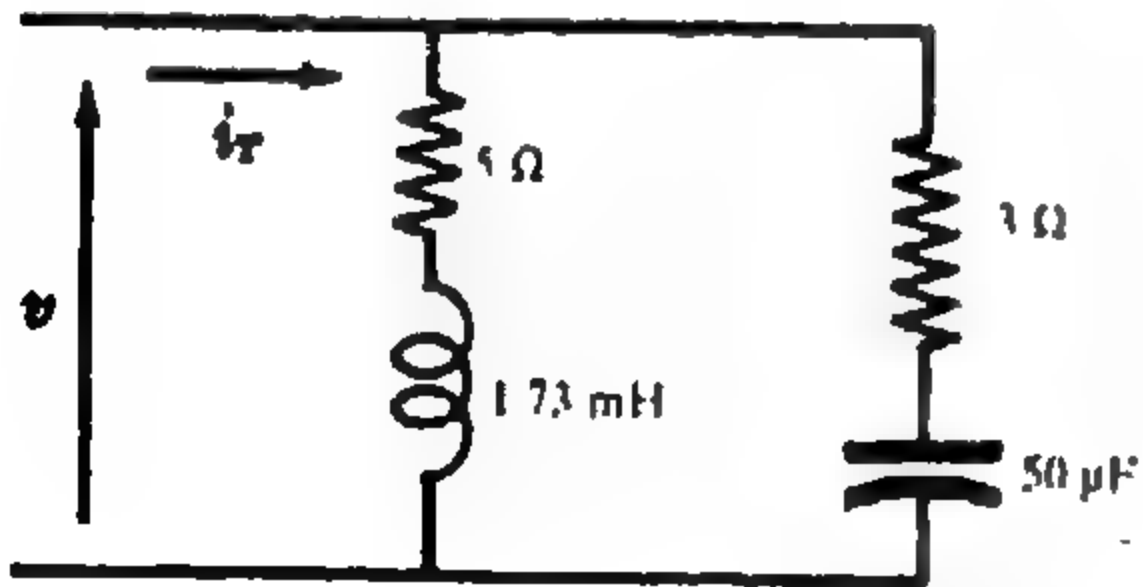
٣-٤١ أوجد التيار الكلي في دائرة التوازي الموضحة بالشكل ٣-٢١ ، علماً بأن الجهد المؤثر هو

$v = 50 \sin (2000t - 90^\circ)$ volts الجواب : $i_T = 11.2 \sin (2000t - 116.6^\circ)$ amperes

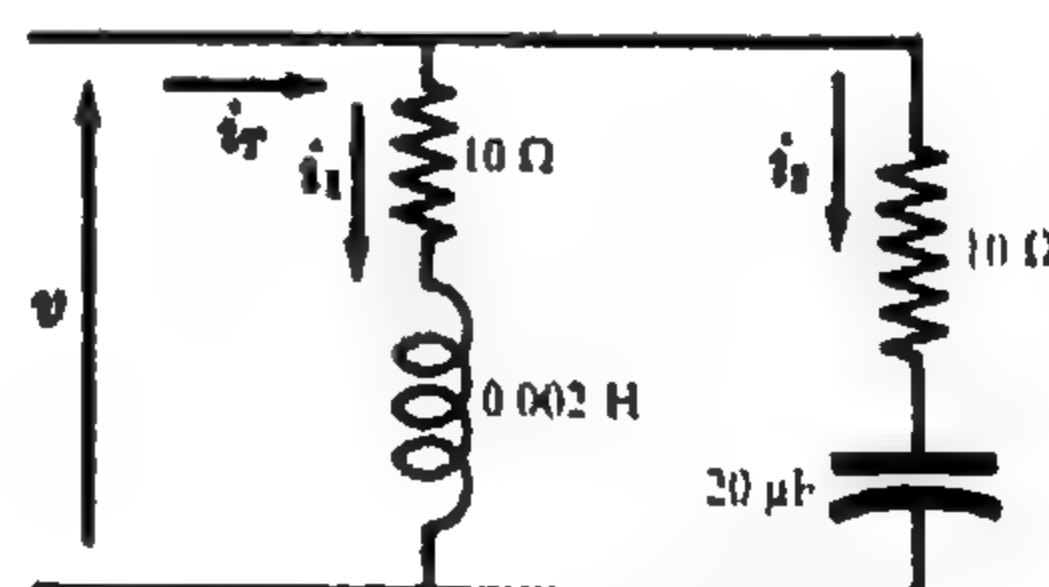
٣-٤٢ للدائرة الموضحة في الشكل ٣-٢٢ ، أوجد التيارات i_1 و i_2 و i_T . إذا كان الجهد المؤثر هو

$v = 100 \sin 5000t$ volts.

الجواب : $i_1 = 7.07 \sin (5000t - 45^\circ)$ amperes, $i_2 = 7.07 \sin (5000t + 45^\circ)$ amperes, $i_T = 10 \sin 5000t$ amperes



شكل ٣-٢٣



شكل ٣-٢٢

٣-٤٣ إذا كان الجهد المؤثر على دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٣-٢٣ هو $v = 100 \cos (5000t + 45^\circ)$ volts

فأوجد (أ) التيار الكلي ، (ب) أى العنصرين المتصلين على التوالي يعطيان نفس التيار وعلى ذلك يمكن أن يكافئا دائرة التوازي ، وذلك لنفس ذبذبة الجهد ؟

الجواب : (أ) $i_T = 18.5 \cos (5000t + 68.4^\circ)$ amperes ، (ب) دائرة التوالى $R = 4.96 \Omega$

و $C = 93 \mu F$.

الفصل الرابع

الاعداد المركبة

الاعداد الحقيقية :

يتكون نظام الأعداد الحقيقية من الأعداد الجذرية والصماء . ويمكن تمثيل جميع الأعداد الحقيقية الواحد بعد الآخر بجميع النقاط المتتالية على خط مستقيم ، يسمى خط العدد الحقيقي ، وفيه تمثل كل نقطة عدداً حقيقياً واحداً و كل عدد حقيقى يمكن تمثيله بنقطة واحدة على الخط كما هو موضح فى الشكل ٤ - ١ . يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة بأى أعداد فى هذا النظام والجذر التربيعى لعدد حقيقى موجب يمكن تمثيله على خط العدد الحقيقي ، ولكن الجذر التربيعى لعدد سالب لا يمكن أن يوجد فى نظام الأعداد الحقيقية .



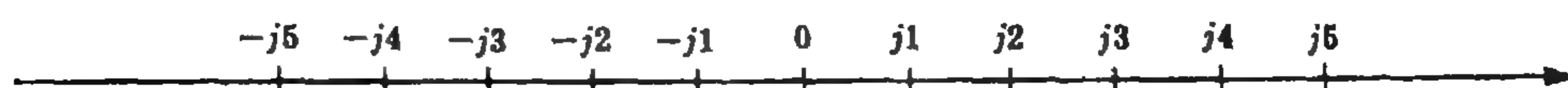
شكل ٤ - ١ خط العدد الحقيقى .

الاعداد التخيلية :

يسمى الجذر التربيعى لعدد حقيقى سالب بعدد تخيلى نقى ، مثل $\sqrt{-1}$ و $\sqrt{-2}$ و $\sqrt{-5}$ و $\sqrt{-16}$

فإذا وضعنا $j = \sqrt{-1}$ فإن : الخ $j\sqrt{5}$ $\sqrt{5}$ $j2$ $\sqrt{4}$ $j\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ ويتبع ذلك أيضاً : j j^2 1 $(j^2)^2$ j^4 $-j$ $(-1)j$ j^3 -1 j^2

وجميع الأعداد التخيلية يمكن تمثيلها بنقط على خط يسمى خط العدد التخيلى ، كما هو موضح فى الشكل ٤ - ٢



شكل ٤ - ٢ خط العدد التخيل .

إن اختيار لفظ تخيل اختيار غير ملائم وذلك لأن الأعداد التخيلية موجودة بالتأكيد كوجود الأعداد الحقيقية . والكلمة تعنى غالباً أن تلك الأعداد لا يمكن تمثيلها على خط العدد الحقيقى ولكنها تمثل على خط ثان يسمى بخط العدد التخيل .

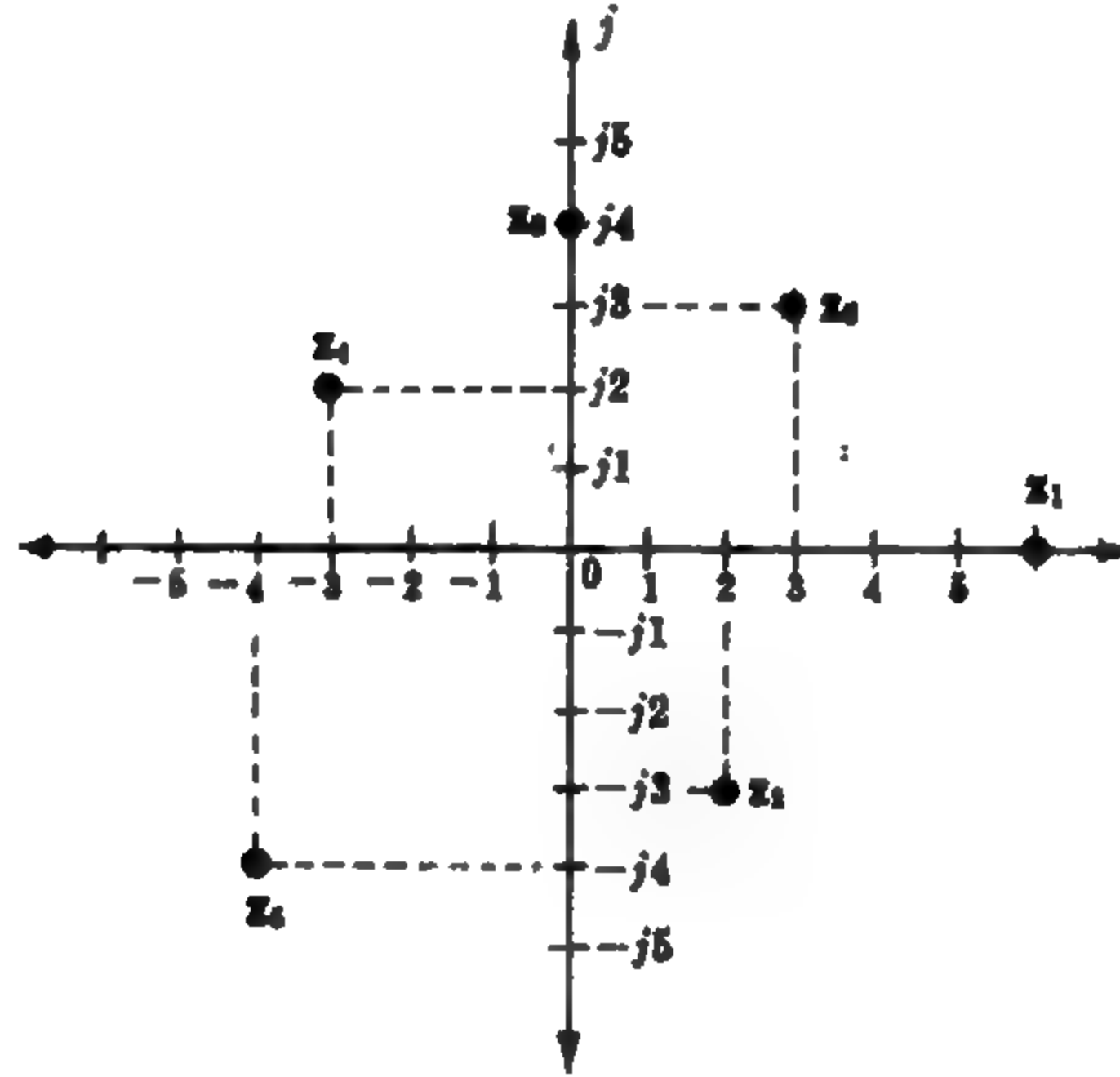
الأعداد المركبة :

إن العدد المركب z هو عدد على الشكل $x + jy$ ، حيث x و y أعداد حقيقية و $j = \sqrt{-1}$ ، وفي العدد المركب $x + jy$ ، يسمى الحد الأول x بالجزء الحقيقي ويسمى الحد الثاني jy بالجزء التخيلي . وعندما $x = 0$ فإن العدد المركب يتحول إلى عدد تخيلي نقي ويقابل في هذه الحالة نقطة على المحور j . بالمثل عندما $y = 0$ فإن العدد المركب يكون عدداً حقيقياً ويقابل في هذه الحالة نقطة على المحور الحقيقي . وعلى هذا فإن الأعداد المركبة تحتوي على كل الأعداد الحقيقية وكل الأعداد التخيلية النقية .

ويقال إن عددين مركبين $a + jb$ و $c + jd$ متساويان ، فقط في الحالة التي يكون فيها $a = c$ و $b = d$.

إذا كان محور الأعداد الحقيقية متعامداً مع محور الأعداد التخيلية (أو المحور j) عند النقطة 0 كما في الشكل ٤ - ٣ ، فإن كل نقطة في المستوى المركب الناتج تمثل عدداً مركباً واحداً وبالعكس . والشكل ٤ - ٣ يوضح ستة أعداد مركبة (z_1, \dots, z_6) .

$$\begin{aligned} z_1 &= 6 \\ z_2 &= 2 - j3 \\ z_3 &= j4 \\ z_4 &= -3 + j2 \\ z_5 &= -4 - j4 \\ z_6 &= 8 + j8 \end{aligned}$$



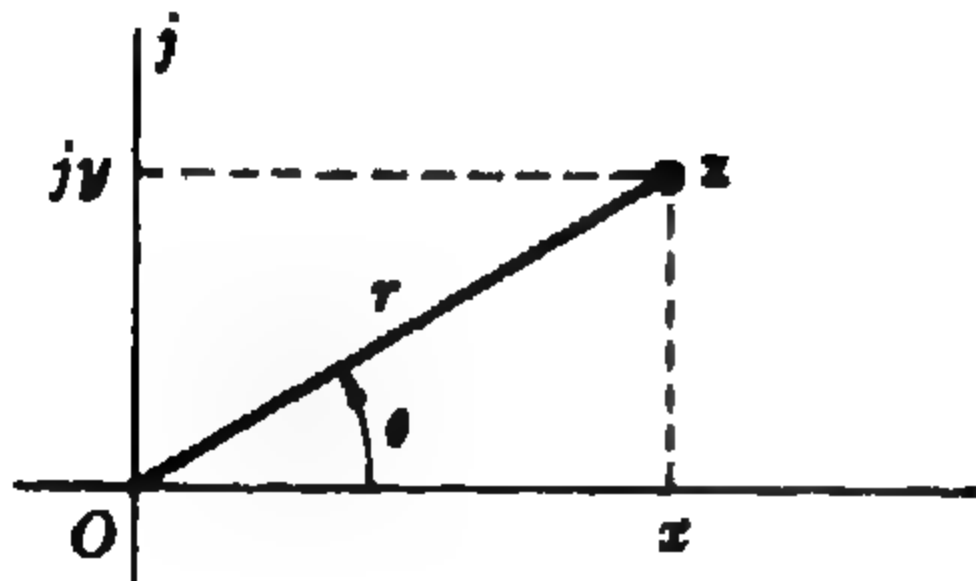
اشكال أخرى للأعداد المركبة :

في الشكل ٤ - ٤ نجد أن $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ، وبذلك

يكون العدد المركب z هو

$$z = x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ويسمى مقياس z أو القيمة المطلقة لـ z ، وتسمى الزاوية $\theta = \tan^{-1} y/x$ بـ z أو الإزاحة الزاوية لـ z .



وتعطينا صيغة إيلر $e^{j\theta} = (\cos \theta + j \sin \theta)$ شكلاً آخر للعدد المركب z ، الشكل ٤ - ٥ التمثيل القطبي للعدد المركب

المركب ، ويسمى الشكل الأسى (انظر المسألة ٤ - ١)

$$z = r \cos \theta + jr \sin \theta = r e^{j\theta}$$

ويستخدم كثيراً الشكل القطبي أو شكل شتينيتر Steinmetz للمعاوقة المركبة z في تحليل الدوائر الكهربائية ويكتب .

$$r/\theta$$

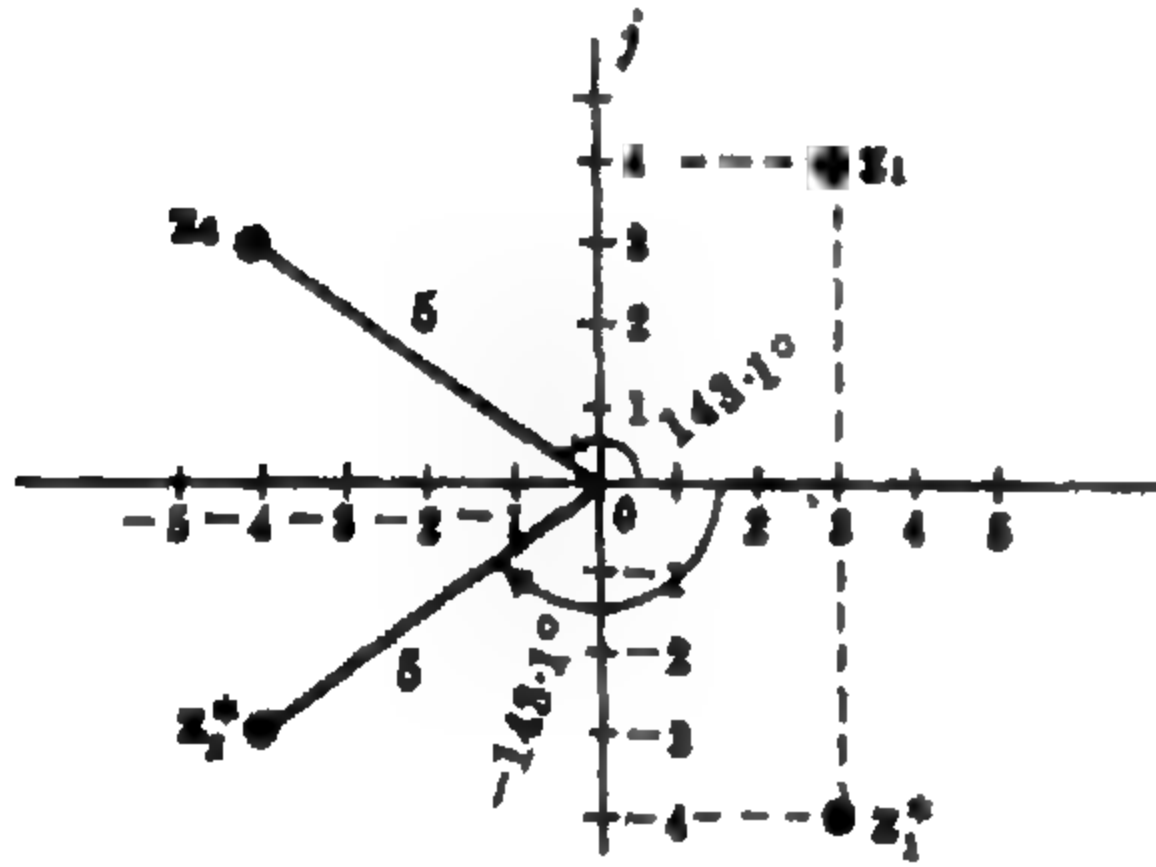
حيث يبرر عن θ عادة بالدرجات .

وفيما يلي تلخيص للطرق الأربع التي يمكن بها كتابة أي عدد مركب واستخدام أية طريقة منها يعتمد على العملية التي نعالجها .

| | |
|--------------------------------------|---------------------------|
| $z = x + jy$ | صيغة الاحداثيات المتعامدة |
| $z = r/\theta$ | الصيغة القطبية أو شتينيتر |
| $z = r e^{j\theta}$ | صيغة الدالة الأسية |
| $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$ | صيغة حساب المثلثات |

مترافق عدد مركب :

المترافق z^* لعدد مركب $z = x + jy$ هو العدد المركب $z^* = x - jy$ وفيما يلي على سبيل المثال زوجان من الأعداد المركبة المترافقة (1) $3 - j2$, (2) $3 + j2$ (3) $5 + j4$ (4) $5 - j4$.



$$z_1 = 3 + j4, \quad z_1^* = 3 - j4$$

$$z_2 = 5/143.1^\circ, \quad z_2^* = 5/-143.1^\circ$$

وفي الصيغة القطبية فإن المترافق للعدد $z = r/\theta$ هو $z^* = r/(-\theta)$ وحيث أن $\cos(-\theta) = \cos \theta$ و $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ فإن مترافق $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$ هو $z^* = r(\cos \theta - j \sin \theta)$. ومثلاً ، نجد أن مترافق $z = 7/30^\circ$ هو $z^* = 7/-30^\circ$.

والمترافق z^* للعدد المركب z هو دائماً صورة z بالنسبة للمحور الحقيقي كما هو موضح في الشكل ٤ - ٥ .

شكل ٤ - ٥ الأعداد المركبة ومترافقتها

والطرق الأربع لكتابة العدد المركب z ومترافقه هي

$$\begin{array}{llll} z = x + jy & z = r/\theta & z = r e^{j\theta} & z = r(\cos \theta + j \sin \theta) \\ z^* = x - jy & z^* = r/(-\theta) & z^* = r e^{-j\theta} & z^* = r(\cos \theta - j \sin \theta) \end{array}$$

مجموع وفرق الأعداد المركبة :

لإضافة عددين مركبين لبعضهما فإننا نضيف الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية كل على حده . أما لطرح عددين مركبين فإننا نطرح الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية كل على حده . ومن الناحية العملية فإن جمع وطرح الأعداد المركبة يمكن إجراؤه بطريقة مريحة إذا كان كلا العددين في صيغة الاحداثيات القطبية .

مثال ١ : بفرض أن $z_1 = 5 - j2$ و $z_2 = -3 - j8$ فإن

$$z_1 + z_2 = (5 - 3) + j(-2 - 8) = 2 - j10$$

$$z_2 - z_1 = (-3 - 5) + j(-8 + 2) = -8 - j6$$

ضرب الأعداد المركبة :

إن حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما على صيغة دالة أسية ينتج مباشرة من قوانين الأسس .

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

باستخدام الصيغة الأسية فإنه يمكننا كتابة حاصل ضرب عددين مركبين على الصيغة القطبية أو صيغة شتينميتز كما يلي :

$$z_1 z_2 = (r_1 / \theta_1)(r_2 / \theta_2) = r_1 r_2 / \theta_1 + \theta_2$$

إذا كانت الأعداد المركبة على صيغة الاحداثيات المتعامدة ، فإن حاصل الضرب يمكن الحصول عليه باعتبار كل من العددين المركبين كذات حدين

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jy_1 x_2 + j^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

مثال ٢ : إذا كان $z_1 = 5e^{j\pi/3}$ و $z_2 = 2e^{-j\pi/6}$ فإن $z_1 z_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$

مثال ٣ : إذا كان $z_1 = 2/30^\circ$ و $z_2 = 5/-45^\circ$ فإن $z_1 z_2 = (2/30^\circ)(5/-45^\circ) = 10/-15^\circ$

مثال ٤ : إذا كان $z_1 = 2 + j3$ و $z_2 = -1 - j3$ فإن $z_1 z_2 = (2 + j3)(-1 - j3) = 7 - j9$

قسمة الأعداد المركبة :

إذا كان العددان المركبان في الصيغة الأسية ، فإن خارج القسمة ينتج مباشرة من قوانين الأسس

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

وتتضح القسمة في القيمة القطبية أو شتينميتز من صيغة الدالة الأسية

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 / \theta_1}{r_2 / \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} / \theta_1 - \theta_2$$

ويمكن إجراء القسمة إذا كانت الأعداد المركبة في صيغة الاحداثيات المتعامدة ، وذلك بضرب كل من البسط والمقام في مترافق المقام .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} \right) = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال ٥ : بفرض أن $z_1 = 4e^{j\pi/3}$ و $z_2 = 2e^{j\pi/6}$ إذن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$

مثال ٦ : بفرض أن $z_1 = 8/-30^\circ$ و $z_2 = 2/-60^\circ$ إذن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8/-30^\circ}{2/-60^\circ} = 4/30^\circ$

مثال ٧ : بفرض أن $z_1 = 4 - j5$ و $z_2 = 1 + j2$ إذن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - j5}{1 + j2} \left(\frac{1 - j2}{1 - j2} \right) = \frac{-6 - j13}{5}$

جذور الاعداد المركبة :

يمكن كتابة أى عدد مركب $z = r e^{j\theta}$ بالصورة $z = r e^{j(\theta+2\pi n)}$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ وبالمثل $z = r/\theta$ يمكن كتابته بالصورة $z = r/(\theta + n360^\circ)$ وعلى ذلك فإن

$$\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r} e^{j(\theta+2\pi n)/k} \quad \text{و} \quad z = r e^{j\theta} = r e^{j(\theta+2\pi n)}$$

$$\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r/(\theta + n360^\circ)/k} \quad , \quad z = r/\theta = r/(\theta + n360^\circ)$$

والرمز k يبنى الجذر k للعدد المركب ويمكن الحصول عليه بوضع قيم n تساوى $0, 1, 2, 3, \dots, k-1$.

مثال ٨ :

إذا كان $z = 8/60^\circ$ فإن $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8/(60^\circ + n360^\circ)/3} = 2/(20^\circ + n120^\circ)$ بفرض قيم n تساوى $0, 1, 2$ فإن الجذور التكعيبية الثلاثة الناتجة هي $2/20^\circ$ و $2/140^\circ$ و $2/260^\circ$.

مثال ٩ : أوجد الجذور الخمسة للجذور الخامس للعدد واحد .

بما أن $1 = 1 e^{j0}$ إذن $\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1} e^{j2\pi n/5} = 1 e^{j2\pi n/5}$ بفرض أن n تأخذ القيم $1, 2, 3, 4$ ، ينتج لدينا الجذور الخمسة للجذر الخامس المطلوب وهي $1/0^\circ$ ، $1/72^\circ$ ، $1/144^\circ$ ، $1/216^\circ$ ، $1/288^\circ$.

لوغاريتم العدد المركب :

يمكن الحصول على اللوغاريتم الطبيعي للعدد المركب إذا وضعنا العدد في صيغة دالة أسية

$$\ln z = \ln r e^{j(\theta+2\pi n)} = \ln r + \ln e^{j(\theta+2\pi n)} = \ln r + j(\theta+2\pi n)$$

ونلاحظ أننا نحصل على نتيجة واحدة ، والقيمة الشائعة الاستخدام هي القيمة الأساسية عندما $n = 0$.

مثال ١٠ : إذا كان $z = 3 e^{j\pi/6}$ إذن $\ln z = \ln 3 e^{j\pi/6} = \ln 3 + j\pi/6 = 1.099 + j0.523$

استخدام المسطرة الحاسبة في الاعداد المركبة :

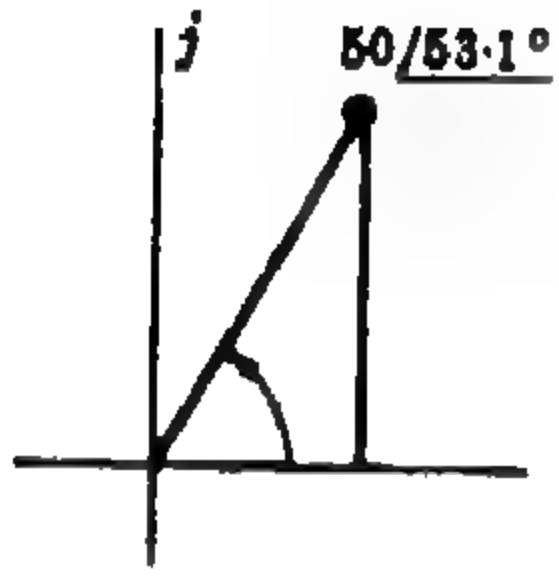
مقدمة :

في نظام التمييز الطورى الموضح في الفصل الخامس ، نجد أن الجهد والتيار والمعاوقة كلها أعداد مركبة . والصيغ المستخدمة عادة لهذه الكميات هي الصيغة القطبية وصيغة الأحداثيات المتعامدة . ولذلك فإنه يلزمنا التحويل السريع من صيغة إلى أخرى حيث أن استخدام الصيغة القطبية يعطينا مباشرة حاصل الضرب أو خارج القسمة ، كما أننا نحتاج لاستخدام صيغ الأحداثيات المتعامدة في حالة الجمع والطرح .

وأى مسطرة حاسبة من النوع (العشرى - حساب المثلثات) يمكن استخدامها لهذا التحويل . ومعظم المساطر يكون لها مقياس مزدوج للظل وعلى ذلك فإن ظل الزوايا التى أكبر من 45° تظهر على المقياس العكسى C . والشرح التالى خاص بهذه المسطرة ، ولاستخدام أية مسطرة ليست من هذا النوع فإن على القارئ الرجوع إلى كتاب الشرح المرافق للمسطرة المستخدمة .

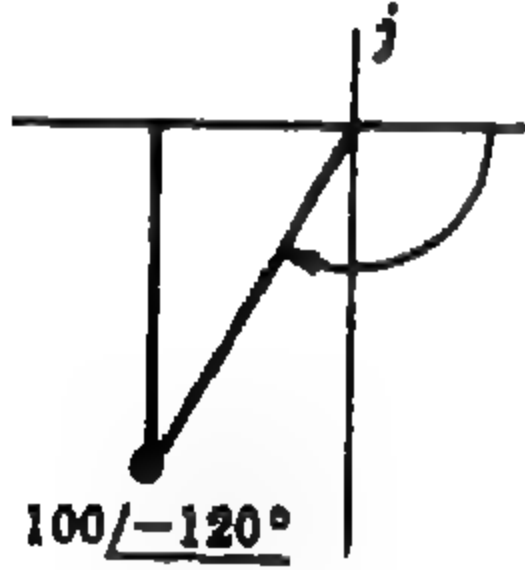
وحيث أن الغرض الوحيد من هذه المناقشة هو الوصول بسرعة وبطريقة موثوق بها ، لذلك فإننا سنختصر شرح حساب المثلثات بقدر الإمكان .

التحويل من الصيغة القطبية الى صيغة الاحداثيات المتعامدة :



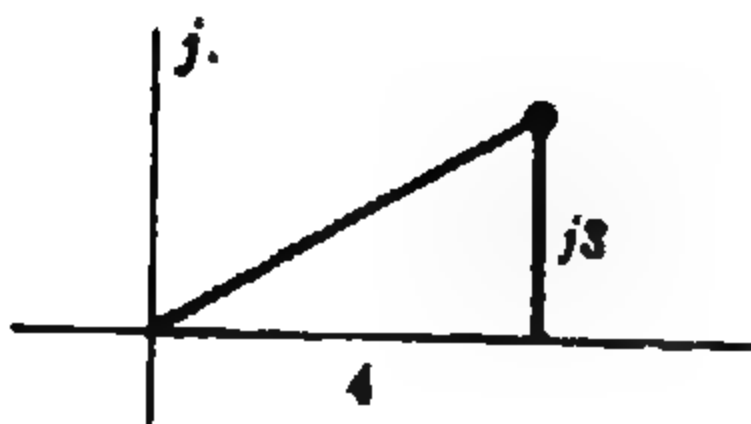
مثال ١١ : عبر عن $50/53.1^\circ$ بصيغة الإحداثيات المتعامدة $x + jy$.

- ١ - ارسم شكلا مجملا مع تضخيم حقيقة أن الزاوية أكبر من 45° .
- ٢ - ضع دليل المقياس C ليقابل 50° على المقياس D .
- ٣ - حرك الجزء المنزلق حتى ينطبق الخط العشري على 53.1° على مقياس قرائه الجيب وجيب التمام وهو المقياس S .
- أكتب القراءتين على المقياس D : 40 و 30 .
- ٤ - بالنظر إلى الشكل وملاحظة أن الجزء z أكبر من الجزء الحقيقي وأن كليهما موجب .
- ٥ - $50/53.1^\circ = 30 + j40$.



مثال ١٢ : عبر عن $100/-120^\circ$ بصيغة الإحداثيات المتعامدة $x + jy$.

- ١ - ارسم شكلا مجملا مع ملاحظة أن زاوية الإسناد هي 60° .
- ٢ - ضع دليل المقياس C ليقابل 100 على المقياس D .
- ٣ - حرك الجزء المنزلق حتى ينطبق الخط العشري على 60° على مقياس الجيب وجيب التمام فتكون القراءتان على المقياس D هي 8.66 و 50.0 .
- ٤ - بالرجوع إلى الشكل وملاحظة أن الجزء z أكبر من الجزء الحقيقي وأن كليهما سالب .
- ٥ - $100/-120^\circ = -50.0 - j86.6$.



التحويل من صيغة الاحداثيات المتعامدة الى الصيغة القطبية :

مثال ١٣ : عبر عن $4 + j3$ بصيغة قطبية على الشكل r/θ .

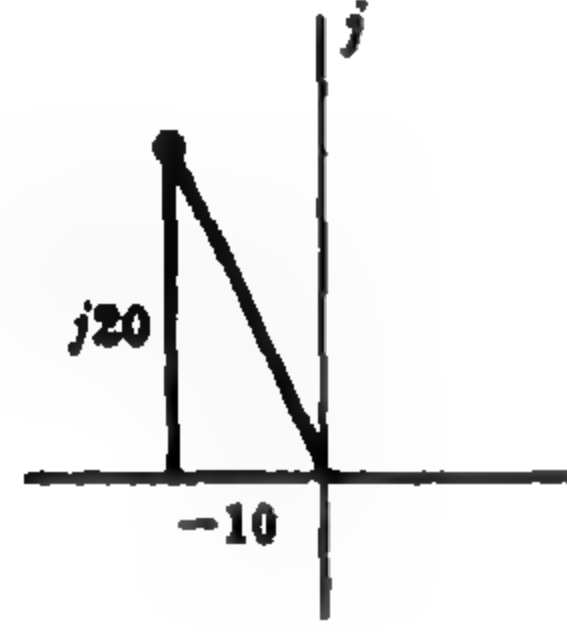
- ١ - ارسم شكلا مجملا مع تضخيم حقيقة أن الجزء الحقيقي أكبر من الجزء التخيل .
- ٢ - ضع الخط العشري ليقابل أصغر الرقن (3) على المقياس D .
- ٣ - ضع دليل المقياس C ليقابل أكبر الرقن (4) على المقياس D .

٤ - نلاحظ وجود زاويتين على مقياس الظل مقابلتين للخط الشعري وهما : 53.1° و 36.9° . وبالرجوع إلى الشكل نلاحظ أن أصغر هاتين الزاويتين هي المطبقة في هذه المسألة . ضع هذه الزاوية في قوس الزاوية :

$$4 + j3 = \dots / 36.9^\circ$$

٥ - مع تثبيت الخط الشعري حرك الجزء المنزلق من المستر لوضع 36.9° على مقياس الجيب وجيب التمام تحت الخط الشعري . نلاحظ أن 36.9° تظهر مرتين على هذا المقياس . ولاختيار القراءة الصحيحة لاحظ أن 36.9° توجد على يمين العلامات على مقياس الظل . وعلى ذلك فإن الرقم 36.9° الموجود على الجهة اليمنى للعلامات على مقياس الجيب وجيب التمام هو الواجب استخدامه في هذه الخطوة . نقرأ قيمة r على دليل مقياس C فنجدها 5 . (استخدم دائماً الرقم الذي على اليسار مع ملاحظة أن هذا يجعل حركة الدليل إلى اليمين) .

$$4 + j3 = 5 / 36.9^\circ$$



مثال 1٤ : عبر عن $10 + j20$ بصيغة قطبية على الشكل r / θ .

١ - ارسم شكلاً مجملًا .

٢ - ضع الخط الشعري ليقابل أصغر الرقنين (10) على المقياس D .

٣ - ضع دليل المقياس C ليقابل أكبر الرقنين (20) على المقياس D .

٤ - يوضح الشكل أن زاوية الإسناد أكبر من 45° وبقرائتها على مقياس الظل نجد أنها 63.4°

وهذه ليست الزاوية θ ولكنها زاوية الإسناد . أكتب هذه الزاوية لاستخدامها بعد ذلك في

المسألة . ثم أكتب $\theta = 180^\circ - 63.4^\circ = 116.6^\circ$ داخل القوس :

$$10 + j20 = \dots / 116.6^\circ$$

٥ - مع تثبيت الخط الشعري حرك الجزء المنزلق حتى يظهر الرقم 63.4° الموجود في الجهة اليسارية لعلامات مقياس الجيب وجيب التمام تحت الخط الشعري . اقرأ الرقم المقابل لدليل المقياس C على المقياس D فتجده 22.4 .

$$-10 + j20 = 22.4 / 116.6^\circ$$

عمليات استخدام مقياس الجيب والظل الممتد :

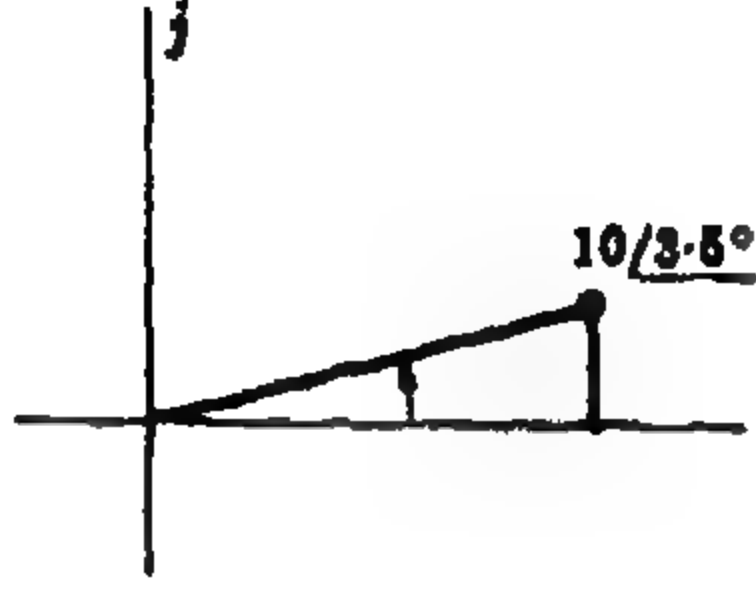
عندما تصبح القيمة العددية للزاوية θ في الصيغة القطبية لعدد مركب صغيرة جداً ، فإن قيمة r والقيمة العددية للجزء الحقيقي x في صيغة الإحداثيات المتعامدة تكونان تقريباً متساويتين ، وعندما $|\theta| \leq 5.73^\circ$ فإن r و x يكونان متساويتين . أما الجزء التخيلي jy والذي يساوي $r \sin \theta$ فيمكن الحصول عليه باستخدام مقياس الجيب والظل الممتد . ونفس هذه الفروض نجدها عندما تقترب قيمة θ من 180° ؛ حيث تكون القيمة العددية للزاوية الإسناد في هذه الحالة تساوى أو أقل من 5.73° .

عندما تقترب القيمة العددية للزاوية θ من 90° ، فإن r والقيمة العددية y في صيغة الإحداثيات المتعامدة تكونان متساويتين . وعندما $84.27^\circ \leq \theta \leq 95.73^\circ$ فإن r و y تكونان متساويتين . والجزء الحقيقي x الذي

يساوى $r \cos \theta$ يمكن تعيينه باستخدام مقياس الجيب والظل الممتد مع الأخذ في الاعتبار أن $\cos \theta = \sin (90^\circ - \theta)$ ، ونفس هذه الفروض نجدها عندما تقترب قيمة θ من 270° حيث تكون زاوية الإسناد في هذه الحالة تساوى أكبر من 84.27° .

مثال ١٥ : عبر عن $10 \angle 3.5^\circ$ بصيغة الإحداثيات المتعامدة $x + jy$.

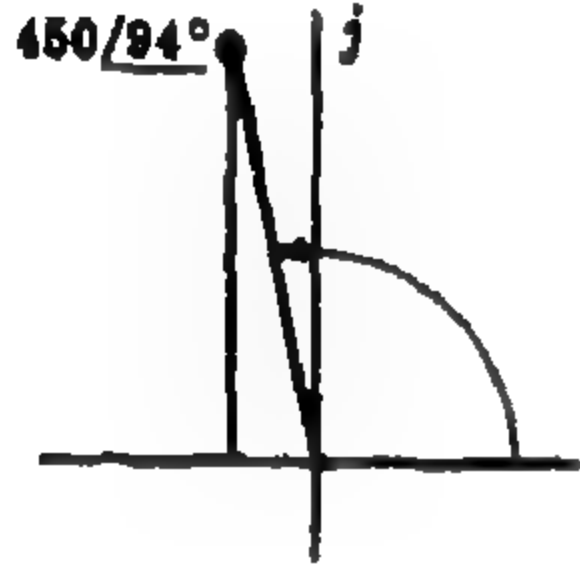
١ - ارسم شكلاً مجملًا .



٢ - بما أن الزاوية أقل من 5.73° فإن الجزء الحقيقي x يساوى 10 .

٣ - ضع دليل المقياس C عند 10 على المقياس D . حرك الخط الشعري حتى ينطبق على 3.5° على مقياس الجيب الممتد . اقرأ الرقم على المقياس D فتجده 0.61 .

٤ - $10 \angle 3.5^\circ = 10 + j0.61$ تحدد العلامة العشرية من ملاحظة أنه للزوايا الصغيرة تكون النسبة بين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي أكبر من 10 إلى 1 .



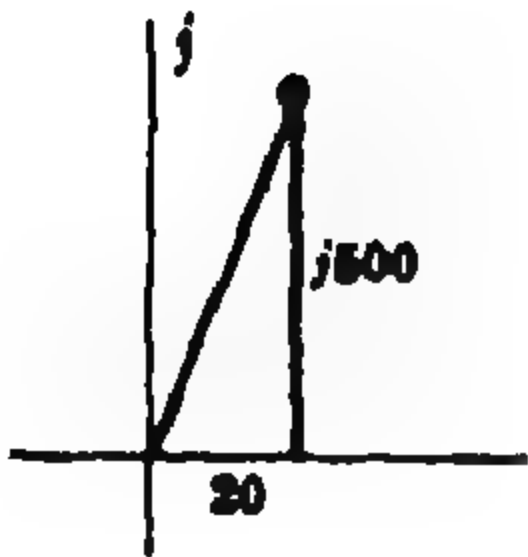
مثال ١٦ : عبر عن $450 \angle 94^\circ$ بصيغة الإحداثيات المتعامدة $x + jy$.

١ - ارسم شكلاً مجملًا ، لاحظ أن زاوية الإسناد هي 86° .

٢ - حيث أن زاوية الإسناد أكبر من 84.27° فإن الجزء التخيلي يساوى r ويساوى 450 .

٣ - ضع دليل المقياس C عند 450 على المقياس D . حرك الخط الشعري ، حتى ينطبق على 86° على مقياس الجيب الممتد . ثم اقرأ القراءة المقابلة على المقياس D فتجدها 31.4 . وفي المساطر التي لا يوجد بها علامة على المقياس الممتد تقابل الزاوية المتممة ، حرك الخط الشعري إلى $(90^\circ - 86^\circ)$ أي إلى 4° وقرأ القراءة على المقياس D فتجدها 31.4 .

٤ - $450 \angle 94^\circ = -31.4 + j450$. ويساعد الشكل الممثل في تعيين إشارة المركبات تماماً كما في حالة الزاوية العادية . وحيث أن النسبة بين الجزء التخيلي والجزء الحقيقي تزيد عن 10 إلى 1 وذلك لزاوية إسناد أكبر من 84.27° فإن العلامة العشرية توضع عند 31.4 .



مثال ١٧ : عبر عن $20 + j500$ بالصيغة القطبية $r \angle \theta$.

١ - ارسم شكلاً مجملًا . وحيث أن النسبة أكبر من 10 إلى 1 فهذا يعني أن الزاوية أكبر من 84.27° إذن $r = 500$.

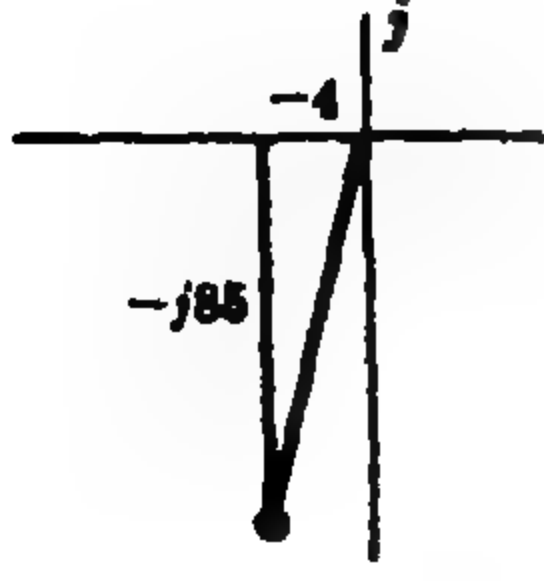
٢ - ضع الخط الشعري على أصغر الرقنين (20) على المقياس D .

٣ - ضع دليل المقياس C على أكبر الرقنين (500) على المقياس D .

٤ - اقرأ القراءة على مقياس الظل الممتد فتجدها 87.7° .

٥ - $20 + j500 = 500 \angle 87.7^\circ$.

مثال ١٨ : عبر عن $-4 - j85$ بالصيغة القطبية r/θ .



١ - ارسم شكلاً مجملًا . وحيث أن النسبة أكبر من 10 إلى 1 فهذا يعني أن زاوية الإسناد أكبر من 84.27° إذن $r = 85$.

٢ - ضع الخط الشعري على أصغر الرقنين (4) على المقياس D .

٣ - ضع دليل المقياس C على أكبر الرقنين (85) على المقياس D .

٤ - اقرأ على المقياس الممتد 87.3° . لاحظ أن هذه الزاوية ليست θ ولكنها

$$\text{زاوية الإسناد} = 85 / \frac{-4 - j85}{(87.3^\circ)}$$

٥ - إذن يمكن تعيين θ من $87.3^\circ \pm 180^\circ$ أي أنها تساوي 267.3° أو -92.7° .

٦ - $-4 - j85$ تساوي $85/267.3$ أو $85/-92.7$.

مسائل

٤ - ١ أثبت صيغة أيلر .

بفرض أن دالة $f(x)$ يمكن التعبير عنها بمتسلسلة قوى في x ، فإن هذه المتسلسلة لا بد وأن تكون على شكل متسلسلة ماكلورين .

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \dots$$

حيث الدالة وجميع مشتقاتها موجودة عند $x = 0$.

ومفكوك متسلسلة ماكلورين لـ $\cos \theta$ و $\sin \theta$ و $e^{j\theta}$ في قوى θ هو

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - j\frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

وبإعادة ترتيب الحدود في متسلسلة ماكلورين لـ $e^{j\theta}$ نحصل على

$$e^{j\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) = \cos \theta + j \sin \theta$$

٤ - ٢ ارسم شكلاً مجملًا للمستوى المركب وعين فيه الأعداد المركبة التالية . حول كل عدد إلى صيغته القطبية ثم أعد الرسم . من مقارنة الرسمين وضح إذا كان التحويل سليماً أم لا .

(أ) $2 - j2$ ، (ب) $3 + j8$ ، (ج) $-5 + j3$ ، (د) $-4 - j4$ ، (هـ) $5 + j0$ ، (و) $j6$ ، (ز) -4 ، (س) $-j5$.

٤ - ٣ عبر عن كل عدد مركب بصيغته القطبية :

- (أ) $15e^{j\pi/4}$ (ب) $5e^{-j2\pi/3}$ (ج) $-4e^{j5\pi/6}$ (د) $-2e^{-j\pi/2}$ (هـ) $10e^{-j7\pi/6}$ (و) $-18e^{-j3\pi/2}$
 الجواب (أ) $15/45^\circ$ (ب) $5/-120^\circ$ (ج) $4/-30^\circ$ (د) $2/90^\circ$
 (هـ) $10/-210^\circ$ أو $10/150^\circ$ (و) $18/-90^\circ$

٤ - ٤ أجزء العمليات الموضحة :

- (أ) $z = 3 - j4$. أوجد zz^* .
 (ب) $z = 10/-40^\circ$. أوجد zz^* .
 (ج) $z = 20/53.1^\circ$. أوجد $z + z^*$.
 (د) $z = 2.5e^{-j\pi/3}$. أوجد zz^* .
 (هـ) $z = 2 + j8$. أوجد $z - z^*$.
 (و) $z = 10 - j4$. أوجد $z + z^*$.
 (ز) $z = 95/25^\circ$. أوجد $z - z^*$.
 (س) $z = r/\theta$. أوجد z/z^* .
 الجواب : (أ) 25 ، (ب) 100 ، (ج) 24 ، (د) 6.25 ، (هـ) $j16$ ، (و) 20 ،
 (ز) $j80.2$ ، (س) $1/2\theta$.

٤ - ٥ عين الجذر الموضح لكل عدد مركب .

- (أ) $\sqrt{5 + j8}$ ، (ب) $\sqrt{150/-60^\circ}$ ، (ج) $\sqrt[3]{6.93 - j4}$ ، (د) $\sqrt[3]{27e^{j3\pi/2}}$ ،
 (هـ) $\sqrt[4]{1}$ ، (و) $\sqrt{4}$.
 الجواب : (أ) $3.07/29^\circ$ و $3.07/209^\circ$ ، (ب) $12.25/-30^\circ$ و $12.25/150^\circ$ ،
 (ج) $2/-10^\circ$ و $2/110^\circ$ و $2/230^\circ$ ، (د) $3e^{j\pi/2}$ و $3e^{j7\pi/6}$ و $3e^{j11\pi/6}$ ،
 (هـ) $1/0^\circ$ و $1/90^\circ$ و $1/180^\circ$ و $1/270^\circ$ ، (و) $2/180^\circ$ و $2/0^\circ$ أي أن ± 2 .

٤ - ٦ أوجد اللوغاريتم الطبيعي للأعداد المركبة من (أ) - (د) . في الجزء (هـ) استخدم اللوغاريتم لتمييز حاصل الضرب .

- (أ) $20/45^\circ$ ، (ب) $6/-60^\circ$ ، (ج) $0.5/120^\circ$ ،
 (د) $0.3/180^\circ$ ، (هـ) $(0.3/180^\circ)$ $(20/45^\circ)$ ،
 الجواب : (أ) $3 + j\pi/4$ ، (ب) $1.79 - j\pi/3$ ،
 (ج) $0.693 + j2\pi/3$ ، (د) $1.2 + j\pi$ ،
 (هـ) $6/225^\circ$.

٤ - ٧ استخدم المسطرة الحاسبة لتحويل كل عدد مركب من صيغته القطبية إلى صيغته في الأحداثيات المتعامدة .

| | | | |
|----------------------------|-------------------------|--------------------------|----------------------------|
| الجواب : $0.047 - j0.0171$ | $0.05 \angle 20$ (أ) | الجواب : $10.63 + j6.15$ | $12.3 \angle 30^\circ$ (أ) |
| $0.00052 + j0.00295$ | $0.003 \angle 80$ (و) | $-49.8 + j18.1$ | $53 \angle 160^\circ$ (ب) |
| $-0.00226 - j0.0128$ | $0.013 \angle 260$ (ز) | $17.7 - j17.7$ | $25 \angle -45$ (ج) |
| $-0.1535 + j0.0271$ | $0.156 \angle -190$ (س) | $-36.3 - j78$ | $86 \angle -115^\circ$ (د) |

٤ - ٨ استخدم المسطرة الحاسبة لتحويل كل عدد مركب من صيغته في الأحداثيات المتعامدة إلى صيغته القطبية .

| | | | |
|-----------------------------------|-----------------------|----------------------------------|------------------|
| الجواب : $160 \angle 72.55^\circ$ | $0.048 - j0.153$ (أ) | الجواب : $20 \angle 126.8^\circ$ | $-12 + j16$ (أ) |
| $-0.05 \angle 70$ | $0.0171 + j0.047$ (و) | $4.47 \angle -63.4^\circ$ | $2 - j4$ (ب) |
| $0 \angle 210$ | $-69.4 - j40$ (ز) | $64 \angle 203$ | $-59 - j25$ (ج) |
| $28.3 \angle 135$ | $-2 + j2$ (س) | $727 \angle 16$ | $700 + j200$ (د) |

٤ - ٩ استخدم المسطرة الحاسبة لتحويل كل عدد مركب من صيغته القطبية إلى صيغته في الأحداثيات المتعامدة :

| | | | |
|----------------------------|-----------------------|------------------------|---------------------|
| الجواب : $0.00139 - j0.02$ | $0.02 \angle 94$ (أ) | الجواب : $10 - j0.523$ | $10 \angle 3$ (أ) |
| $0.0488 - j0.70$ | $0.70 \angle 266$ (و) | $0.871 - j25$ | $25 \angle 88$ (ب) |
| $0.8 - j0.0696$ | $0.80 \angle 5$ (ز) | $2.62 - j50$ | $50 \angle 93$ (ج) |
| $-200 \angle 3.49$ | $200 \angle 181$ (س) | $45 - j0.785$ | $45 \angle 179$ (د) |

٤ - ١٠ استخدم المسطرة الحاسبة لتحويل كل عدد مركب من صيغته في الأحداثيات المتعامدة إلى صيغته القطبية :

| | | | |
|-------------------------|-----------------------|----------------------------------|------------------|
| الجواب : $0.8 \angle 5$ | $0.8 - j0.0696$ (أ) | الجواب : $540 \angle 4.25^\circ$ | $540 + j40$ (أ) |
| $10 \angle 3$ | $10 - j0.253$ (و) | $250 \angle 92.29^\circ$ | $-10 - j250$ (ب) |
| $200 \angle 181$ | $200 \angle 3.49$ (ز) | $8 \angle 3.58^\circ$ | $8 - j0.5$ (ج) |
| $0.02 \angle 7.87$ | $0.02 - j0.001$ (س) | $717 \angle 88^\circ$ | $25 + j717$ (د) |

٤ - ١١ فيما يلي تمرين على استخدام المسطرة الحاسبة . حول الأرقام المكتوبة في الصيغة القطبية إلى صيغتها في الأحداثيات المتعامدة والأرقام المكتوبة في صيغة الأحداثيات المتعامدة إلى صيغتها القطبية . ثم حول الإجابات إلى صيغتها الأصلية .

| | | |
|-----------------------|------------------------|--------------------------|
| $0.85 \angle 1$ (ظ) | $-0.05 - j0.80$ (ص) | $40 \angle 10$ (أ) |
| $3 - j4$ (غ) | $150 \angle 5$ (ط) | $18 - j9$ (ب) |
| $20 \angle 143.1$ (ض) | $0.002 \angle 178$ (ع) | $0.03 + j0.80$ (ج) |
| $5 \angle 8.66$ (ق) | $1080 - j250$ (ف) | $0.06 \angle -100$ (د) |
| | $80 \angle 98$ (ق) | $5.0 + j0.3$ (هـ) |
| | $15 - j30$ (ك) | $0.50 \angle 174$ (و) |
| | $5 \angle 233.1$ (م) | $180 + j55$ (ز) |
| | $26 - j15$ (ن) | $25 \angle 88^\circ$ (س) |

٤ - ١٢ أوجد المجموع أو الفرق الموضح :

| | | | |
|------------|----------|---|------|
| $10 + j10$ | الجواب : | $(10 \angle 53.1^\circ) + (4 + j2)$ | (أ) |
| $8 + j8$ | | $(10 \angle 90^\circ) + (8 - j2)$ | (ب) |
| $-2 - j2$ | | $(-4 - j6) + (2 + j4)$ | (ج) |
| $j10$ | | $(2.83 \angle 45^\circ) - (2 - j8)$ | (د) |
| | | $(-5 + j5) (7.07 \angle 135^\circ)$ | (هـ) |
| 0 | | $(2 + j10) (1 - j10)$ | (و) |
| 1 | | $(10 + j1) + 6 (13.45 \angle 42^\circ)$ | (ز) |
| $6 + j10$ | | $(5 \angle 53.1^\circ) (1 - j6)$ | (س) |
| $-4 + j2$ | | | |

٤ - ١٣ احسب حاصل ضرب الأعداد المركبة التالية . و كثرين إضافي ، حول هذه الأعداد إلى صيغتها القطبية ثم أوجد حاصل ضربهما مرة أخرى وقارن النتائج .

| | | | | | | | |
|-------------|----------|--------------------|-----|------------|----------|---------------------|-----|
| -10 | الجواب : | $(j2)(j5)$ | (أ) | $-5 - j14$ | الجواب : | $(3 - j2)(1 - j4)$ | (أ) |
| 6 | | $(-j1)(j6)$ | (و) | $6 - j6$ | | $(2 + j0)(3 - j3)$ | (ب) |
| 8 | | $(2 + j2)(2 - j2)$ | (ز) | $-j2$ | | $(-1 - j1)(1 + j1)$ | (ج) |
| $x^2 + y^2$ | | $(x + jy)(x - jy)$ | (س) | $6 + j8$ | | $(j2)(4 - j3)$ | (د) |

٤ - ١٤ في المسائل التالية أوجد خارج القسمة وذلك بضرب كل من البسط والمقام في مترافق المقام ، حول الأرقام إلى صيغتها القطبية ثم أوجد خارج القسمة باستخدام هذه الصيغ .

| | | | |
|----------------|--------|-----------------------|------|
| $j5$ | الجواب | $(5 + j5)/(1 - j1)$ | (أ) |
| $-1 - j3$ | | $(4 - j8)/(2 + j2)$ | (ب) |
| $-1 - j2$ | | $(5 - j10)/(3 + j4)$ | (ج) |
| $6 - j4$ | | $(8 + j12)/(j2)$ | (د) |
| 1.5 | | $(3 + j3)/(2 + j2)$ | (هـ) |
| -2.5 | | $(-5 - j10)/(2 + j4)$ | (و) |
| $0.6 + j0.8$ | | $10/(6 + j8)$ | (ز) |
| $1.25 + j1.25$ | | $j5/(2 - j2)$ | (س) |

٤ - ١٥ أوجد حاصل الضرب كما يلي :

| | | | |
|---------------------------|----------|---|------|
| $45 \angle 177.1^\circ$ | الجواب : | $(2.5 + j10)(-0.85 + j4.3)$ | (أ) |
| $26.2 \angle 42.6^\circ$ | | $(3.8 - j1.5)(6 - j2.3)$ | (ب) |
| $506 \angle 29.8^\circ$ | | $(72 - j72)(1.3 + j4.8)$ | (ج) |
| $6 \angle 25^\circ$ | | $(3 \angle 20^\circ)(2 \angle -45^\circ)$ | (د) |
| $113.5 \angle 92.5^\circ$ | | $(2 + j6)(18 \angle 21^\circ)$ | (هـ) |
| $5 \angle 20^\circ$ | | $1 \angle 80^\circ (25 \angle 45^\circ)(0.2 \angle 15^\circ)$ | (و) |
| $15.66 \angle 19.7^\circ$ | | $(1.2 + j16)(0.23 + j0.75)$ | (ز) |
| $4.53 \angle 111.1^\circ$ | | $(j1.63)(2.6 + j1)$ | (س) |

٤ - ١٦ عبر عن كل نسبة بعدد مركب واحد :

| | | |
|----------|--------------------------|--|
| الجواب : | $5 \angle 45$ | (أ) $(23.5 + j8.55)/(4.53 - j2.11)$ |
| | $6 \angle 0$ | (ب) $(21.2 - j21.2)/(3.54 - j3.54)$ |
| | $2 \angle 125$ | (ج) $(-7.07 + j7.07)/(4.92 + j0.868)$ |
| | $5 \angle -45$ | (د) $(-j45)/(6.36 - j6.36)$ |
| | $3.08 \angle 14.6^\circ$ | (هـ) $(6.88 \angle 12^\circ)/(2 + j1)$ |
| | $1.414 \angle -35^\circ$ | (و) $(5 + j5)/5 \angle 80$ |
| | $0.1 \angle -53.1^\circ$ | (ز) $1/(6 + j8)$ |
| | $10 \angle 143.2$ | (س) $(-10 + j20)/(2 - j1)$ |

٤ - ١٧ احسب $z_1 z_2 / (z_1 + z_2)$ لكل حالة من الحالات الآتية :

| | | |
|----------|--------------------------|--|
| الجواب : | $7.18 \angle 27.8^\circ$ | (أ) $z_1 = 10 + j5, z_2 = 20 \angle 30$ |
| | $5.5 \angle 15.2^\circ$ | (ب) $z_1 = 5 \angle 45^\circ, z_2 = 10 \angle -70$ |
| | $5.52 \angle 23.8^\circ$ | (ج) $z_1 = 6 - j2, z_2 = 1 + j8$ |
| | $17.9 \angle 26.6$ | (د) $z_1 = 20, z_2 = j40$ |

الفصل الخامس

المعاوقة المركبة والترميز الطوري

مقدمة :

أن تحليل الدوائر في الحالة الجيبية المستقرة من الأشياء المهمة ، ليس فقط لأن الجهود الناتجة من مولدات التيار المتردد تكون تقريباً دوال جيبية نقية ، ولكن أيضاً لامكان التعبير عن أى شكل موجى دورى بحد ثابت مضافاً إليه متتالية حدود على شكل جيب أو جيب تمام . وتسمى هذه الطريقة التى ستكون موضوع فصل لاحق « بطريقة فوريير لتحليل الأشكال الموجية » .

ولقد عولج في الفصل الثالث عديد من الدوائر البسيطة التى كان فيها الجهد والتيار على شكل دوال جيبية . وبالرغم من بساطة الدوائر فقد كانت طريقة التحليل صعبة إلى حد ما . أما باستخدام الترميز الطوري للجهود والتيارات وكذلك استخدام المعاوقة المركبة للتعبير عن عناصر الدائرة ، فإنه يمكن تبسيط تحليل الدوائر في الحالة الجيبية المستقرة .

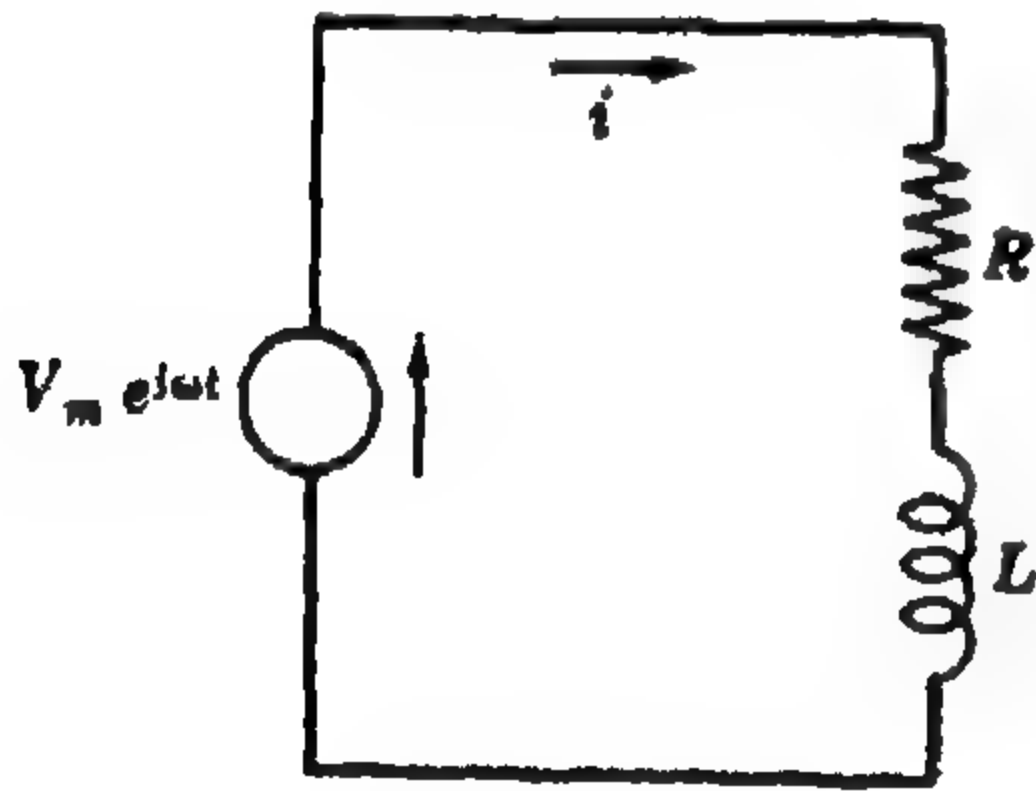
المعاوقة المركبة :

اعتبر دائرة التوالى RL الموضحة في الشكل ٥ - ١ والتي يؤثر عليها جهد معادلته

$$v(t) = V_m e^{j\omega t}$$

تمام واحد جيبى $V_m \cos \omega t + jV_m \sin \omega t$. وبتطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسارات المغلفة نجد أن

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V_m e^{j\omega t}$$



شكل ٥ - ١

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى لها حل خاص على شكل $i(t) = Ke^{j\omega t}$ وبالتعويض بدالة التيار هذه نجد أن

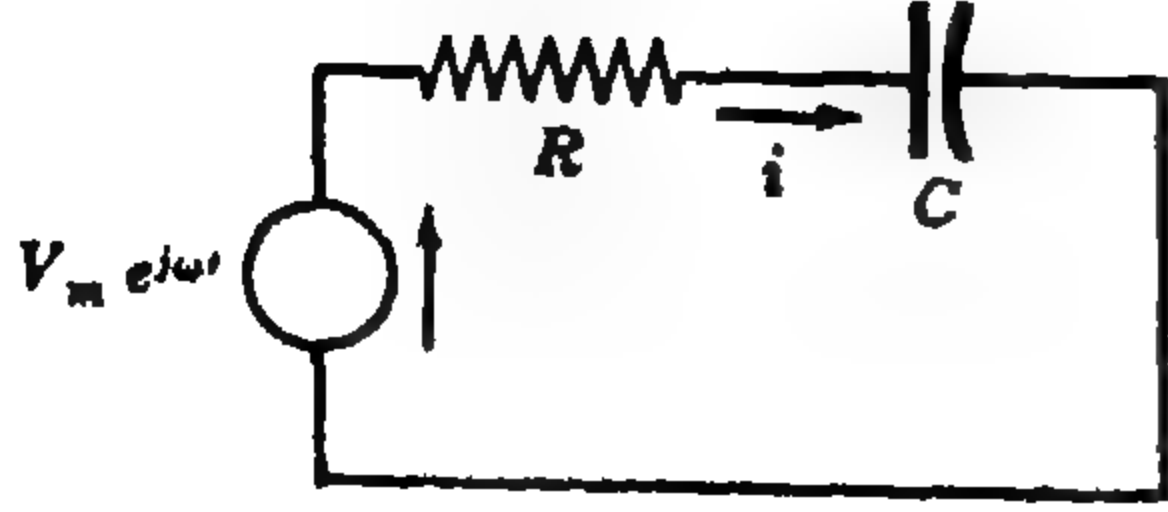
$$RKe^{j\omega t} + j\omega LKe^{j\omega t} = V_m e^{j\omega t}$$

ومنها نجد أن $i(t) = \frac{V_m}{R + j\omega L} e^{j\omega t}$ و $K = \frac{V_m}{R + j\omega L}$ ومن النسبة بين دالة الجهد ودالة التيار نلاحظ أن المعاوقة

عبارة عن عدد مركب مجزء حقيقى R ومجزء تخيلى ωL

$$Z = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{\frac{V_m}{R + j\omega L} e^{j\omega t}} = R + j\omega L$$

والآن فلنعتبر دائرة التوالي RC الموضحة في الشكل ٥ - ٢ والتي يؤثر عليها نفس الجهد . إذن



شكل ٥ - ٢

$$(١) \quad Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V_m e^{j\omega t}$$

وبفرض أن $i(t) = Ke^{j\omega t}$ وبالتعويض في المعادلة (١) نجد أن

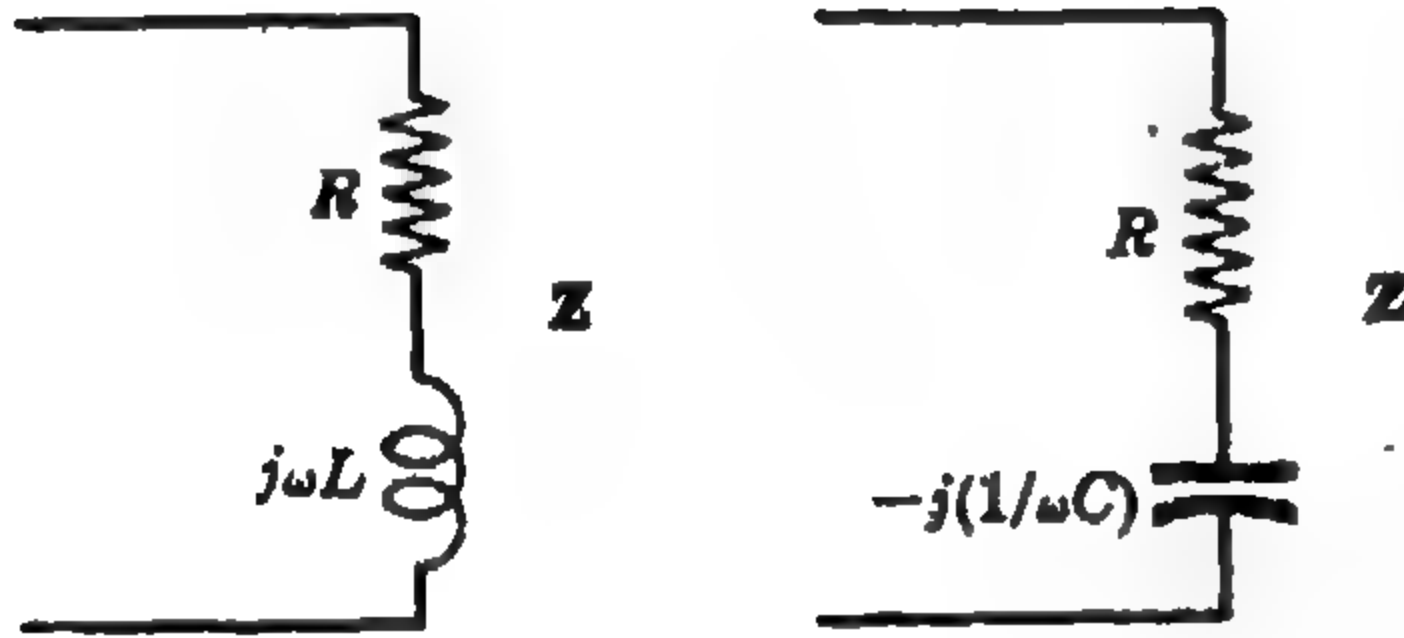
$$RKe^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} Ke^{j\omega t} = V_m e^{j\omega t}$$

ومنها نجد أن $K = \frac{V_m}{R + 1/j\omega C} = \frac{V_m}{R - j(1/\omega C)}$ ، إذن $i(t) = \frac{V_m}{R - j(1/\omega C)} e^{j\omega t}$.

$$Z = \frac{V_m e^{j\omega t}}{\frac{V_m}{R - j(1/\omega C)} e^{j\omega t}} = R - j(1/\omega C)$$

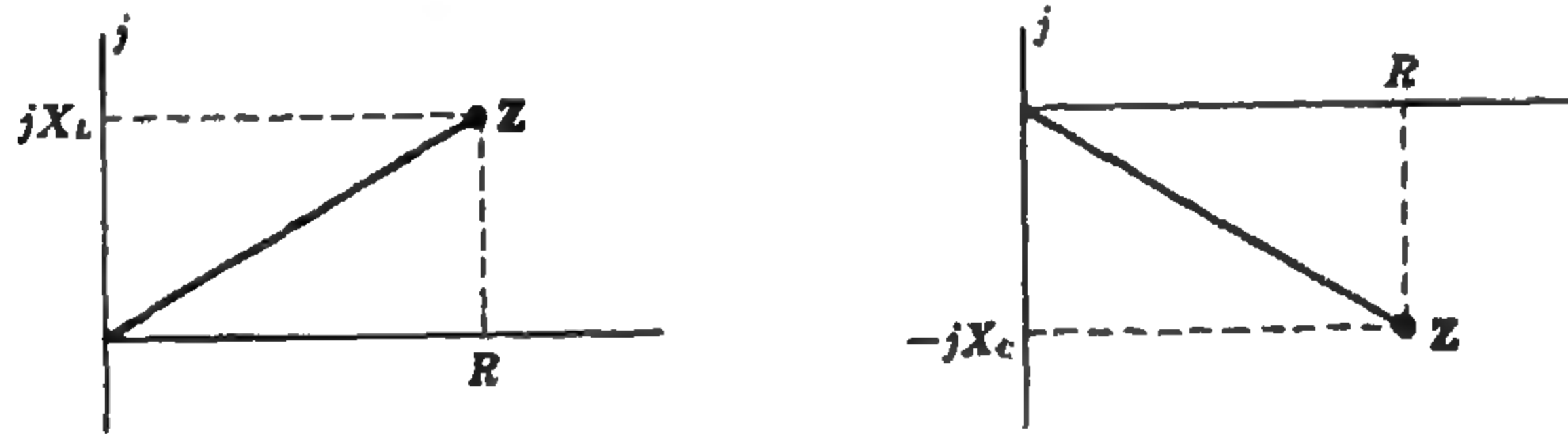
ومنها نجد أيضاً أن المعاوقة عدد مركب بجزء حقيقي R وجزء تخيل $-1/\omega C$.

بما سبق يتضح أنه يمكن التعبير عن عناصر الدائرة بدلالة المعاوقة المركبة Z ، التي يمكن وضعها مباشرة في رسم الدائرة كما هو موضح في الشكل ٥ - ٣ .



شكل ٥ - ٣

وحيث أن المعاوقة عبارة عن عدد مركب فإنه يمكن توضيحها في مستوى مركب . ولما كانت المقاومة لا تأخذ قيماً سالبة أبداً فإننا نحتاج فقط إلى الربع الأول والربع الرابع . والشكل التوضيحي الناتج يسمى شكل المعاوقة . أنظر الشكل ٥ - ٤ .



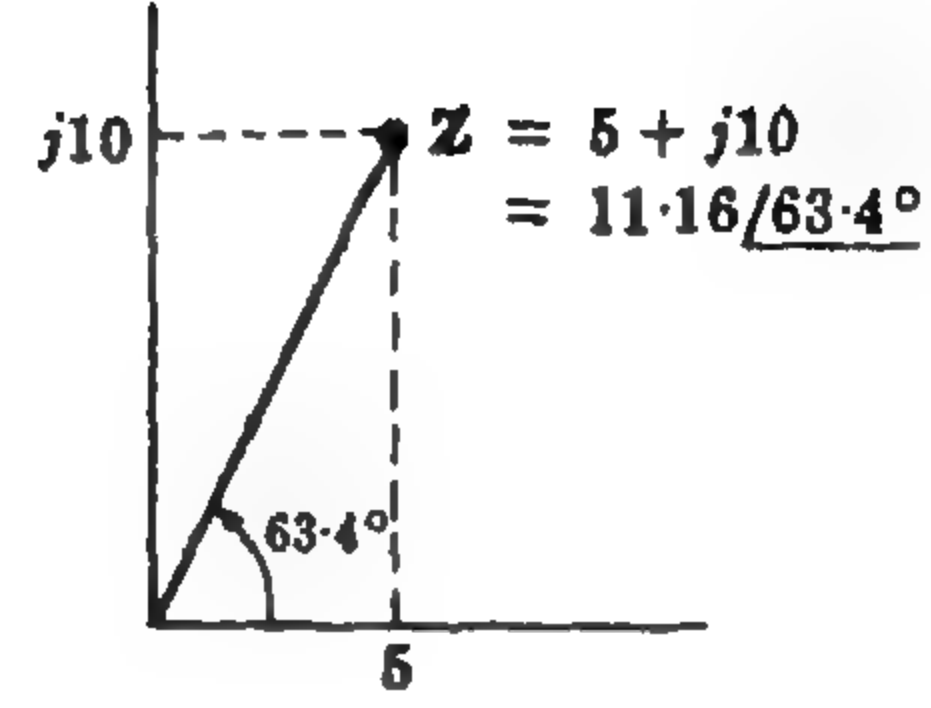
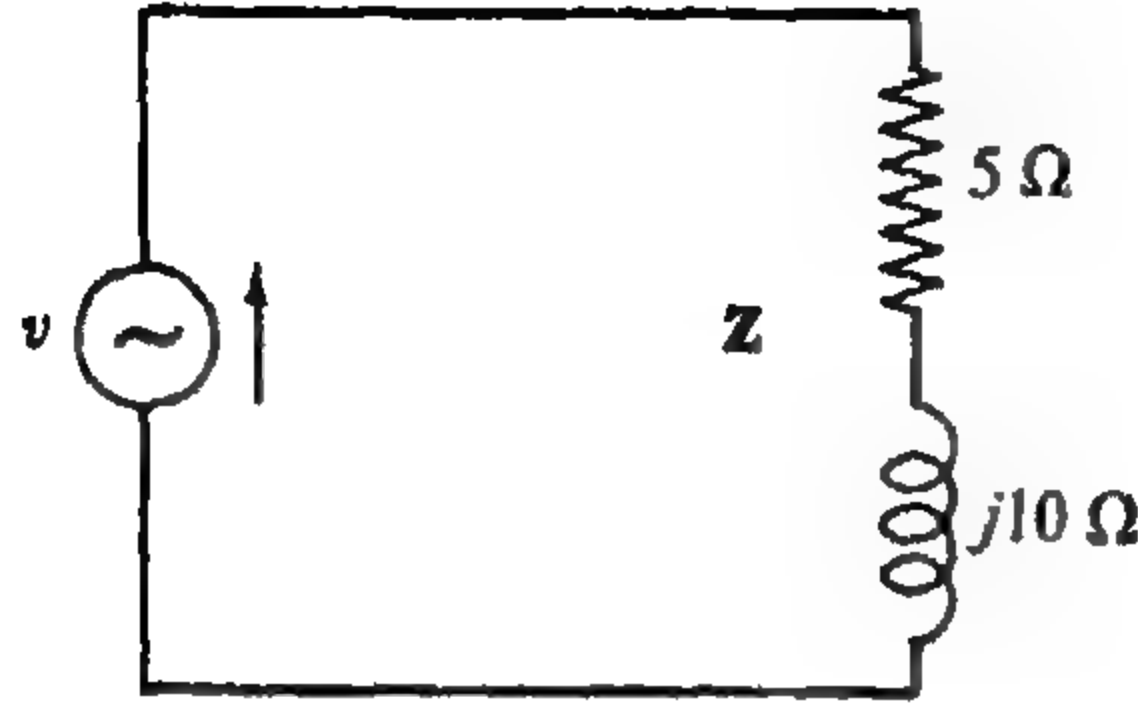
شكل ٥ - ٤ . أشكال المعاوقة

توقع المقاومة R على المحور الموجب الحقيقي ، أما الممانعة الحثية X_L فتوقع على محور j الموجب بينما ترسم ممانعة السعة X_C على محور j السالب . وعموماً فإن المعاوقة المركبة Z يمكن إيجادها إما في الربع الأول أو الربع الرابع ، وذلك على حسب العناصر المكونة للدائرة . والشكل القطبي للمعاوقة Z سيكون بزاوية $\pm 90^\circ$.

مثال ١ :

في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٥ - ٥ ، $R = 5 \Omega$ و $L = 2\text{mH}$ و $v = 150 \sin 5000t$ volts . أوجد المعاوقة المركبة Z .

الممانعة الحثية، $X_L = \omega L = 5000(2 + 10^{-3}) = 10 \text{ ohms}$ ، إذن $Z = 5 + j10 \Omega$. وفي الشكل القطبي نجد

$$Z = 11.16 \angle 63.4^\circ \Omega$$


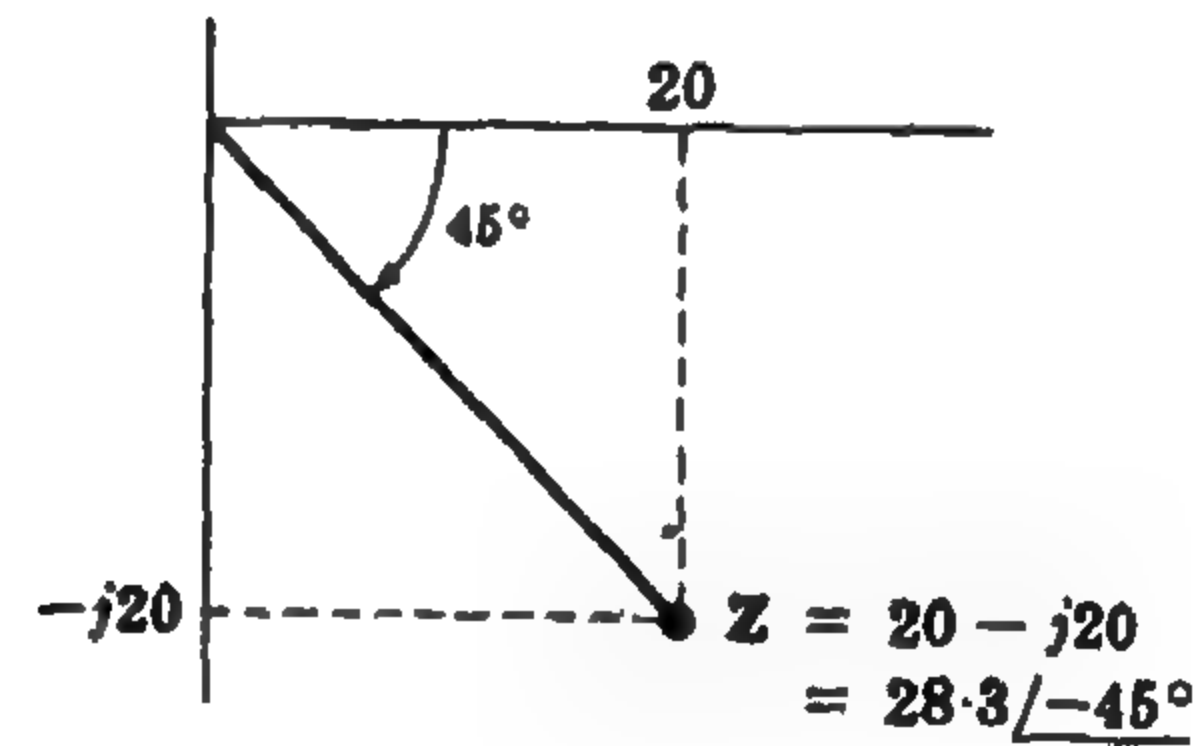
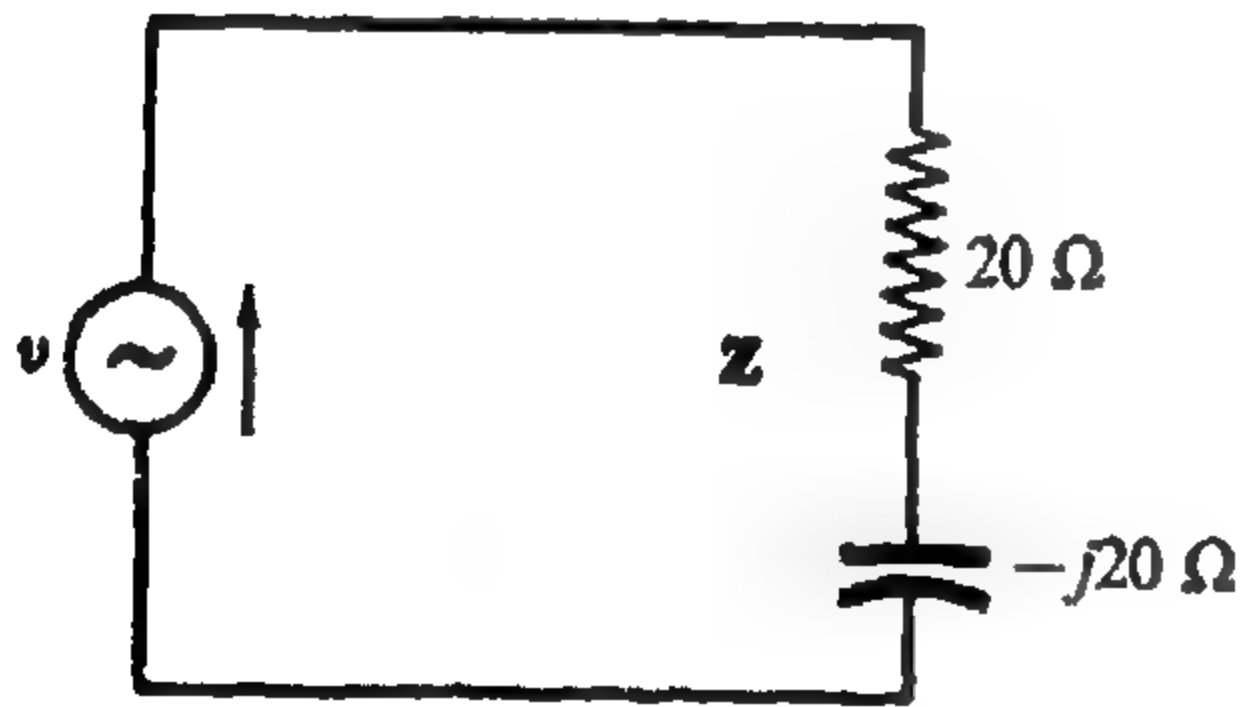
شكل ٥ - ٥

مثال ٢ :

في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٥ - ٦ ، $C = 5 \mu F$ ، $R = 20 \Omega$ ، $v = 150 \cos 10,000t \text{ volts}$. أوجد المعاوقة المركبة Z .

ممانعة السعة $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10,000(5 \times 10^{-6})} = 20 \text{ ohms}$ ، إذن $Z = 20 - j20 \Omega$

وفي الشكل القطبي $Z = 28.3 \angle -45^\circ \Omega$

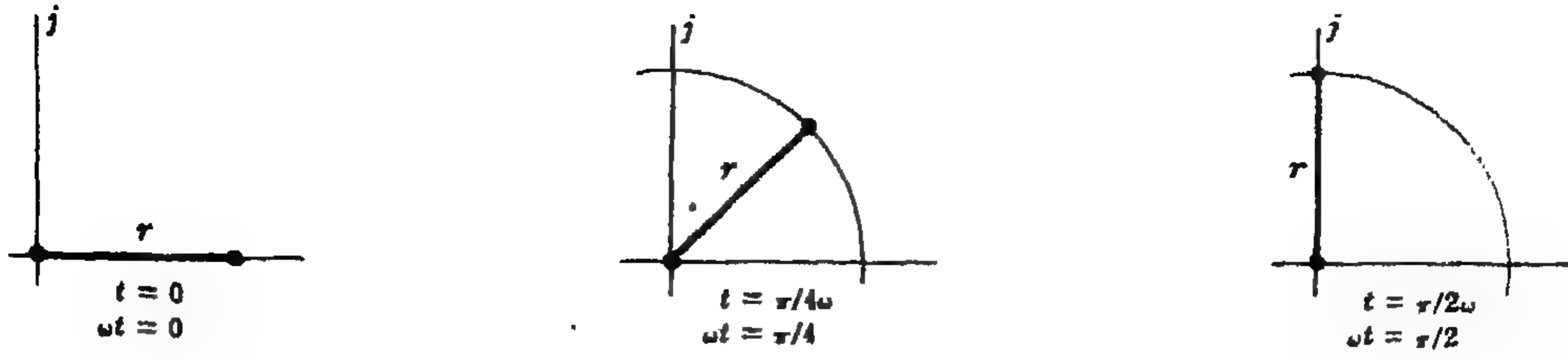


شكل ٥ - ٦

حيث أن كلا من X_L و X_C دالة في ω ، فإن المعاوقة دالة في ω في جميع الدوائر الكهربائية ماعداً حالة مقاومة نقية وعلى ذلك فإن أي معاوقة مركبة صحيحة فقط عند الذبذبة التي حسبت عندها .

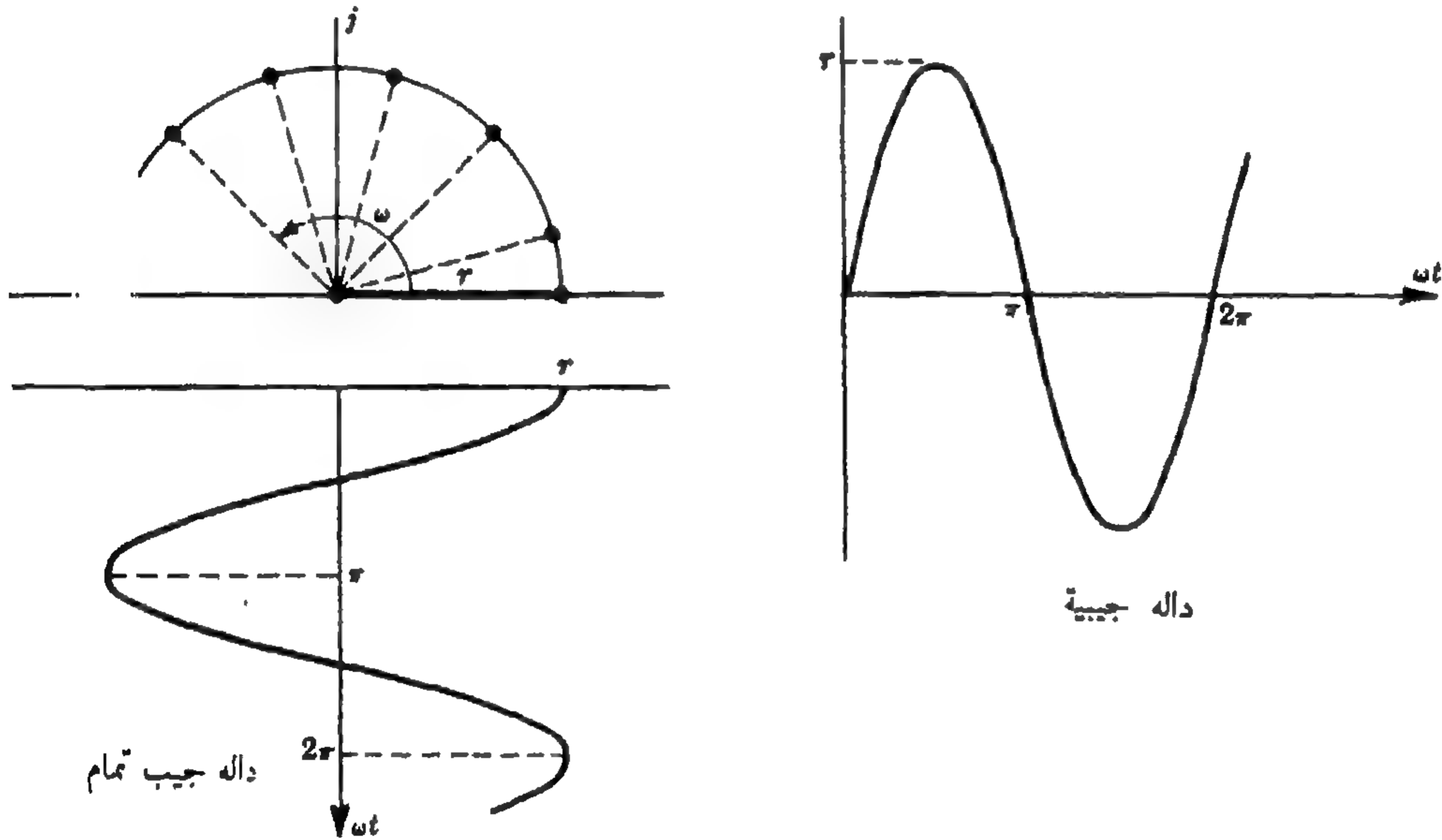
الترميز الطوري :

اعتبر الدالة $x \cos \omega t$ ، التي عبارة عن عدد مركب يحتوي على المتغير t . وعلى ذلك فإن القيمة المطلقة لها هي x وتنفع طبيعة هذه الدالة برسم بعض الأشكال لها عند $\pi/2\omega$ و $\pi/4\omega$ و $t = 0$ مثلاً ، كما هو موضح في الشكل ٥ - ٧ .



شكل ٥ - ٧ . الدالة $r e^{j\omega t}$

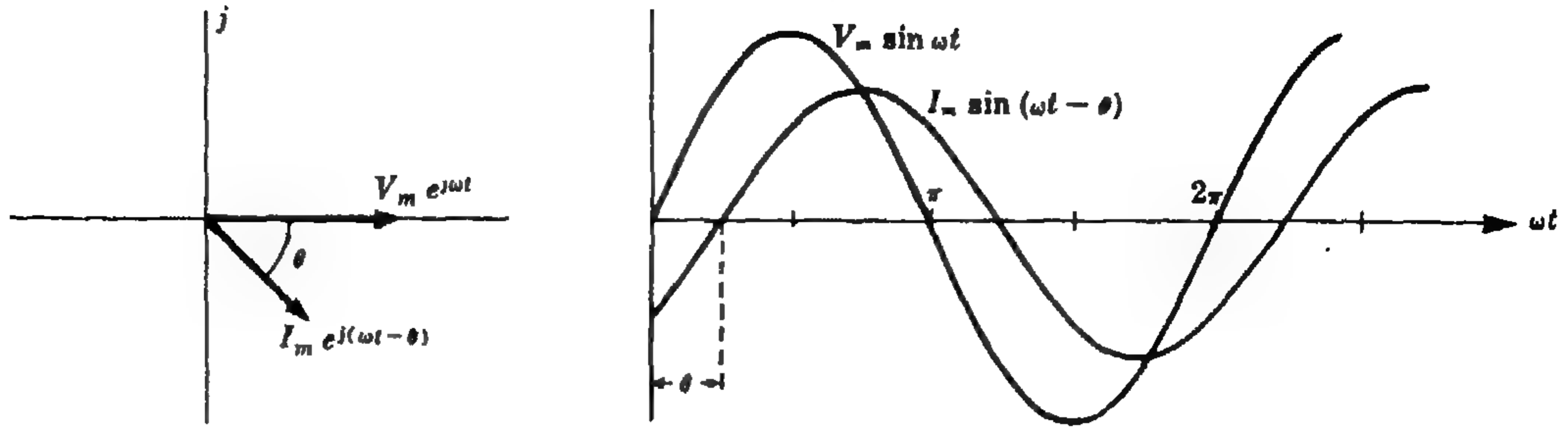
إذا كانت ω ثابتة ، فإن جزء المستقيم يدور في عكس اتجاه عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة . وإذا فحصنا مسقط جزء المستقيم هذا على كل من المحور الحقيقي ومحور j فإنه ينتج لدينا أجزاء الجيب تمام والجيب للدالة $e^{j\omega t}$ كما هو واضح في صيغة أيلر .



دالة جيبية

شكل ٥ - ٨

لقد وجدنا في الفصل الثالث أنه في حالة دائرة RL على التوالي بجهد $V_m \sin \omega t$ ، فإن التيار الذي تمرره الدائرة يكون لاحقاً للجهد بزاوية θ ، حيث $\theta = \tan^{-1}(\omega L / R)$ ، أما معادلة التيار فهي $i = I_m \sin(\omega t - \theta)$ وزاوية الطور هذه دالة في ثوابت الدائرة وكذلك في ذبذبة فرق الجهد المؤثر ولكنها لا تزيد أبداً عن 90° أو $\pi/2$ radians والشكل ٥ - ٩ (ب) يوضح الشكل الموجي للجهد v والتيار i مع تغير ωt . أما الشكل ٥ - ٩ (أ) فيوضح زوجاً من أجزاء الخطوط الموجهة التي تدور في عكس اتجاه عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة ω وذلك في مستوى مركب . وحيث أنهما يدوران بنفس السرعة فإن زاوية الطور بينهما تظل ثابتة . وأيضاً يتضح من اتجاه دورانهما أن التيار لاحق للجهد بزاوية θ .



(ب)

شكل ٥ - ٩

(أ)

ان مسقط اجزاء المستقيمت التي تدور على المحور j هو نفسه منحني الدوال المرسومة ويأتي هذا من صيغة أبلر حيث أن الجزء التخيل للدالة الأسية هو دالة جيبية .

اعتبر دالة عامة للجهد مثل $v = V_m e^{j(\omega t + \alpha)}$ ، حيث α زاوية تزحزح وهي تسمح للجهد أن يكون عند زاوية α عندما t تساوى صفراً ، فإذا أثر هذا الجهد على دائرة ما معاوقتها $Z = ze^{j\theta}$ حيث $(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$ فإن

$$(V_m e^{j(\omega t + \alpha)}) / (ze^{j\theta}) = (V_m/z) e^{j(\omega t + \alpha - \theta)} = I_m e^{j(\omega t + \alpha - \theta)}$$

التيار يعطى بالمعادلة

$$(1) \quad I_m e^{j(\omega t + \alpha - \theta)} = \frac{V_m e^{j(\omega t + \alpha)}}{ze^{j\theta}} \quad \text{أى أن :}$$

والمساوية السابقة في مجال الزمن حيث أن الزمن يظهر صريحاً في كل من معادلتى التيار والجهد . وللحصول على الكيانات المطاوعة فإننا نجرى تغيرين . أولاً نضرب المساوية في $e^{-j\omega t}$ للتخلص من دالة الزمن . ثم نضرب المساوية بعد ذلك في $1/\sqrt{2}$ للحصول على القيم الفعالة للتيار والجهد .

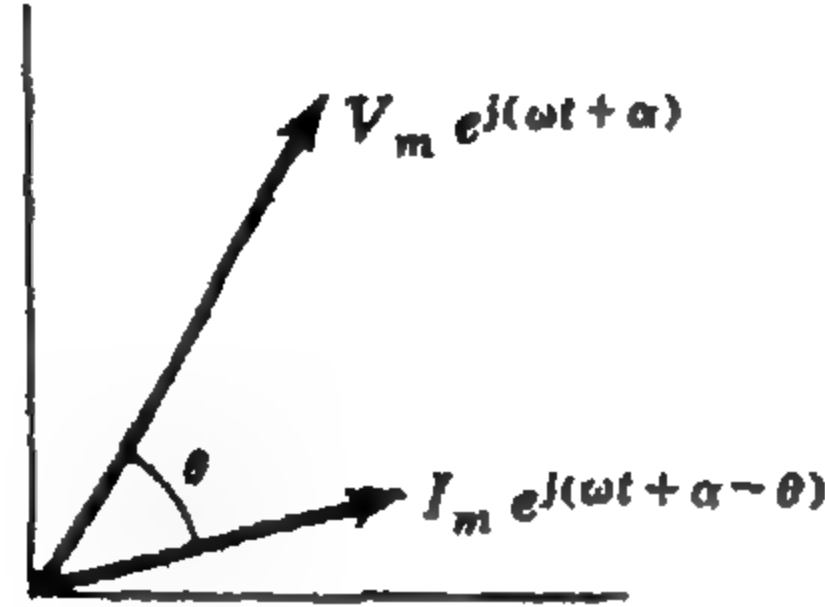
$$\frac{e^{-j\omega t}}{\sqrt{2}} (I_m e^{j(\omega t + \alpha - \theta)}) = \frac{e^{-j\omega t}}{\sqrt{2}} \left(\frac{V_m e^{j(\omega t + \alpha)}}{ze^{j\theta}} \right)$$

$$(2) \quad \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j(\alpha - \theta)} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{j\alpha}}{ze^{j\theta}}$$

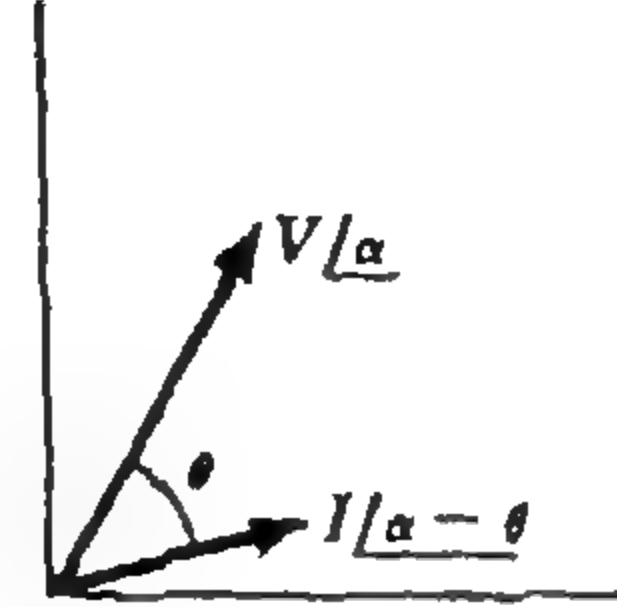
$$(3) \quad \frac{I/\alpha - \theta}{z/\theta} = \frac{V/\alpha}{z/\theta}$$

$$(4) \quad I = \frac{V}{Z}$$

المعادلة (٢) هي معادلة محولة وهي الآن في مجال الذبذبة . وتلاحظ أن الزمن لا يظهر في هذه المعادلة ولا في المعادلات التالية لها . ولكن ينبغي أن نتذكر تغير الزمن في المعادلة (١) . وفي المعادلة (٣) تعني كلا من V و I بدون رمز سفلى القيمة الفعالة لكل من الجهد والتيار . والمعادلة (٤) تربط كلا من I و V و Z وهي كلها كميات مركبة ويجب عند معالجتها اعتبار قيمتها المطلقة وزاويها . وهذا هو النظام الطوري المكافئ لقانون أوم ويسمى في بعض الأحيان بصيغة قانون أوم المركبة .



(أ) مجال الزمن



(ب) مجال الذبذبة

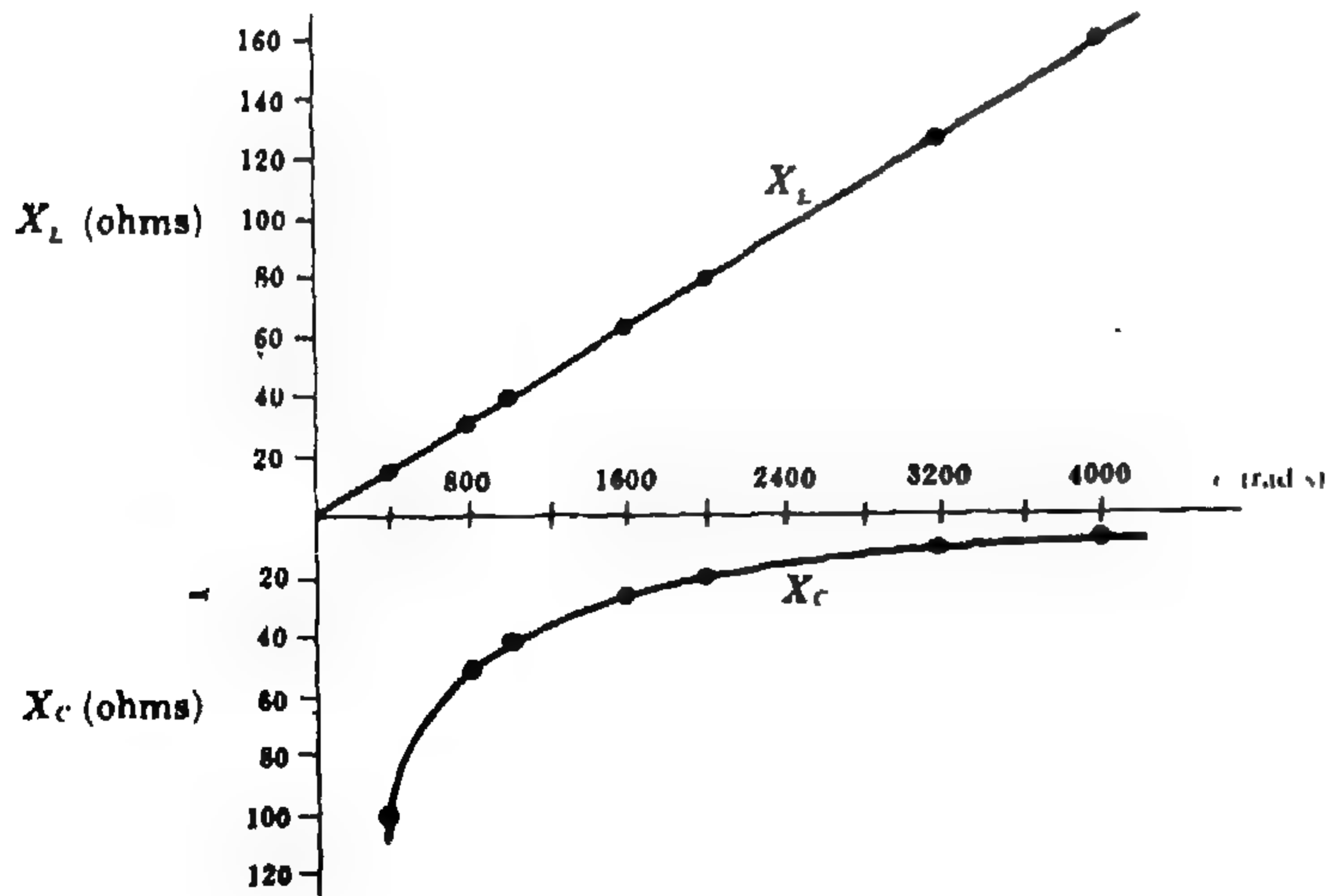
شكل ١٠ - ٥

يوضح الشكل ١٠ - ٥ كلا من دالة الجهد والتيار في مستوى مركب ، ومعبّر عنهما على شكل دالة أسية . ونتيجة لظهور الزمن t صريحاً فإن هذا يعبر عن رسم مجال الزمن . أما الشكل ١٠ - ٥ (ب) فيوضح كلا من الجهد المطاوع والتيار المطاوع ، ونلاحظ هنا أن جزء المستقيم يساوي $1/\sqrt{2}$ مرة من جزء المستقيم في الشكل ١٠ - ٥ (أ) مع عدم وجود أى إشارة عن الزمن . وحيث أن الزاوية θ والقيمة المطلقة للتيار هي دوان في الذبذبة فإن الشكل ١٠ - ٥ (ب) يسمى مجال الذبذبة .

مسائل محلولة

١ - ٥ بين كيف يتغير كل من X_L و X_C مع الذبذبة وذلك برسم كل منهما مع ω في المدى من 400 إلى 4000 rad/s . اعتبر $C = 25 \mu F$ و $L = 400 \text{ mH}$

بالتعويض في $X_L = \omega L$ و $X_C = 1/\omega C$ عن ω بالقيم المعطاة فإننا نحصل على قيم X_L و X_C الموضحة بالجدول كما في الشكل ١١ - ٥ (أ) . ويوضح الشكل ١١ - ٥ (ب) منحنى كل من X_L و X_C .



(ب)

شكل ١١ - ٥

| ω rad/s | X_L ohms | X_C ohms |
|-------------------|---------------|---------------|
| 400 | 16 | 100 |
| 800 | 32 | 50 |
| 1000 | 40 | 40 |
| 1600 | 64 | 25 |
| 2000 | 80 | 20 |
| 3200 | 128 | 12.5 |
| 4000 | 160 | 10 |

(أ)

أن معاوقة أى دائرة تحتوى على L أو C هي دالة في التردد ، وعلى ذلك فإن أى رسم بياني للمعاوقة للذبذبة معطاة يكون صحيحاً عند تلك التردد فقط .

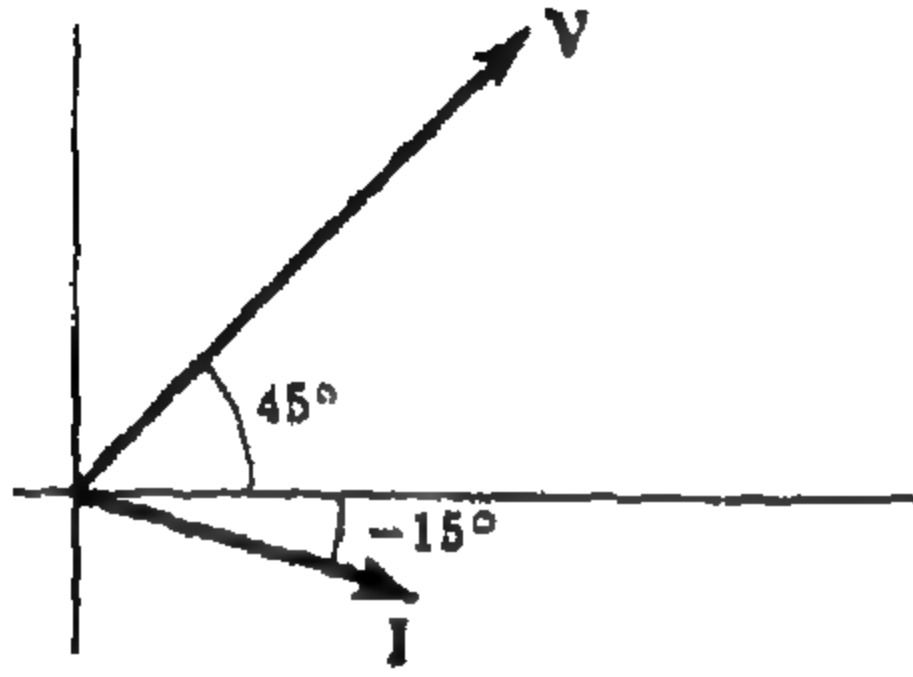
٥ - ٢ ارسم الشكل المطاور والرسم البياني للمعاوقة ثم عين ثوابت الدائرة وذلك للجهد والتيار التاليين :

$$v = 150 \sin(5000t + 45^\circ) \text{ volts}, i = 3 \sin(5000t - 15^\circ) \text{ amperes}$$

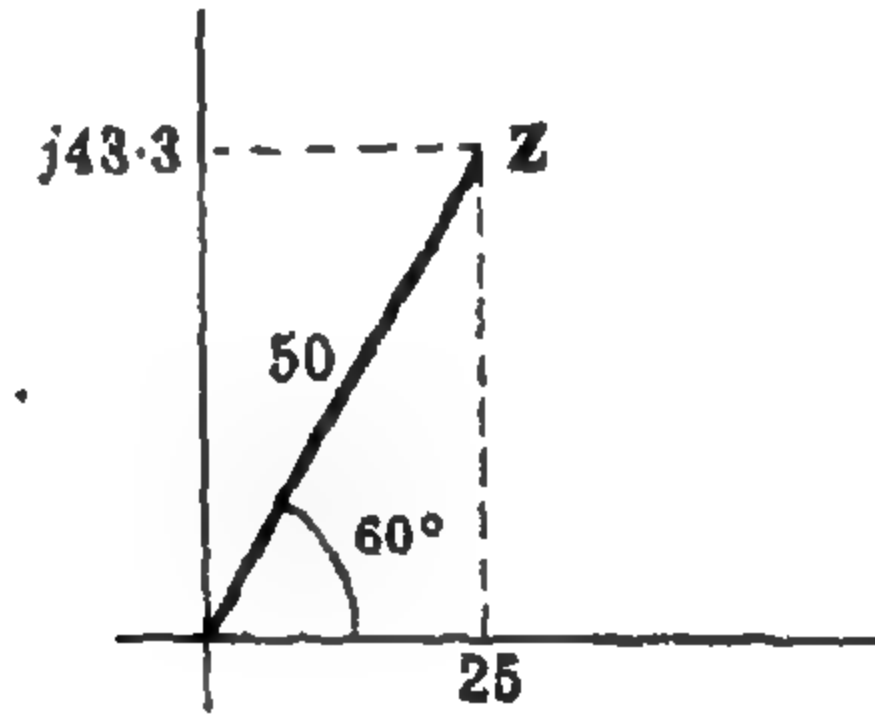
القيم الطورية لها قيم مطلقة تساوى $1/\sqrt{2}$ مرة من القيم العظمى ، وعلى ذلك فإن

$$V = \frac{150}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 106 \angle 45^\circ, \quad I = \frac{3}{\sqrt{2}} \angle -15^\circ = 2.12 \angle -15^\circ \text{ A}$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{106 \angle 45^\circ}{2.12 \angle -15^\circ} = 50 \angle 60^\circ = 25 + j43.3 \Omega$$



الشكل الطوري



بياني المعاوقة

شكل ٥ - ١٢

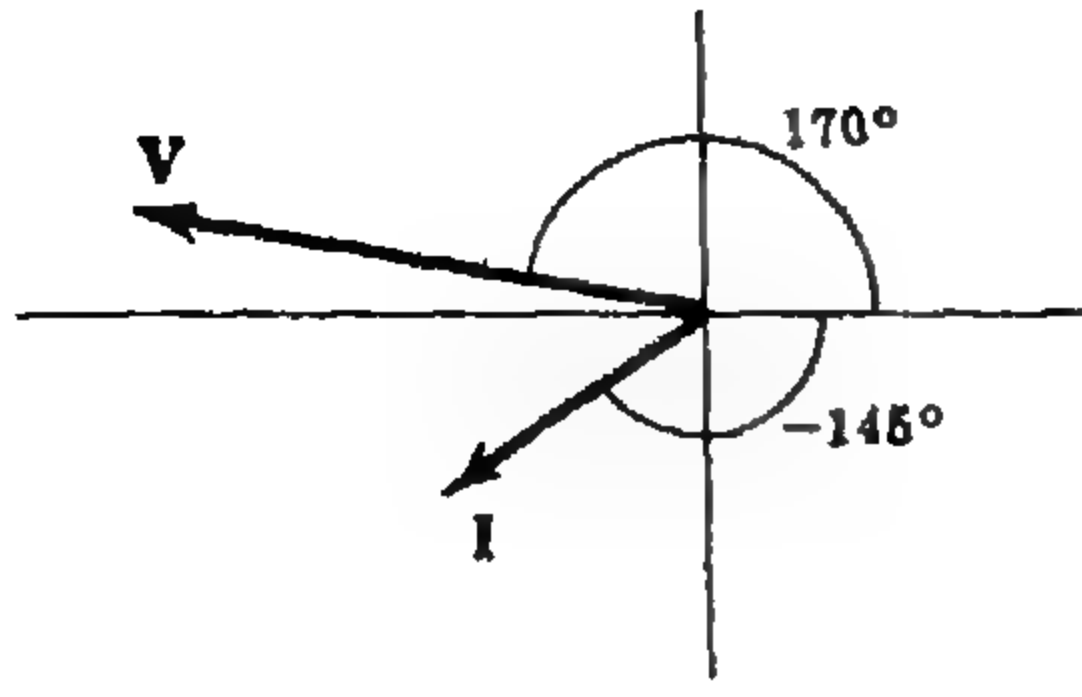
وحيث أن التيار لاحق للجهد بزاوية 60° فإن هذا يعني أن الدائرة RL على التوالي ، إذن من المعادلة الأخيرة نجد أن $\omega L = 43.3 \Omega$ ومنها $L = 43.3/5000 = 8.66 \text{ mH}$. إذن ثوابت الدائرة هي $R = 25 \Omega$ و $L = 8.66 \text{ mH}$

٥ - ٣ ارسم الرسم البياني لكل من الشكل المطاور والمعاوقة وعين ثوابت الدائرة للجهد والتيار التاليين :

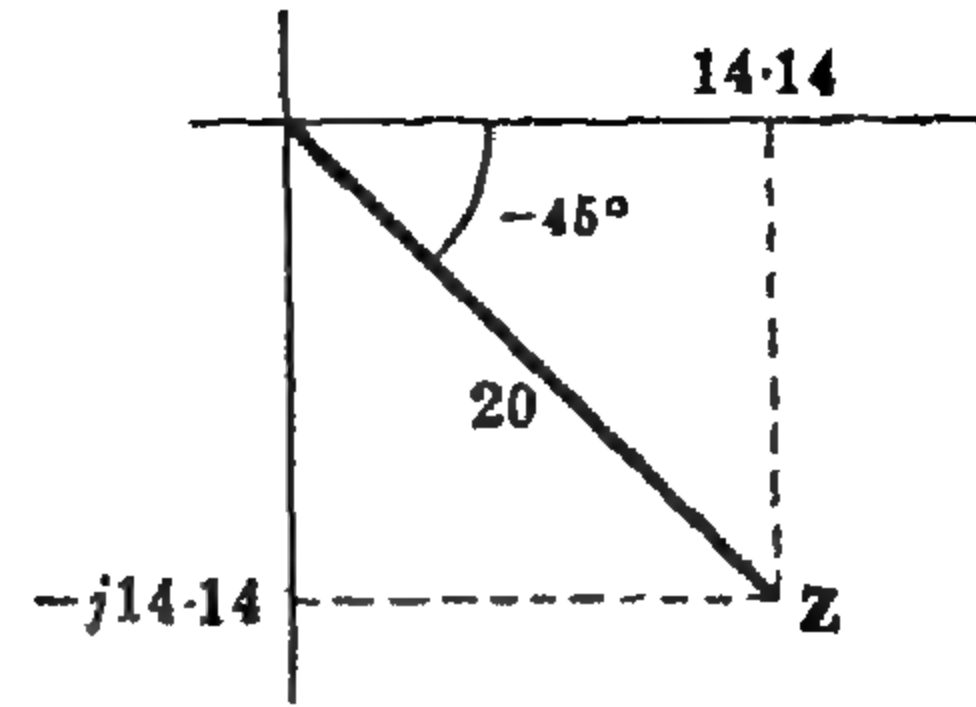
$$v = 311 \sin(2500t + 170^\circ) \text{ volts}, i = 15.5 \sin(2500t - 145^\circ) \text{ amperes}$$

$$V = \frac{311}{\sqrt{2}} \angle 170^\circ = 220 \angle 170^\circ \text{ V}, \quad I = \frac{15.5}{\sqrt{2}} \angle -145^\circ = 11 \angle -145^\circ \text{ A}$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{220 \angle 170^\circ}{11 \angle -145^\circ} = 20 \angle -45^\circ = 14.14 - j14.14 \Omega$$



الشكل الطوري



بيان المعاوقة

شكل ٥ - ١٣

وحيث أن التيار سابق للجهد بزاوية قدرها 45° ، فإن هذا يعني أن الدائرة هي RC . ومن المعادلة الأخيرة نجد أن $X_C = 1/\omega C = 14.14 \Omega$ ومنها نجد أن $C = 1/(14.14 \times 2500) = 28.3 \mu F$. إذن ثوابت الدائرة هي $R = 14.14 \Omega$ و $C = 28.3 \mu F$.

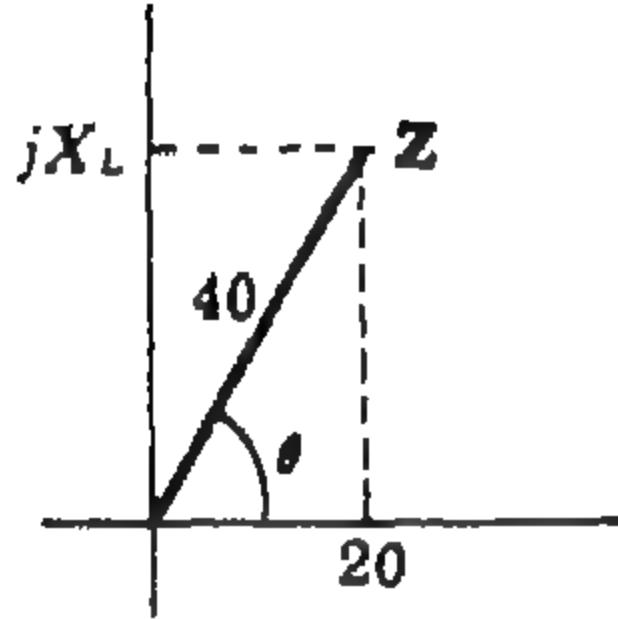
٥ - ٤ : عنصران متصلان على التوالي في دائرة كهربية ، $R = 20 \Omega$ و $L = 0.02 H$ ، فإذا كانت المعاوقة تساوي $40 \angle \theta$ ، فعين الزاوية θ والذبذبة f .

$$20 + jX_L = 40 \angle \theta$$

ومن الشكل ٥ - ١٤ نجد أن $\theta = \cos^{-1} 20/40 = 60^\circ$ ، إذن

$$X_L = 40 \sin 60^\circ = 34.6 \Omega$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad \text{إذن} \quad f = \frac{X_L}{2\pi L} = \frac{34.6}{2\pi(0.02)} = 275 \text{ Hz}$$



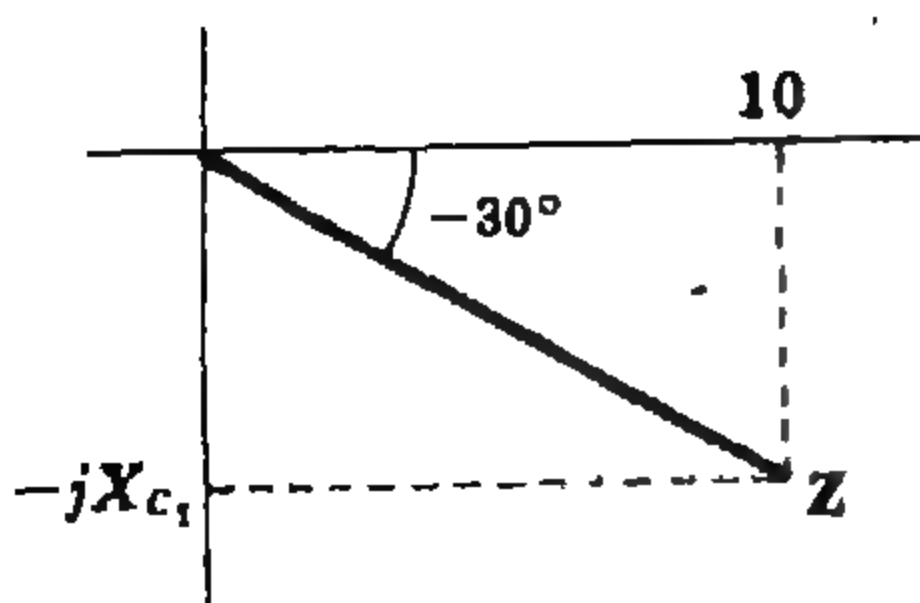
شكل ٥ - ١٤

٥ - ٥ : دائره توالي تتكون من $R = 10 \Omega$ و $C = 50 \mu F$ يؤثر عليها جهد له ذبذبة ما بحيث كان التيار سابقاً للجهد بزاوية 30° . أوجد التغير اللازم حدوثه في الذبذبة حتى يصبح التيار سابقاً بزاوية 70° .

من الشكل ٥ - ١٥ نجد أن 5.76 ohms or X_C 0.576 X_C 10 $\tan 30$ إذن

$$X_{C1} = 1/2\pi f_1 C$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C X_{C1}} = \frac{1}{2\pi(50 \times 10^{-6})(5.76 \text{ ohms})} = 553 \text{ Hz}$$



شكل ٥ - ١٥

وعند الذبذبة الجديدة f_2 يكون التيار سابقاً بزاوية 70° والآن

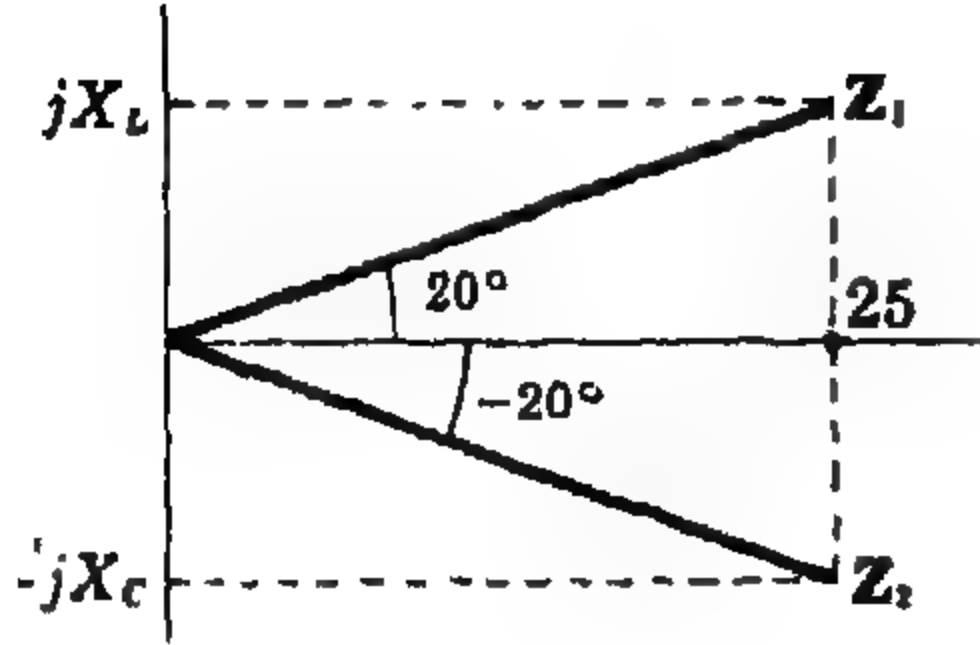
$$\tan(-70^\circ) = -X_{C2}/10 = -2.74 \quad \text{أي أن} \quad X_{C2} = 27.4$$

$$\text{إذن} \quad f_2/553 = 5.76/27.4 \quad \text{و} \quad f_2/f_1 = X_{C1}/X_{C2} \quad \text{ومنها} \quad f_2 = 116 \text{ Hz}$$

حيث أن X_C تتناسب عكسياً مع ω فإن دائرة RC على التوالي

يكون لها زاوية طور كبيرة عند الذبذبات الصغيرة .

٥-٦ عند ذبذبة $f = 500 \text{ Hz}$ ، أوجد العنصر النقي الذي يجب توصيله على التوالي مع $R = 25 \Omega$ حتى يكون التيار لاحقاً للجهد بزاوية 20° . أوجد نفس الشيء إذا كان التيار سابقاً بزاوية 20° .



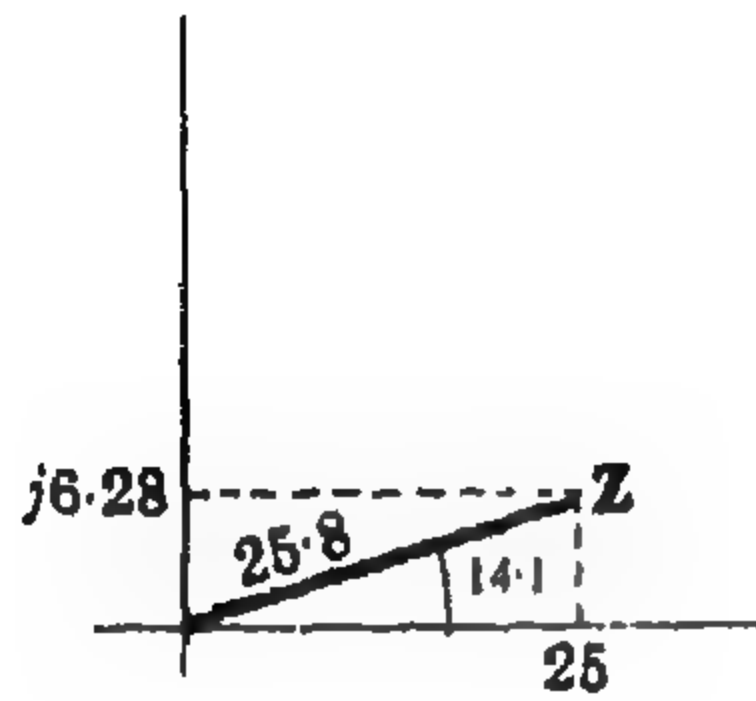
للمحصل على زاوية لاحقة 20° فإنه يلزم توصيل ممانعة حثية X_L على التوالي مع R . ولكن ممانعة المكثف X_C التي تسبق بنفس الزاوية يكون لها نفس القيمة الأومية «المقاومة» مثل X_L .

وإذا كان التيار لاحقاً فإن $\tan 20^\circ = X_L/25$ أي أن $X_L = 9.1 \Omega$ إذن $L = X_L/2\pi f = 9.1/2\pi(500) = 2.9 \text{ mH}$

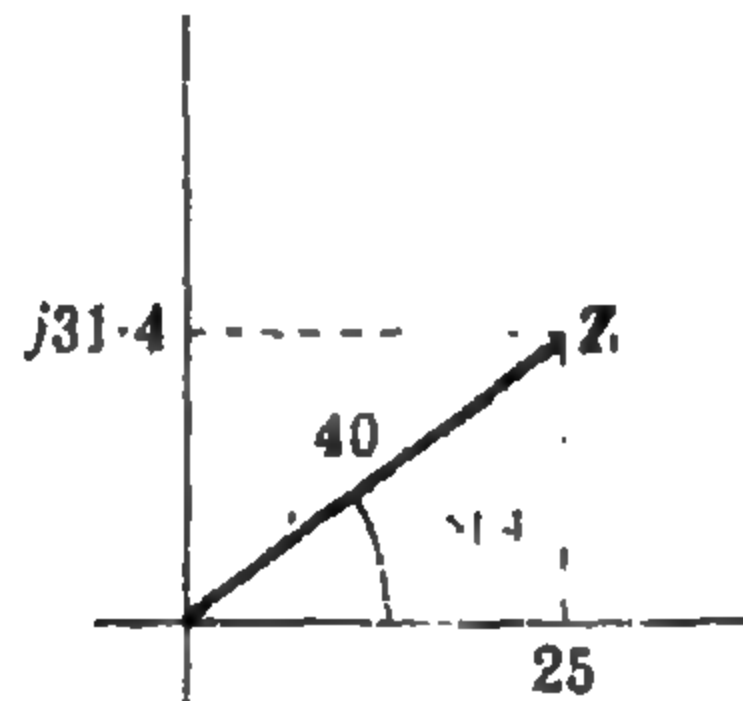
وعندما يكون التيار سابقاً فإن $C = 1/2\pi f X_C = 1/2\pi(500)(9.1) = 35 \mu\text{F}$. شكل ٥-١٦

٥-٧ دائرة توالي $R = 25 \Omega$ و $L = 0.01 \text{ H}$ ، احسب معاوقة الدائرة Z عند الذبذبات 100 Hz و 500 Hz و 1000 Hz

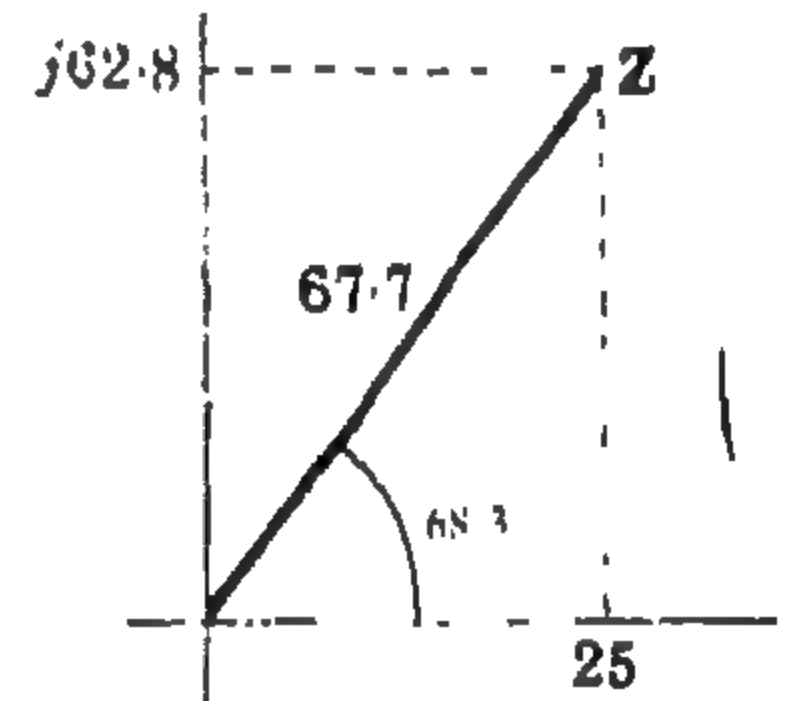
عندما $f = 100 \text{ Hz}$ فإن $X_L = 2\pi f L = 2\pi(100)(0.01) = 6.28 \text{ ohms}$ وبالمثل عندما $f = 500 \text{ Hz}$ فإن $X_L = 31.4 \Omega$ ، عندما $f = 1000 \text{ Hz}$ فإن $X_L = 62.8 \Omega$ يوضح الشكل ٥-١٧ قيم Z المقابلة لكل ذبذبة .



$f = 100 \text{ Hz}$



$f = 500 \text{ Hz}$



$f = 1000 \text{ Hz}$

شكل ٥-١٧

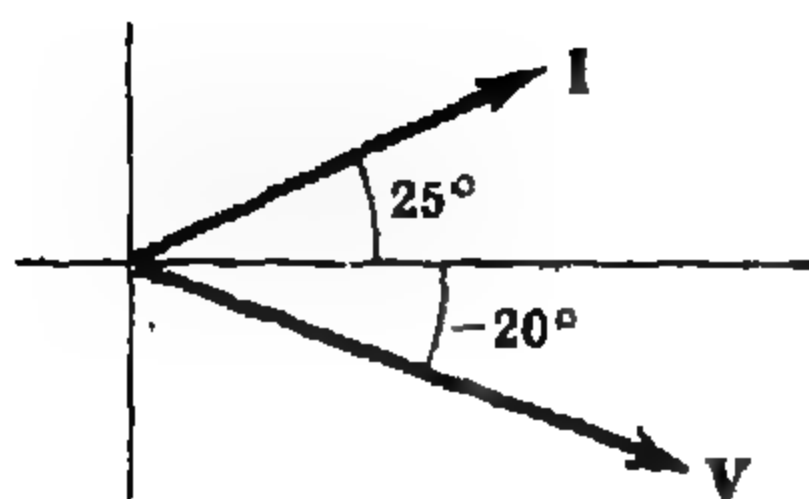
٥-٨ أوجد التيار المار في دائرة توالي فيها $R = 10 \Omega$ و $C = 40 \mu\text{F}$ إذا كان الجهد المؤثر هو

$$v = 500 \cos(2500t - 20^\circ) \text{ volts}$$

ومعادلة المعاوقة المركبة هي $X_C = 1/\omega C = 1/2500(40 \times 10^{-6}) = 10 \text{ ohms}$

وبتحويل معادلة الجهد إلى الشكل المطاوع نجد أن $Z = 10 - j10 = 10\sqrt{2}/-45^\circ \Omega$

$$\text{إذن } V = (500/\sqrt{2})/-20^\circ \text{ V}$$



$$I = \frac{V}{Z} = \frac{(500/\sqrt{2})/-20^\circ}{(10\sqrt{2})/-45^\circ} = 25/25^\circ \text{ A}$$

شكل ٥-١٨

$$i = 25\sqrt{2} \cos(2500t + 25^\circ) \text{ amperes}$$

ويوضح الشكل ٥ - ١٨ أن التيار I سابق للجهد V بالزاوية الموجودة في معادلة المعاوقة أي 45°

٥ - ٩ أوجد التيار المار في دائرة توالي فيها $R = 8 \Omega$ و $L = 0.02 \text{ H}$ إذا كان

الجهد المؤثر هو $v = 283 \sin(300t + 90) \text{ volts}$



شكل ٥ - ١٩

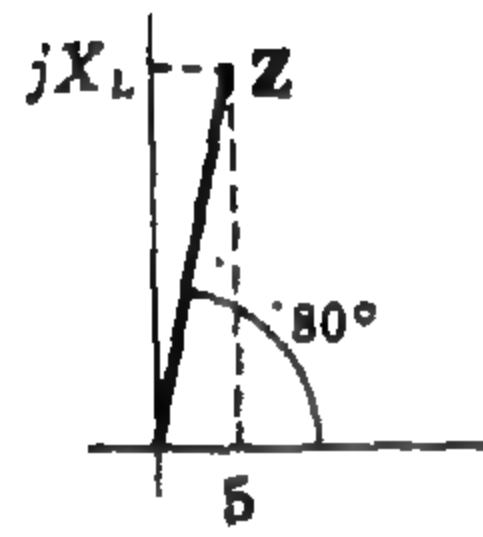
$$X_L = \omega L = 300(0.02) = 6 \text{ ohms}, \quad Z = 8 + j6 = 10/36.9^\circ \Omega$$

$$V = (283/\sqrt{2})/90^\circ = 200/90^\circ \text{ V.}$$

$$I = \frac{200/90^\circ}{10/36.9^\circ} = 20/53.1^\circ \text{ A}$$

$$i = 20\sqrt{2} \sin(300t + 53.1^\circ) \text{ amperes}$$

إذن



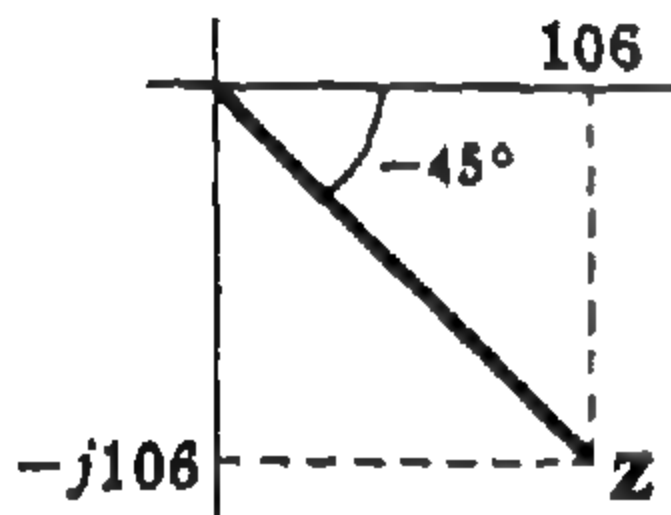
شكل ٥ - ٢٠

٥ - ١٠ في دائرة توالي كانت $R = 5 \Omega$ و $L = 0.03 \text{ H}$ فإذا كان التيار المار بها لاحقاً للجهد بزاوية 80° ، فعين ذبذبة المصدر والمعاوقة المركبة Z للدائرة

من الشكل ٥ - ٢٠ نجد أن $X_L = 5 \tan 80^\circ = 28.4 \Omega$ وحيث أن

$$X_L = 2\pi f L, f = X_L / 2\pi L = 28.4 / 2\pi(0.03) = 151 \text{ Hz}$$

والمعاوقة المركبة هي $Z = 5 + j28.4 = 28.8/80^\circ \Omega$



شكل ٥ - ٢١

٥ - ١١ وصل مكثف ستمته $25 \mu F$ على التوالي مع مقاومة R ، فإذا كانت ذبذبة المصدر 60 Hz وكان التيار الناتج سابقاً للجهد بزاوية 45° فعين قيمة R .

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(60)(25 \times 10^{-6})} = 106 \text{ ohms.}$$

وحيث أن زاوية الطور تساوي 45° إذن $R = X_C = 106 \Omega$

٥ - ١٢ دائرة توالي فيها $R = 8 \Omega$ و $L = 0.06 \text{ H}$ فإذا أثر عليها جهد يعطى بالمعادلة

$$v_1 = 70.7 \sin(200t - 30) \text{ volts.}$$

ثم أثر عليها جهد يعطى بالمعادلة $v_2 = 70.7 \sin(300t + 30) \text{ volts}$

بدلاً من الجهد الأول ؛ فأوجد التيار في الحالتين وارسم الشكل المطاور في كل حالة .

$$Z_1 = R + jX_L = 8 + j12 = 14.4/56.3^\circ \Omega \quad \text{و} \quad X_L = \omega L = 200(0.06) = 12 \Omega$$

$$V_1 = (70.7/\sqrt{2})/30 = 50/30^\circ \text{ V} \quad \text{وحيث أن}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1} = \frac{50/30^\circ}{14.4/56.3^\circ} = 3.47/26.3^\circ \text{ A} \quad \text{و} \quad i_1 = 3.47\sqrt{2}(\sin 200t + 26.3) \text{ amperes}$$

(ب) في حالة الجهد المؤثر v_2

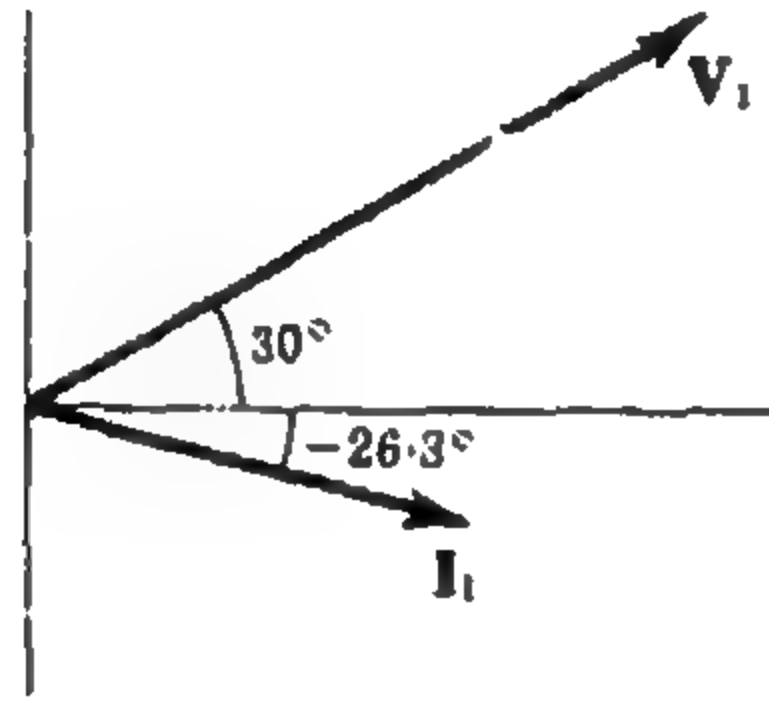
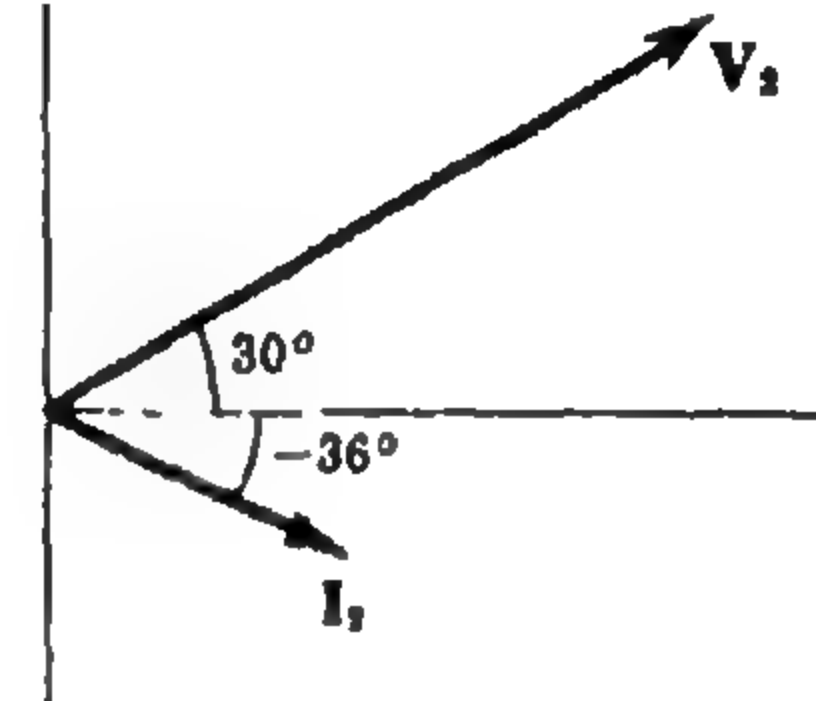
$$Z_2 = 8 + j18 = 19.7 \angle 66^\circ \Omega \quad \text{و} \quad X_L = \omega L = 300(0.06) = 18 \Omega$$

إذن ،

$$V_2 = 50 \angle 30^\circ \text{ V}$$

وحيث أن

$$i_2 = 2.54\sqrt{2} \sin(300t - 36^\circ) \text{ amperes} \quad \text{و} \quad I_2 = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{50 \angle 30^\circ}{19.7 \angle 66^\circ} = 2.54 \angle -36^\circ \text{ A}$$

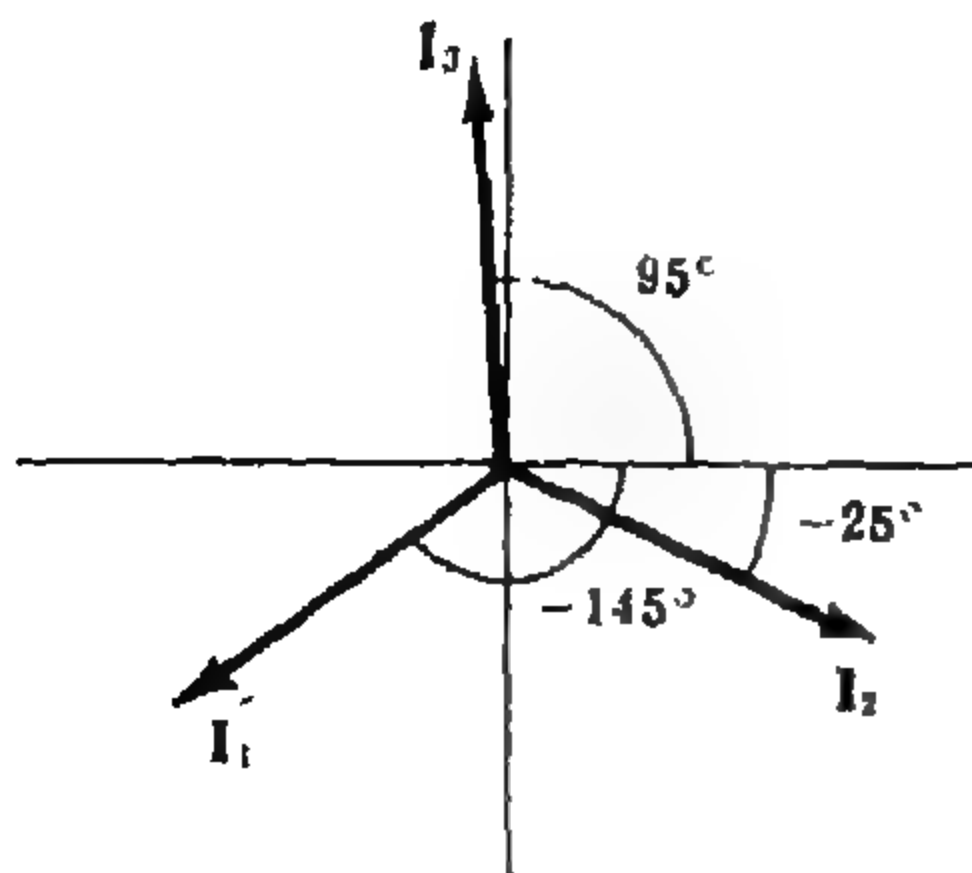
الشكل المطاور عندما $\omega = 200 \text{ rad/s}$ الشكل المطاور عندما $\omega = 300 \text{ rad/s}$

شكل ٢٢ - ٥

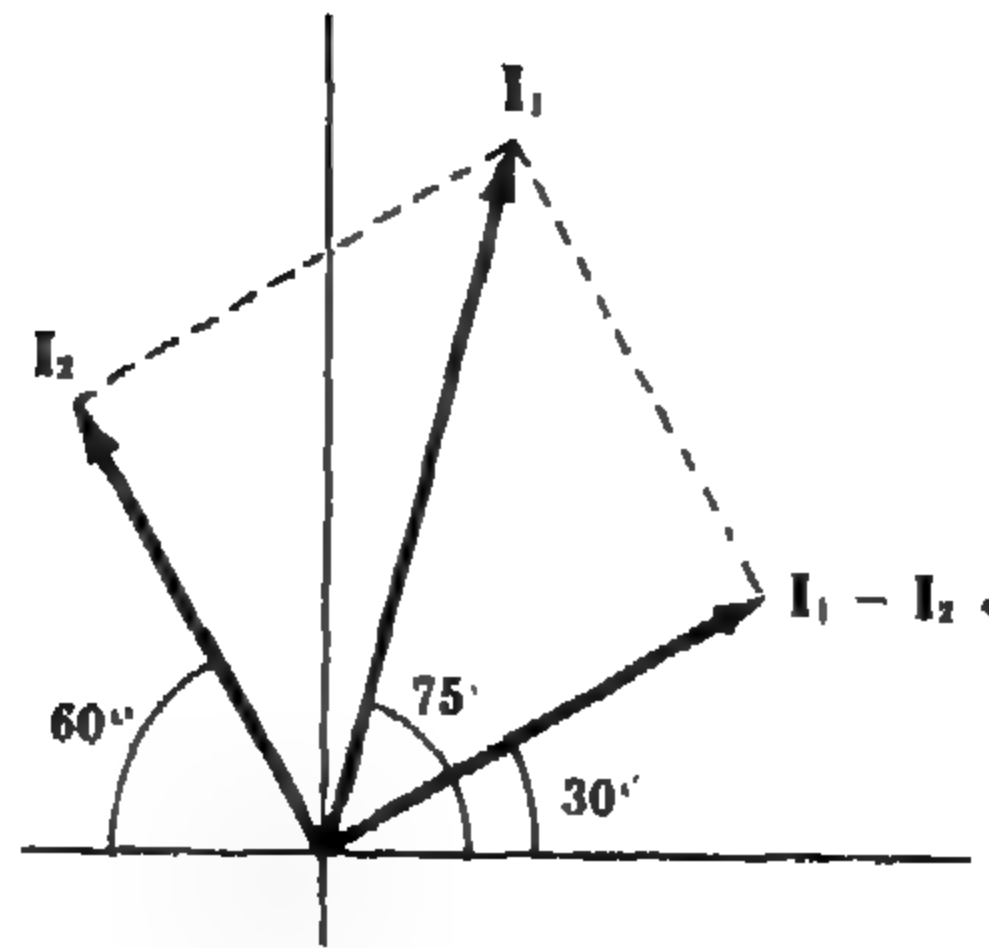
٥-٢٣ باستخدام الترميز الطوري أوجد مجموع التيارين $i_1 = 14.14 \sin(\omega t + 13.2^\circ) \text{ amperes}$ ، $i_2 = 8.95 \sin(\omega t + 121.6^\circ) \text{ amperes}$ أنظر الشكل ٢٣ - ٥ .

$$\begin{aligned} I_1 &= (14.14/\sqrt{2}) \angle 13.2^\circ = 10 \angle 13.2^\circ = 9.73 + j2.28 \text{ A} \\ I_2 &= (8.95/\sqrt{2}) \angle 121.6^\circ = 6.33 \angle 121.6^\circ = 3.32 + j5.39 \text{ A} \\ I_1 + I_2 &= 6.41 + j7.67 = 10 \angle 50^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

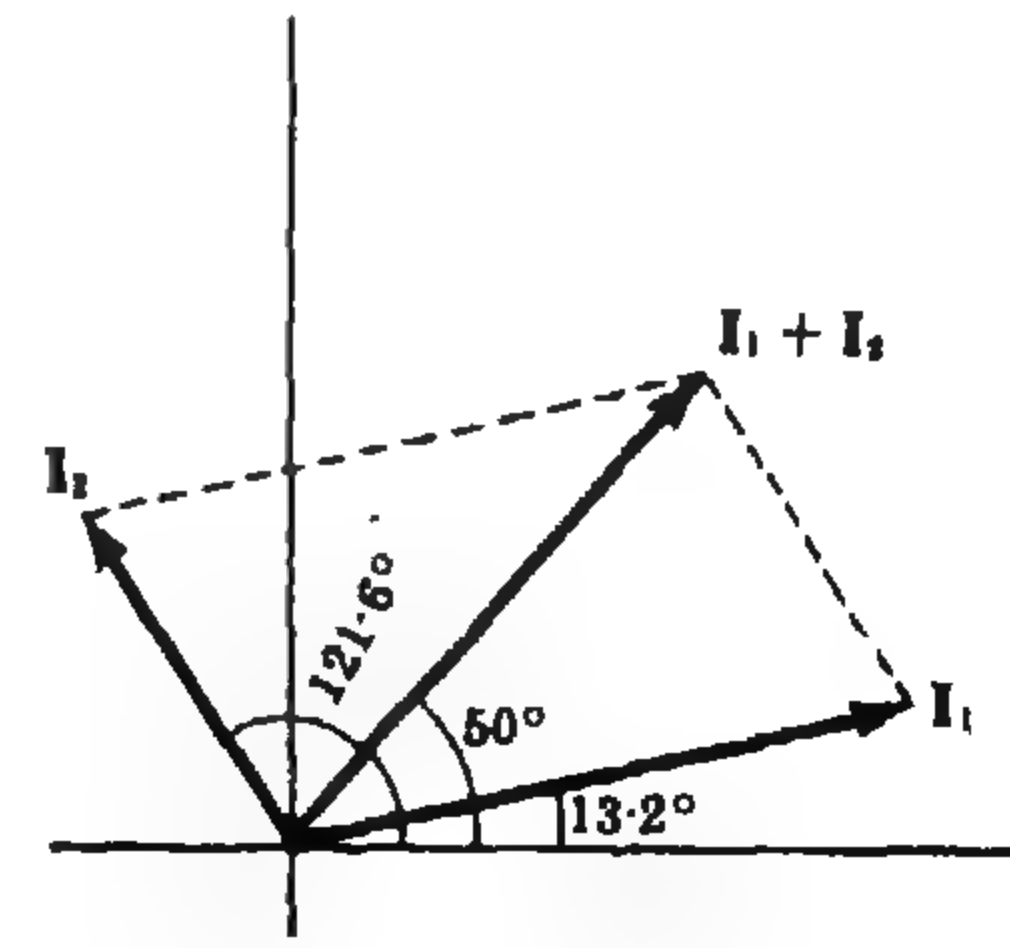
$$i_1 + i_2 = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 50^\circ) \text{ amperes.} \quad \text{إذن}$$



شكل ٢٥ - ٥



شكل ٢٤ - ٥



شكل ٢٣ - ٥

١٤ - ٥ أوجد الفرق $i_1 - i_2$ إذا كان
 $i_1 = 50 \cos(\omega t + 75^\circ)$ amperes و $i_2 = 35.4 \cos(\omega t - 120^\circ)$ amperes . أنظر الشكل ٥ - ٢٤

$$I_1 = (50/\sqrt{2})/75^\circ = 35.4/75^\circ = 9.16 + j34.2 \text{ A}$$

$$I_2 = (35.4/\sqrt{2})/120^\circ = 25/120^\circ = -12.5 + j21.7 \text{ A}$$

$$I_1 - I_2 = 21.7 + j12.5 = 25/30^\circ \text{ A}$$

$$i_1 - i_2 = 25\sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ amperes. إذن}$$

١٥ - ٥ أوجد مجموع التيارات الثلاثة $i_1 = 32.6 \sin(\omega t - 145^\circ)$ amperes, $i_2 = 32.6 \sin(\omega t - 25^\circ)$ amperes و

$$i_3 = 32.6 \sin(\omega t + 95^\circ) \text{ amperes}$$

$$I_1 = (32.6/\sqrt{2})/-145^\circ = 23/-145^\circ = -18.8 - j13.2 \text{ A}$$

$$I_2 = (32.6/\sqrt{2})/-25^\circ = 23/-25^\circ = 20.8 - j9.71 \text{ A}$$

$$I_3 = (32.6/\sqrt{2})/95^\circ = 23/95^\circ = -2 + j25 \text{ A}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 10.09 \text{ A}$$

نلاحظ أنه في حدود الدقة التي تسمح بها المسطرة الحاسبة فإن هذا المجموع يساوي صفراً . والشكل ٥ - ٢٥ يوضح أن الزاوية بين كل تيار والذي يليه 120° . ومن هذا يتضح أنه مع تساوي قيمة كل تيار فإن المجموع يساوي صفراً

١٦ - ٥ أوجد مجموع الجهود $v_1 = 126.5 \sin(\omega t - 63.4^\circ)$ volts و $v_2 = 44.7 \cos(\omega t - 161.5^\circ)$ volts

ثم عبر عن المجموعة كدالة جيبيية واحدة ثم كدالة جيب تمام .

بتحويل v_2 إلى دالة جيبيية ، نجد أن $v_2 = 44.7 \sin(\omega t - 71.5^\circ)$ volts و $v_1 = 126.5 \sin(\omega t - 63.4^\circ)$ volts

$$V_1 = (126.5/\sqrt{2})/63.4^\circ = 89.5/63.4^\circ = 40 + j80 \text{ V}$$

$$V_2 = (44.7/\sqrt{2})/-71.5^\circ = 31.6/-71.5^\circ = 10 - j30 \text{ V}$$

$$V_1 + V_2 = 50 + j50 = 50\sqrt{2}/45^\circ \text{ V}$$

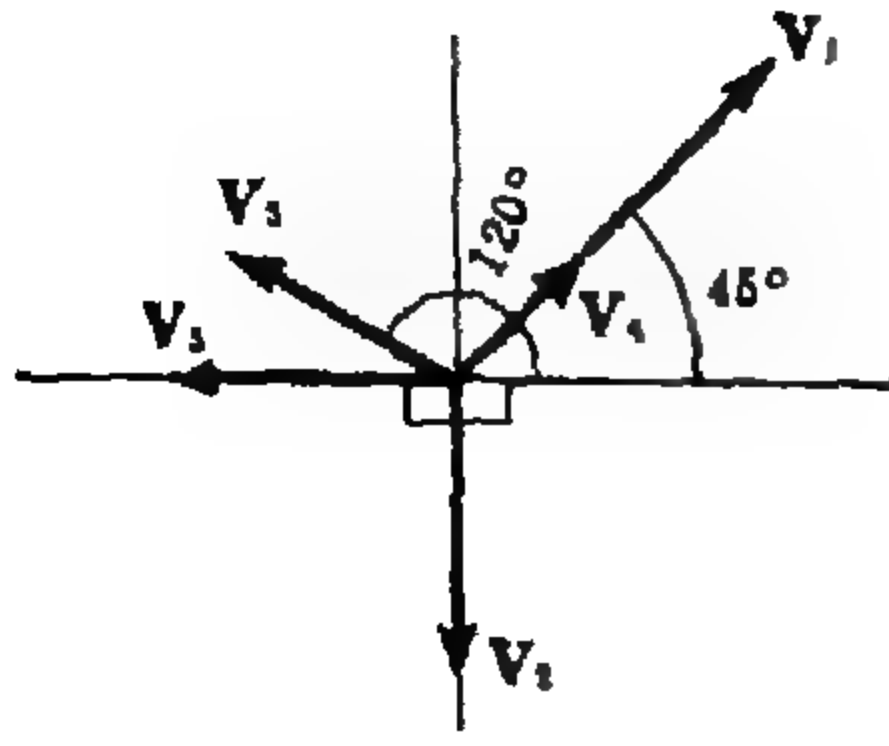
والمجموع هو $v_1 + v_2 = 100 \cos(\omega t - 45^\circ)$ volts

وحيث أن $\sin x = \cos(x - 90^\circ)$ فإن المجموع يساوي أيضاً $v_1 + v_2 = 100 \sin(\omega t - 45^\circ)$ volts

١٧ - ٥ عبر عن كل جهد بما يلي بالترميز الطوري . ثم ارسمها في شكل مطاور

$v_1 = 212 \sin(\omega t + 45^\circ)$ volts, $v_2 = 141.4 \sin(\omega t - 90^\circ)$ volts, $v_3 = 127.3 \cos(\omega t + 30^\circ)$ volts, $v_4 = 85 \cos(\omega t - 45^\circ)$ volts, $v_5 = 141.4 \sin(\omega t + 180^\circ)$ volts.

قبل التعبير عن الجهود بالترميز الطوري لرسمها في شكل مطاور واحد لابد من التعبير عن هذه الجهود بدالة واحدة ، إما جيب أو جيب تمام وبالتحويل v_3 و v_4 إلى دالة جيبية نجد أن



شكل ٥ - ٢٦

اذن $v_3 = 127.3 \sin(\omega t - 120^\circ)$ volts, $v_4 = 85 \sin(\omega t + 45^\circ)$ volts

$$V_1 = (212/\sqrt{2})/45^\circ = 150/45^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = (141.4/\sqrt{2})/-90^\circ = 100/-90^\circ \text{ V}$$

$$V_3 = (127.3/\sqrt{2})/120^\circ = 90/120^\circ \text{ V}$$

$$V_4 = (85/\sqrt{2})/45^\circ = 60/45^\circ \text{ V}$$

$$V_5 = (141.4/\sqrt{2})/180^\circ = 100/180^\circ \text{ V}$$

مسائل اضافية

ارسم الشكل المطاور وبيان المعاوقة وعين ثوابت الدائرة في المسائل من ٥ - ١٨ إلى ٥ - ٢٢ وذلك بفرض أن الدائرة تتكون من عنصرين فقيين متصلين على التوالي .

٥ - ١٨ : $R = 24.6 \Omega, L = 5.43 \text{ mH}$: الجواب $v = 283 \cos(800t + 150^\circ)$ volts, $i = 11.3 \cos(800t + 140^\circ)$ amperes.

٥ - ١٩ : $R = 5.41 \Omega, C = 160 \mu\text{F}$: الجواب $v = 50 \sin(2000t - 25^\circ)$ volts, $i = 8 \sin(2000t + 5^\circ)$ amperes.

٥ - ٢٠ : $R = 0.5 \Omega, C = 26.7 \mu\text{F}$: الجواب $v = 10 \cos(5000t - 160^\circ)$ volts, $i = 1.333 \cos(5000t - 73.82^\circ)$ amperes.

٥ - ٢١ : $R = 7.07 \Omega, L = 7.07 \text{ mH}$: الجواب $v = 80 \sin(1000t + 45^\circ)$ volts, $i = 8 \cos(1000t - 90^\circ)$ amperes.

٥ - ٢٢ : $R = 9 \Omega, C = 41.6 \mu\text{F}$: الجواب $v = 424 \cos(2000t + 30^\circ)$ volts, $i = 28.3 \cos(2000t + 83.2^\circ)$ amperes.

٥ - ٢٣ : دائرة توالى فيها $K = 8 \Omega$ و $C = 30 \mu\text{F}$ احسب الذبذبة التي يكون عندها التيار سابقا للجهود بزاوية 30°
الجواب : $f = 1155 \text{ Hz}$

٥ - ٢٤ : دائرة RL على التوالي كانت $L = 21.2 \text{ mH}$ ، فإذا كانت ذبذبة المصدر 60 Hz والتيار لاحقاً للجهود بزاوية 53.1° فأوجد قيمة R .
الجواب : $R = 6 \Omega$

٥ - ٢٥ : دائرة تتكون من عنصرين متصلين على التوالي فإذا كان الجهد المؤثر هو $V = 240 \angle 0^\circ$ والتيار المار بالدائرة هو $I = 50 \angle 60^\circ \text{ A}$ فعين التيار المطاور الذي ينتج عن نفس الجهد إذا نقصت مقاومة الدائرة بنسبة (أ) 60% ، (ب) 30% ، من قيمتها الأولى .

الجواب : (أ) $54.7 \angle 70.85 \text{ A}$ ، (ب) $57.1 \angle 80.15 \text{ A}$

٢٦-٥ إذا كان التيار والجهد لدائرة توالى تتكون من عنصرين هما $I = 7.5 \angle -90^\circ A$ و $V = 150 \angle -120^\circ V$ ، فأوجد النسبة المئوية للتغير في المقاومة حتى يصبح التيار المطاور الناتج $12A$ وعين الزاوية المصاحبة لذلك التيار
الجواب : نقص بمقدار 56.8% و -66.8°

٢٧-٥ دائرة توالى تتكون من R و C فإذا كانت $R = 10 \Omega$ وكانت معاوقة الدائرة لها زاوية -45° عند ذبذبة $f_1 = 500Hz$. فأوجد الذبذبة التي تصبح عندها القيمة المطلقة للمعاوقة (أ) ضعف قيمتها عند f_1 ،
(ب) نصف قيمتها عند f_1 .

الجواب : (أ) $189 Hz$ ، (ب) لا يمكن حيث أن أصغر قيمة للمعاوقة Z هي $10 + j0 \Omega$

٢٨-٥ دائرة توالى تتكون من R و L فإذا كانت $R = 10 \Omega$ وكانت معاوقة الدائرة لها زاوية 30° عند ذبذبة $f_1 = 100 Hz$ فأوجد الذبذبة التي تصبح عندها القيمة المطلقة للمعاوقة تساوى ضعف قيمتها عند f_1 .
الجواب : $360 Hz$

٢٩-٥ في دائرة توالى تتكون من عنصرين كانت $R = 5 \Omega$ وكان التيار لاحقاً للجهد المؤثر بزاوية 75° عند ذبذبة $60 Hz$ (أ) عين العنصر الثاني في الدائرة ، (ب) أوجد زاوية الطور الناتجة عن التوافق الثالث $f = 180 Hz$
الجواب : (أ) $0.0496 H$ ، (ب) $\theta = 84.88^\circ$.

٣٠-٥ دائرة توالى تتكون من $R = 5 \Omega$ و $C = 50 \mu F$ فإذا أثر عليها مصدران للجهد كل على حده وكان $v_1 = 170 \cos(1000t + 20^\circ) V$ و $v_2 = 170 \cos(2000t + 20^\circ) V$ فأوجد التيار الناتج عن كل مصدر .
الجواب : $i_1 = 8.25 \cos(1000t + 95.85^\circ) \text{ amperes}$ ، $i_2 = 15.2 \cos(2000t + 83.4^\circ) \text{ amperes}$

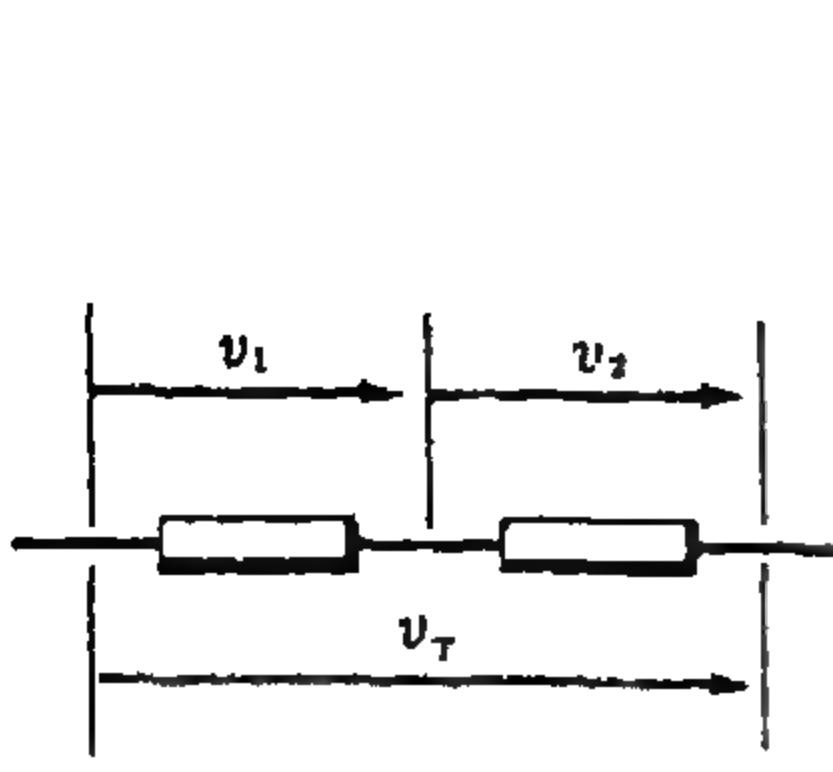
٣١-٥ في دائرة توالى كان الجهد والتيار عندما كانت $\omega = 2000 \text{ rad/s}$ هما $V = 150 \angle 45^\circ V$ ، $I = 4.74 \angle 116.6^\circ A$. فإذا غيرنا مصدر الجهد بمصدر آخر وكانت الزاوية بين التيار والجهد 30° فأوجد ω للمصدر الثاني .
الجواب : 385 rad/s

٣٢-٥ بالإشارة إلى المسألة ٣١-٥ ، أوجد التغير في ذبذبة المصدر الذي ينتج عند تيار مطاور مقداره $6A$. وإذا كان التغير في الذبذبة غير محدود ، فأوجد أكبر قيمة ممكنة للتيار المطاور .
الجواب : نقص بمقدار 23.6% في f ، $15.0 A$

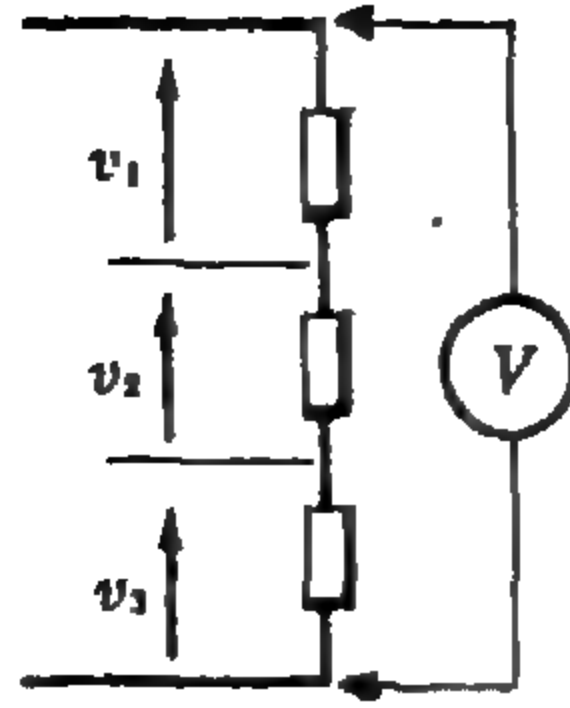
٣٣-٥ أوجد مجموع الجهدين $v_1 = 50 \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ volts}$ و $v_2 = 50 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ volts}$ الموضحين في الشكل ٥ - ٢٧ .
ما هو الجهد الذي يقرأه فولطمتر متصل بالنهايتين الخارجيتين ؟
الجواب : $86.6 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ volts}$ ، $61.2 V$

٣٤-٥ أوجد مجموع الجهدين $v_1 = 35 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ volts}$ و $v_2 = 100 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ volts}$ الموضحين في الشكل ٥ - ٢٨ . افرض الاتجاه الموجب للمجموع متفقاً مع v_1 : الجواب : $97 \sin(\omega t - 129.6^\circ) \text{ volts}$

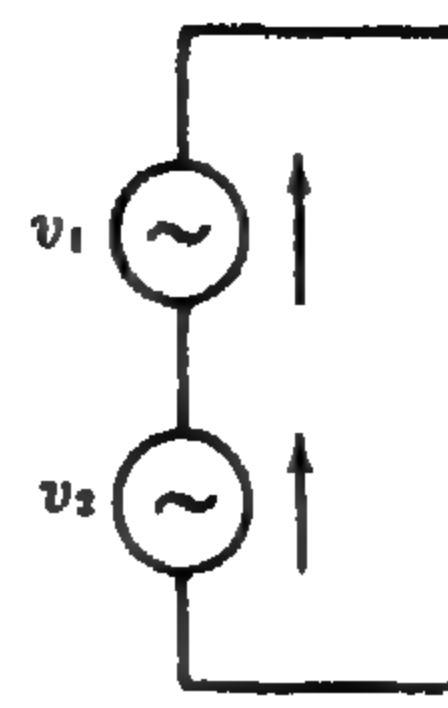
٣٥-٥ بالإشارة إلى المسألة ٣٤ - ٥ . كرر نفس الشيء مع عكس اتجاه v_2
الجواب : $114 \sin(\omega t - 12.75^\circ) \text{ volts}$



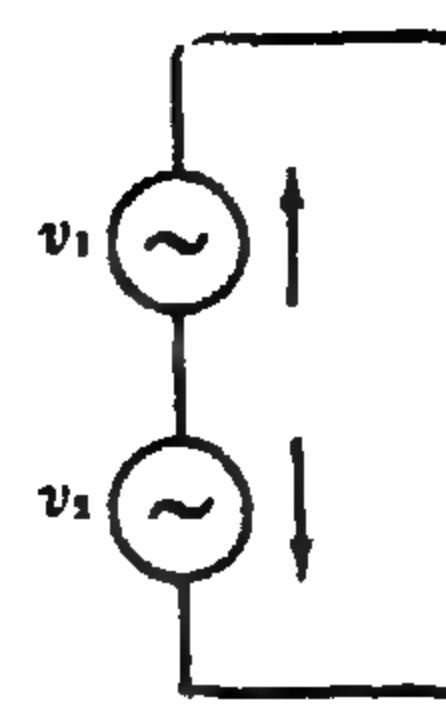
شكل ٣٠ - ٥



شكل ٢٩ - ٥



شكل ٢٨ - ٥



شكل ٢٧ - ٥

٣٦-٥ أوجد قراءة الفولطمتر المتصل عبر الثلاث معاوقات الموضحة في الشكل ٢٩-٥ إذا كانت الجهود عبر المعاوقات هي

$$v_1 = 70.7 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ volts}, v_2 = 28.3 \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ volts}, v_3 = 14.14 \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ volts}$$

الجواب : $58.3V$

٣٧-٥ في الشكل ٣٠-٥ الموضح أعلاه عين v_T إذا كانت الجهود الأخرى هي $v_2 = 31.6 \cos(\omega t + 73.4^\circ) \text{ volts}$

$$v_1 = 42.4 \cos(\omega t + 80^\circ) \text{ volts} \quad \text{و} \quad v_T = 20 \cos(\omega t + 35^\circ) \text{ volts.} \quad \text{الجواب :}$$

٣٨-٥ في المسألة ٣٧-٥ أوجد قراءة الفولطمتر المتصل عبر كل معاوقة ثم المتصل عبر المعاقتين . كيف تفسر هذه النتيجة ؟

$$\text{الجواب : } V_1 = 30 \text{ V}, V_2 = 22.4 \text{ V}, V_T = 14.14 \text{ V}$$

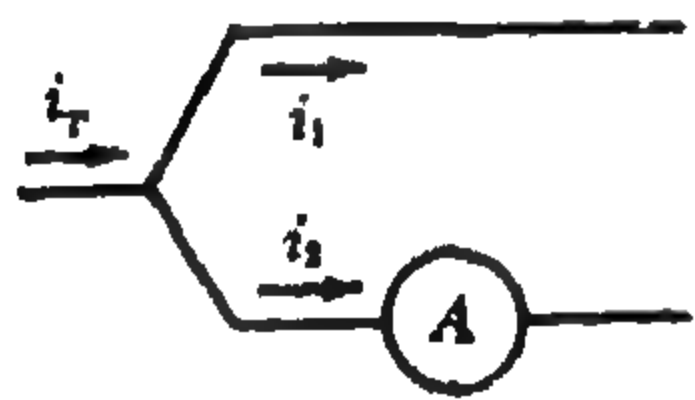
٣٩-٥ أوجد قراءة الأميتر الموضح في الشكل ٣١-٥ إذا كان التياران هما $i_1 = 14.14 \sin(\omega t + 20^\circ) \text{ amperes}$

$$i_2 = 7.07 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ amperes.} \quad \text{الجواب : } 11.9 \text{ A}$$

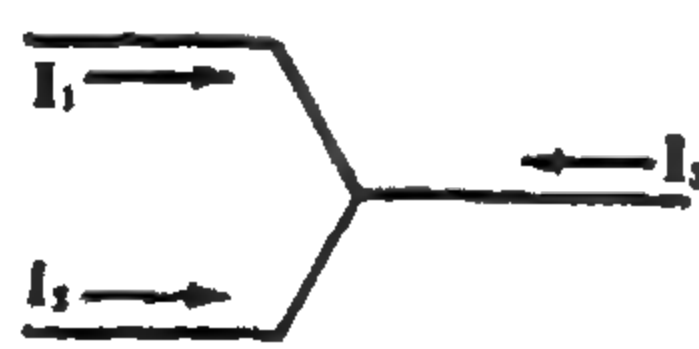
٤٠-٥ في الشكل ٣٢-٥ ، عين i_T إذا كانت التيارات الثلاثة هي

$$i_1 = 14.14 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ amperes}, i_2 = 14.14 \sin(\omega t + 75^\circ) \text{ amperes}, i_3 = 14.14 \sin(\omega t + 195^\circ) \text{ amperes.}$$

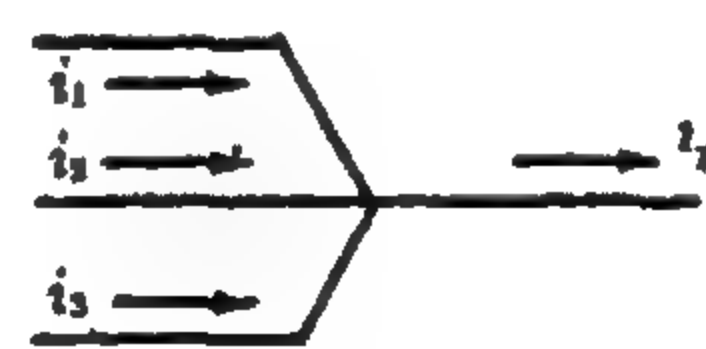
الجواب : $i_T = 0$



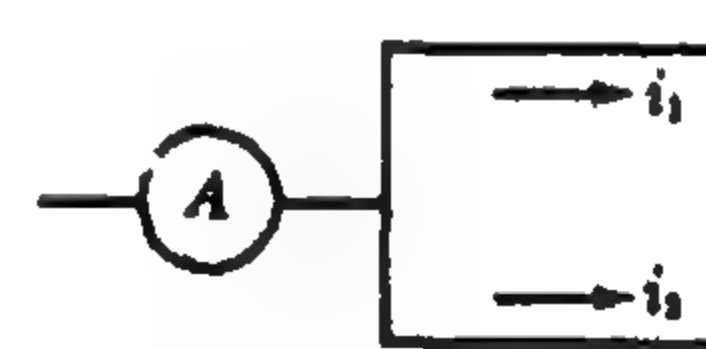
شكل ٣٤ - ٥



شكل ٣٣ - ٥



شكل ٣٢ - ٥



شكل ٣١ - ٥

٤١-٥ أوجد التيار المطاور I_3 بالاتجاه الموضح في الشكل ٣٣-٥ إذا كان $I_1 = 25 \angle 70^\circ \text{ A}$ و $I_2 = 25 \angle -170^\circ \text{ A}$

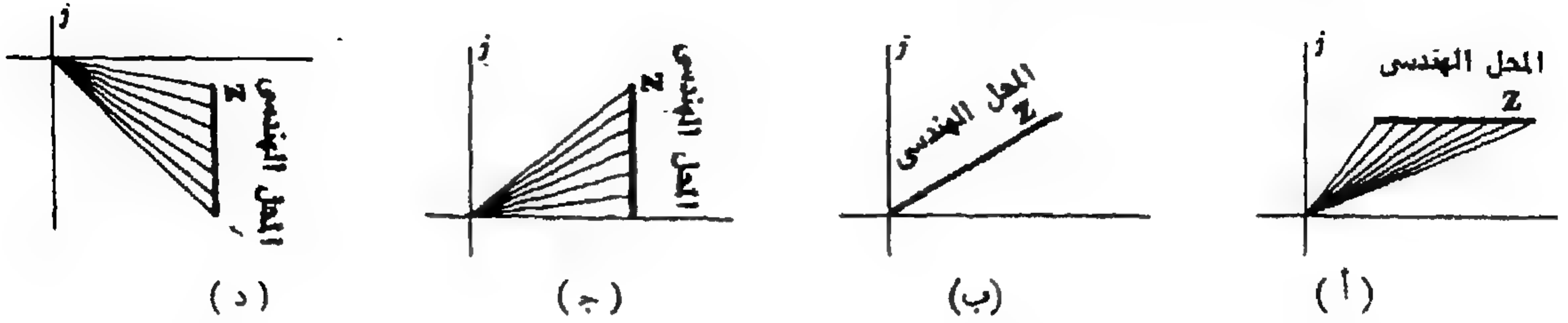
$$\text{الجواب : } I_3 = 25 \angle -50^\circ \text{ A}$$

٤٢-٥ في الشكل ٣٤-٥ أوجد التيار i_2 وكذلك قراءة الأميتر إذا كانت التيارات الأخرى هي

$$i_1 = 3.54 \sin(\omega t + 20^\circ) \text{ amperes.} \quad \text{و} \quad i_T = 13.2 \sin(\omega t + 31^\circ) \text{ amperes}$$

$$\text{الجواب : } i_2 = 11.3 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ amperes, } 8 \text{ A}$$

٥-٣ عندما تكون الذبذبة وعناصر الدائرة ثابتة فإن المعاوقة توضح بنقطة في الرسم البياني للمعاوقة ولكن إذا تغير عنصر أو تغيرت الذبذبة فإنه ينتج محل هندسي للمعاوقة بدلا من تمثيلها بنقطة . ناقش التغير الذي يمكن أن ينتج عنه المحل الهندسي للمعاوقة الموضح في الحالات التالية .



شكل ٥ - ٣٥

الفصل السادس

الدوائر المتصلة على التوالي والتوازي

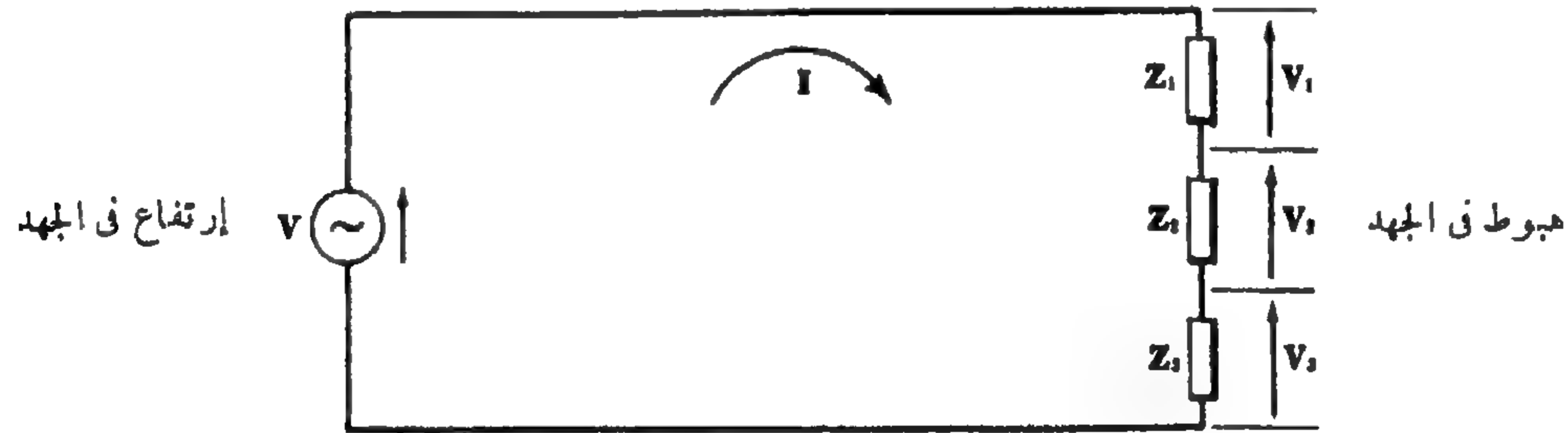
مقدمة :

تحتوى الدائرة الكهربائية عموماً على أجزاء متصلة على التوالي وأخرى متصلة على التوازي معاً . وسوف نعالج في هذا الفصل دوائر التوالي والتوازي كلا على حدة ، حتى نبين الطرق المختلفة لتحليل هذه الدوائر . وستحتوى المسائل التى فى هذا الفصل وبعض الفصول التالية على دوائر تتكون من مجموعة على التوالي والتوازي معاً .

دوائر متصلة على التوالي :

يوضح الشكل ٦ - ١ دائرة توالى تتكون من مصدر جهد واحد وثلاثة معاوقات . ومصدر الجهد هنا ثابت ويمثل ارتفاعاً فى الجهد . ونتيجة لمرور التيار المطاوع I فإنه ينشأ جهد عبر كل معاوقة يمر فيها التيار . وهذه الجهود هي هبوط فى الجهود ، وينص قانون كيرشوف للجهد على أنه فى أى مسار مغلق يكون مجموع الارتفاع فى الجهود يساوى مجموع الهبوط فى الجهود . وبهذا القانون يمكننا حل مسائل دوائر التوالي .

إذن :



شكل ٦ - ١ دائرة توالى

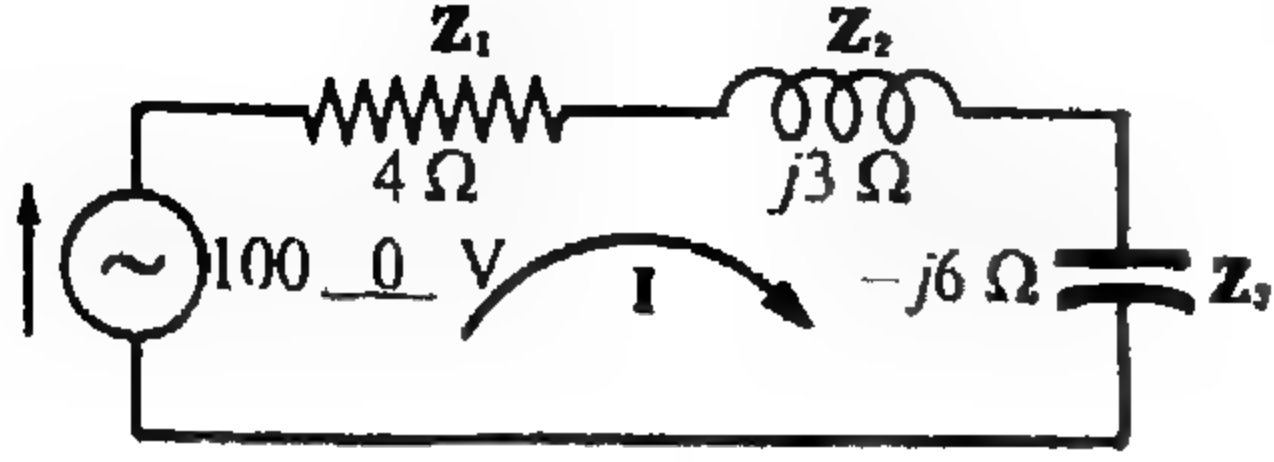
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = IZ_1 + IZ_2 + IZ_3 = I(Z_1 + Z_2 + Z_3) = IZ_{eq}$$

$$I = V/Z_{eq} \quad \text{و} \quad Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 \quad \text{ومنها نجد أن}$$

ويعطى الهبوط فى الجهد على أية معاوقة بحاصل ضرب التيار المطاوع I فى المعاوقة المركبة Z . وعلى ذلك فى الدائرة الموضحة فى الشكل ٦ - ١ نجد أن $V_1 = IZ_1$ ، $V_2 = IZ_2$ ، و $V_3 = IZ_3$. ويوضح السهم اتجاه اسناد لهذا الجهد والنقطة التى يدخل منها التيار المطاوع I .

المعاوقة المكافئة Z_{eq} لأي عدد من المعاوقات متصلة على التوالي يساوى مجموع هذه المعاوقات كل على حدة ، أى أن $Z_{eq} = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots)$. وهذه المعاوقات هى أعداد مركبة ، ولذلك فإن المجموع المشار إليه يمكن إجراؤه وذلك بالتعبير عن كل معاوقة بصيغة الاحداثيات المتعامدة .

مثال ١ :



شكل ٦ - ٢

في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٦ - ٢ أوجد I و Z_{eq} . بين أن مجموع الهبوط في الجهد يساوى الجهد المطاور المؤثر

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 4 + j3 - j6 = 4 - j3 = 5 \angle -36.9^\circ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{5 \angle -36.9^\circ} = 20 \angle 36.9^\circ \text{ A}$$

و

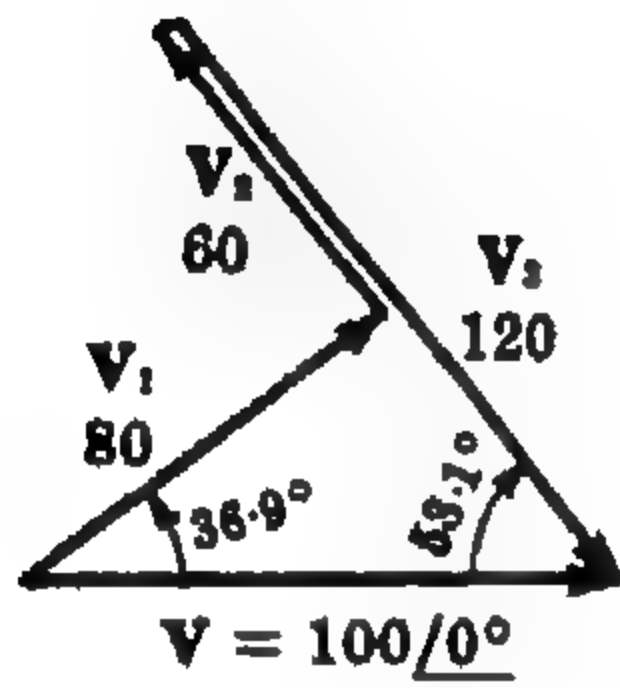
$$V_1 = IZ_1 = 20 \angle 36.9^\circ (4) = 80 \angle 36.9^\circ \text{ V}, V_2 = 60 \angle 126.9^\circ \text{ V}, V_3 = 120 \angle -53.1^\circ \text{ V}$$

إذن

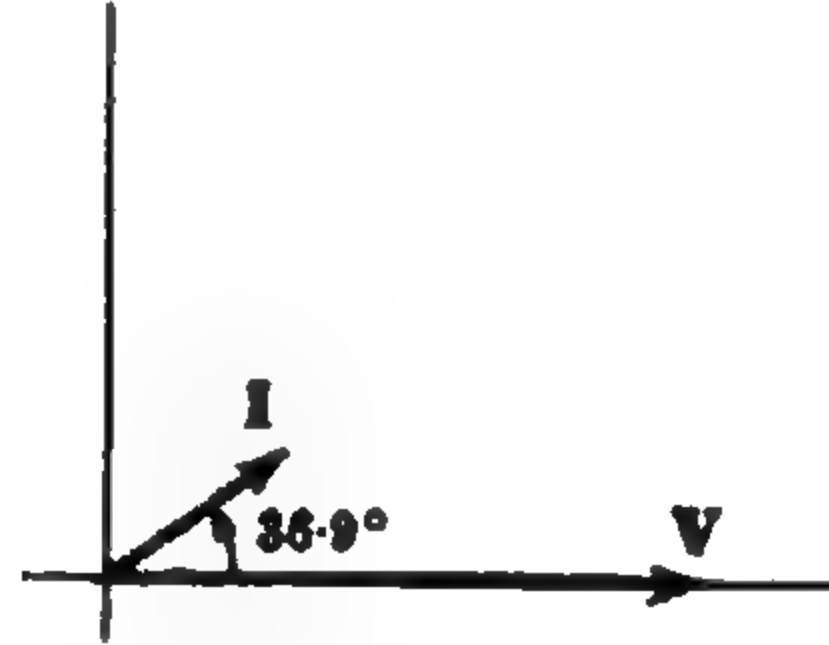
$$V_1 + V_2 + V_3 = (64 + j48) + (-36 + j48) + (72 - j96) = 100 + j0 = V$$

و

كما هو موضح بيانياً في شكل الجهد المطاور ، شكل ٦ - ٣ (ج) .



(ج) بيان الجهد المطاور



(ب) بيان VI المطاور

شكل ٦ - ٣



(أ) بيان المعاوقة

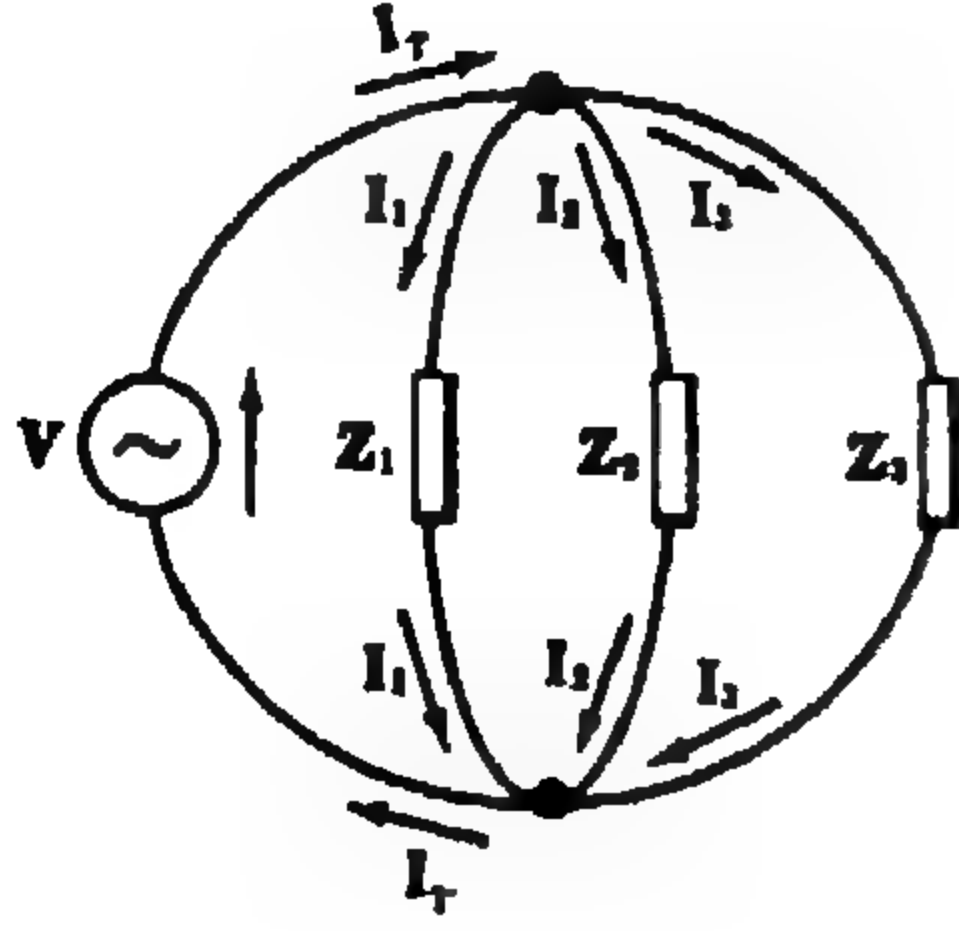
المعاوقة المكافئة هى معاوقة سعوية ، ولهذا فإن التيار الناتج I يكون سابقاً للجهد V بالزاوية الموجودة في المعاوقة وهى 36.9° ، كما هو موضح في الشكل ٦ - ٣ (ب) . لاحظ أن الهبوط في الجهد V_1 على المقاومة النقية هو في اتجاه التيار ، وأن التيار I لاحق للجهد V_2 بزاوية 90° ، وسابق للجهد V_3 بزاوية 90° .

وإذا وصل فولتميتر عبر المعاوقات Z_1 و Z_2 و Z_3 فإنه يقرأ 80 V و 60 V و 120 V على الترتيب . من هذا يبدو أن الجهد الكلى هو 260 V ، ولكن الفولتميتر يقرأ 100 V عند توصيله عبر المعاوقات الثلاث ، وهنا يجب أن نذكر أنه عند تحليل الدوائر الكهربائية في الحالة الجيبية المستقرة فإن جميع الجهود والتيارات تكون عبارة عن كميات مطاورة ولذلك يجب جمعها جمعاً اتجاهياً .

دوائر متصلة على التوازي :

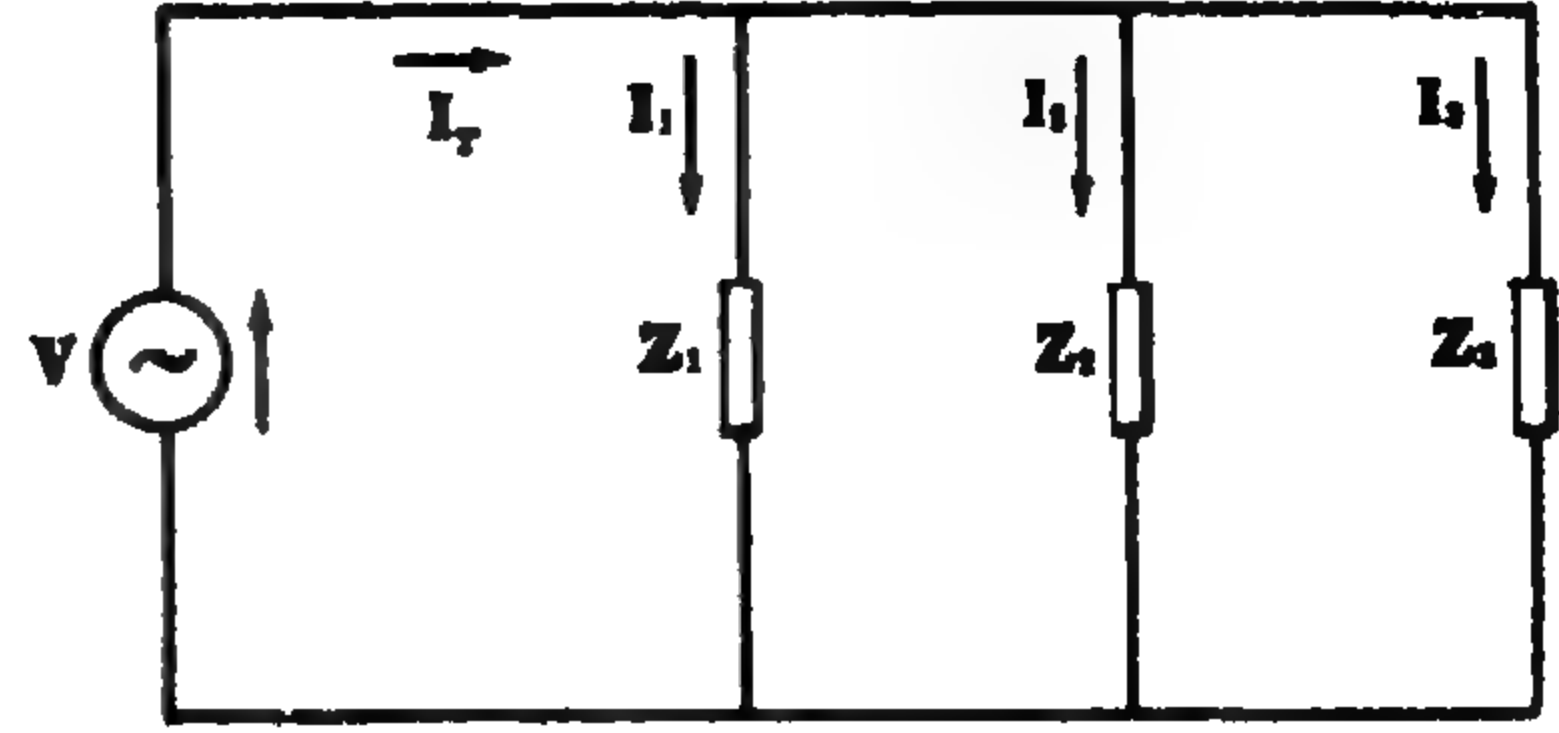
يوضح الشكل ٦ - ٤ (أ) ثلاثة معاوقات متصلة على التوازي ويؤثر عليهم مصدر للجهد . وقد أعيد رسم الدائرة في الشكل ٦ - ٤ (ب) لتوضيح حقيقة أن المصدر والمعاوقات الثلاثة لها نقطتا اتصال مشتركتان . وقانون كيرشوف للتيار يطبق عند

إحدى هاتين النقطتين (وربما عند كليهما) ، أى أن مجموع التيارات الداخلة عند نقطة ما يساوى مجموع التيارات الخارجة من نفس النقطة .



(ب)

دائرة توازي



(أ)

شكل ٦ - ٤

ويظهر مصدر الجهد الثابت مباشرة عبر كل فرع من أفرع المعاوقات . وعلى ذلك فإن تيارات الأفرع يمكن حسابها كل على حدة .

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 = V/Z_1 + V/Z_2 + V/Z_3 = V(1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3) = V/Z_{eq}$$

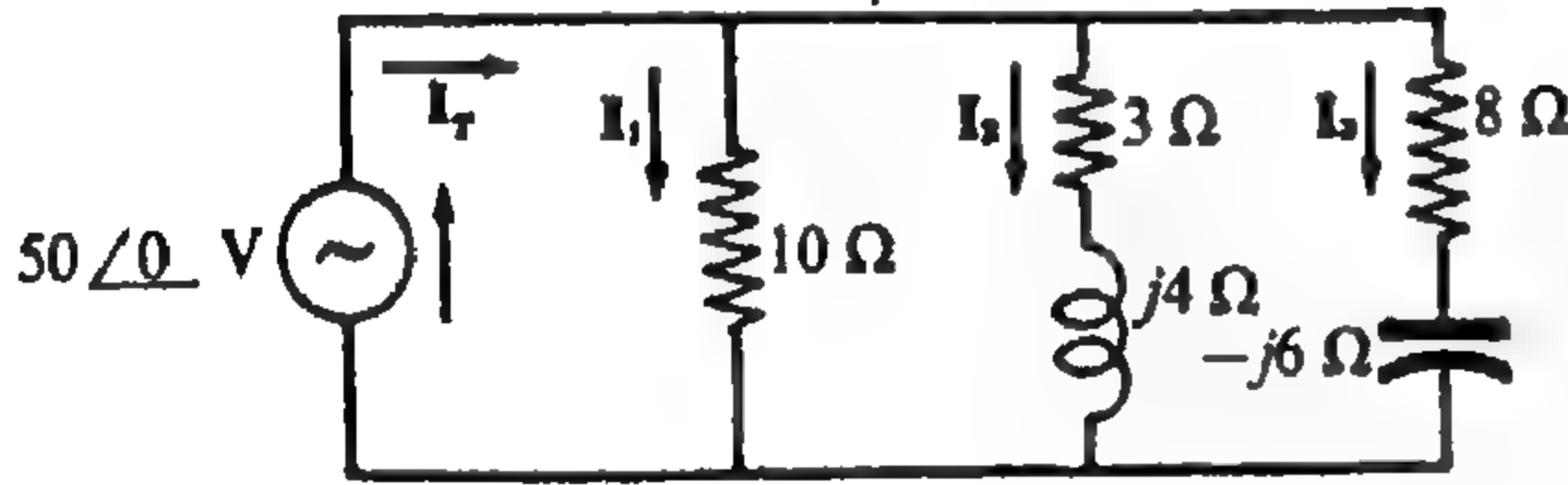
$$I_T = V/Z_{eq} \quad , \quad 1/Z_{eq} = (1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3) \quad \text{إذن}$$

وعلى ذلك فإن المعاوقة المكافئة لأى عدد من المعاوقات المتصلة على التوازي تعطى بالمعادلة

$$1/Z_{eq} = 1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 + \dots$$

مثال ٢ :

أوجد التيار الكلى والمعاوقة المكافئة لدائرة التوازي الموضحة في الشكل ٦ - ٥ . ثم ارسم الشكل البياني المطاور

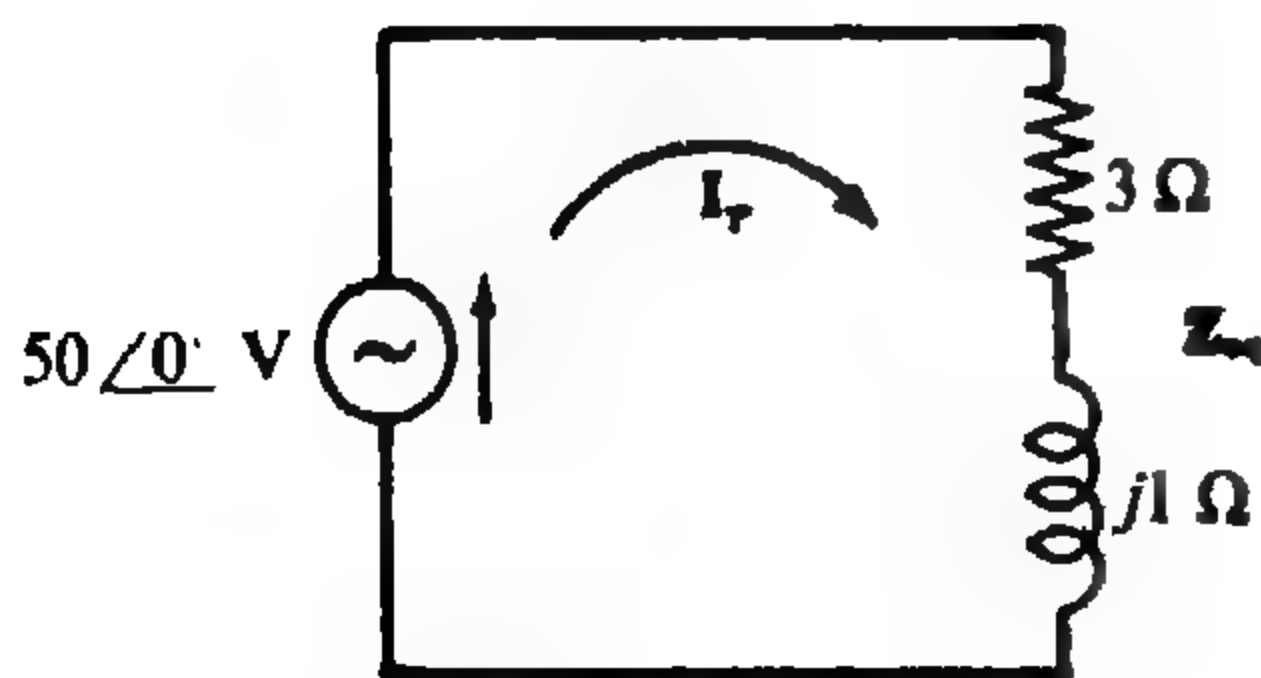


شكل ٦ - ٥

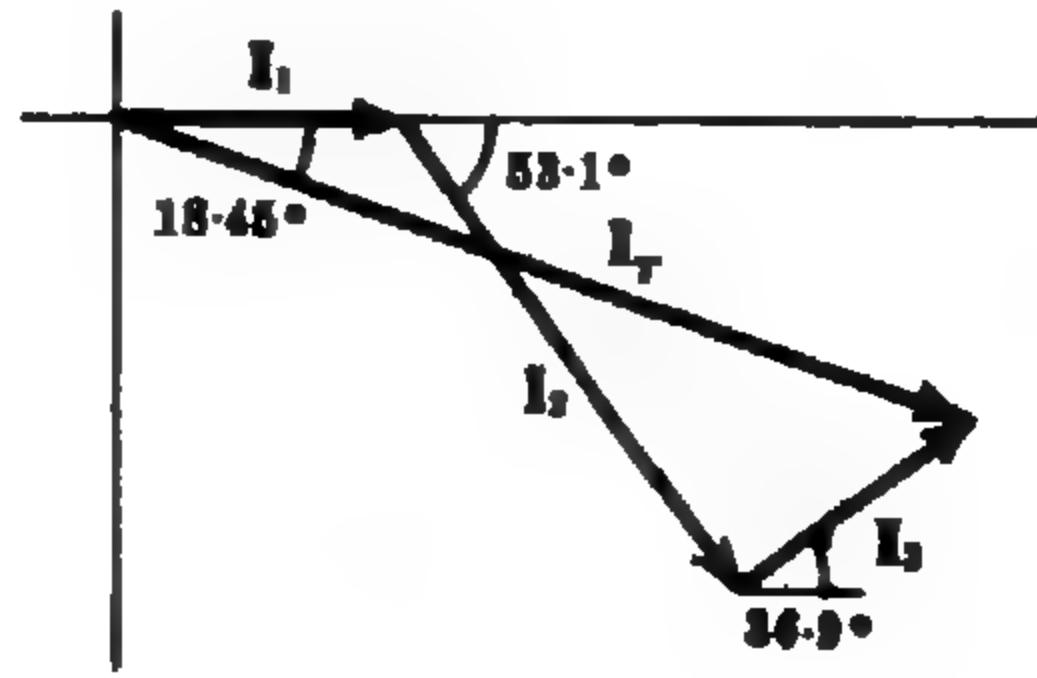
$$\begin{aligned} I_T &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= \frac{50\angle 0^\circ}{10} + \frac{50\angle 0^\circ}{5\angle 53.1^\circ} + \frac{50\angle 0^\circ}{10\angle -36.9^\circ} \\ &= 15 - j5 = 15.8\angle -18.45^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$Z_{eq} = V/I_T = (50\angle 0^\circ)/(15.8\angle -18.45^\circ) = 3.16\angle 18.45^\circ = 3 + j1 \Omega \quad \text{إذن}$$

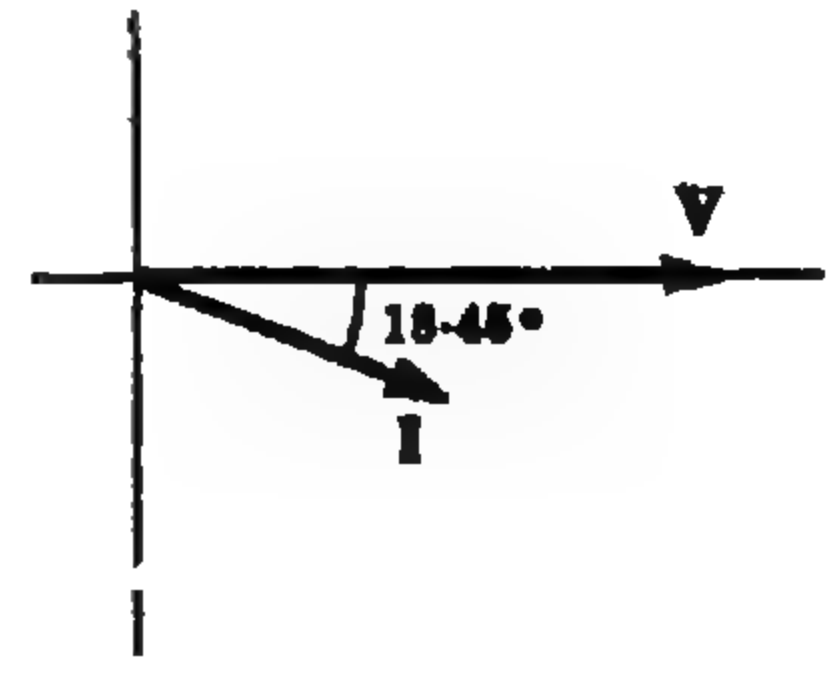
$$I_1 = 50\angle 0^\circ/10 = 5\angle 0^\circ \text{ A}, \quad I_2 = 10\angle -53.1^\circ \text{ A}, \quad I_3 = 5\angle 36.9^\circ \text{ A} \quad \text{و}$$



(ج) الدائرة المكافئة



(ب) مجموع التيارات المطاورة

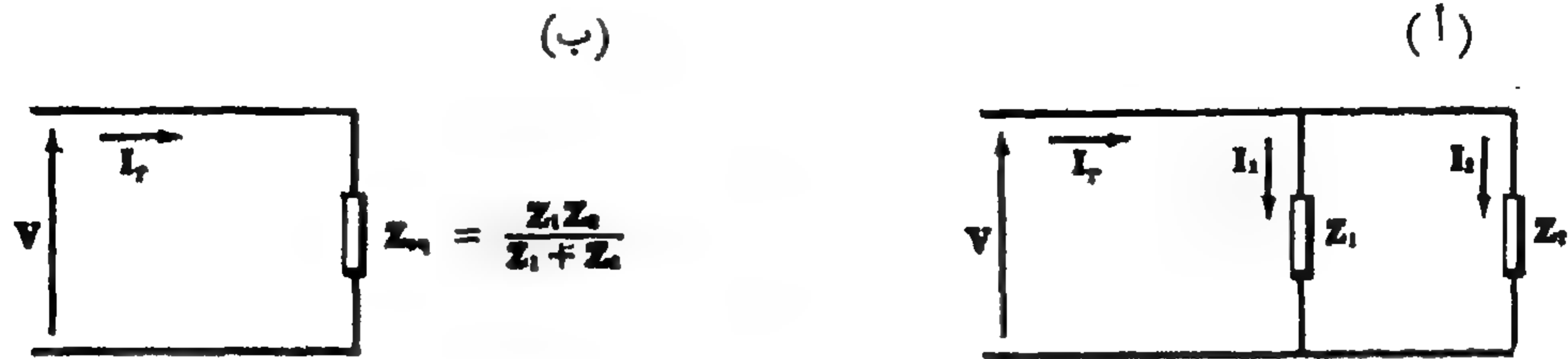


(أ) بيان VI المطاور

شكل ٦ - ٦

دائرة بفرعين متصلين على التوازي :

عادة ما نجد في الدائرة الكهربائية الحالة التي يكون فيها معاومتان متصلتان على التوازي ولذلك فإن هذه الحالة تستحق مزيداً من الدراسة . والشكل ٦ - ٧ (أ) يوضح معاومتين Z_1 و Z_2 متصلتين على التوازي ويؤثر عليهما جهد V . وعلى ذلك فإن المعاوقة المكافئة تعطى بالعلاقة $1/Z_{eq} = 1/Z_1 + 1/Z_2$ أو $Z_{eq} = Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)$.



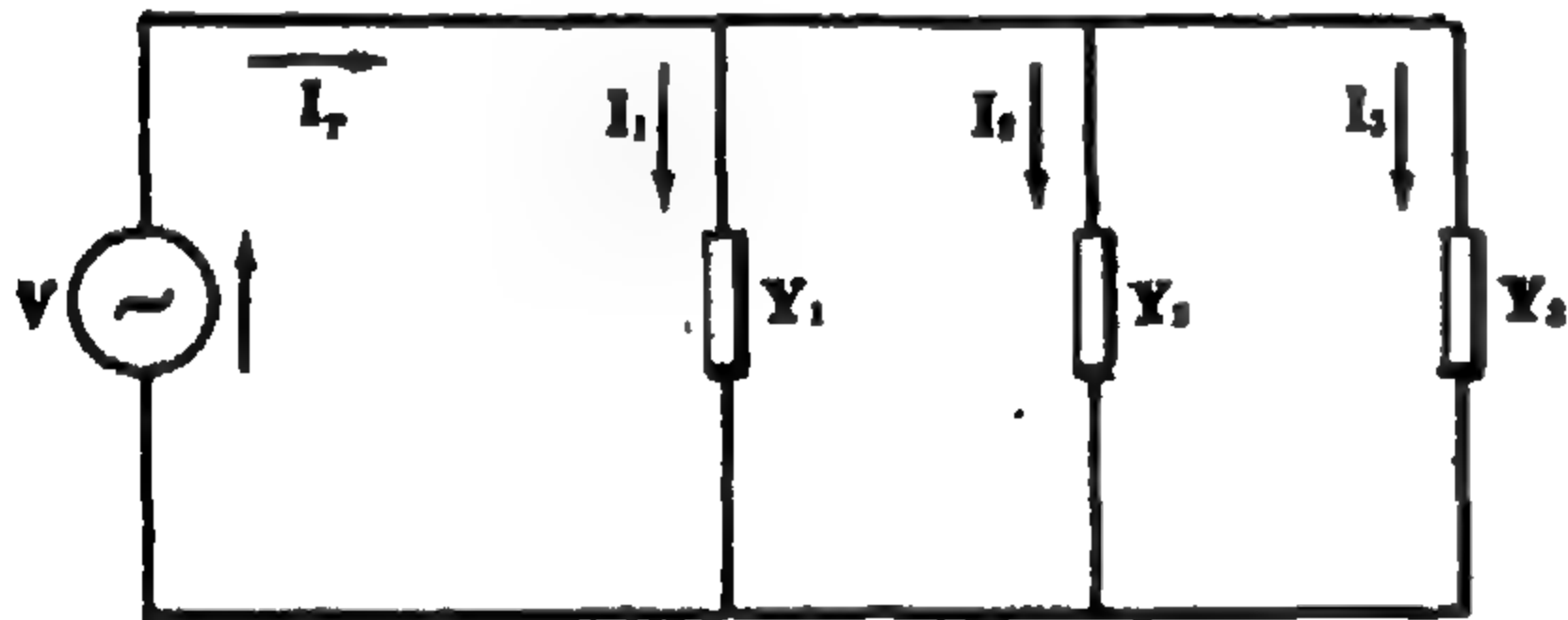
شكل ٦ - ٧ دائرة من فرعين متصلين على التوازي

بالتعويض عن $V = I_T Z_{eq} = I_T \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)$ في $V = I_1 Z_1$ و $V = I_2 Z_2$. وبالحل بالنسبة لتياري الفرعين نجد أن

$$I_2 = I_T \left(\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) \quad , \quad I_1 = I_T \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)$$

مسامحة الدائرة :

يسمى معكوس المعاوقة المركبة Z بالمساحة المركبة $Y = 1/Z$. وبما أن $Z = V/I$ فإن $Y = I/V$. ويعبر عن Y بالسيمنز (S) . وفرض المساحة مناسب جداً للدوائر المتصلة على التوازي كما هو موضح في الشكل ٦ - ٨ .



شكل ٦ - ٨

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 = VY_1 + VY_2 + VY_3 \\ = V(Y_1 + Y_2 + Y_3) = VY_{eq}$$

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 \quad ,$$

وعلى ذلك فإن المساحة المكافئة لأي عدد من المسامحات متصلة على التوازي يساوي مجموع المسامحات كلا على حدة .

وصيغة المعاوقة في الأحاديث المتعامدة هي $Z = R \pm jX$. والإشارة الموجبة تعني ممانعة حثية $X_L = \omega L$ ، أما الإشارة السالبة فتعني ممانعة سعوية $X_C = 1/\omega C$.

وبالمثل فإن $Y = G \pm jB$ ، حيث G تسمى الموصلية و B تسمى التقبيلية والإشارة الموجبة تعني تقبيلية سعوية B_C ، أما الإشارة السالبة فتعني تقبيلية حثية B_L .

اعتبر جهداً مطاوراً عام V ينتج عنه تيار I . والآن يمكن لتيار I أن يكون سابقاً أو لاحقاً للجهد V أو في اتجاهه ، ولكن لا توجد حالة تكون فيها الزاوية بينهما أكبر من 90° ، وعلى ذلك فهناك ثلاث حالات :

الحالة الأولى : التيار والجهد المطايرين في اتجاه واحد كما في الشكل ٩ - ٦

مساحة

$$Y = I/\phi / V/\phi = Y/0^\circ = G$$



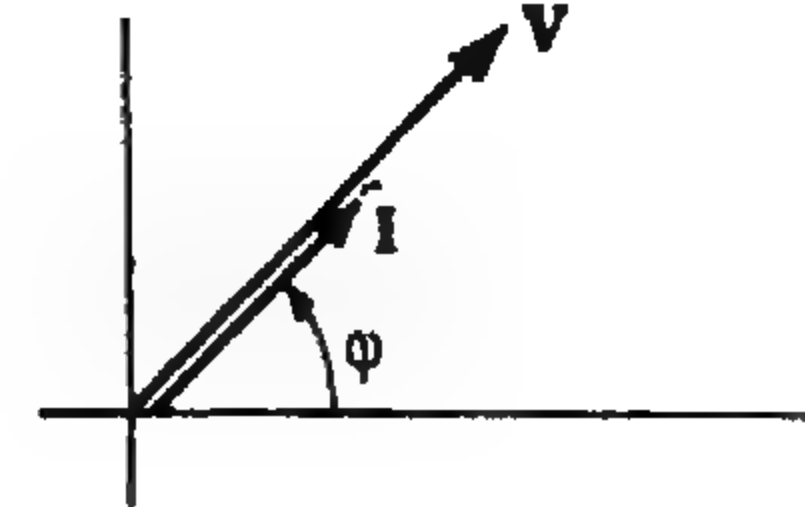
على أساس المساحة فالدائرة تتكون من مواصلة نقية .

معاوقة

$$Z = V/\phi / I/\phi = Z/0^\circ = R$$



على أساس المعاوقة فالدائرة تتكون من مقاومة نقية .



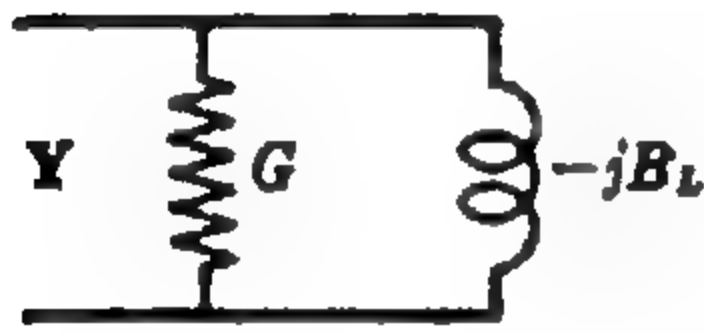
$$V = V/\phi, I = I/\phi$$

شكل ٩ - ٦

الحالة الثانية : التيار المطاور لاحق للجهد بزاوية θ كما في الشكل ١٠ - ٦ .

مساحة

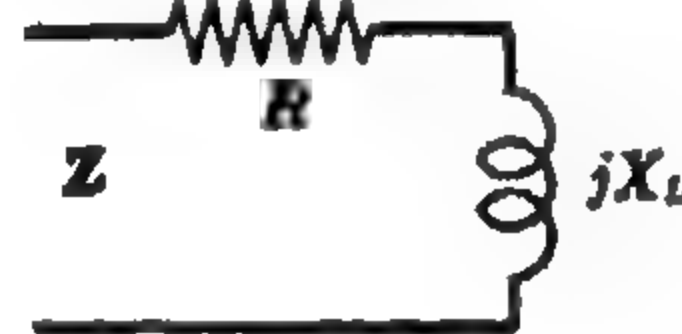
$$Y = I/\phi - \theta / V/\phi = Y/-\theta = G - jB_L$$



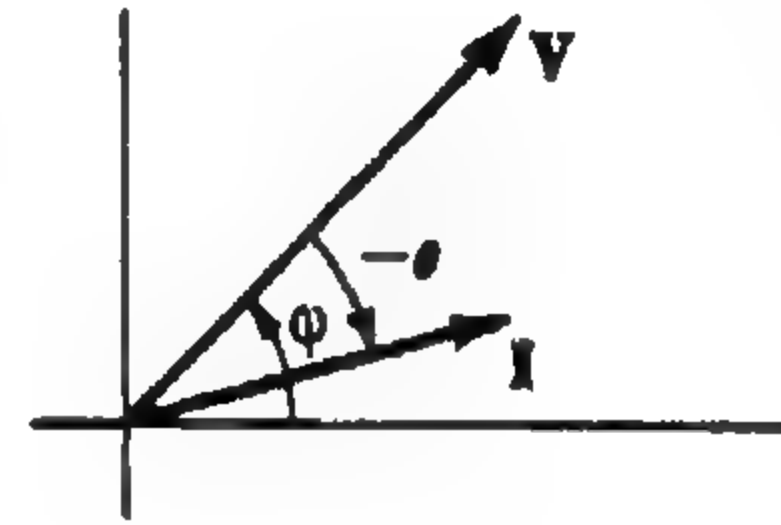
على أساس المساحة فالدائرة تتكون من مواصلة وتقبلية حثية على التوازي

معاوقة

$$Z = V/\phi / I/\phi - \theta = Z/\theta = R + jX_L$$



على أساس المعاوقة فالدائرة تتكون من مقاومة وملف على التوالي



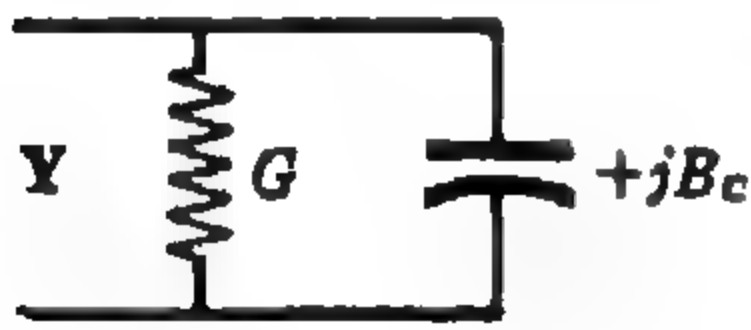
$$V = V/\phi, I = I/\phi - \theta$$

شكل ١٠ - ٦

الحالة الثالثة : التيار المطاور سابق للجهد بزاوية θ كما في الشكل ١١ - ٦ .

مساحة

$$Y = I/\phi + \theta / V/\phi = Y/\theta = G + jB_C$$



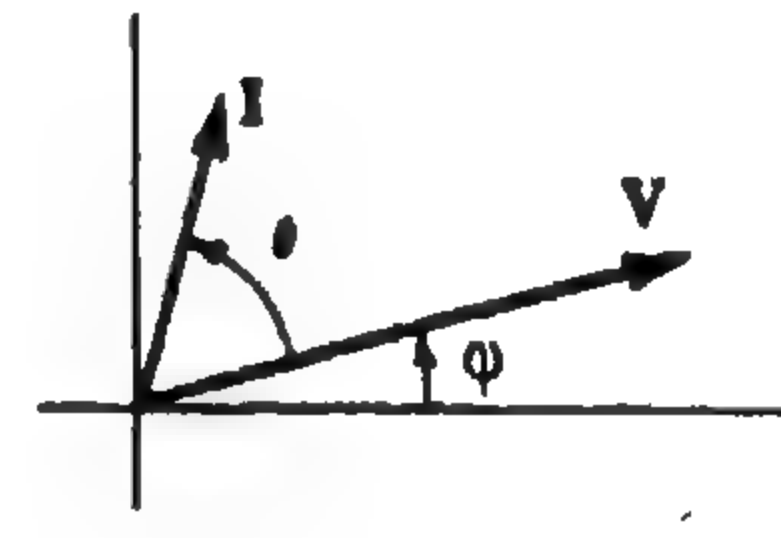
على أساس المساحة فالدائرة تتكون من مواصلة وتقبلية سمية على التوازي

معاوقة

$$Z = V/\phi / I/\phi + \theta = Z/-\theta = R - jX_C$$



على أساس المعاوقة فالدائرة تتكون من مقاومة ومكثف على التوالي



$$V = V/\phi, I = I/\phi + \theta$$

شكل ١١ - ٦

تحويل ZY

حيث أن $Y = 1/Z$ ، فإنه باستخدام الصيغة القطبية نجد من السهل تحويل Z إلى Y وبالعكس . ولكن في بعض الأحيان نجد من الضرورة استخدام العلاقات بين المركبات بصيغة الاحداثيات القطبية كما يلي :

$$Y = 1/Z$$

$$Z = 1/Y$$

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

$$R + jX = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}$$

$$\therefore G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

$$\therefore R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

مثال ٣ :

إذا أعطيت $Z = 3 + j4 \Omega$. فأوجد المساحة المكافئة Y .

$$Y = 1/Z = 1/5 \angle 53.1^\circ = 0.2 \angle -53.1^\circ = 0.12 - j0.16 S$$

ومنها نجد أن $G = 0.12 S$ و $B = 0.16 S$ وهي تقبلية حثية

طريقة أخرى :

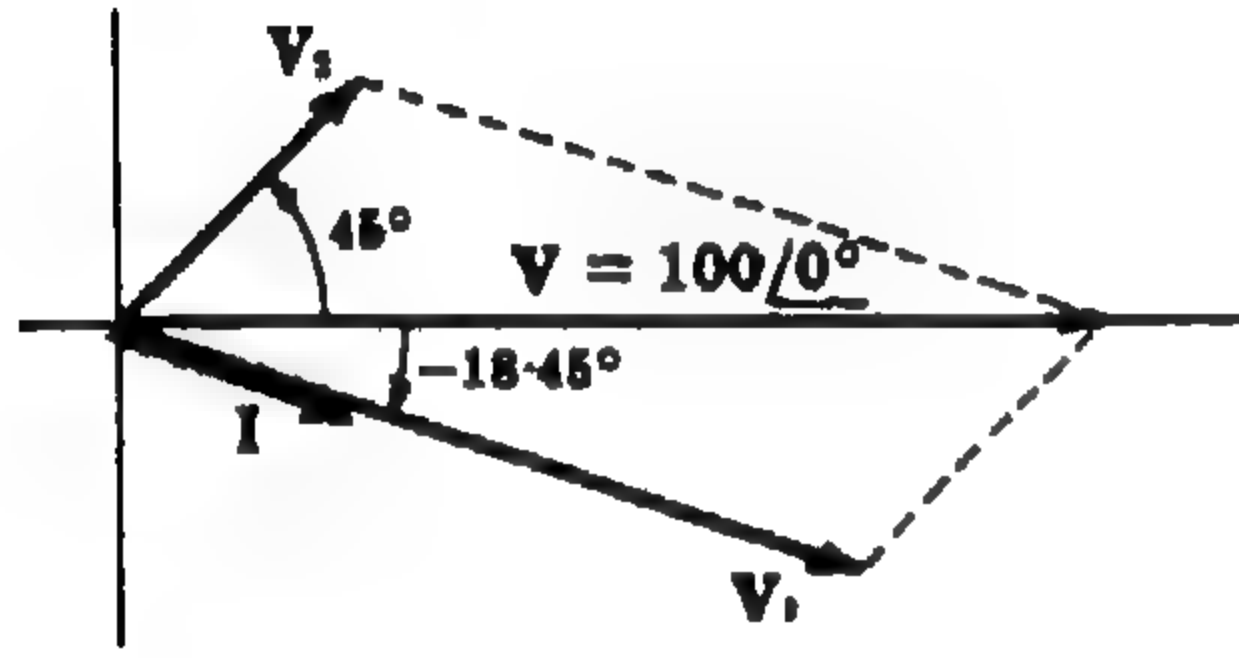
$$B = -X/(R^2 + X^2) = -4/25 = -0.16 \quad \text{و} \quad G = R/(R^2 + X^2) = 3/(9 + 16) = 0.12$$

إذن

$$Y = 0.12 - j0.16 S$$

مسائل محلولة

٦-١ إذا وصلت المقاومتان Z_1 و Z_2 الموضحتان في الشكل ٦-١٢ على التوالي مع مصدر جهد $V = 100 \angle 0^\circ V$ ، فأوجد الجهد عبر كل معاوقة وارسم بيان الجهود المطاوعة .



شكل ٦-١٢



شكل ٦-١٢

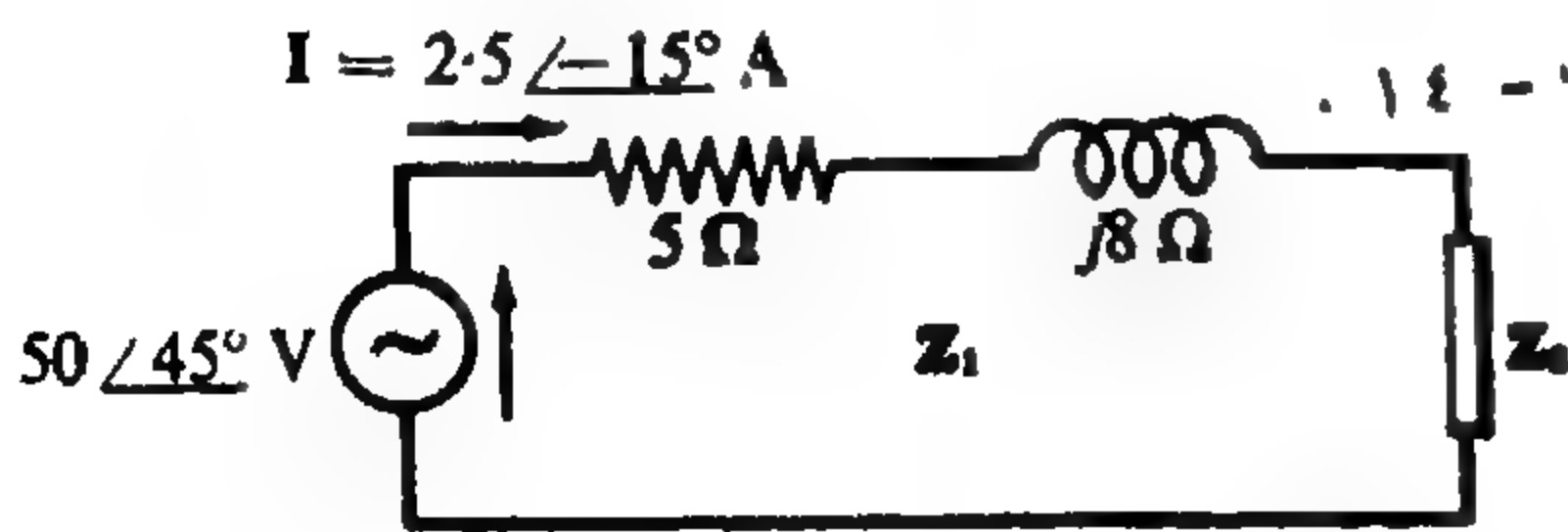
$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{12.65 \angle 18.45^\circ} = 7.9 \angle -18.45^\circ A, \quad Z_{eq} = Z_1 + Z_2 = 10 + (2 + j4) = 12 + j4 = 12.65 \angle 18.45^\circ \Omega$$

إذن

$$V_1 = IZ_1 = 7.9 \angle -18.45^\circ (10) = 79 \angle -18.45^\circ = 74.9 - j25 V$$

$$V_2 = IZ_2 = (7.9 \angle -18.45^\circ)(4.47 \angle 63.4^\circ) = 35.3 \angle 45^\circ = 25 + j25 V$$

من هذا نجد أن $V_1 + V_2 = (74.9 - j25) + (25 + j25) = 99.9 + j0 \approx 100 \angle 0^\circ = V$ كما هو موضح في الشكل البياني للجهد المطاوع شكل ٦-١٢ .



شكل ٦-١٤

٦-٢ احسب المعاوقة Z_2 في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٦-١٤ .

من الدائرة الموضحة نجد أن

$$Z_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{50 \angle 45^\circ}{2.5 \angle -15^\circ} = 20 \angle 60^\circ = 10 + j17.3 \Omega$$

$$20 \angle 60^\circ = 10 + j17.3 \Omega$$

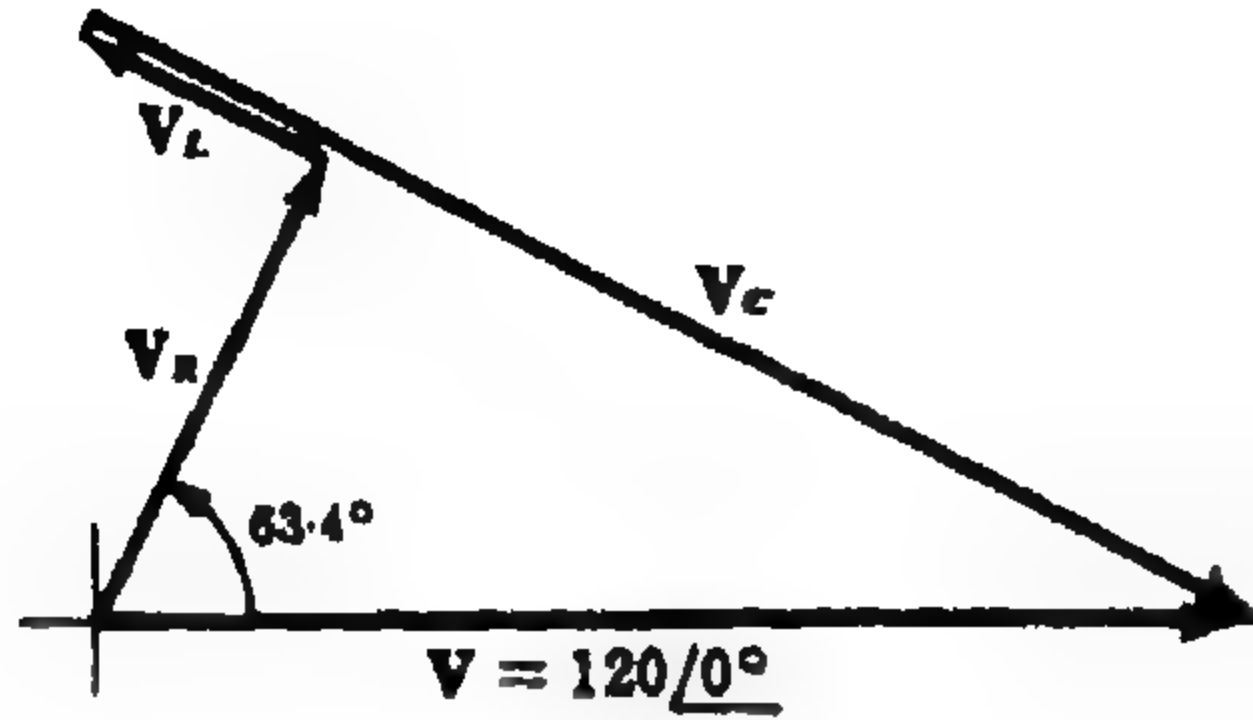
$$10 + j17.3 = (5 + j8) + Z_2$$

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

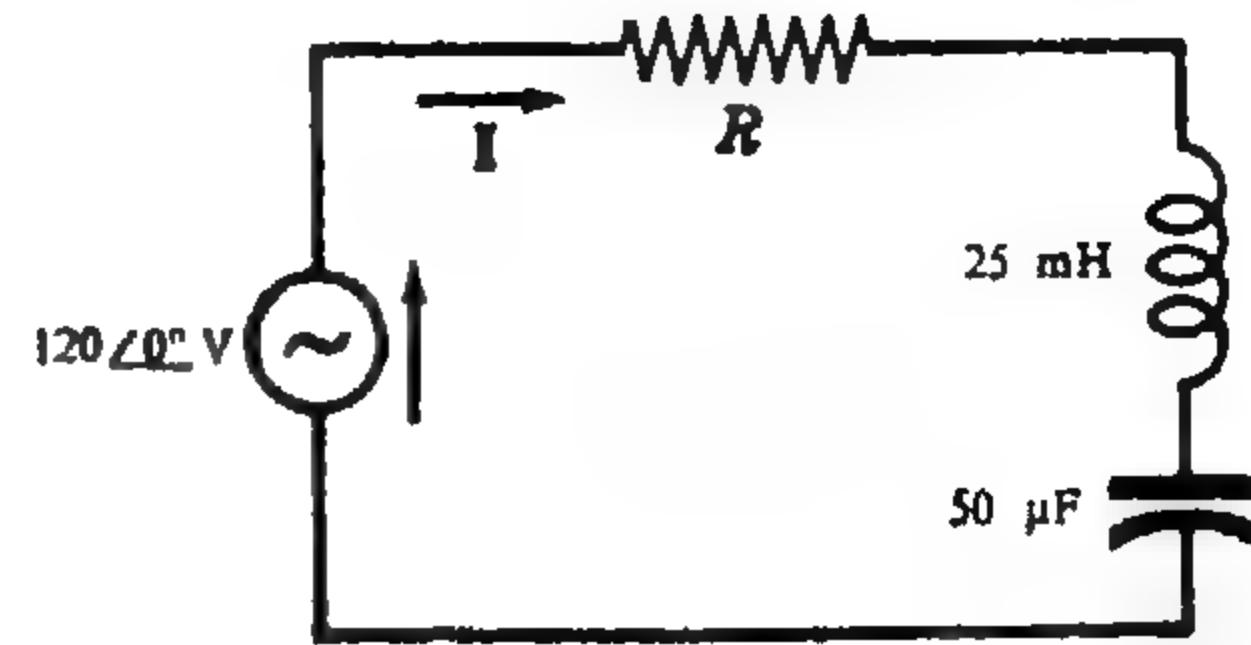
$$Z_2 = 5 + j9.3 \Omega$$

ومنها نجد أن

٦-٣ في الدائرة الموضحة في الشكل ٦-١٥ . إذا كان التيار سابقاً للجهد بزاوية 63.4° عند ذبذبة $\omega = 400 \text{ rad/s}$. فأوجد R والجهد عند كل عنصر من عناصر الدائرة . ارسم بيان الجهد المطاور .



شكل ٦-١٦



شكل ٦-١٥

$$X_L = \omega L = 400(25 \times 10^{-3}) = 10 \text{ ohms}, X_C = 1/\omega C = 1/400(50 \times 10^{-6}) = 50 \text{ ohms}$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = R - j40 \text{ } \Omega \text{ وأيضاً } Z = Z \angle -63.4^\circ \text{ } \Omega \text{ وحيث أن}$$

$$\tan -63.4^\circ = (X_L - X_C)/R, R = -40/(\tan -63.4^\circ) = 20 \text{ ohms}$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120 \angle 0^\circ}{44.7 \angle -63.4^\circ} = 2.68 \angle 63.4^\circ \text{ A} \text{ ، التيار } Z = 20 - j40 = 44.7 \angle -63.4^\circ \text{ } \Omega$$

$$\text{إذن } V_C = 134 \angle -26.6^\circ \text{ V} , V_R = 53.6 \angle 63.4^\circ \text{ V}, V_L = 26.8 \angle 153.4^\circ \text{ V}$$

$$\text{ومن الشكل المطاور للجهد الموضح في الشكل ٦-١٦ نجد أن } V_R + V_L + V_C = V$$

٦-٤ يمكن الحصول على ثوابت دائرة ملف R و L وذلك بتوصيل الملف على التوالي مع مقاومة عيارية R_s قيمتها $10 \text{ } \Omega$

وقراءة الجهد V_R عبر R_s والجهد V_{R_s} عبر الملف والجهد V_T عبر دائرة التوالي كلها . عن R و L إذا

$$\text{كانت قيم الجهود التالية لها ذبذبة } 60 \text{ Hz} : V_{R_s} = 20 \text{ V}, V_{\text{coil}} = 22.4 \text{ V}, V_T = 36 \text{ V}$$

الجهد V_{R_s} عبر المقاومة العيارية والتيار I في اتجاه

$$\text{واحد . وحيث أن } V_{R_s} = 20 \angle 0^\circ \text{ V} , \text{ إذن}$$

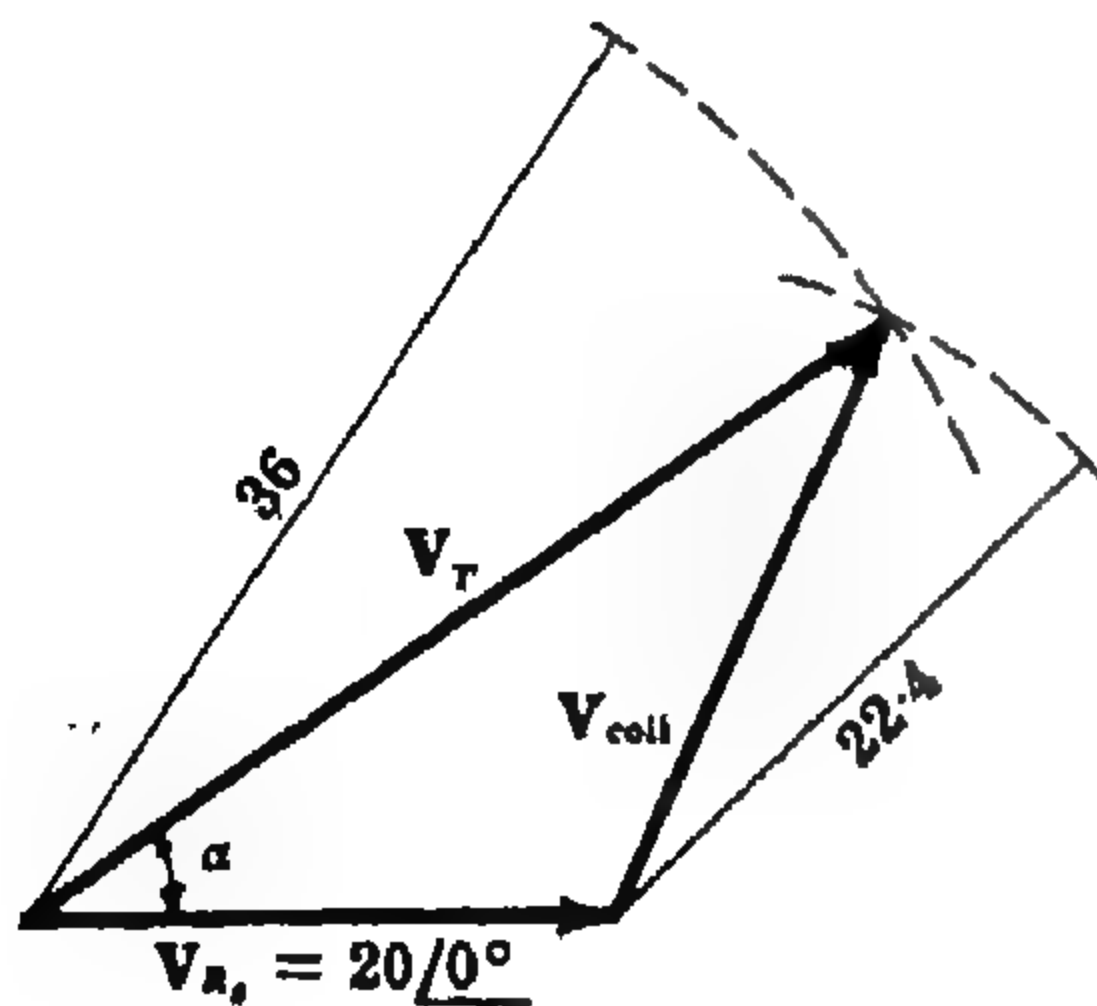
$$I = V_{R_s}/R_s = 2 \angle 0^\circ \text{ A.}$$

في الشكل ٦-١٧ ومن نقطة بداية الجهد المطاور V_{R_s} نرسم قوساً نصف قطر 36 ومن نقطة نهاية سهم V_{R_s} نرسم قوساً بنصف قطر 22.4 ، تعطينا نقطة تقاطع القوسين نهايتي سهمي الجهودين المطاورين V_{coil} و V_T وبذلك تتحقق العلاقة

$$V_T = V_{R_s} + V_{\text{coil}}$$

ويمكن تعيين زاوية الجهد المطاور بتطبيق قانون الجيب تمام

$$\cos \alpha = \frac{(36)^2 + (20)^2 - (22.4)^2}{2(36)(20)} = 0.831, \alpha = 33.7^\circ$$

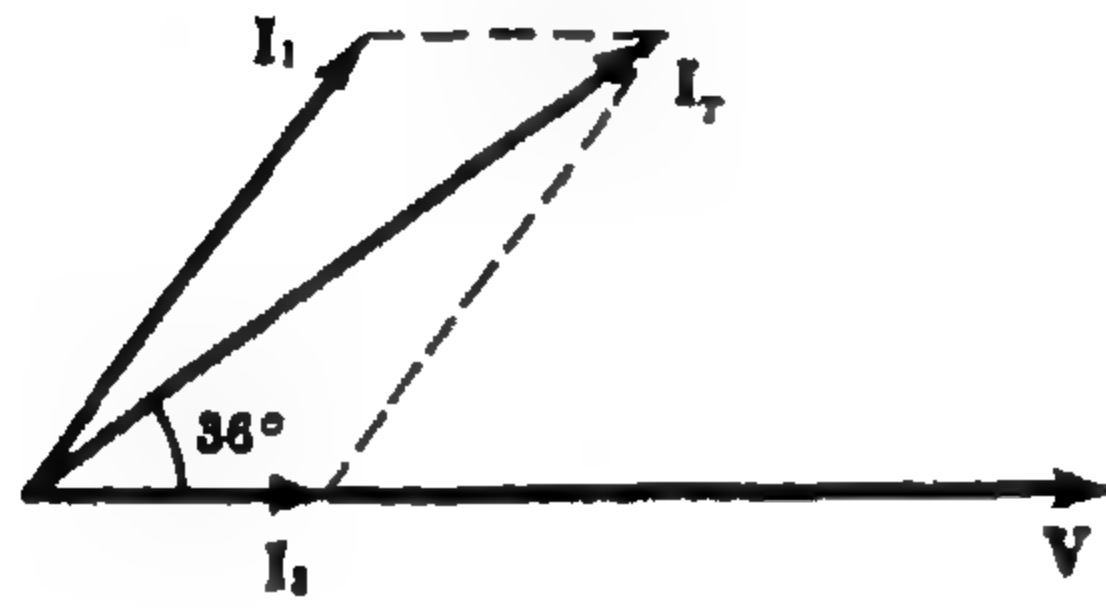


شكل ٦-١٧

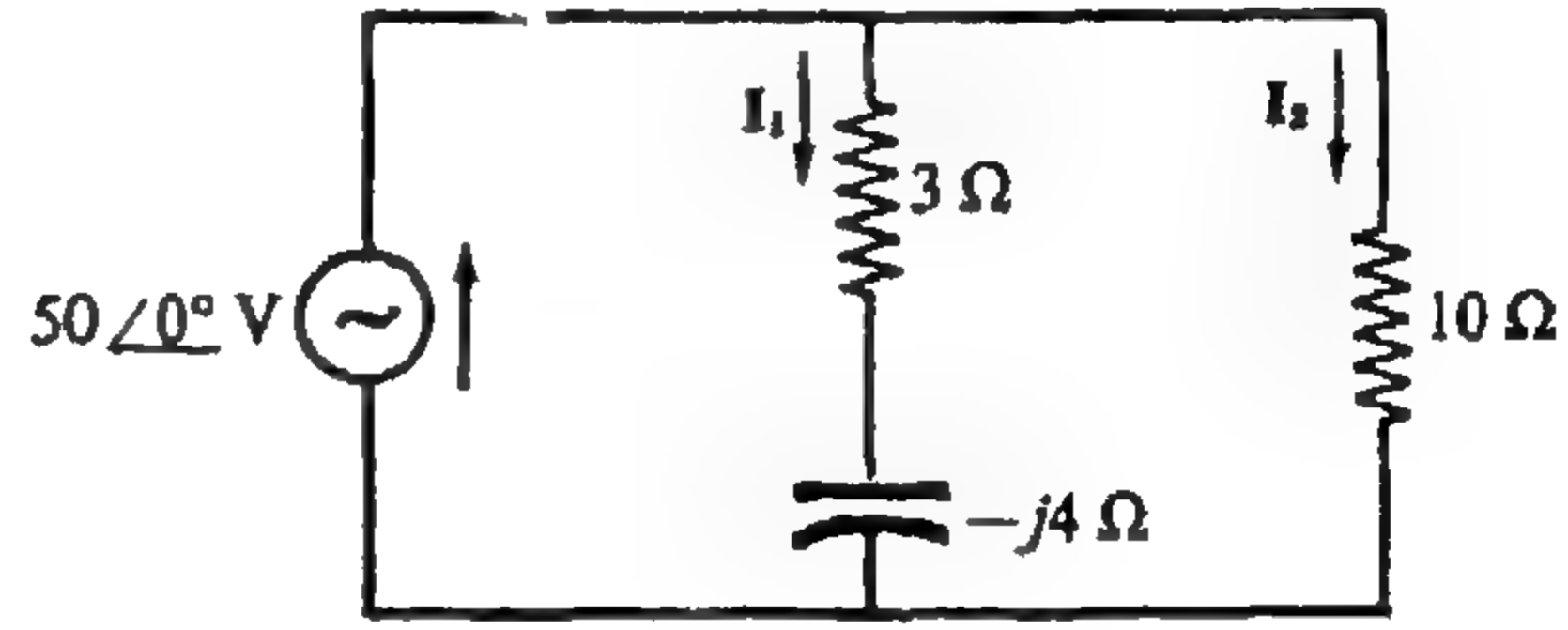
إذن $V_T = 36 \angle 33.7^\circ = 30 + j20 \text{ V}$ و $V_{\text{coil}} = V_T - V_{R_s} = 10 + j20 = 22.4 \angle 63.4^\circ \text{ V}$ وبذلك تكون معاوقة الملف هي $Z_{\text{coil}} = V_{\text{coil}}/I = (10 + j20) / 2 = 5 + j10 \Omega$ ، ومنها نجد أن $R = 5 \Omega$.

وعندما $f = 60 \text{ Hz}$ تكون $X_L = 2\pi fL = 2\pi(60)L = 10 \Omega$ و $L = 26.5 \text{ mH}$

٦ - ٥ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٦ - ١٨ ، أوجد التيار المار في كل فرع و كذلك التيار الكلي . ارسم الشكل المطاور ، ثم أوجد Z_{eq} من V/I وقارن النتيجة بـ $Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)$.



شكل ٦ - ١٩



شكل ٦ - ١٨

إذن $Z_2 = 10 \Omega$ و $Z_1 = 3 - j4 = 5 \angle -53.1^\circ \Omega$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{50 \angle 0^\circ}{5 \angle -53.1^\circ} = 10 \angle 53.1^\circ = 6 + j8 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{50 \angle 0^\circ}{10} = 5 \angle 0^\circ = 5 \text{ A}$$

$$I_T = I_1 + I_2 = 11 + j8 = 13.6 \angle 36^\circ \text{ A}$$

$$Z_{eq} = \frac{V}{I_T} = \frac{50 \angle 0^\circ}{13.6 \angle 36^\circ} = 3.67 \angle -36^\circ \Omega, Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5 \angle -53.1^\circ (10)}{(3 - j4) + 10} = \frac{50 \angle -53.1^\circ}{13.6 \angle 17.1^\circ} = 3.67 \angle -36^\circ \Omega$$

والشكل المطاور موضحاً في الشكل ٦ - ١٩

٦ - ٦ في دائرة التوالي - التوازي الموضحة في الشكل ٦ - ٢٠ ، أوجد التيار المار في كل عنصر

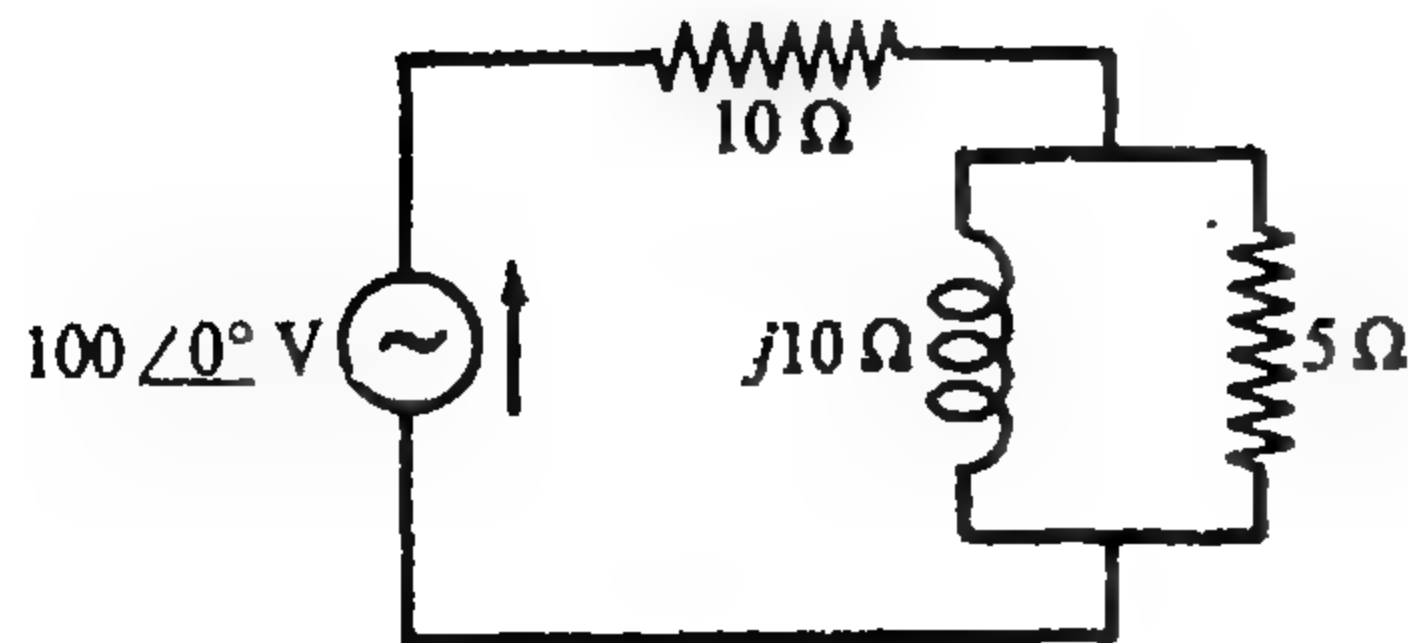
$$Z_{eq} = 10 + \frac{5(j10)}{5 + j10} = 14 + j2 = 14.14 \angle 8.14^\circ \Omega$$

$$\text{إذن } I_T = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{14.14 \angle 8.14^\circ} = 7.07 \angle -8.14^\circ \text{ A}$$

$$I_{10} = I_T = 7.07 \angle -8.14^\circ \text{ A}$$

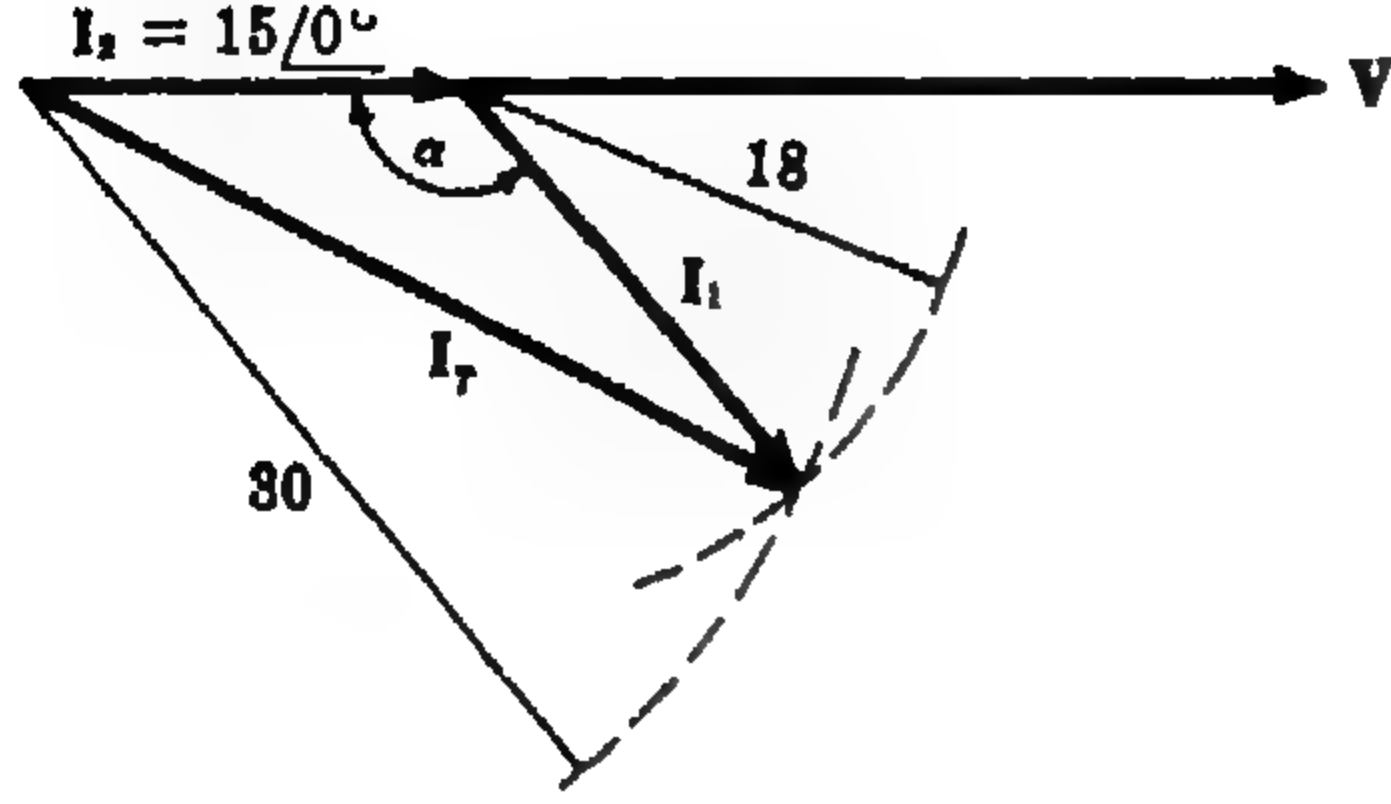
$$I_{j10} = I_T \left(\frac{5}{5 + j10} \right) = 7.07 \angle -8.14^\circ \left(\frac{5}{5 + j10} \right) = 3.16 \angle -71.54^\circ \text{ A}$$

$$I_5 = I_T \left(\frac{j10}{5 + j10} \right) = 7.07 \angle -8.14^\circ \left(\frac{j10}{5 + j10} \right) = 6.32 \angle 18.46^\circ \text{ A}$$

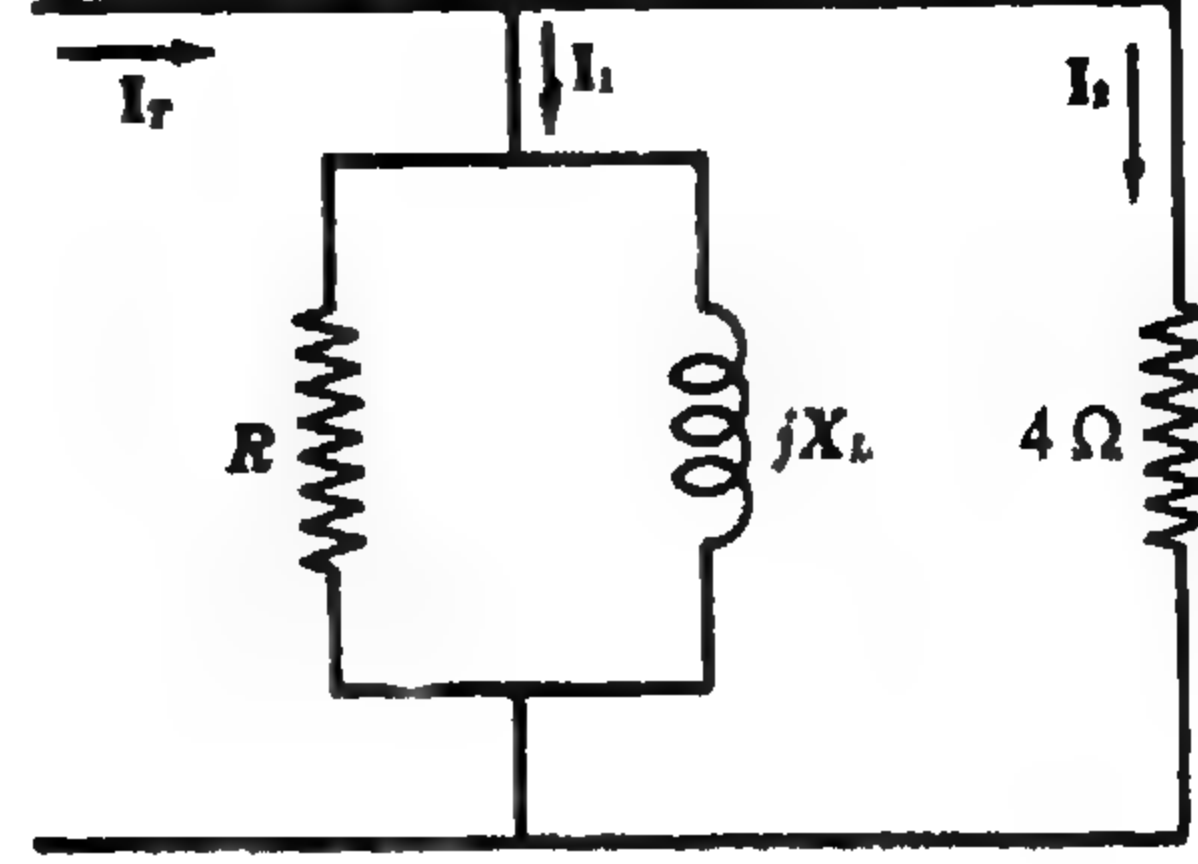


شكل ٦ - ٢٠

٦ - ٧ إذا كانت القيم الفعالة للتيارات I_1 و I_2 و I_T في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٦ - ٢١ هي 18A و 15A و 30A على الترتيب ، فعين المعاوقات المجهولة R و X_L .



شكل ٦ - ٢٢



شكل ٦ - ٢١

بتطبيق قانون كيرشوف للتيار نجد أن $I_1 + I_2 = I_T$ وحيث أن I_2 في اتجاه الجهد المؤثر وبفرض أن $I_2 = 15/0^\circ$ A إذن $V = 15/0^\circ (4) = 60/0^\circ$ V . ولوجود المهانة الحثية نجد أن I_1 لاحقاً للجهد المؤثر . باستخدام نفس طريقة المسألة ٦ - ٤ يمكننا الحصول على الشكل ٦ - ٢٢ .

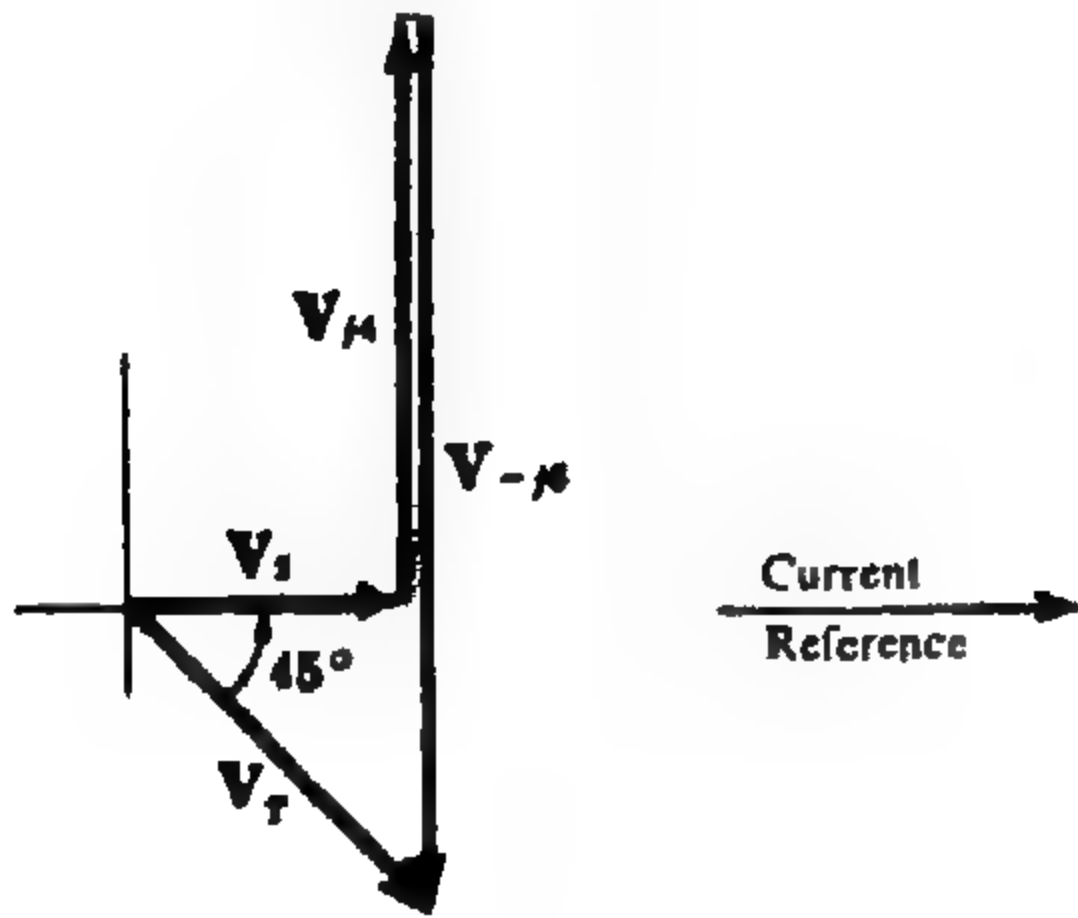
$$\cos \alpha = \frac{(15)^2 + (18)^2 - (30)^2}{2(15)(18)} = -0.65 \text{ and } \alpha = 130.5^\circ \text{ إذن}$$

$$Z_1 = \frac{V}{I_1} = \frac{60/0^\circ}{18/-49.5^\circ} = 3.33/49.5^\circ \Omega. \text{ إذن } I_1 = 18/-49.5^\circ \text{ A ومن الرسم نجد أن}$$

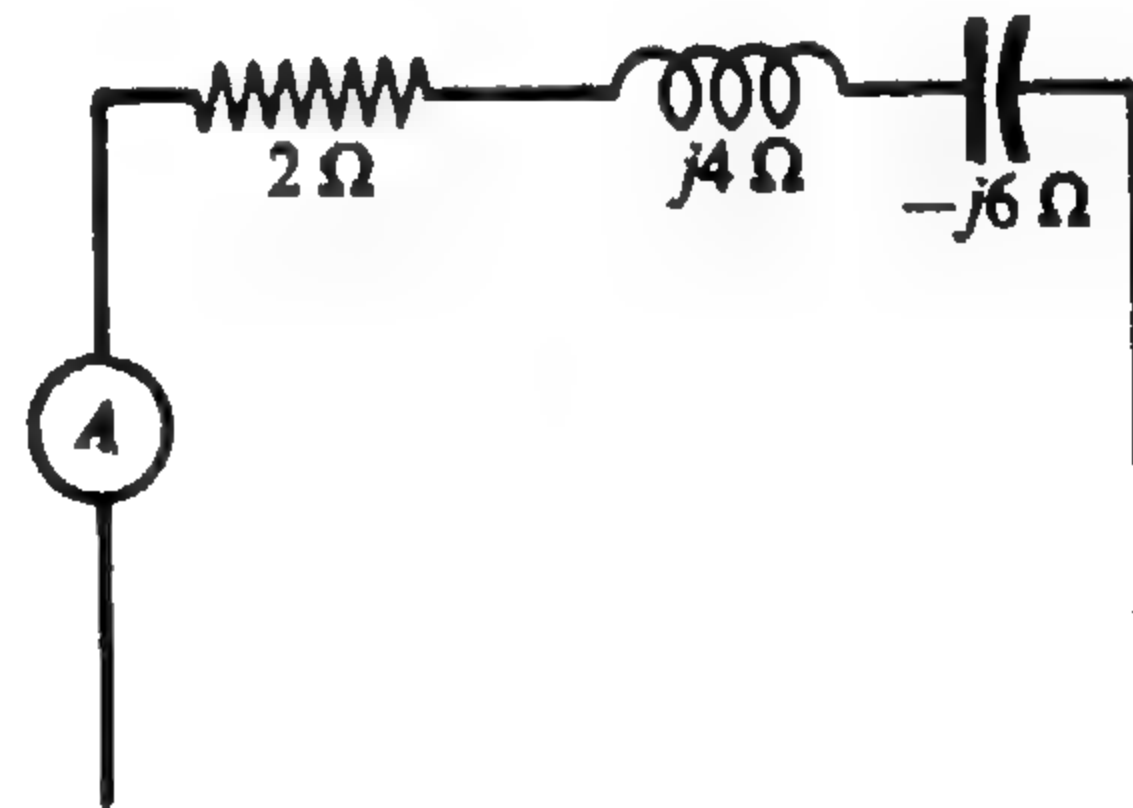
والمساحة المركبة هي $Y_1 = 1/R + 1/jX_L = 1/3.33/49.5^\circ = 0.195 - j0.228 \text{ S}$ إذن

$$X_L = \frac{1}{0.228} = 4.39 \text{ ohms} \quad \text{و} \quad R = \frac{1}{0.195} = 5.13 \text{ ohms}$$

٦ - ٨ إذا كانت القيمة الفعالة للتيار في دائرة التوالي الموضحة بالشكل ٦ - ٢٣ هي 5A فأوجد قراءة الفولتميتر إذا وصل أولاً عبر الدائرة كلها ثم عبر كل عنصر .



شكل ٦ - ٢٤



شكل ٦ - ٢٣

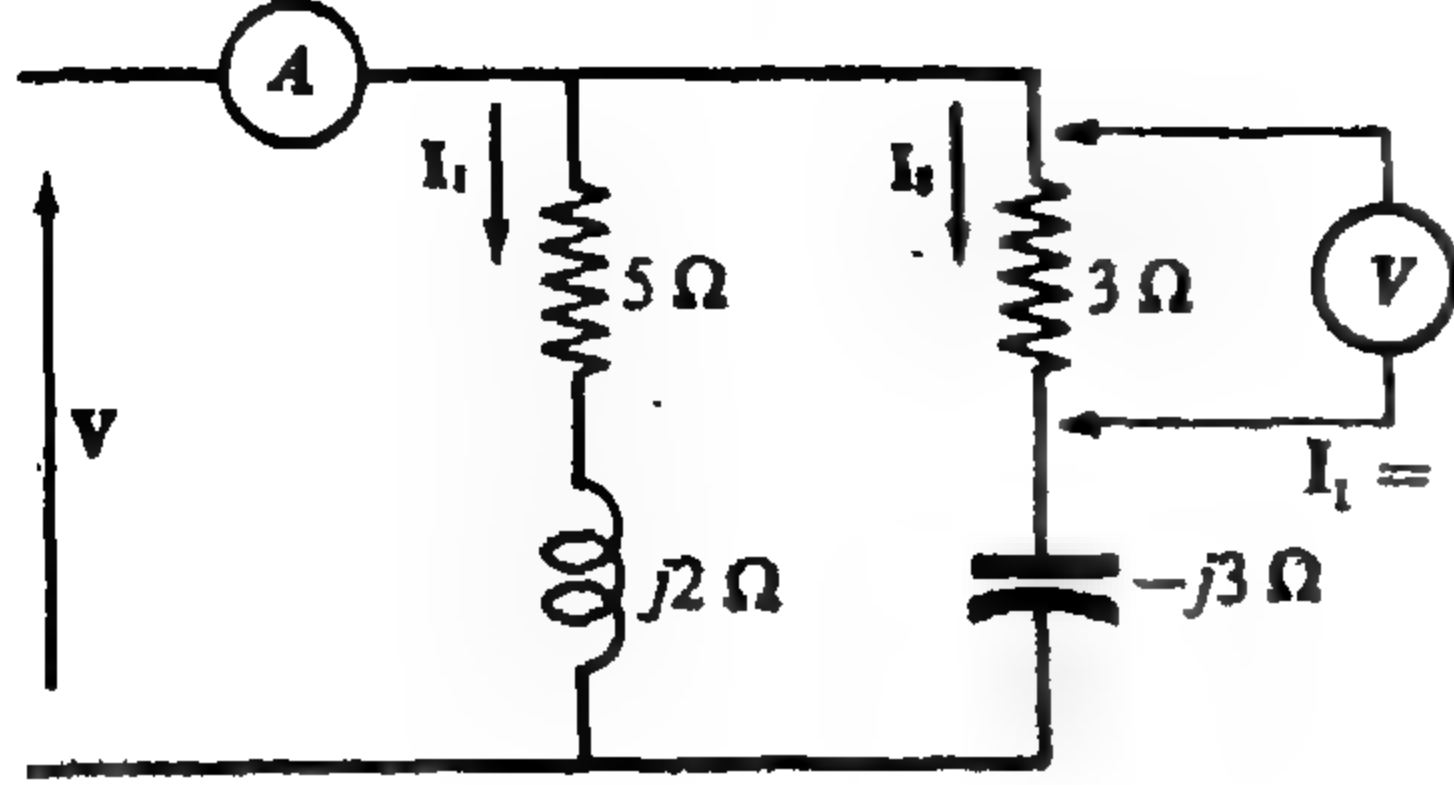
$$\text{إذن } Z_{eq} = 2 + j4 - j6 = 2.83/-45^\circ \Omega.$$

$$V_T = 5(2.83) = 14.14 \text{ volts} \quad V_{j4} = 5(4) = 20 \text{ volts}$$

$$V_2 = 5(2) = 10 \text{ volts} \quad V_{-j6} = 5(6) = 30 \text{ volts}$$

ويوضح الشكل المتجهي ٦ - ٢٤ للجهد المطاور مجموع الجهود المطاورة عبر كل عنصر للدائرة .

٦-٩ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٦-٢٥ ، إذا كانت قراءة الفولتميتر عند توصيلة عبر المقاومة 3Ω هي $45V$ فما هي قراءة الأميتر ؟



شكل ٦-٢٥

$$I_2 = 45/3 = 15 A \text{ وبفرض أن زاويته تساوي } 0^\circ$$

$$\text{فإن } I_2 = 15 \angle 0^\circ A$$

$$V = 15 \angle 0^\circ (3 - j3) = 63.6 \angle -45^\circ V$$

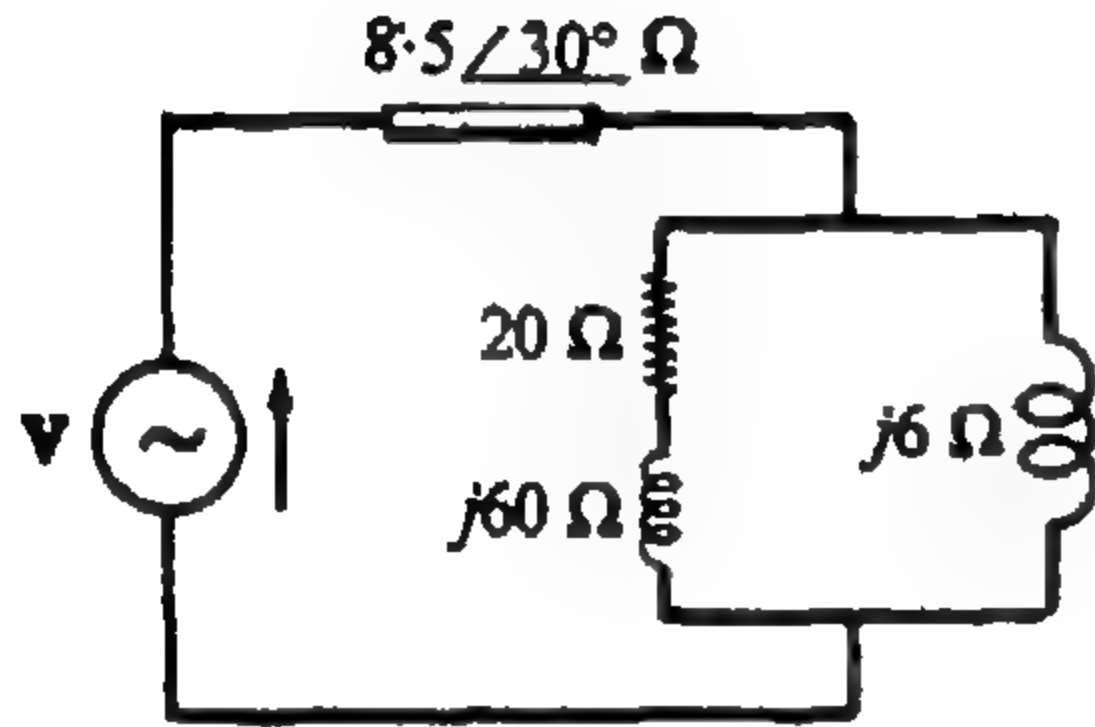
$$I_1 = 63.6 \angle -45^\circ / (5 + j2) = 11.8 \angle -66.8^\circ = 4.64 - j10.85 A$$

ربما أن

$$I_T = I_1 + I_2 = (4.64 - j10.85) + 15 = 19.64 - j10.85 = 22.4 \angle -29^\circ A$$

إذن قراءة الأميتر هي $22.4A$.

٦-١٠ إذا كانت القيمة الفعالة للجهد عبر الجزء المتصل على التوالي في دائرة التوالي - التوازي الموضحة في الشكل ٦-٢٦ هي $50 V$ ، فأوجد قيمة V .



شكل ٦-٢٦

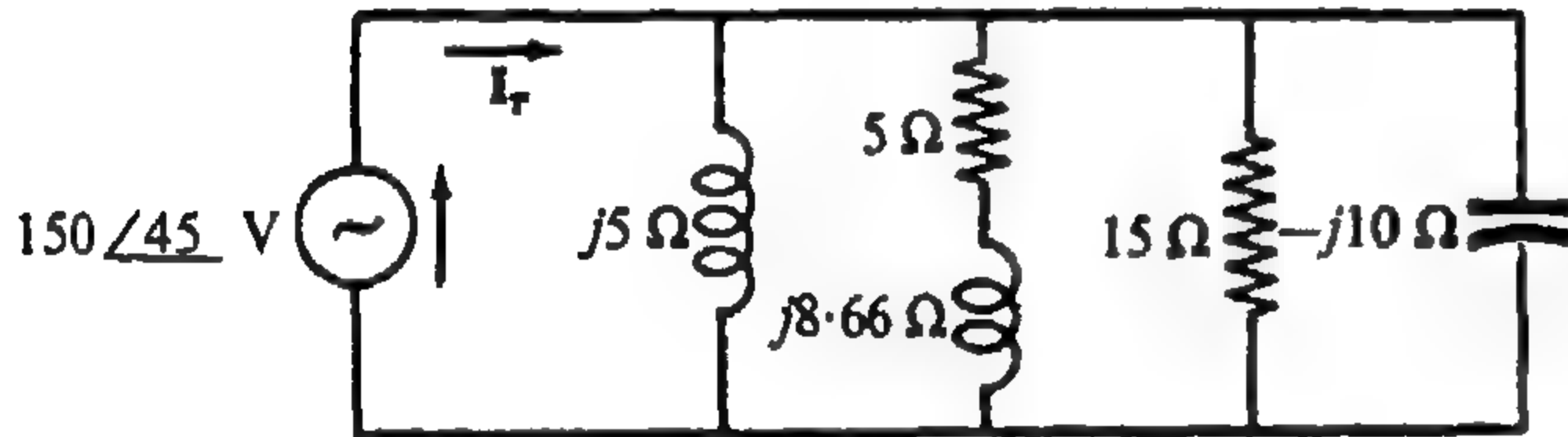
$$Z_p = \frac{(20 + j60)/j6}{20 + j60 + j6} = 5.52 \angle 88.45^\circ = 0.149 + j5.52 \Omega$$

$$Z_{eq} = 8.5 \angle 30^\circ + (0.149 + j5.52) = 12.3 \angle 52.4^\circ \Omega$$

$$\text{وبما أن } V_p = IZ_p, V_p/Z_p = V/Z_{eq} \text{ و } V = IZ_{eq}$$

$$\text{إذن } V = V_p(Z_{eq}/Z_p) = 50(12.3/5.52) = 111.5 \text{ volts}$$

٦-١١ من الأربعة الأفرع المتصلة على التوالي في الدائرة الموضحة في الشكل ٦-٢٧ ، أوجد التيار الكلي والمقاومة المكافئة.



شكل ٦-٢٧

$$Y_1 = 1/j5 = -j0.2 S$$

$$Y_2 = 1/10 \angle 60^\circ = 0.05 - j0.0866 S$$

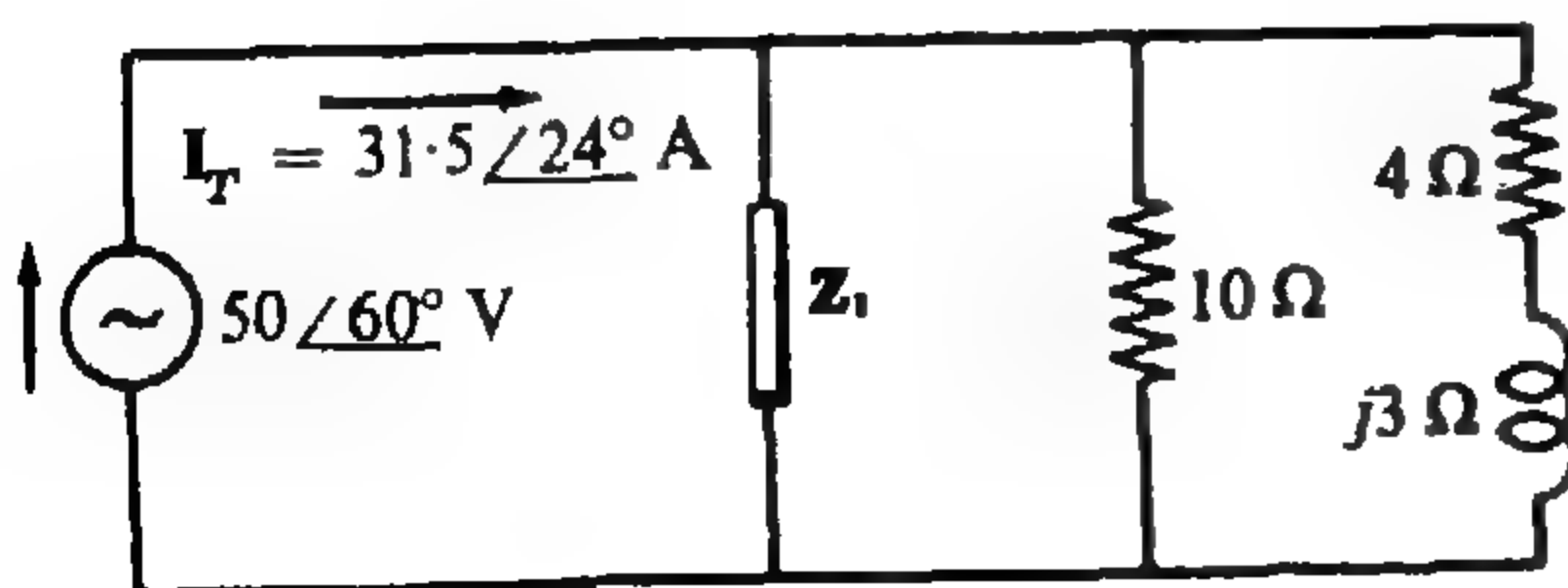
$$Y_3 = 1/15 = 0.067 S$$

$$Y_4 = 1/-j10 = j0.1 S$$

$$Y_{eq} = 0.117 - j0.1866 = 0.22 \angle -58^\circ S$$

$$\text{إذن } Z_{eq} = 1/Y_{eq} = 1/(0.22 \angle -58^\circ) = 4.55 \angle 58^\circ \Omega \text{ و } I_T = VY_{eq} = (150 \angle 45^\circ)(0.22 \angle -58^\circ) = 33 \angle -13^\circ A$$

٦-١٢ في الثلاثة الأفرع المتصلة على التوالي في الدائرة الموضحة في الشكل ٦-٢٨ ، عين قيمة المقاومة Z_1 .



شكل ٦-٢٨

إن مساحة الدائرة المركبة هي

$$Y_{eq} = \frac{I_T}{V} = \frac{31.5 \angle 24^\circ}{50 \angle 60^\circ} = 0.63 \angle -36^\circ = 0.51 - j0.37 S$$

$$\text{ربما أن } Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 =$$

$$Y_1 + (0.1) + (0.16 - j0.12) = 0.51 - j0.37 S, Y_1 = 0.25 - j0.25 = 0.25\sqrt{2} \angle -45^\circ S$$

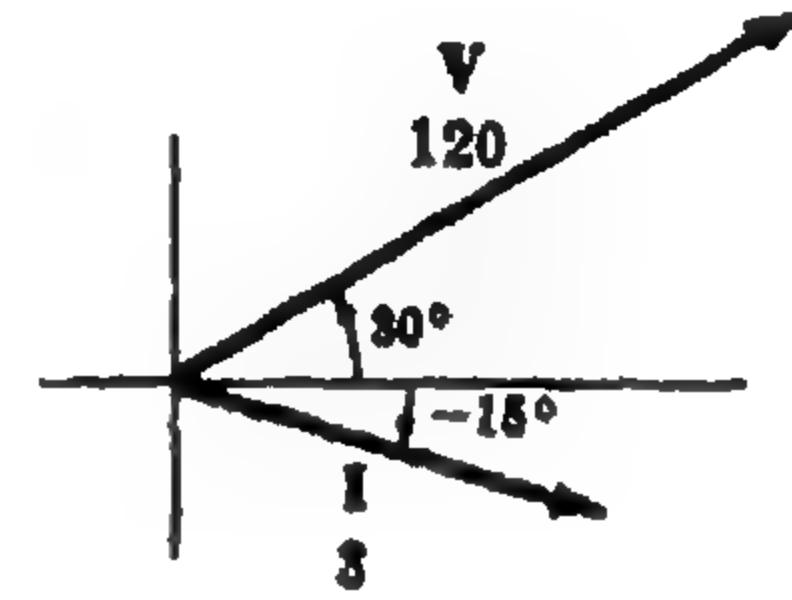
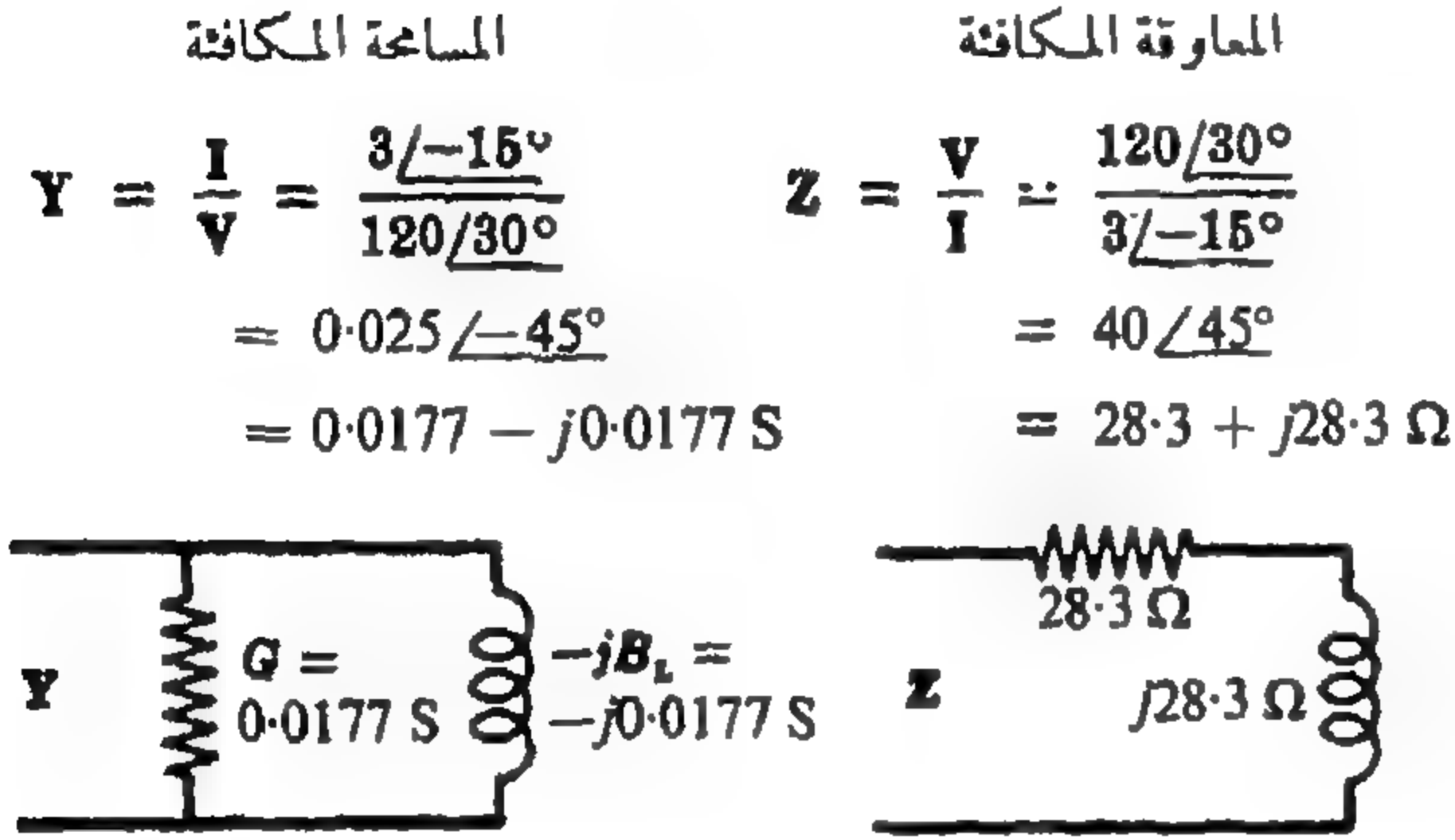
$$\text{إذن } Z_1 = 1/Y_1 = 2\sqrt{2} \angle 45^\circ = 2 + j2 \Omega$$

طريقة أخرى :

$$I_1 = 17.7 \angle 15^\circ \text{ A. ومنها نجد أن } I_T = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + \frac{50 \angle 60^\circ}{10} + \frac{50 \angle 60^\circ}{5 \angle 36.9^\circ} = 31.5 \angle 24^\circ \text{ A}$$

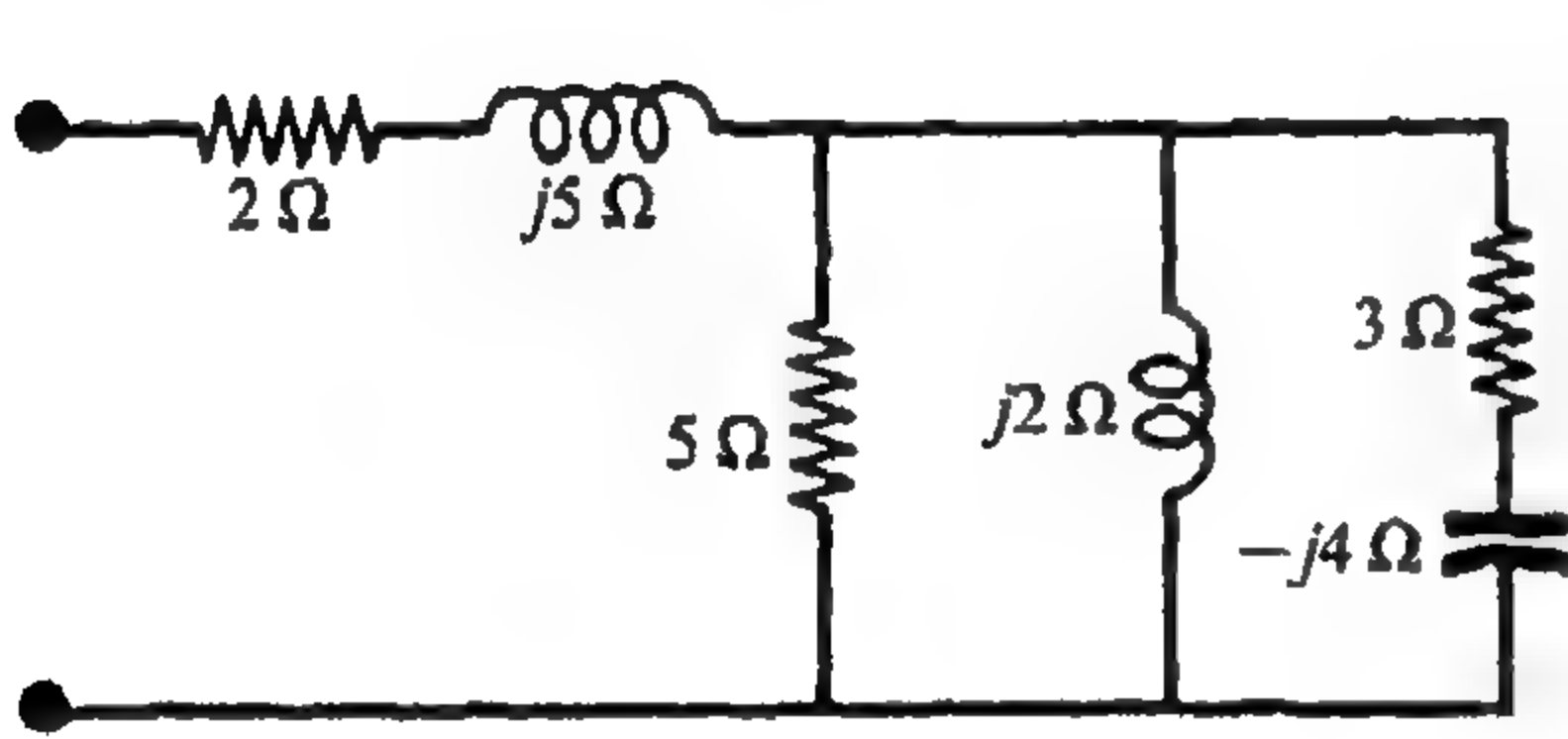
$$Z_1 = \frac{V}{I_1} = \frac{50 \angle 60^\circ}{17.7 \angle 15^\circ} = 2\sqrt{2} \angle 45^\circ = 2 + j2 \Omega \quad \text{إذن}$$

٦-١٣ إذا أعطيت الشكل ٦-٢٩ للجهد المطاوع ، فعين المعارضة المكافئة والمساحة .



شكل ٦-٢٩

٦-١٤ في دائرة التوالي - التوازي الموضحة في الشكل ٦-٣٠

أوجد Z_{eq} و Y_{eq} 

شكل ٦-٣٠

نحسب أولا المساحة المكافئة للثلاثة الأفرع المتصلة

على التوالي في الدائرة ثم نحولها إلى معارضة

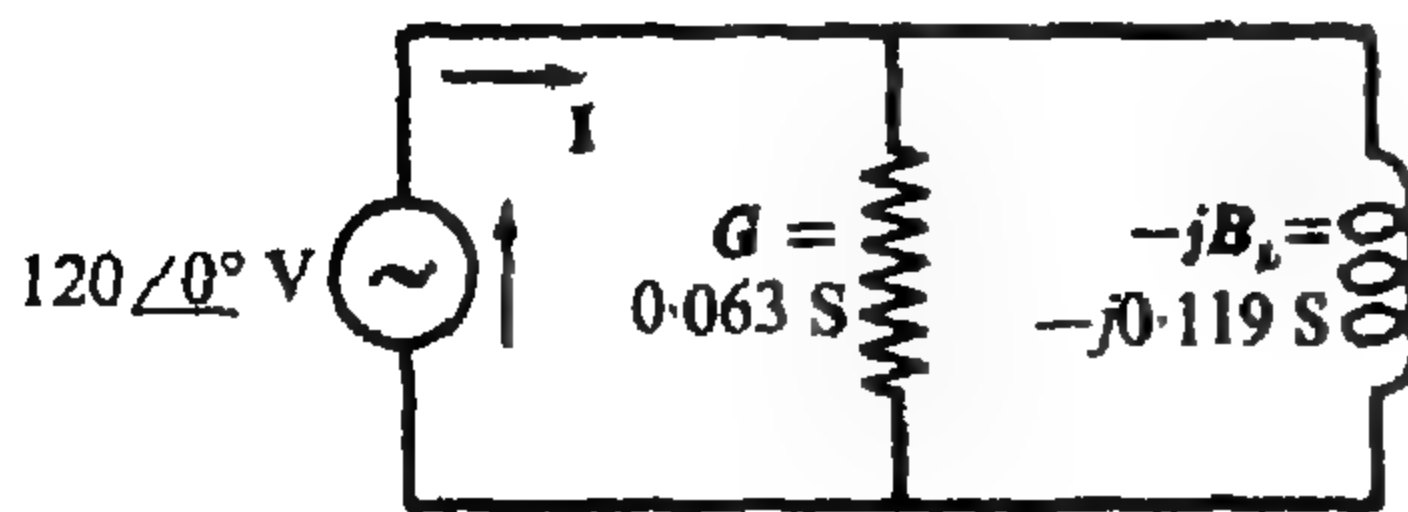
$$Y_{peq} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{5 \angle -53.1^\circ} = 0.32 - j0.34 = 0.467 \angle -46.7^\circ \text{ S}$$

ومنها نجد أن

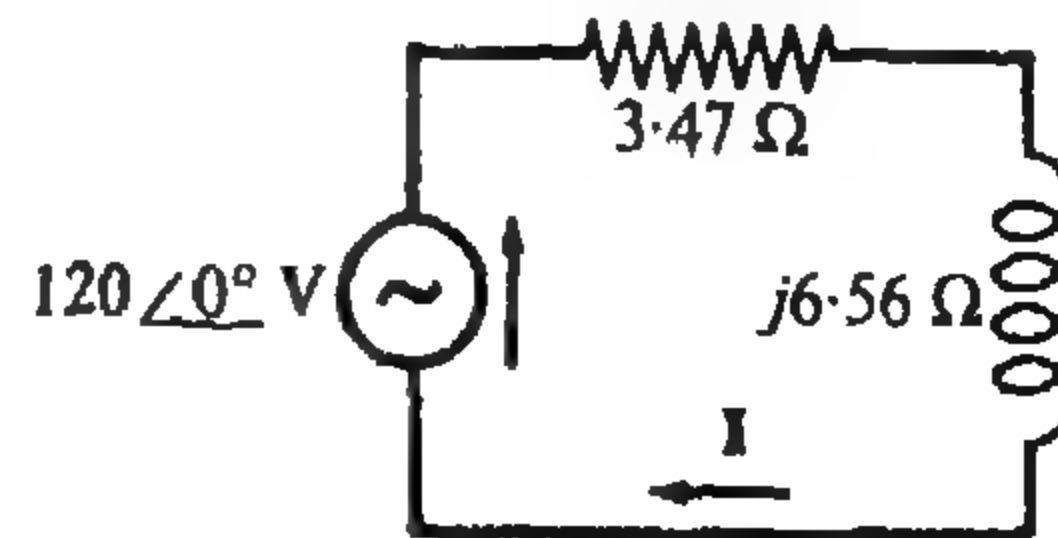
$$Z_{peq} = 1/Y_{peq} = 2.14 \angle 46.7^\circ = 1.47 + j1.56 \Omega$$

$$Z_{eq} = (2 + j5) + (1.47 + j1.56) = 3.47 + j6.56 = 7.42 \angle 62.1^\circ \Omega \quad \text{إذن}$$

$$Y_{eq} = 1/(7.42 \angle 62.1^\circ) = 0.135 \angle -62.1^\circ = 0.063 - j0.119 \text{ S}$$

٦-١٥ حول دائرة التوالي - التوازي الموضحة في المسألة ٦-٣١ إلى دائرتين مكافئتين يتكونان من Z_{eq} و Y_{eq} علىالترتيب . وإذا أثرنا على كل دائرة بجهد $V = 120 \angle 0^\circ$ فأوجد التيار المار في كل دائرة .

(ب)



(١)

شكل ٦-٣١

$$Y = 0.135 \angle -62.1^\circ \text{ S}$$

$$Z = 7.42 \angle 62.1^\circ \Omega$$

$$I = VY = (120 \angle 0^\circ)(0.135 \angle -62.1^\circ) = 16.2 \angle -62.1^\circ \text{ A}$$

(ب)

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120 \angle 0^\circ}{7.42 \angle 62.1^\circ} = 16.2 \angle -62.1^\circ \text{ A}$$

(أ)

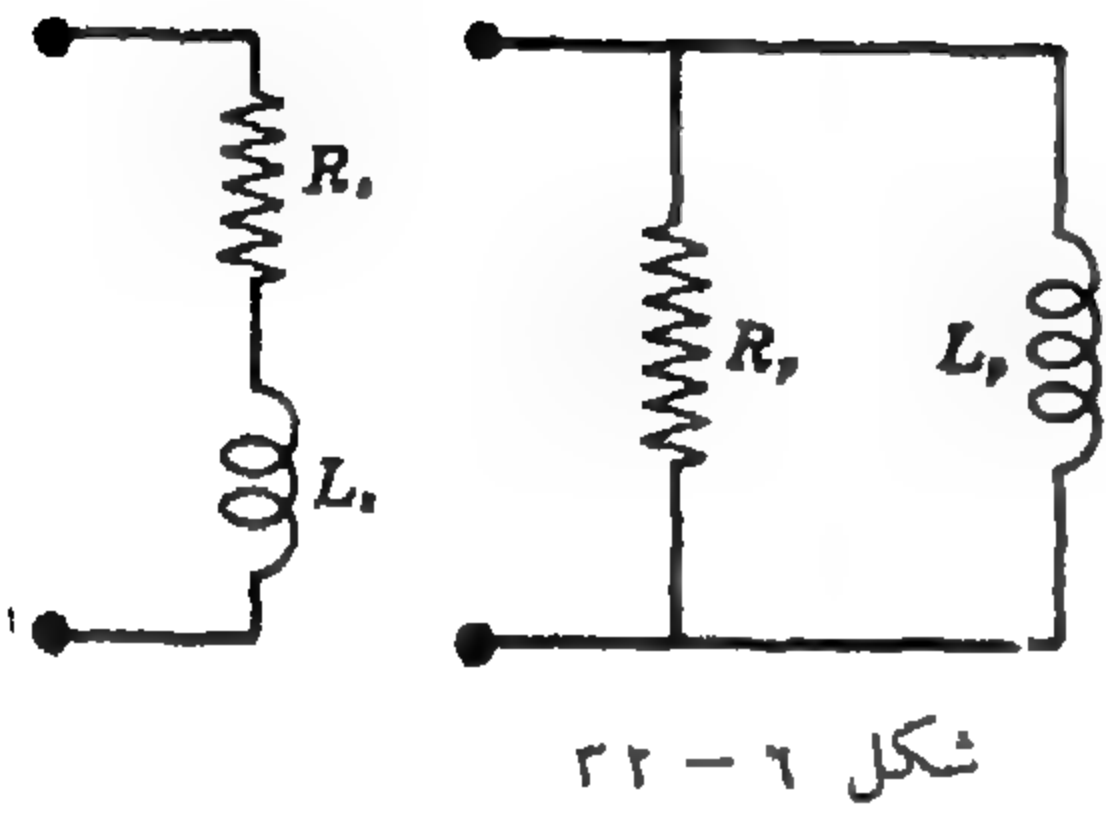
٦ - ١٦ إذا كانت ثوابت الملف تعطى على التوالي بالقيم R_p و L_p ، فعين الثوابت المكافئة على التوازي R_p و L_p بدلالة R_s و L_s .

حيث أن مساحة الدائرتين المتكافئتين الموضعتين في الشكل ٦ - ٣٢ متساويتين $Y_p = Y_s$ أو

$$\frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} = \frac{1}{R_s + j\omega L_s} = \frac{R_s - j\omega L_s}{(R_s)^2 + (\omega L_s)^2}$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية للمساختين نجد أن

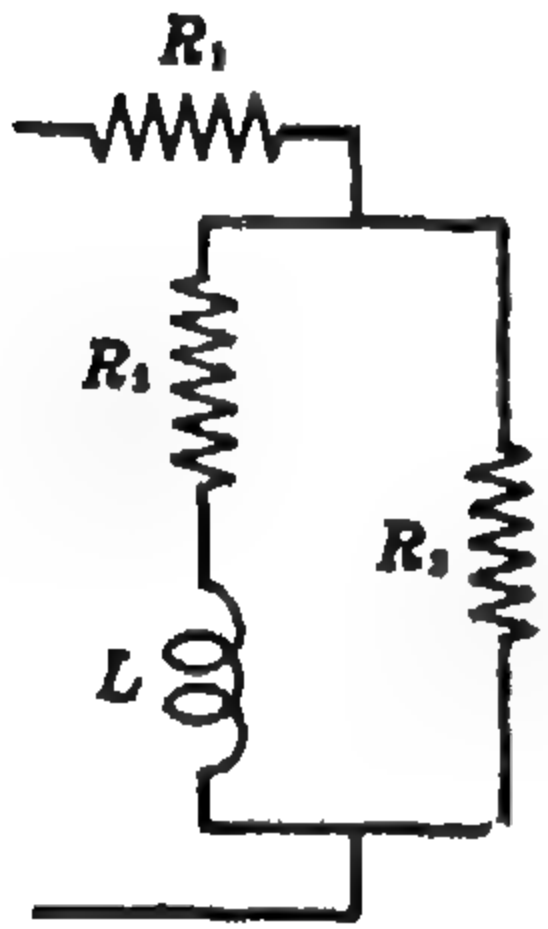
$$\frac{1}{j\omega L_p} = \frac{-j\omega L_s}{(R_s)^2 + (\omega L_s)^2} \quad , \quad \frac{1}{R_p} = \frac{R_s}{(R_s)^2 + (\omega L_s)^2}$$



شكل ٦ - ٣٢

$$L_p = L_s + R_s^2/\omega^2 L_s \quad , \quad R_p = R_s + (\omega L_s)^2/R_s$$

٦ - ١٧ أوجد المعارقة المكافئة لدائرة التوالي - التوازي الموضحة في الشكل ٦ - ٣٣



شكل ٦ - ٣٣

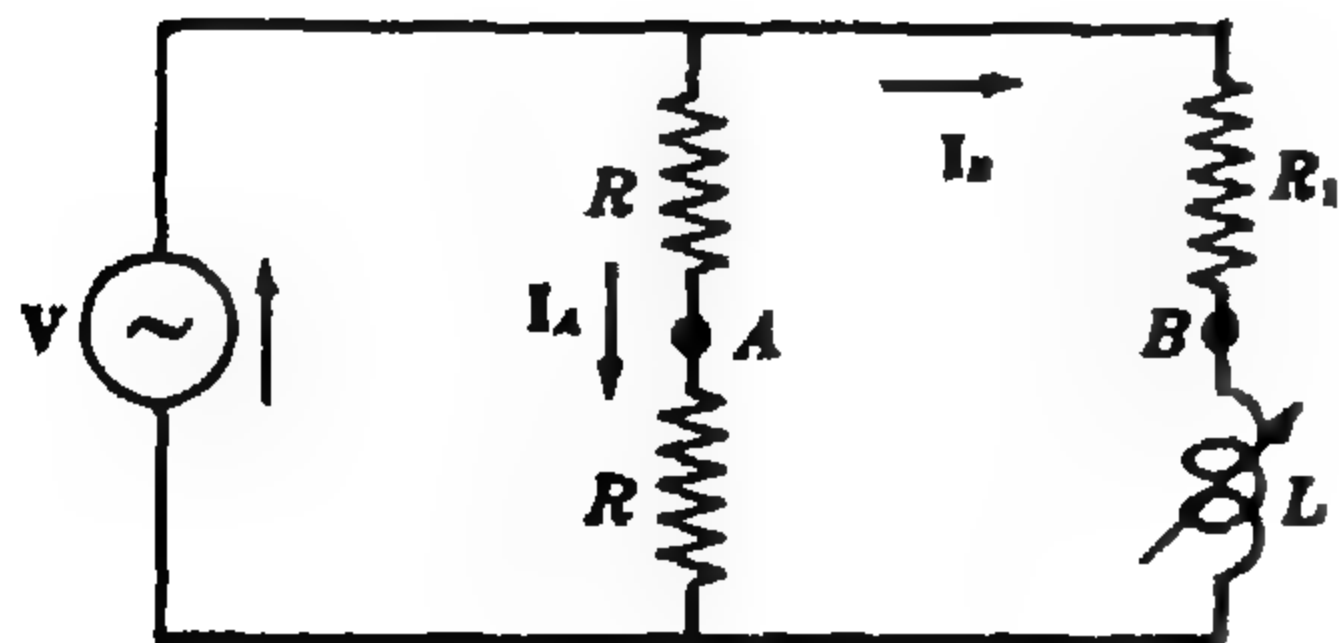
$$\begin{aligned} Z_{eq} &= R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L)R_3}{R_2 + R_3 + j\omega L} = R_1 + \frac{(R_2 R_3 + j\omega L R_3)[(R_2 + R_3) - j\omega L]}{(R_2 + R_3)^2 + (\omega L)^2} \\ &= R_1 + \frac{R_2 R_3 (R_2 + R_3) + \omega^2 L^2 R_3 + j\omega L R_3 (R_2 + R_3) - j\omega L (R_2 R_3)}{(R_2 + R_3)^2 + (\omega L)^2} \\ &= \left[R_1 + \frac{R_3 (R_2^2 + R_2 R_3 + \omega^2 L^2)}{(R_2 + R_3)^2 + (\omega L)^2} \right] + j \left[\frac{\omega L R_3^2}{(R_2 + R_3)^2 + (\omega L)^2} \right] \\ &= R_{eq} + j\omega L_{eq} \end{aligned}$$

٦ - ١٨ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٦ - ٣٤ ، يتكون الفرع

الأول من مقاومتين متساويتين R متصلتين على التوالي ، ويتكون

الفرع الثاني من مقاومة R_1 متصلة على التوالي مع حث متغير L ،

بين كيف يتغير الجهد بين A و B مع تغير L .



شكل ٦ - ٣٤

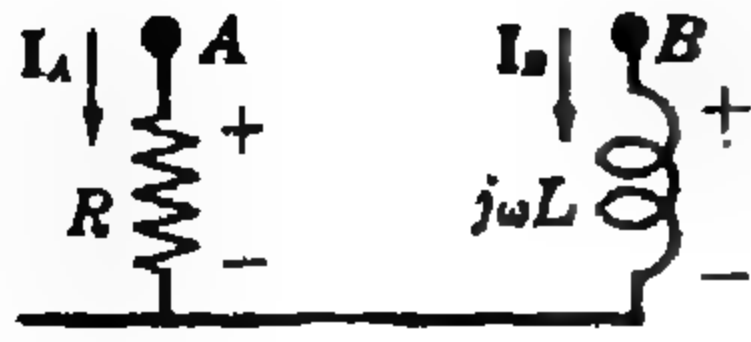
بالنسبة للفرع الأول فإن التيار $I_A = V/2R$ ويكون

$$I_A R = \frac{1}{2} V$$

وبالنسبة للفرع الثاني فإن التيار

$$I_B = V/(R_1 + j\omega L)$$

ويكون الجهد عبر الملف هو



$$I_B j\omega L = \frac{V}{(R_1 + j\omega L)(j\omega L)}$$

وحيث أن القطبية كما هو موضح في الشكل ٦ - ٣٥ فإن

شكل ٦ - ٣٥

$$V_{AB} = I_A R - I_B(j\omega L) = \frac{1}{2}V - \frac{V}{(R_1 + j\omega L)(j\omega L)}$$

وبتجزئ الطرف الأيمن في المعادلة السابقة وفصل الجزء التخيلي والحقيقي . نحصل على

$$V_{AB} = V \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2 L^2}{R_1^2 + (\omega L)^2} \right) - j \left(\frac{\omega L R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} \right) \right]$$

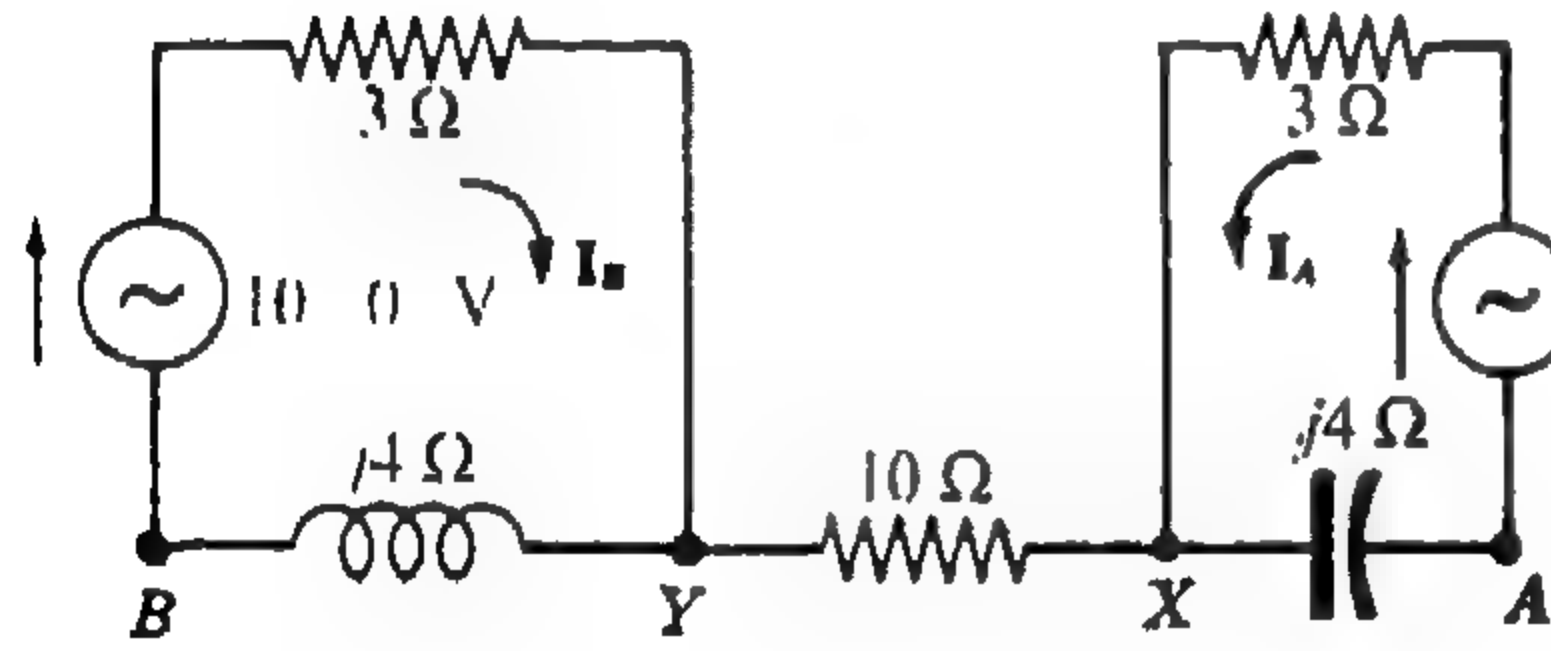
نلاحظ أن الكمية التي بين قوسين هي عدد مركب ، وبتحويله إلى صيغته القطبية نجد أن قيمته المطلقة r وزاوية ϕ تأخذ أن القيم التالية .

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2 L^2}{R_1^2 + (\omega L)^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega L R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} \right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-\omega L R_1 / [R_1^2 + (\omega L)^2]}{\frac{1}{2} - \frac{\omega^2 L^2}{R_1^2 + (\omega L)^2}} = \tan^{-1} \frac{-2\omega L R_1}{R_1^2 - (\omega L)^2} = \tan^{-1} \frac{-2(\omega L / R_1)}{1 - (\omega L / R_1)^2}$$

إذن القيمة المطلقة للجهد V_{AB} ثابتة ، أي أن $V_{AB} = \frac{1}{2}V$ وبما أن $\tan 2x = (2 \tan x) / (1 - \tan^2 x)$ و $\omega L / R = \tan \theta$ ، إذن $\phi = -2\theta$ حيث θ هي زاوية المعاوقة المركبة للفرع الثاني .

٦ - ١٩ في الشبكة الموضحة في الشكل ٦ - ٣٦ ، وصلت دائرتان مقفلتان نشطتان بمقاومة 10Ω . أوجد فرق الجهد بين A و B



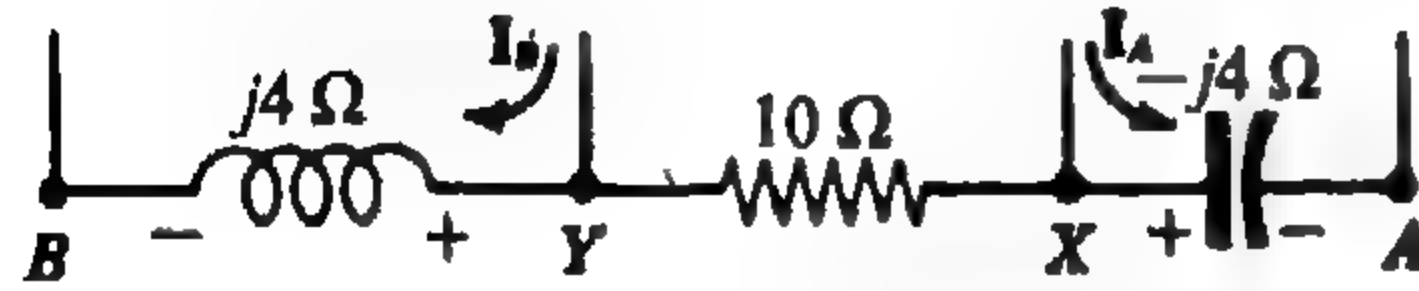
شكل ٦ - ٣٦

من الشكل ٦ - ٣٦ يمكن حساب مايل

$$I_A = \frac{10 \angle 30^\circ}{3 - j4} = \frac{10 \angle 30^\circ}{5 \angle -53.1^\circ} = 2 \angle 83.1^\circ \text{ A}$$

$$I_B = \frac{10 \angle 0^\circ}{3 + j4} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 \angle 53.1^\circ} = 2 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

ولحساب V_{AB} فإننا نحتاج إلى الجهود المختلفة عبر العناصر الموضحة في الشكل ٦ - ٣٧ وباعتبار القطبية الصحيحة نحصل على



شكل ٦ - ٣٧

$$V_{AX} = -I_A(-j4) = -2 \angle 83.1^\circ (-j4) = -8 \angle -6.9^\circ = -7.94 + j0.96 \text{ V}$$

$$V_{XY} = 0 \text{ (أي لا يمر تيار في المقاومة } 10 \Omega \text{)}$$

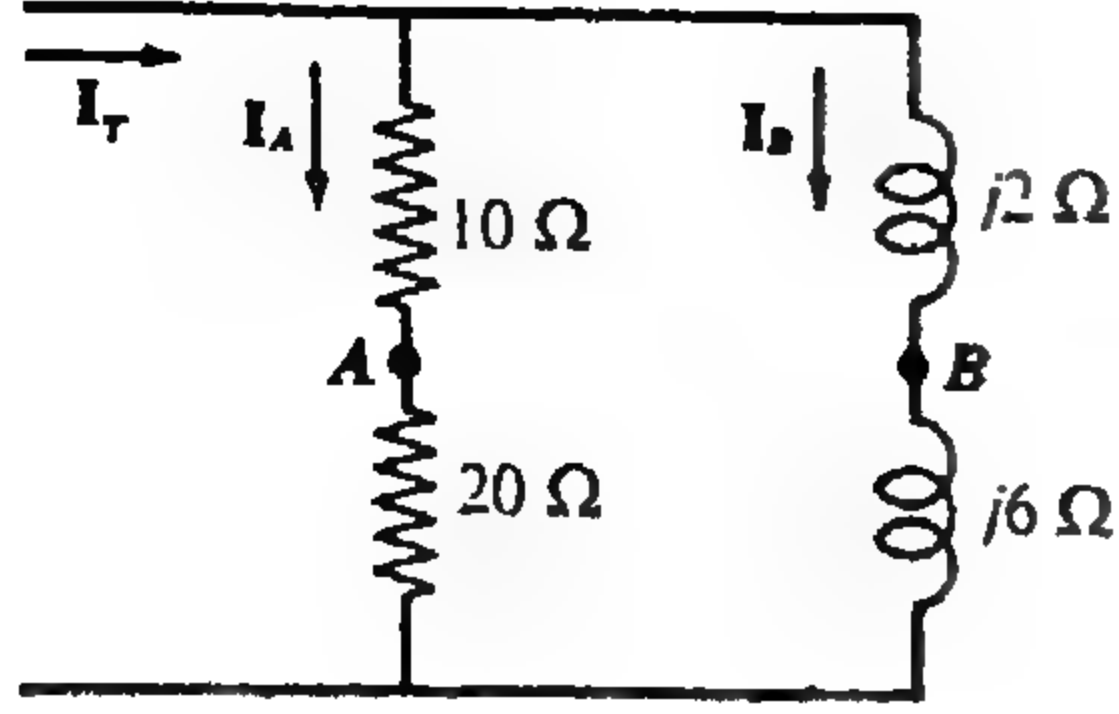
$$V_{YB} = I_B(j4) = 2 \angle -53.1^\circ (j4) = 8 \angle 36.9^\circ = 6.4 + j4.8 \text{ V}$$

$$V_{AB} = V_{AX} + V_{XY} + V_{YB} = -1.54 + j5.76 = 5.95 \angle 105^\circ \text{ V}$$

إذن

٢٠ - ٦ إذا كان التيار الكلي الداخل إلى دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٢٨ - ٦ $I_T = 18/45^\circ$ A ، فمبين فرق الجهد بين A و B . يعطى بالملاقة

من الشكل ٢٨ - ٦ نجد أن



شكل ٢٨ - ٦

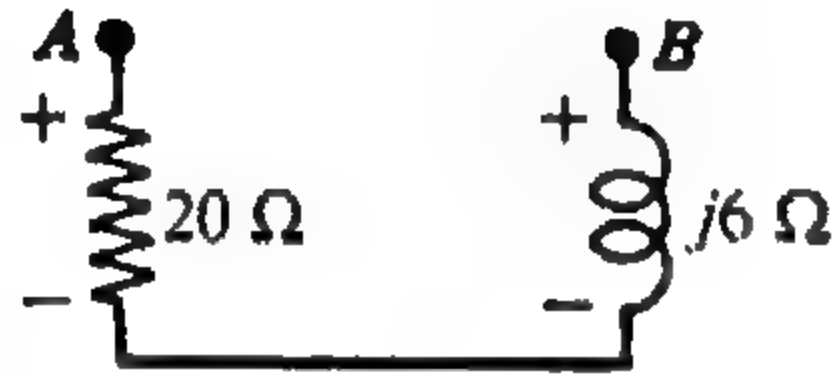
$$I_A = I_T \left(\frac{Z_B}{Z_A + Z_B} \right) = 18/45^\circ \left(\frac{j8}{30 + j8} \right) = 4.66/120^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_T \left(\frac{Z_A}{Z_A + Z_B} \right) = 18/45^\circ \left(\frac{30}{30 + j8} \right) = 17.5/30^\circ \text{ A}$$

والجهود عبر المقاومة 20Ω والممانعة $j6 \Omega$ هي على الترتيب

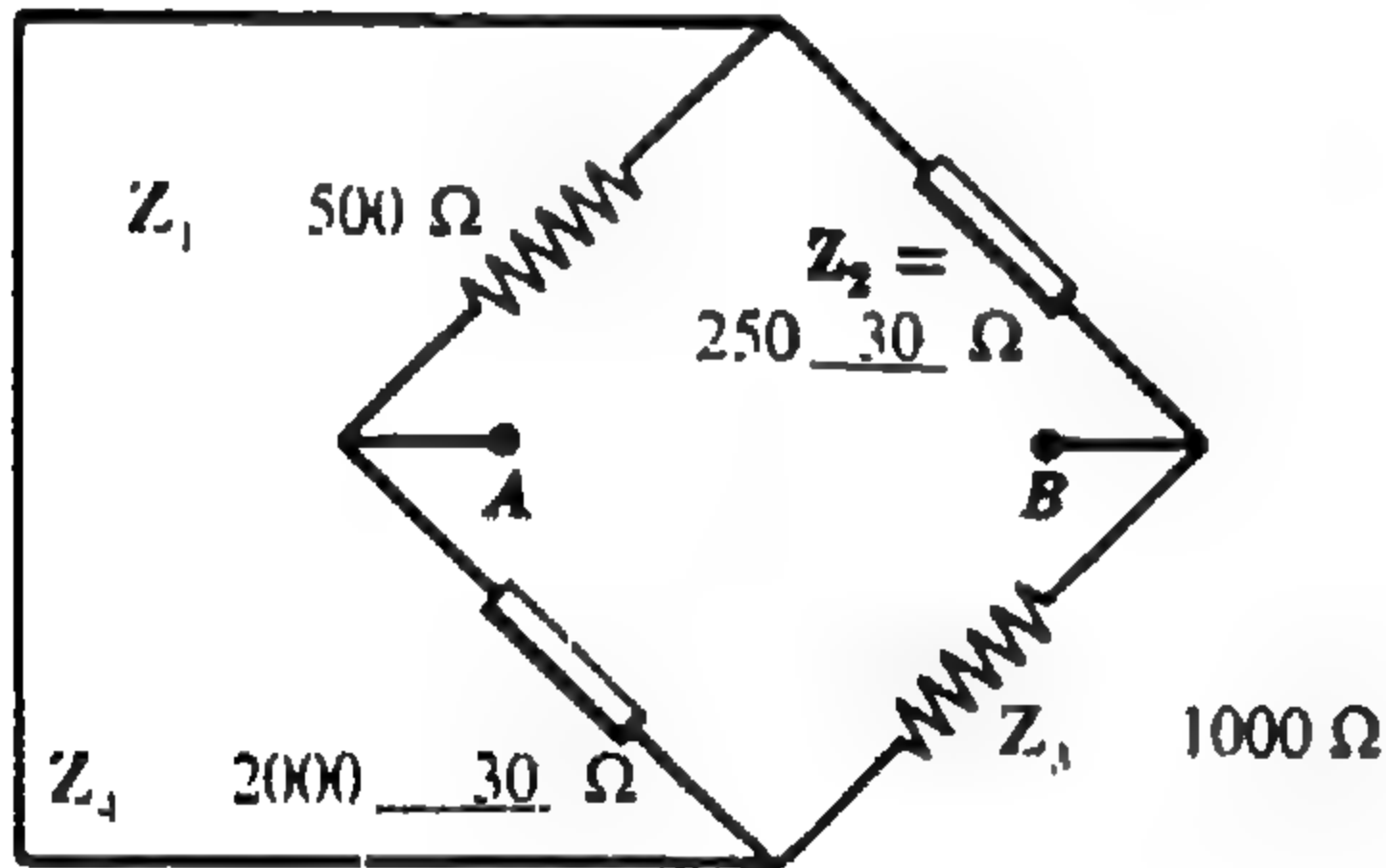
$$V_{j6} = I_B(j6) = 105/120^\circ \text{ V} \quad \text{و} \quad V_{20} = I_A(20) = 93.2/120^\circ \text{ V}$$

والرسم الموضح في الشكل ٢٩ - ٦ يسمح بجمع الجهود مع مراعاة القطبية السليمة . إذن



شكل ٢٩ - ٦

$$V_{AB} = (93.2/120^\circ) + (105/120^\circ) = 11.8/60^\circ \text{ V}$$



شكل ٤٠ - ٦

٢١ - ٦ عين المعاوقة المكافئة بين الطرفين A و B في دائرة القنطرة الموضحة في الشكل ٤٠ - ٦ .

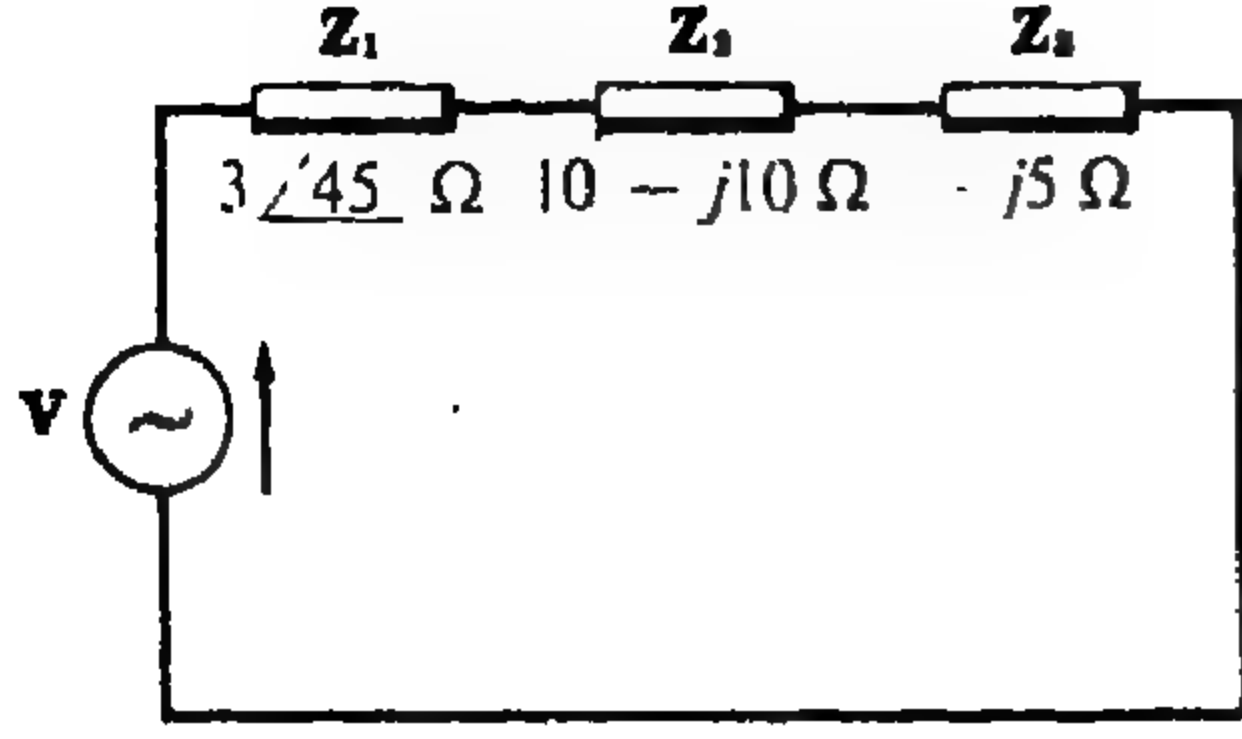
إن مجموعة Z_1 و Z_4 المتصلتين على التوازي متصلة على التوالي مع مجموعة Z_2 و Z_3 المتصلتين على التوازي . إذن

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \\ &= \frac{500(2000/-30^\circ)}{500 + 2000/-30^\circ} + \frac{250/30^\circ(1000)}{250/30^\circ + 1000} \\ &= 596/4.05^\circ \Omega \end{aligned}$$

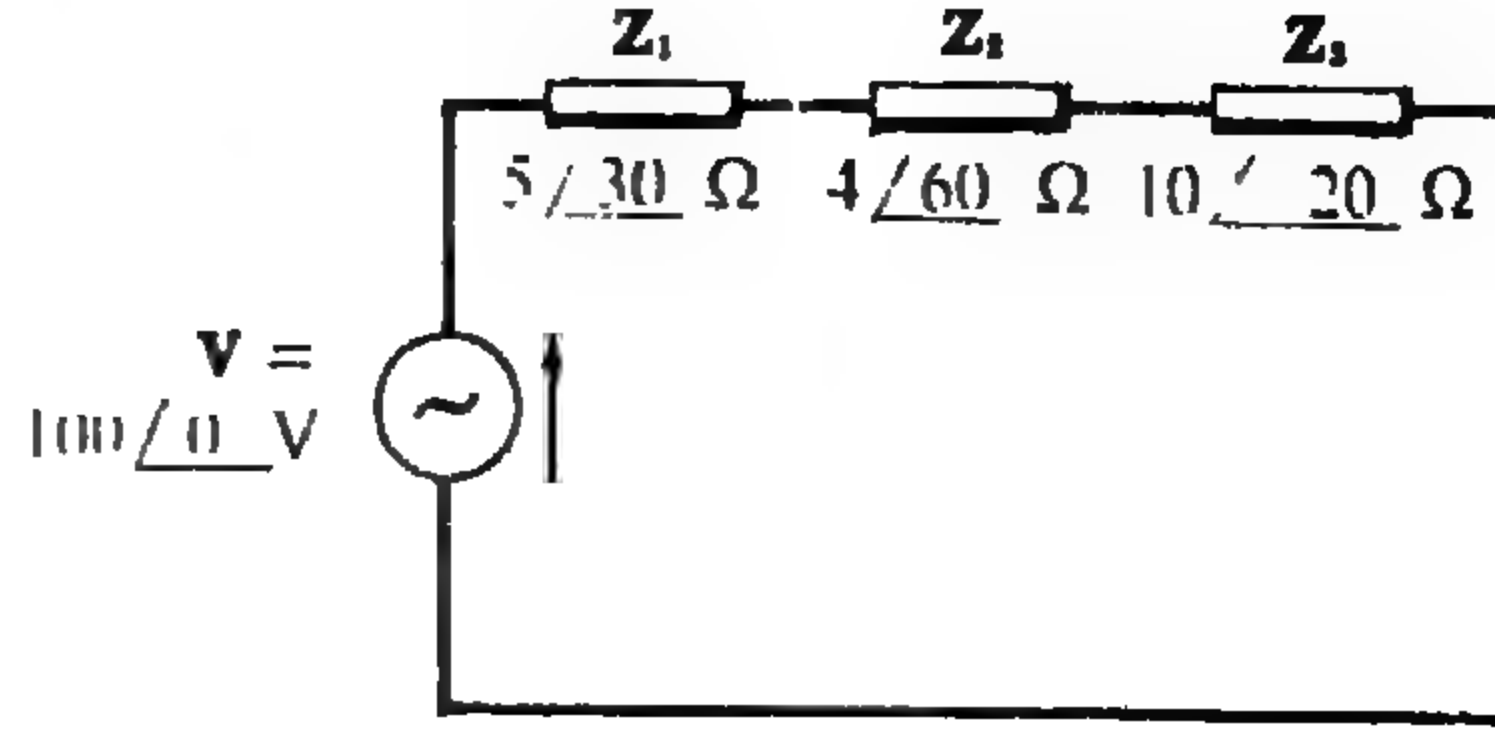
مسائل إضافية

٢٢ - ٦ في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٤١ - ٦ ، أوجد الجهد عبر كل معاوقة . بين بالشكل المطاور أن المجموع $V_1 + V_2 + V_3$ يساوي الجهد المؤثر $V = 100/0^\circ \text{ V}$.

$$\text{الجواب : } 31.4/20.8^\circ \text{ V}, 25.1/50.8^\circ \text{ V}, 62.9/29.2^\circ \text{ V}$$



شكل ٢٢-٦



شكل ٢٣-٦

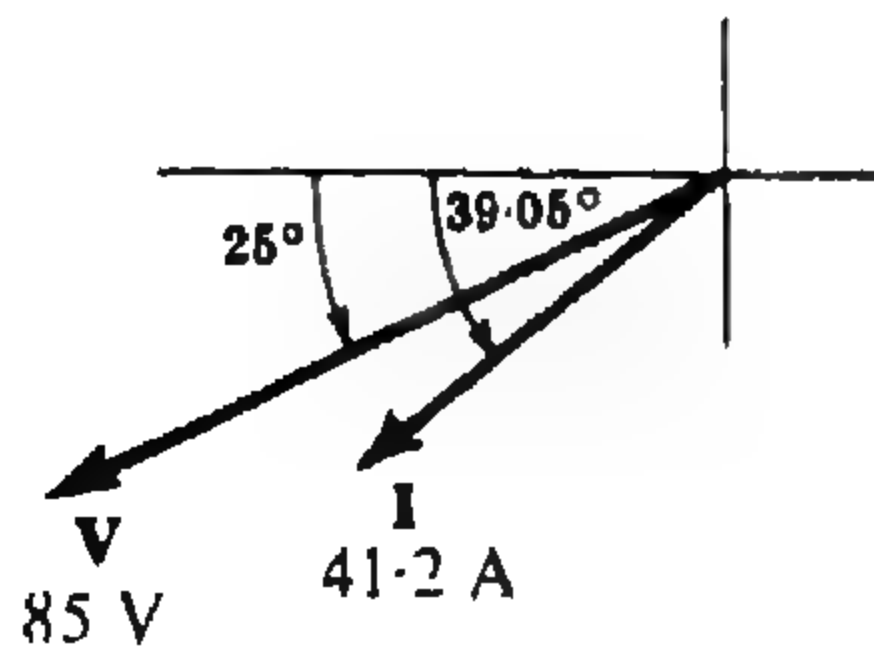
٢٢-٦ في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٢٢-٦ ، أوجد الجهد المؤثر V وذلك بفرض أن الهبوط في الجهد على Z_3 هو $27 \angle -10^\circ$
 الجواب : $126.5 \angle -24.6^\circ V$

٢٤-٦ وصلت ثلاث معاومات $Z_1 = 5 + j5 \Omega$ و $Z_2 = -j8 \Omega$ و $Z_3 = 4 \Omega$ على التوالي مع مصدر جهد مجهول V . فإذا كان الهبوط في الجهد على Z_3 هو $63.2 \angle 18.54^\circ V$ فأوجد I و V .
 الجواب : $I = 15.8 \angle 18.45^\circ A$, $V = 150 \angle 0^\circ V$

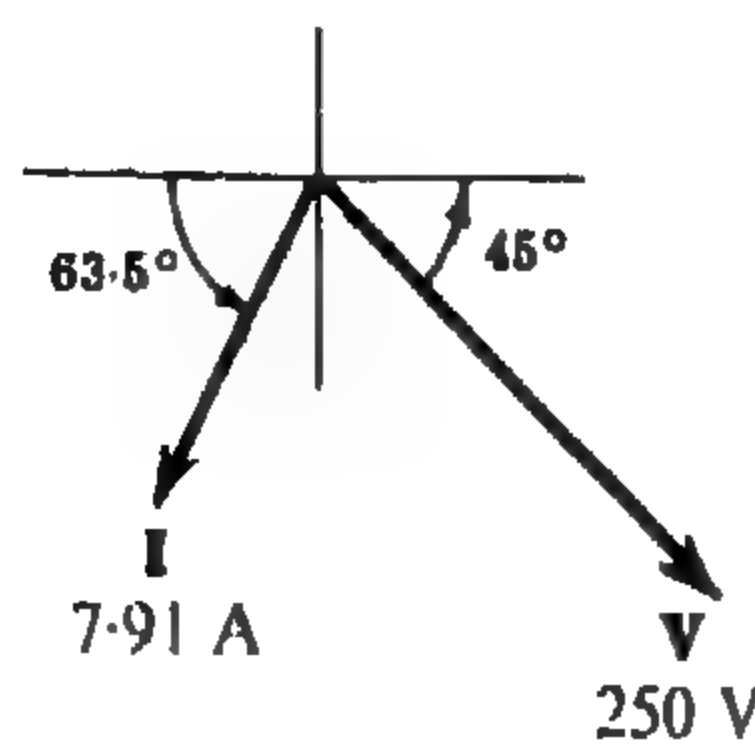
٢٥-٦ وصل مصدر جهد $V = 25 \angle 180^\circ V$ مع دائرة توالى تتكون من مقاومة ثابتة R وممانعة متغيرة X_L . وضعت قيمة الممانعة الحثية عند قيمة اختيارية فكان التيار $I = 11.15 \angle 153.4^\circ A$ فإذا عدلت قيمة X_L بعد ذلك ليصبح التيار سابقاً بزاوية 60° ، فأوجد القيمة الفعالة للتيار في الحالة الثانية .
 الجواب : $6.25 A$

٢٦-٦ إذا كان الهبوط في الجهد على الممانعة $j2 \Omega$ في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٢٣-٦ هو $V_{j2} = 13.04 \angle 15^\circ V$ فأوجد Z .
 الجواب : $R = 4 \text{ ohms}$, $X_L = 15 \text{ ohms}$

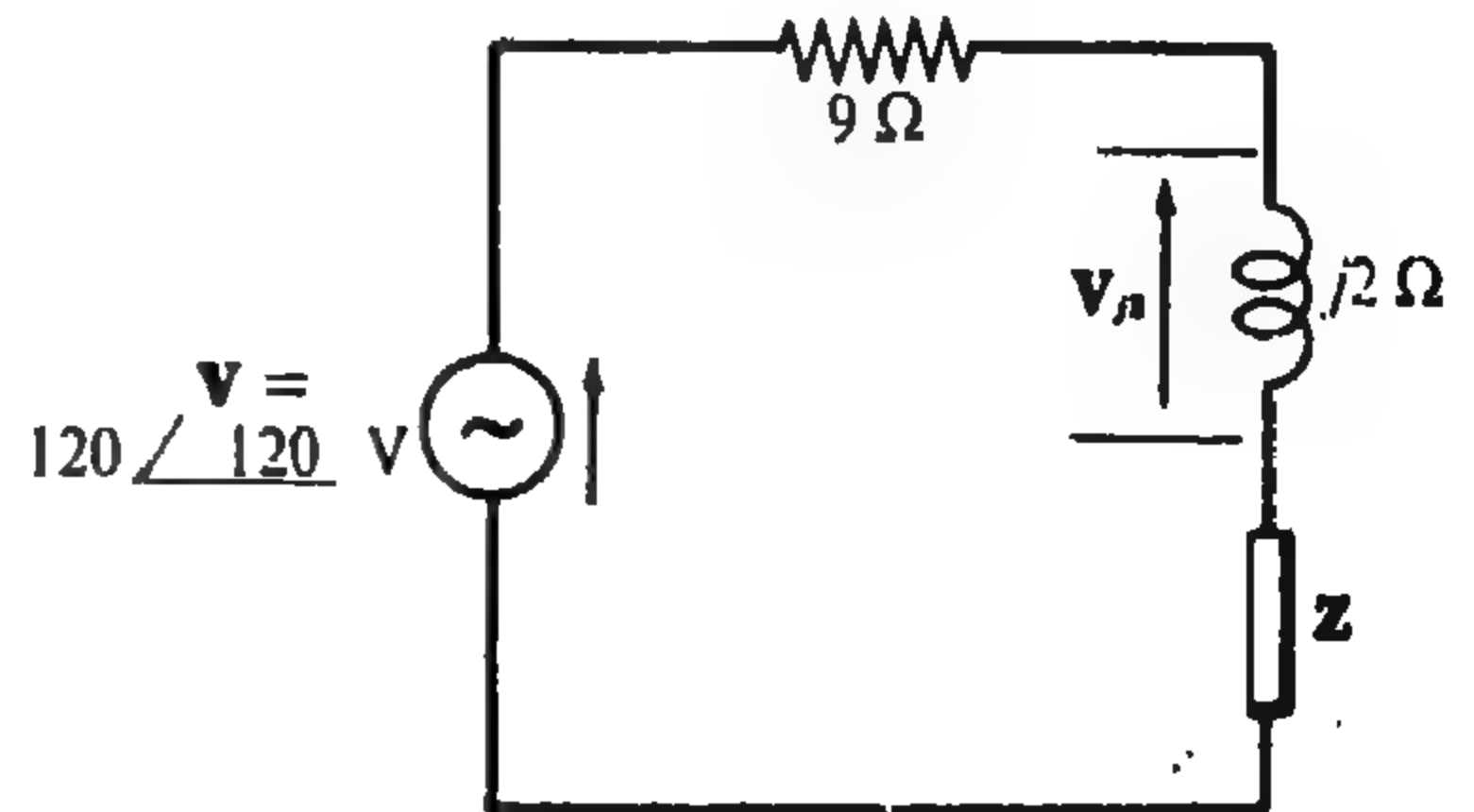
٢٧-٦ دائرة توالى تتكون من مقاومة $R = 1 \text{ ohm}$ وممانعة حثية $jX_L = j4 \Omega$ ومعاوقة ثالثة Z . فإذا كان الجهد المؤثر والتيار المار هما $V = 50 \angle 45^\circ V$ و $I = 11.2 \angle 108.4^\circ A$ ، فأوجد المعاوقة Z .
 الجواب : $Z = 1 - j8 \Omega$



شكل ٢٨-٦



شكل ٢٩-٦



شكل ٣٠-٦

٢٨ - ٦ ثلاثة عناصر لدائرة توالى أحدهما $L = 0.02 \text{ H}$ فإذا كان الشكل ٦ - ٤٤ يوضح الشكل المطاور للجهد والتيار وكانت $\omega = 500 \text{ rad/s}$ فما هي العناصر الأخرى في الدائرة ؟

الجواب : $R = 10 \text{ ohms}$, $L = 0.04 \text{ H}$

٢٩ - ٦ أوجد Y و Z التي تتفق والشكل ٦ - ٤٥

الجواب : $Z = 2 - j0.5 \Omega$, $Y = 0.47 + j0.1175 \text{ S}$

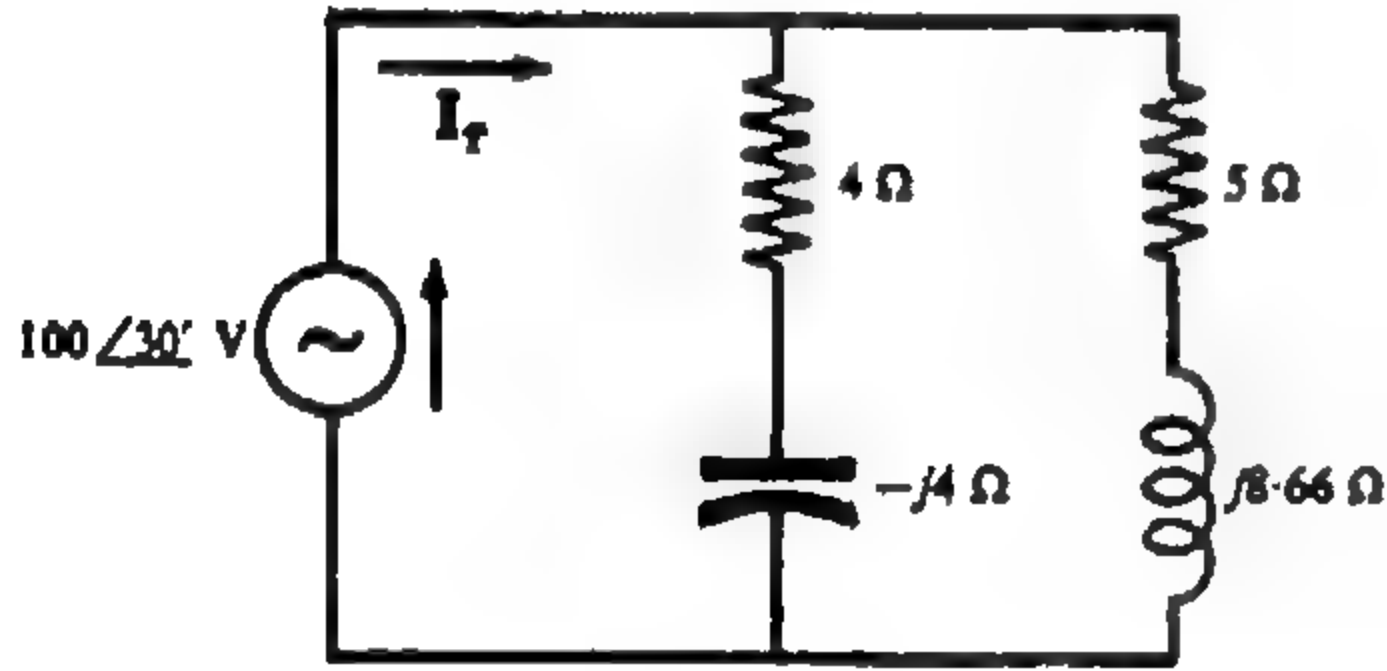
٣٠ - ٦ تميز ثوابت ملف R و L بتوصيل الملف على التوالي مع مقاومة 25Ω ومصدر للجهد 120 V بذبذبة قدرها 60 Hz ثم بقراءة الجهود عبر المقاومة والملف . أوجد R و L إذا كان $V_R = 70.8 \text{ V}$ و $V_{coil} = 86 \text{ V}$.

الجواب : $L = 79.6 \text{ mH}$, $R = 5 \Omega$

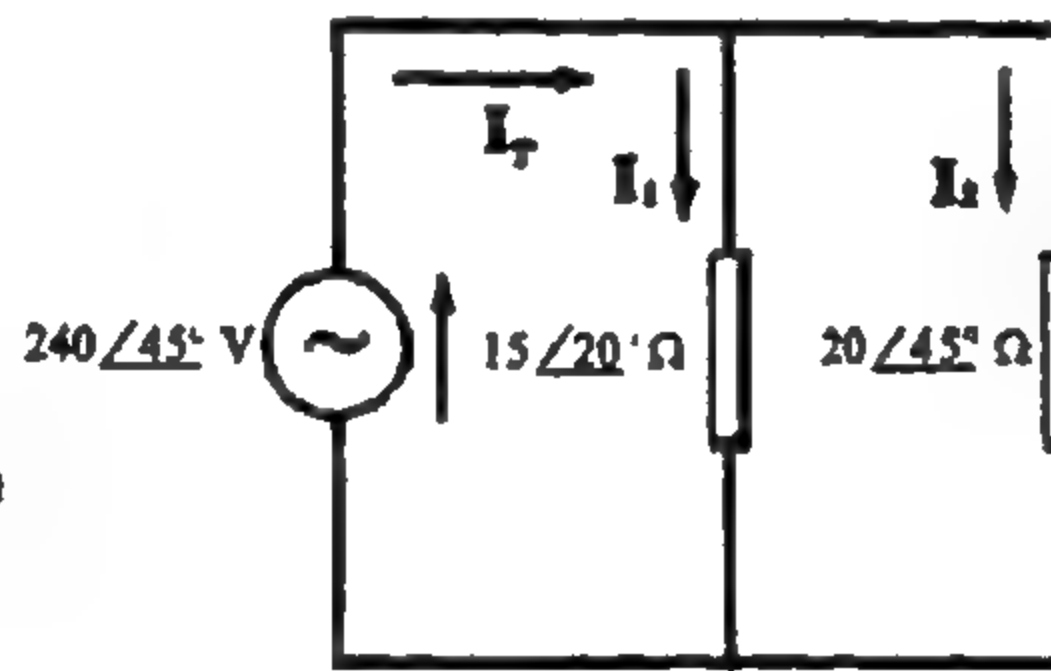
٣١ - ٦ وصلت مجموعة توالى من R و C على التوالي مع مقاومة 15Ω . وعندما أثر على المجموعة كلها جهد 120 V بذبذبة 60 Hz ، كانت القيم الفعالة للجهود عبر مجموعة RC وعبر المقاومة النقية هي 87.3 V و 63.6 V على الترتيب . أوجد R و C .

الجواب : $R = 5 \Omega$, $C = 132.5 \mu\text{F}$

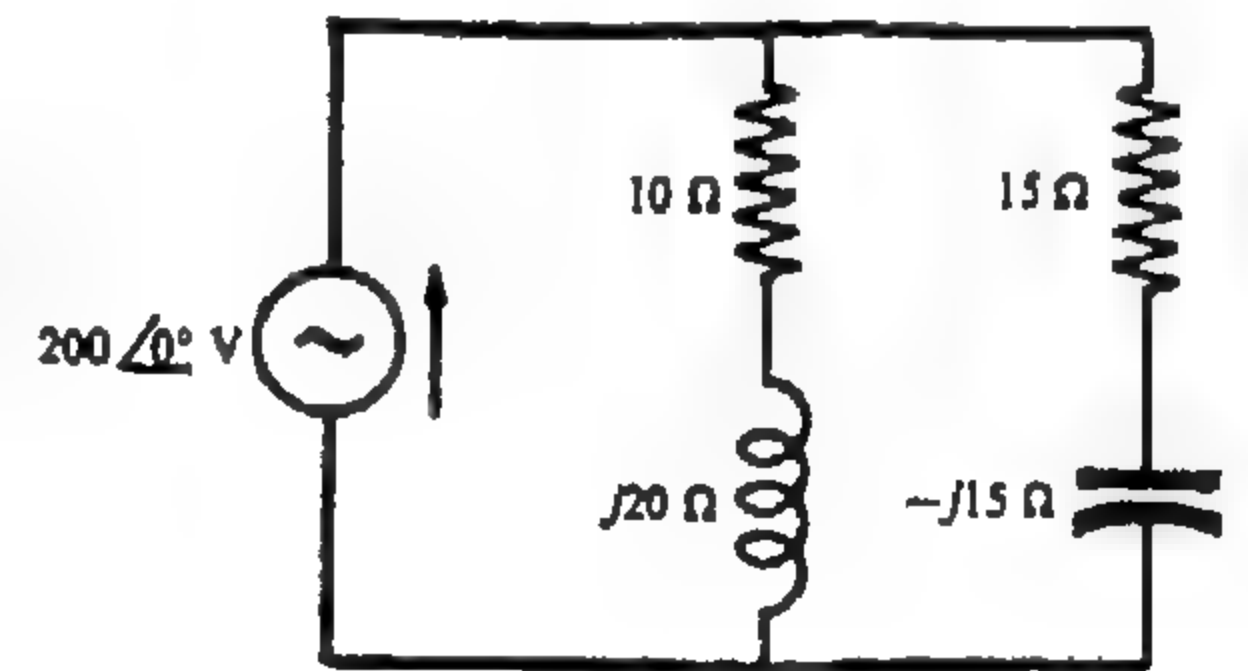
٣٢ - ٦ أوجد Y_{eq} و Z_{eq} للفرعين المتصلين على التوازي في الدائرة الموضحة في الشكل ٦ - ٤٦ . احسب التيار في كل من الدائرتين المكافئتين . الجواب : $I_T = 10.75 \angle -7.15^\circ \text{ A}$, $Y_{eq} = 0.0538 \angle -7.15^\circ \text{ S}$, $Z_{eq} = 18.6 \angle 7.15^\circ \Omega$



شكل ٦ - ٤٨



شكل ٦ - ٤٧



شكل ٦ - ٤٦

٣٣ - ٦ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٦ - ٤٧ ، أوجد تيارى الفرعين والتيار الكلى . ارسم الشكل المطاور للتيار لتوضيح I_1 و I_2 و I_T .

الجواب : $16 \angle 25^\circ \text{ A}$, $12 \angle 0^\circ \text{ A}$, $27.4 \angle 14.3^\circ \text{ A}$

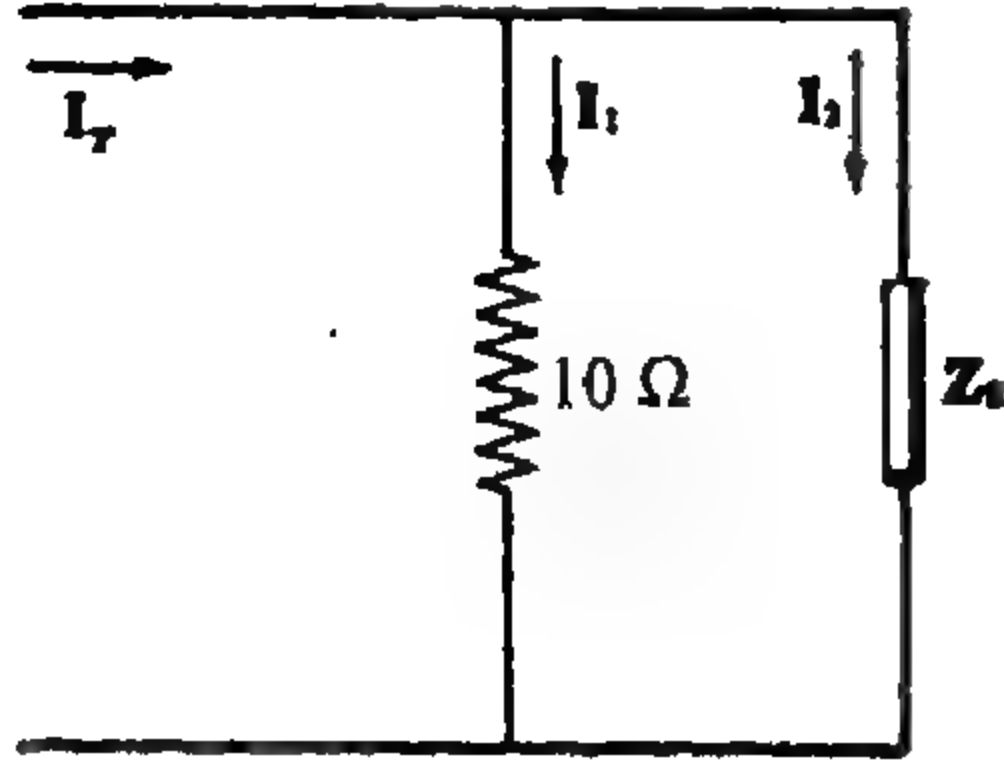
٣٤ - ٦ أوجد I_T لفرعى دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٦ - ٤٨ . أوجد أيضاً Z_{eq} من النسبة V/I_T ثم قارنها ، بالعلاقة $Z_{eq} = Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)$

الجواب : $I_T = 17.9 \angle 42.4^\circ \text{ A}$, $Z_{eq} = 5.59 \angle -12.4^\circ \Omega$

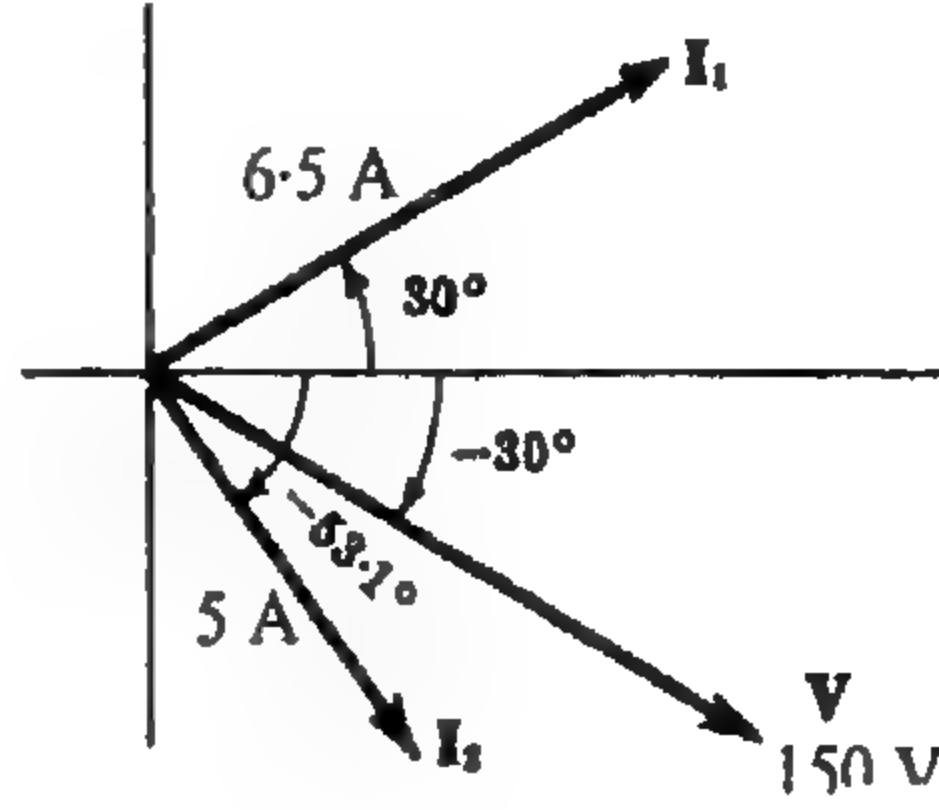
٣٥ - ٦ إذا كان الشكل المطاور لدائرة تتكون من فرعين على التوازي هو كما في الشكل ٦ - ٤٩ ، فأوجد معاوقى الفرعين Z_1 و Z_2 .

الجواب : $Z_1 = 2.5 + j20 \Omega$, $Z_2 = 15 \angle 90^\circ \Omega$

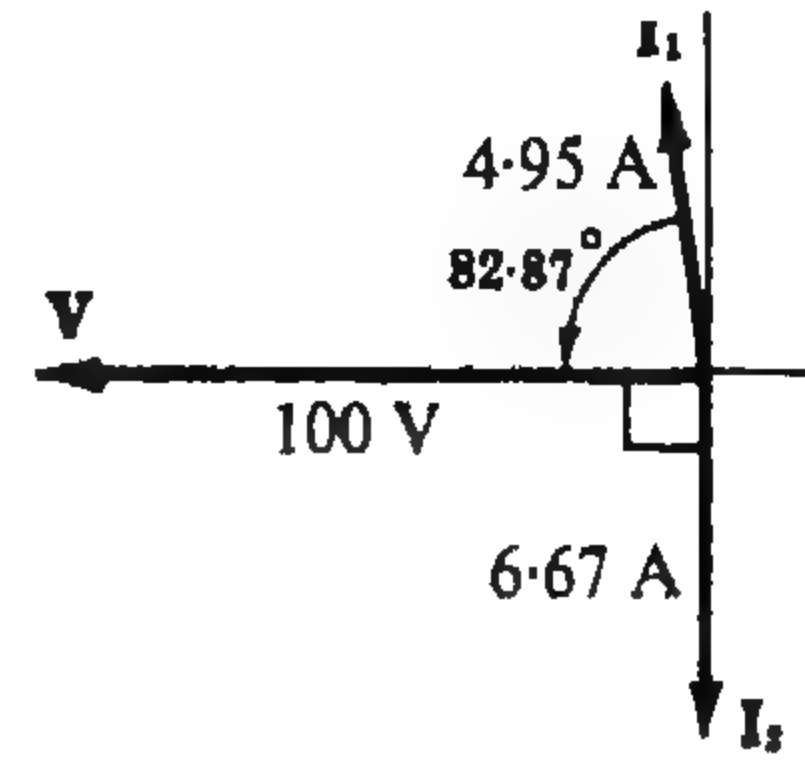
٣٦ - ٦ دائرة تتكون من فرعين على التوازي فإذا كان الجهد المؤثر والتيار المار هما كما هو موضح في الشكل ٥٠ - ٦ . فأوجد معاويتي الفرعين Z_1 و Z_2 .
الجواب : $Z_1 = 27.6 \angle -41.75^\circ \Omega$ ، $Z_2 = 11.55 \angle 20^\circ \Omega$.



شكل ٥١ - ٦



شكل ٥٠ - ٦

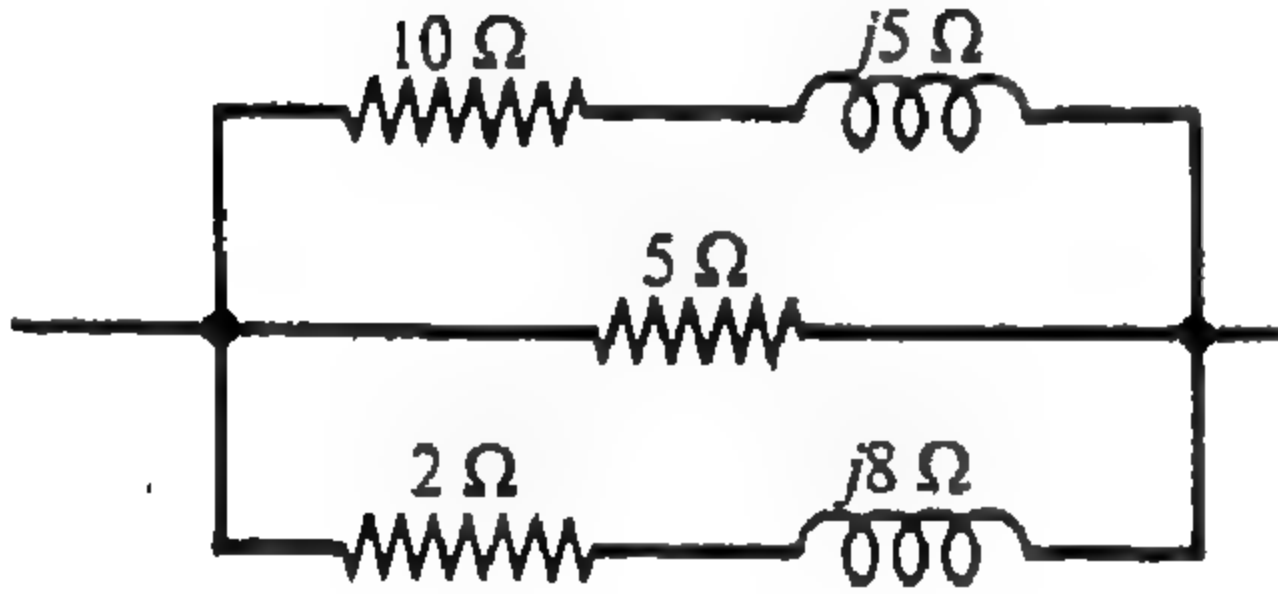


شكل ٤٩ - ٦

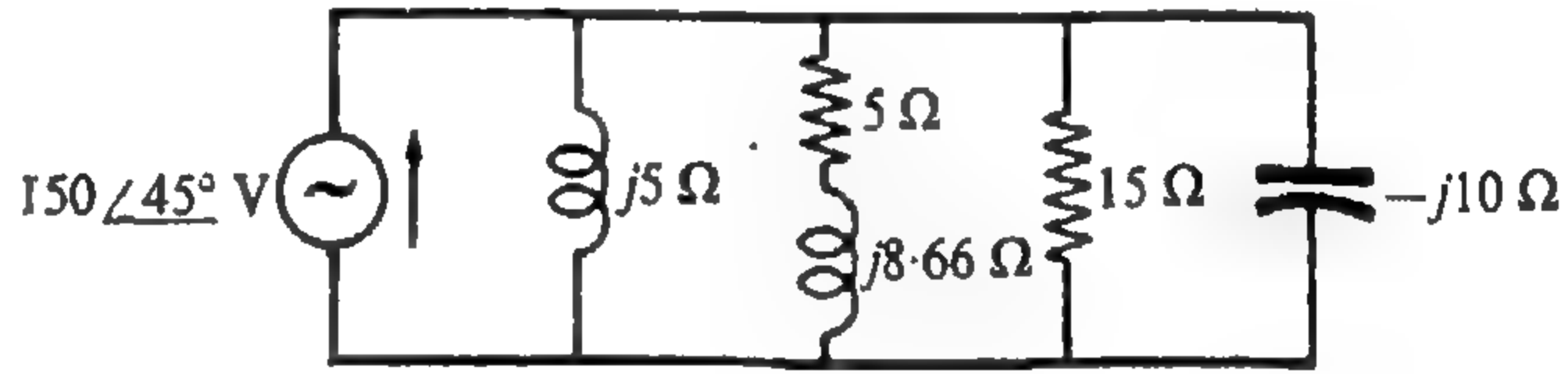
٣٧ - ٦ للشكل ٥١ - ٦ إذا أعطيت $I_1 = 2 \angle 30^\circ$ A و $I_T = 4.47 \angle 33.4^\circ$ A ، فأوجد Z_2 .
الجواب : $Z_2 = -j5 \Omega$.

٣٨ - ٦ استخدم طريقة المساحة للحصول على Y_{eq} و Z_{eq} لدائرة التوازي الموضحة في الشكل ٥٢ - ٦ والتي تتكون من أربعة أفرع على التوازي . احسب أيضاً I_T من الدائرة المكافئة .

الجواب : $Y_{eq} = 0.22 \angle -58^\circ$ S , $Z_{eq} = 4.55 \angle 58^\circ \Omega$, $I_T = 33 \angle -13^\circ$ A



شكل ٥٣ - ٦



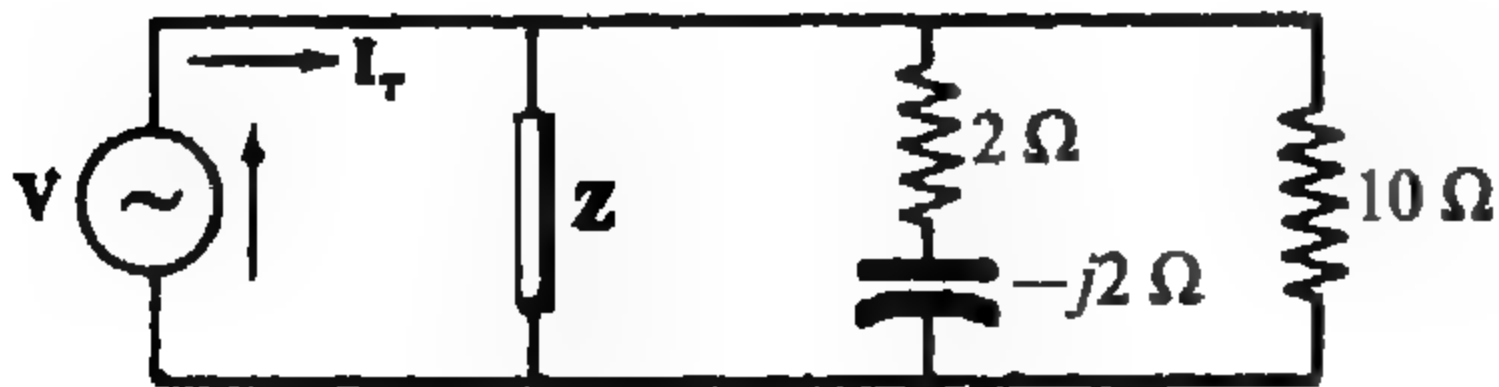
شكل ٥٢ - ٦

٣٩ - ٦ أوجد Y_{eq} و Z_{eq} للثلاثة أفرع المتصلة على التوازي في الدائرة الموضحة في الشكل ٥٣ - ٦ .

الجواب : $Z_{eq} = 2.87 \angle 27^\circ \Omega$, $Y_{eq} = 0.348 \angle -27^\circ$ S

٤٠ - ٦ في الشكل ٥٤ - ٦ ، إذا أعطيت $V = 50 \angle 30^\circ$ V و $I_T = 27.9 \angle 57.8^\circ$ A ، فمى Z .

الجواب : $Z = 5 \angle -30^\circ \Omega$.



شكل ٥٥ - ٦



شكل ٥٤ - ٦

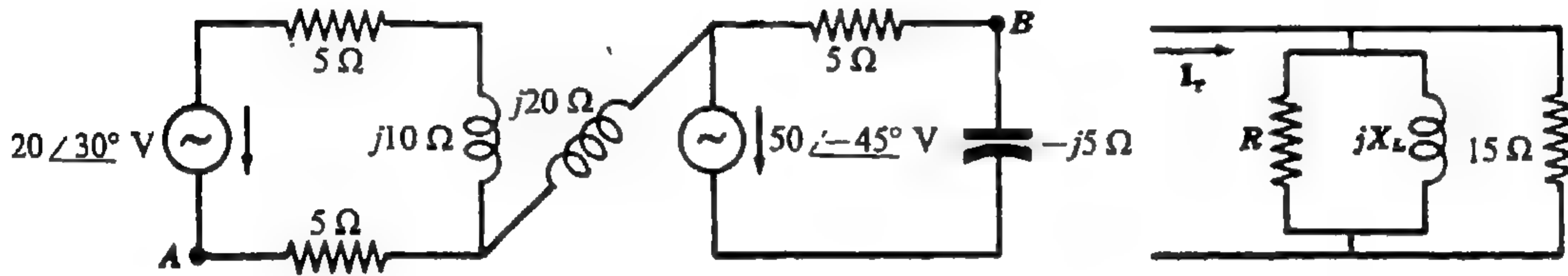
٤١ - ٦ في الشكل ٥٥ - ٦ ، إذا أعطيت $V = 100 \angle 90^\circ$ V و $I_T = 50.2 \angle 102.5^\circ$ A ، فمى Z .

الجواب : $Z = 5 \angle 45^\circ \Omega$.

٤٢-٦ وصلت مجموعة توالي تتكون من R و C على التوازي مع مقاومة 20Ω . فإذا نتج عن مصدر جهد ذبذبة 60 Hz تيار كل قيمته 7.02 A ، وكان التيار المار في المقاومة 20Ω هو 6 A والمار في الفرع RC هو 2.3 A .
 فعين R و C .
 الجواب : $R = 15\Omega$ و $C = 53.1\mu\text{F}$

٤٣-٦ عين ثوابت الدائرة R و X_L الموضحة في الشكل ٥٦-٦ ، علماً بأن القيمة الفعالة للتيار الكلي هي 29.9 A ولتيار المار في المقاومة النقية هي 8 A ولتيار المار في فرع التوازي RL هي 22.3 A .
 الجواب : $R = 5.8\text{ ohms}$, $X_L = 14.5\text{ ohms}$

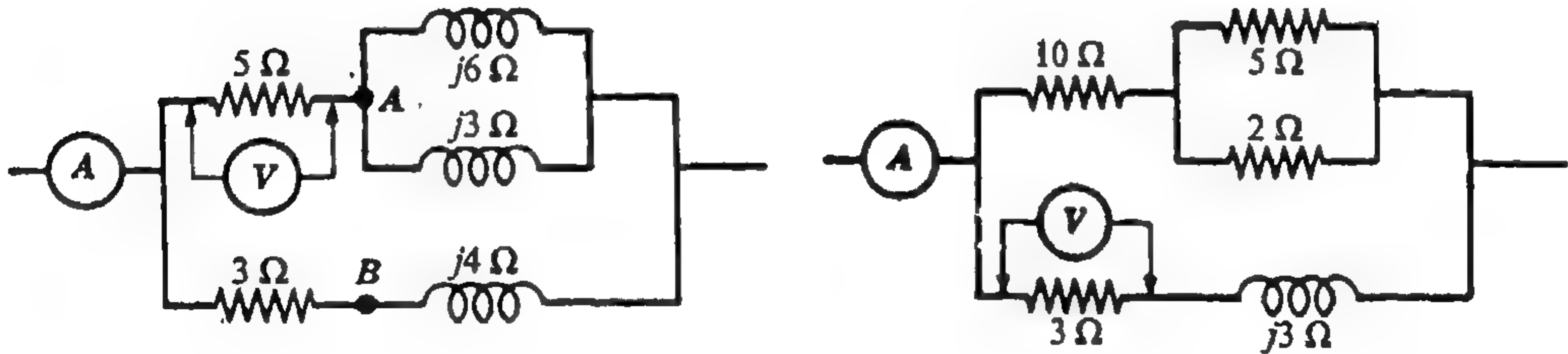
٤٤-٦ في الدائرة الموضحة في الشكل ٥٧-٦ ، أوجد الجهد V_{AB} .
 الجواب : $28.52/183.68^\circ\text{ V}$



شكل ٥٧-٦

شكل ٥٦-٦

٤٥-٦ إذا وصل فولتميتر عبر المقاومة 3Ω الموضحة في الشكل ٥٨-٦ فقرأ 45 V ، فإلى قراءة الأميتر ؟
 الجواب : 19.4 A



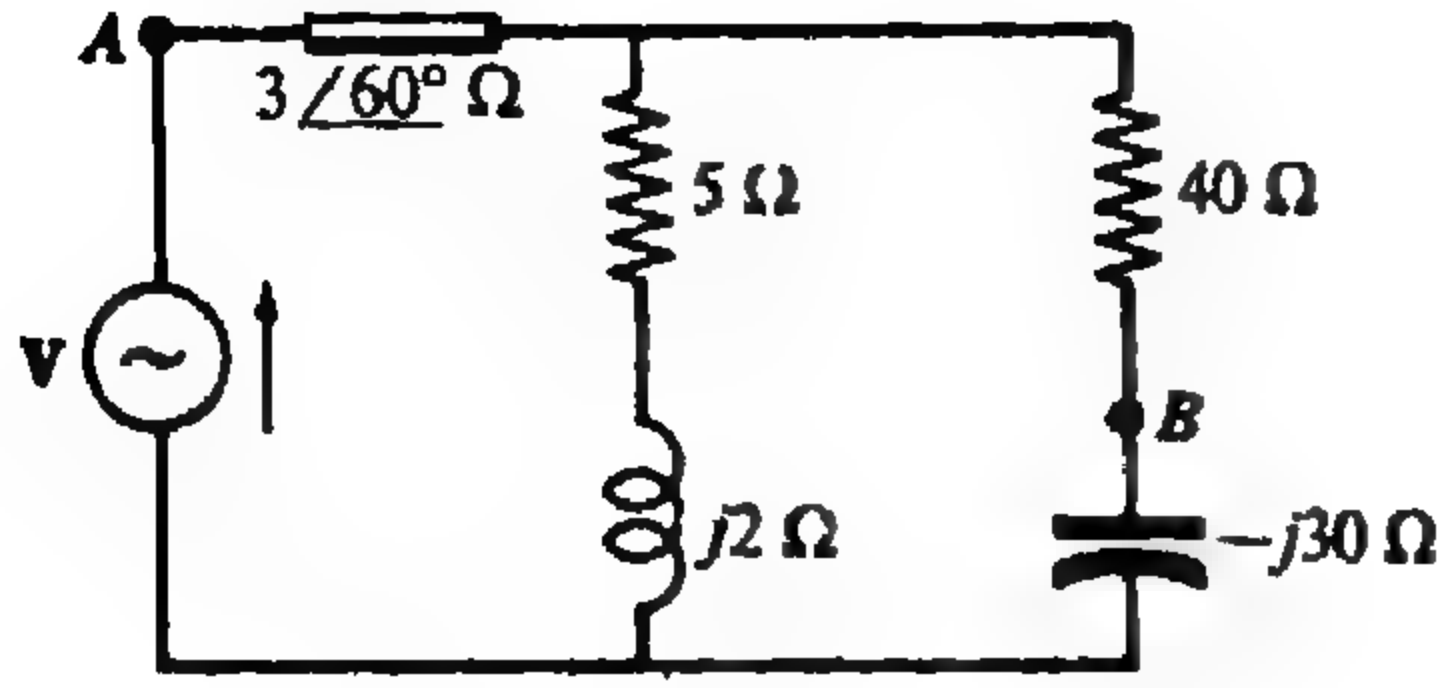
شكل ٥٩-٦

شكل ٥٨-٦

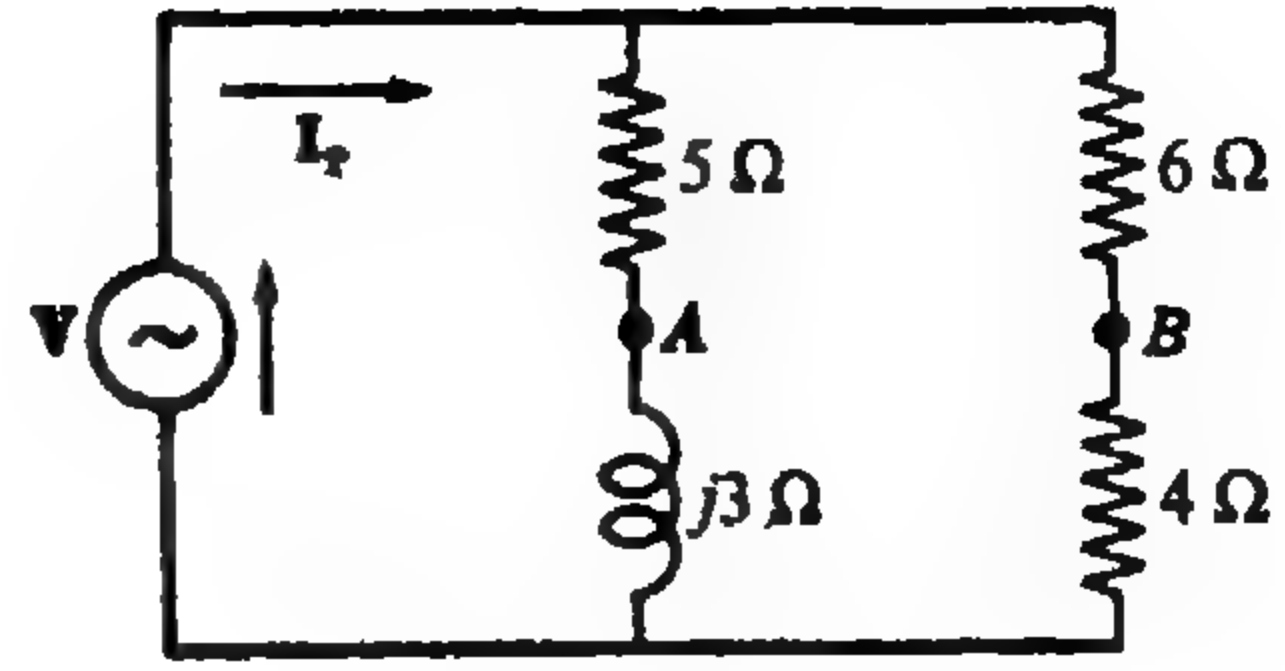
٤٦-٦ إذا كانت قراءة الفولتميتر المتصل عبر المقاومة 5Ω الموجودة في الدائرة الموضحة في الشكل ٥٩-٦ هي 45 V فأوجد قراءة الأميتر .
 الجواب : 18 A

٤٧-٦ أوجد القيمة الفعالة للجهد بين النقطتين A و B في دائرة المسألة ٤٦-٦ .
 الجواب : 25.2 V

٤٨-٦ إذا كانت القيمة الفعالة للجهد بين النقطتين A و B في الدائرة الموضحة في الشكل ٦٠-٦ هي 25 V ، فأوجد القيم الفعالة المقابلة لـ V و I_T . إرشاد : افرض أية قيمة مناسبة ولتكن V' ثم عين القيمة المقابلة V'_{AB} ومنها
 $V/25 = V'/V'_{AB}$.
 الجواب : 54.3 V , 14.2 A



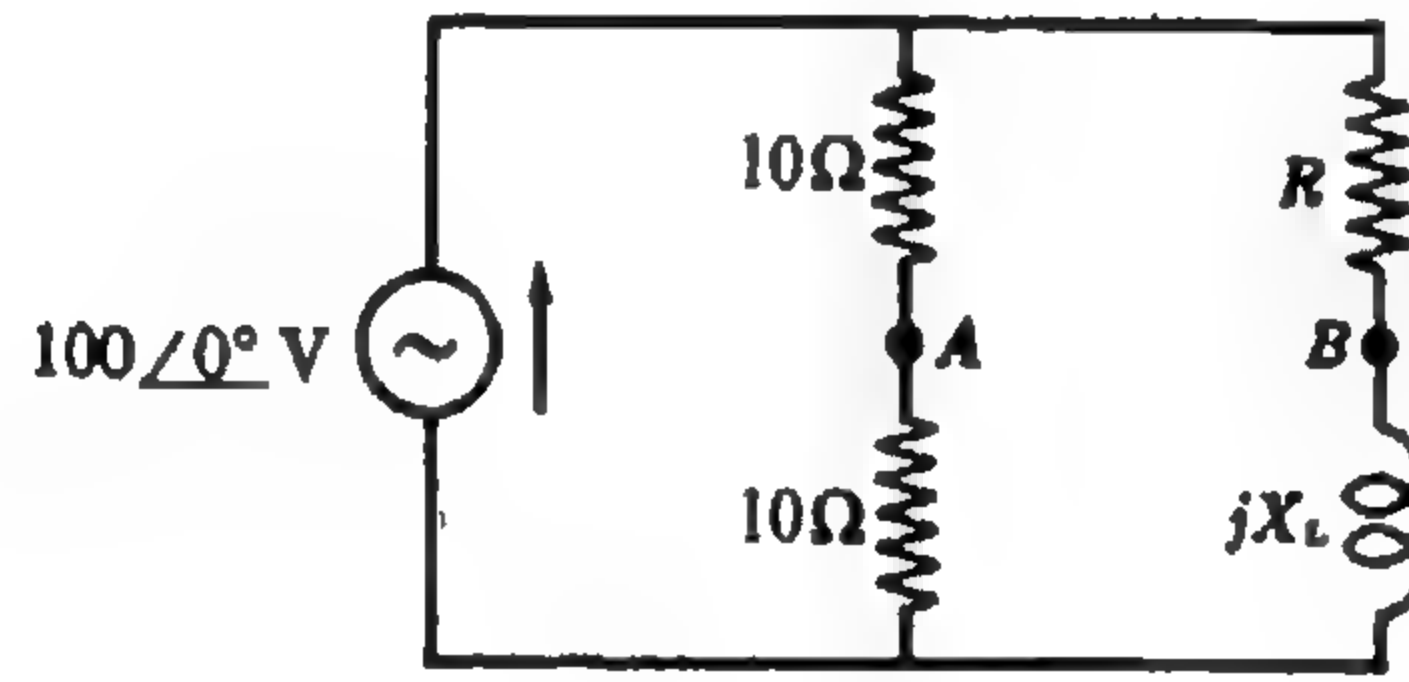
شكل ٦-٦١



شكل ٦-٦٠

٦-٤٩ إذا كان الجهد بين النقطتين A و B في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٦-٦١ هو 50 V ، فأوجد القيمة الفعالة لمصدر الجهد .
الجواب : 54.6 V

٦-٥٠ في الدائرة الموضحة في الشكل ٦-٦٢ ، افرض أية قيم مناسبة لـ R و X_L لتثبت أنه لأية قيم لـ R و X_L تكون القيمة الفعالة لـ V_{AB} هي 50 V



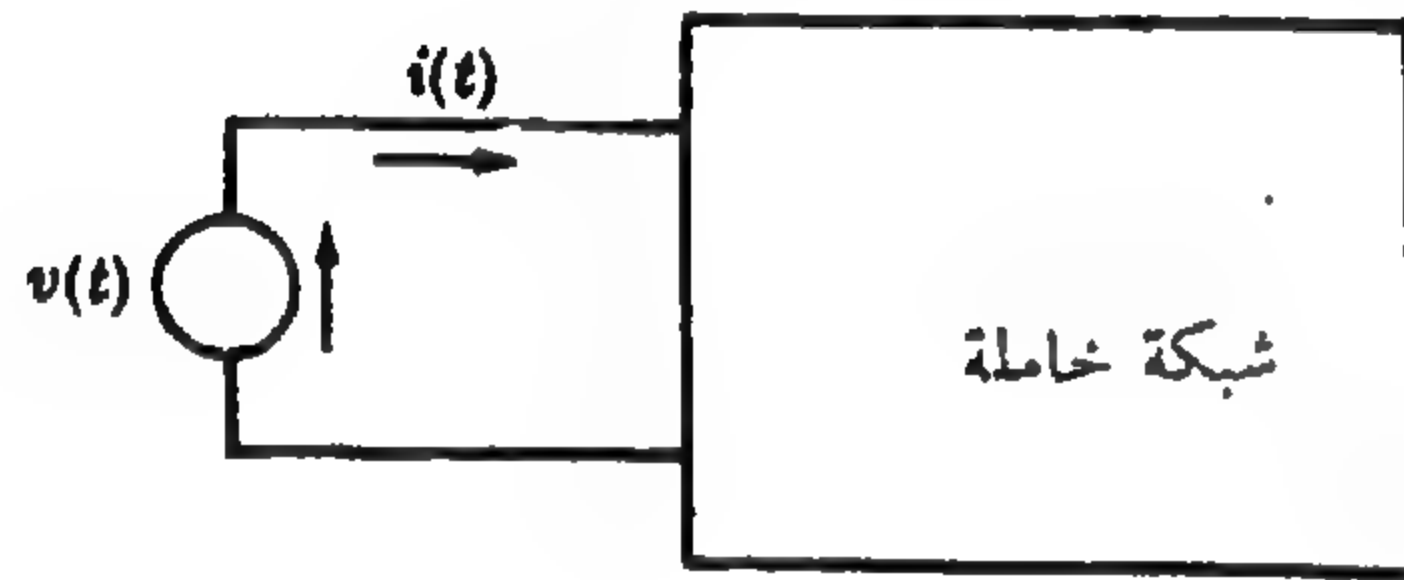
شكل ٦-٦٢

الفصل السابع

القدرة ، وتصحيح عامل القدرة

مقدمة :

القدرة من الأشياء التي نهتم بها دائما في كثير من الأجهزة الكهربائية . فمثلا ، نهتم بالقدرة الناتجة من مولد التيار المتردد ، وكذلك القدرة المعطاة لمحرك السيارة الكهربائي ، أو القدرة التي يعطيها جهاز إرسال الراديو أو التلفزيون .



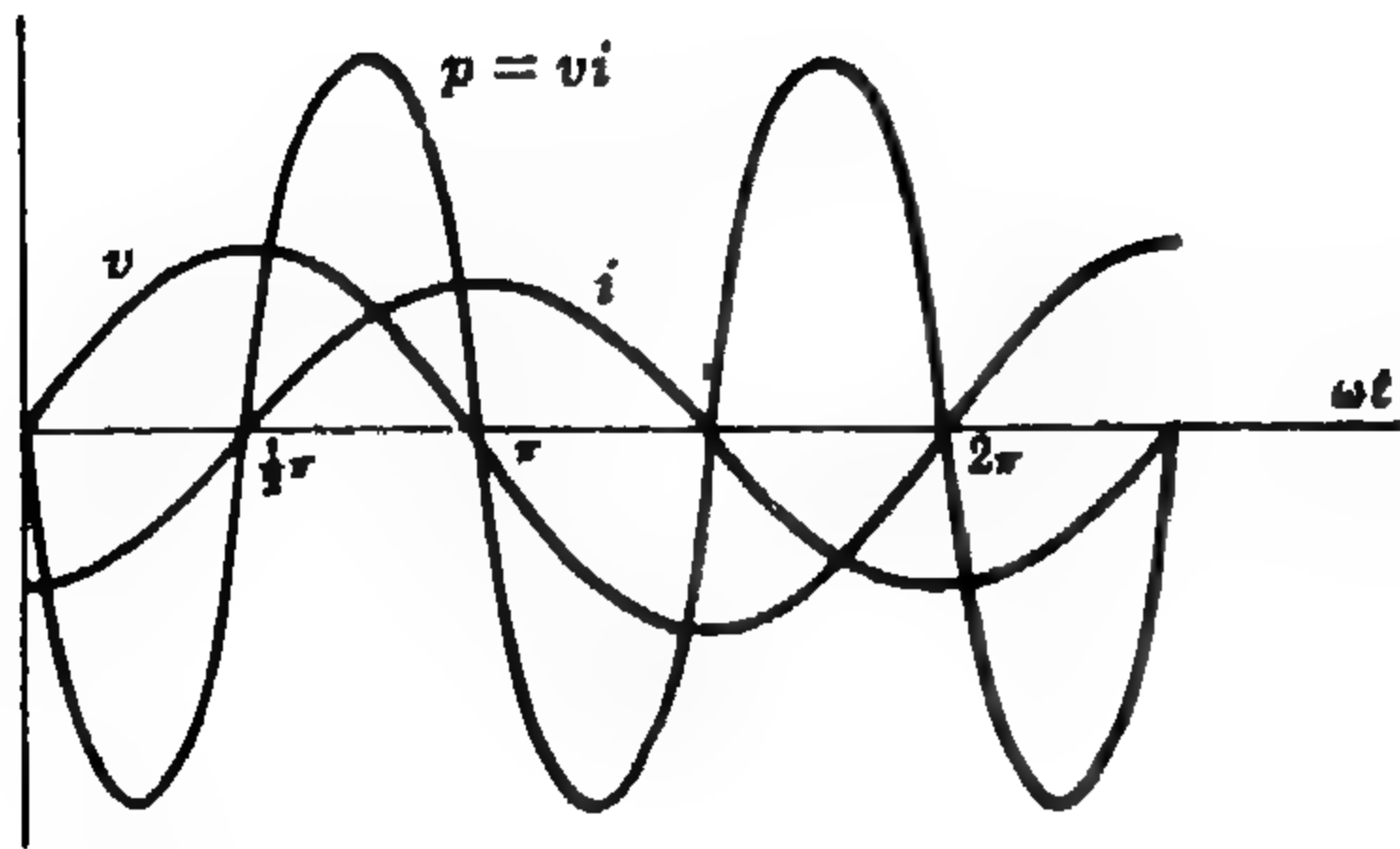
شكل ٧ - ١

في الشكل ٧ - ١ ، إذا كان الجهد دالة في الزمن ، فإن التيار الناتج يكون أيضا دالة من الزمن وقيمة التيار تعتمد على العناصر الموجودة في الشبكة الخاملة . ويعرف حاصل ضرب الجهد في التيار عند أي لحظة بالقدرة اللحظية ويعطى بالمعادلة .

$$p = vi$$

والقدرة p يمكن أن تأخذ قيما سالبة أو موجبة وذلك على حسب الفترة الزمنية المعتبرة . والقدرة الموجبة تعني انتقال الطاقة من المصدر إلى الشبكة ، بينما تعني القدرة السالبة انتقال الطاقة من الشبكة إلى المصدر .

القدرة في الحالة الجيبية المستقرة • متوسط القدرة (P)



شكل ٧ - ٢

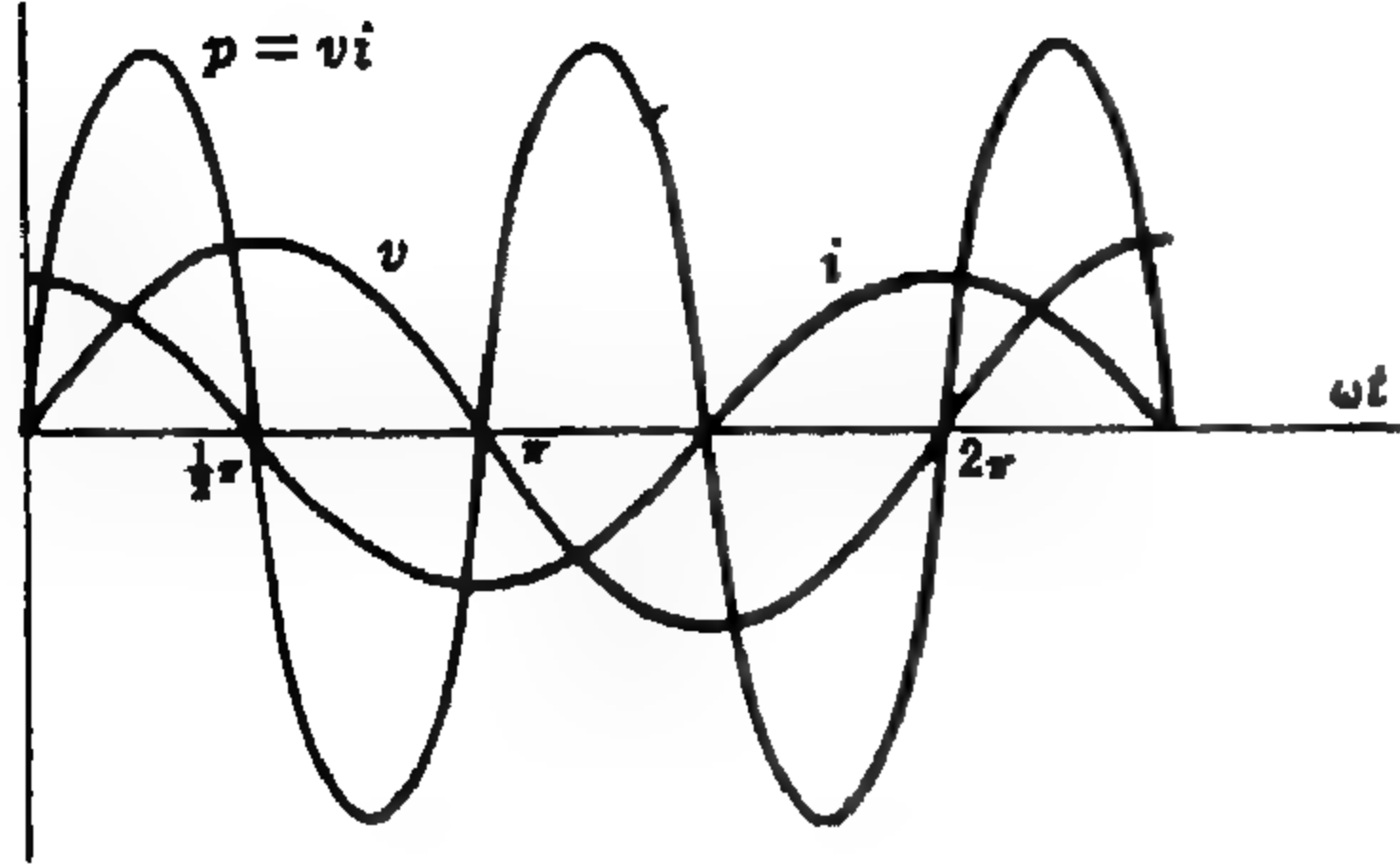
اعتبر الحالة المثالية التي فيها تتكون الشبكة الخاملة من عنصر حثي ، ثم أثر على الشبكة بجهد جيبى على الشكل $v = V_m \sin \omega t$. فيكون التيار الناتج على الشكل $i = I_m \sin (\omega t - \pi/2)$. وبذلك تكون القدرة عند أي لحظة زمنية .

$$p = vi = V_m I_m (\sin \omega t)(\sin \omega t - \pi/2)$$

$$\sin (\omega t - \pi/2) = -\cos \omega t \quad \text{وبما أن}$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x \quad \text{و إذن .}$$

$$p = -\frac{1}{2} V_m I_m \sin 2\omega t$$



شكل ٧ - ٣

يوضح الشكل ٧ - ٣ النتيجة التي حصلنا عليها . فعندما يكون كل من v و i موجبا فإن القدرة تكون موجبة ، وفي هذه الحالة تنتقل الطاقة من المصدر إلى العنصر الحثي . أما عندما يكون لكل من v و i إشارة معاكسة فإن القدرة تكون سالبة ولذلك تعود الطاقة من العنصر الحثي إلى المصدر .

والقدرة لها ذبذبة ضعف ذبذبة الجهد أو التيار . ومتوسط القدرة الذي نرمز له بالرمز P يساوى صفرا وذلك عندما يحسب على دورة كاملة .

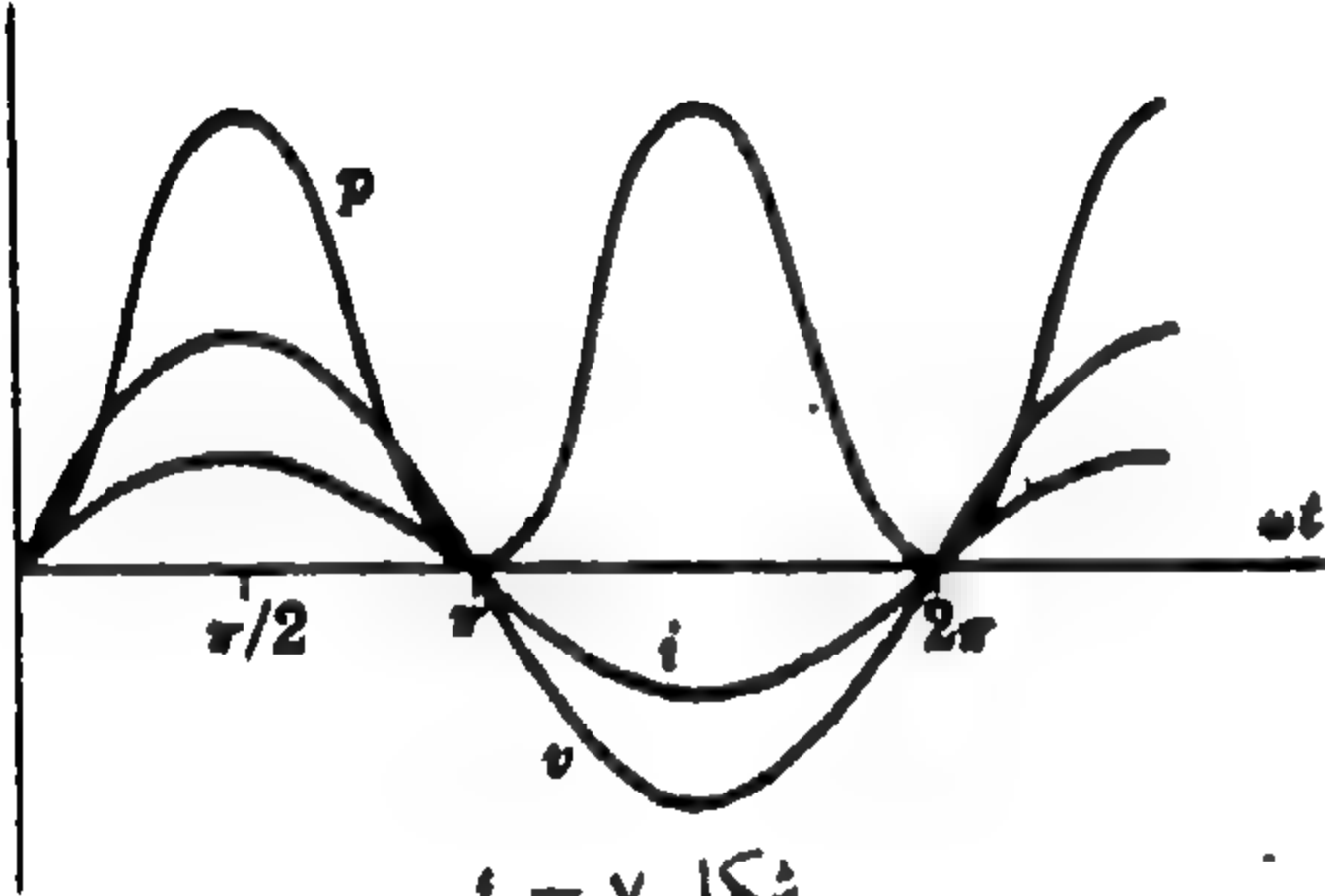
وفي الحالة المثالية التي تكون فيها الشبكة عبارة عن سعة نقية ، فإننا نحصل على نتيجة مشابهة ويوضح الشكل ٧ - ٣ تلك الحالة .

والآن إذا أثرتنا بجهد $v = V_m \sin \omega t$ على شبكة بها مقاومة نقية فقط ، فإن التيار الناتج يكون $i = I_m \sin \omega t$ ، أما القدرة المقابلة فتعطى بالمعادلة

$$p = vi = V_m I_m \sin^2 \omega t$$

وبما أن $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ فإن

$$p = \frac{1}{2} V_m I_m (1 - \cos 2\omega t)$$



شكل ٧ - ٤

ويوضح الشكل ٧ - ٤ هذه النتيجة . ونلاحظ هنا أيضا أن ذبذبة القدرة ضعف ذبذبة الجهد أو التيار . وعلاوة على ذلك فإن القدرة دائما موجبة وتتغير من صفر إلى قيمة عظمى تساوي $V_m I_m$. أما متوسط القدرة فيساوى $\frac{1}{2} V_m I_m$.

وأخيرا فلنعتبر الحالة العامة لشبكة كهربائية خاملة يؤثر عليها جهد $v = V_m \sin \omega t$ فنحصل على تيار $i = I_m \sin (\omega t + \theta)$ أما زاوية الطور θ فإما أن تكون موجبة أو سالبة . وذلك يعتمد على خاصية الشبكة إما أن تكون سعوية أو حثية .

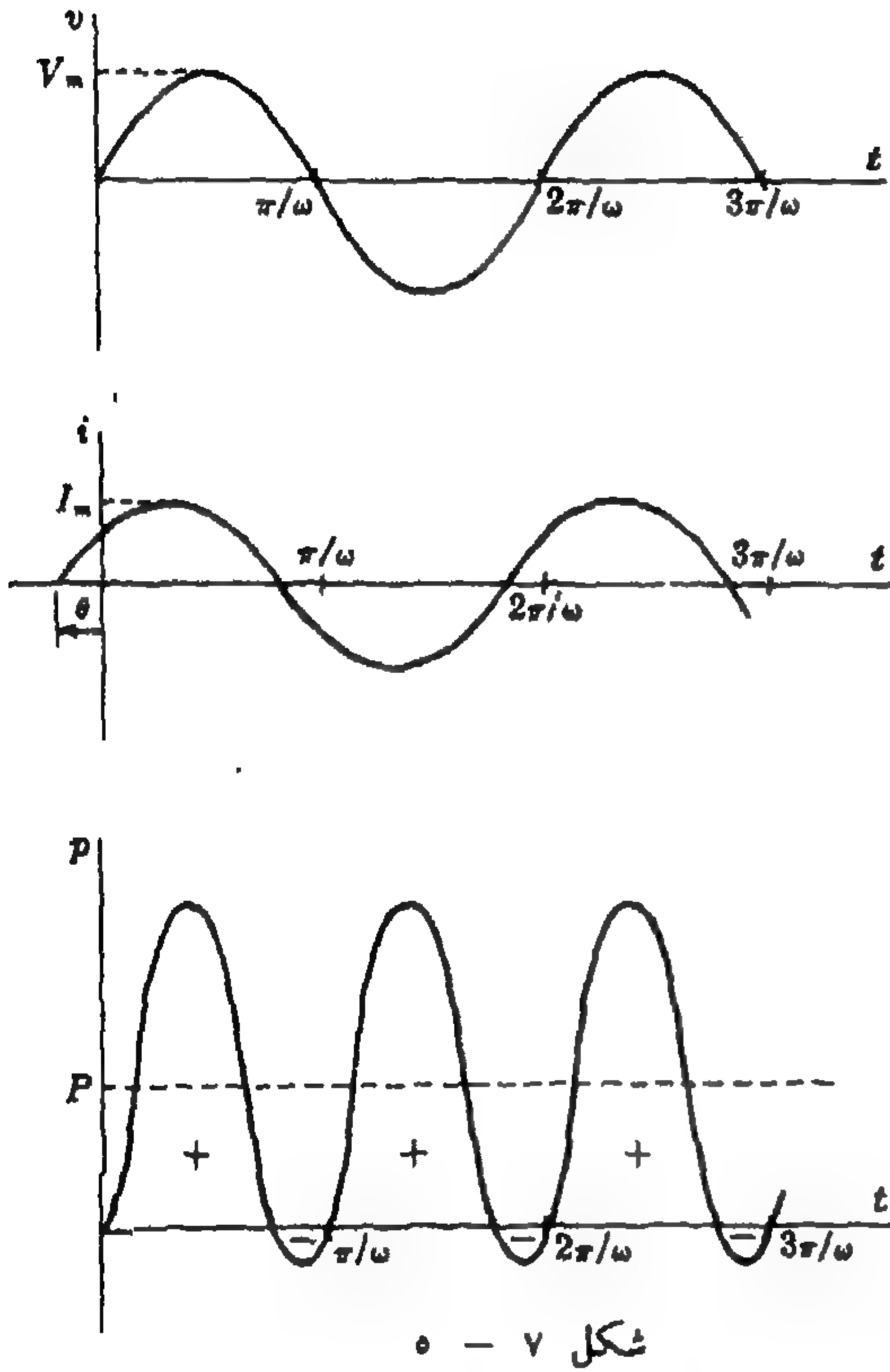
$$p = vi = V_m I_m \sin \omega t \sin (\omega t + \theta) \quad \text{إذن}$$

$$\cos - \alpha = \cos \alpha \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] \quad \text{وبما أن}$$

$$p = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \theta - \cos (2\omega t + \theta)] \quad \text{إذن}$$

ونلاحظ أن القدرة اللحظية p تتكون من حد جيبي
 $\frac{1}{2} V_m I_m \cos (2\omega t + \theta)$ متوسط قيمته تساوى صفرا
 وحد ثابت $\frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta$. وعلى ذلك فقيمة متوسط
 القدرة هي

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta = VI \cos \theta$$



شكل ٧ - ٥

حيث $I = I_m / \sqrt{2}$ و $V = V_m / \sqrt{2}$
 هما القيم الفعالة لـ V و I المطاوعين على الترتيب ويسمى
 $\cos \theta$ عامل القدرة ويكتب pf للاختصار . والزاوية θ
 هي الزاوية بين V و I وقيمتها تكون دائماً بين $90^\circ \pm$.
 وعلى ذلك فإن $\cos \theta$ وبالتالي القدرة P تكونان دائماً
 موجبتين . وللمرقة إشارة θ فإنه في الدائرة الحثية يكون
 التيار لاحقاً للجهد ولذلك يكون لها عامل قدرة لاحق . وفي
 الدائرة السعوية يكون التيار سابقاً للجهد ولذلك يكون للدائرة
 عامل قدرة سابق .

ويمكن أيضاً الحصول على متوسط القدرة من العلاقة .

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt.$$

وحدات القدرة المتوسطة هي الوات (W) والكيلووات
 (kW) وهو يساوى 1000 W

القدرة الظاهرية (S)

يسمى حاصل الضرب VI بالقدرة الظاهرية ويرمز له بالرمز S .

وحدات S هي فولت أمبير (VA) والكيلوفولت أمبير (kVA) وهو يساوى 1000 VA .

القدرة المفاعلية (Q)

يسمى حاصل الضرب $VI \sin \theta$ بالقدرة المفاعلية ويرمز لها بالرمز Q .

وحدات Q هي فولت أمبير مفاعل (var) أو كيلوفولت أمبير مفاعل (kvar) وهو يساوى 1000 var .

مثلث القدرة :

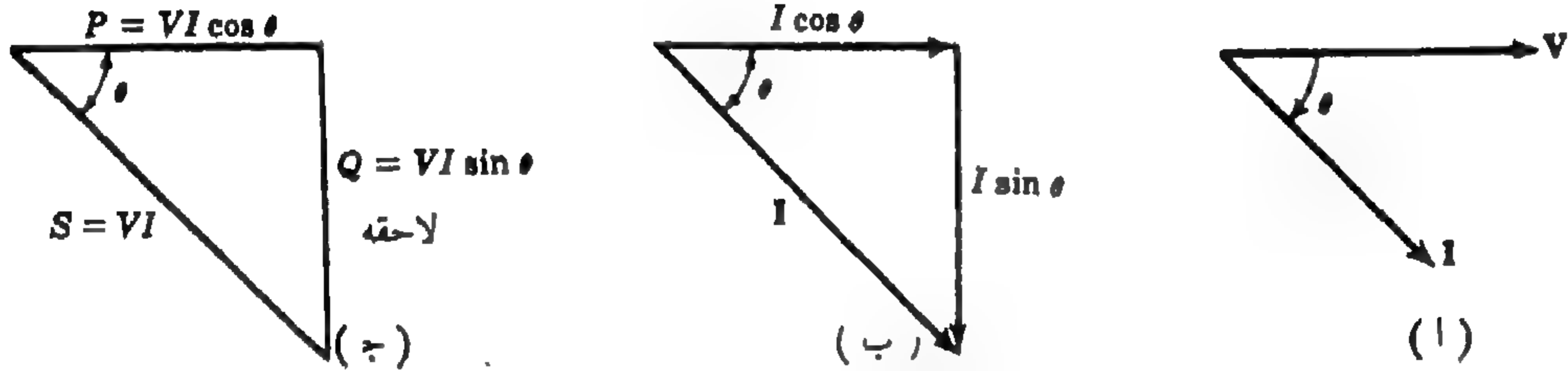
يمكن تمثيل المعادلات الدالة على القدرة المتوسطة والظاهرية والمفاعلية بيانياً بمثلث قائم يسمى مثلث القدرة .

نفرض لدينا دائرة حثية ونرسم التيار والجهود الكلى كما هو موضح فى الشكل ٦ - ٧ (أ) وذلك مع اعتبار اتجاه V كمحور اسناد . وفى الشكل ٦ - ٧ (ب) أعيد رسم التيار مع مركبتيه التى فى اتجاه V والمركبة العمودية أو التربيعية أو المركبة المفاعلية وهى فى اتجاه عمودى على V . كرر الرسم كما فى الشكل ٦ - ٧ (ج) مع ضرب التيار I والمركبتين $I \cos \theta$ و $I \sin \theta$ بالقيمة الفعالة للجهود V . إذن

$$\text{متوسط القدرة} = \text{الجهود} \times \text{مركبة التيار التى فى اتجاه الجهود} = VI \cos \theta$$

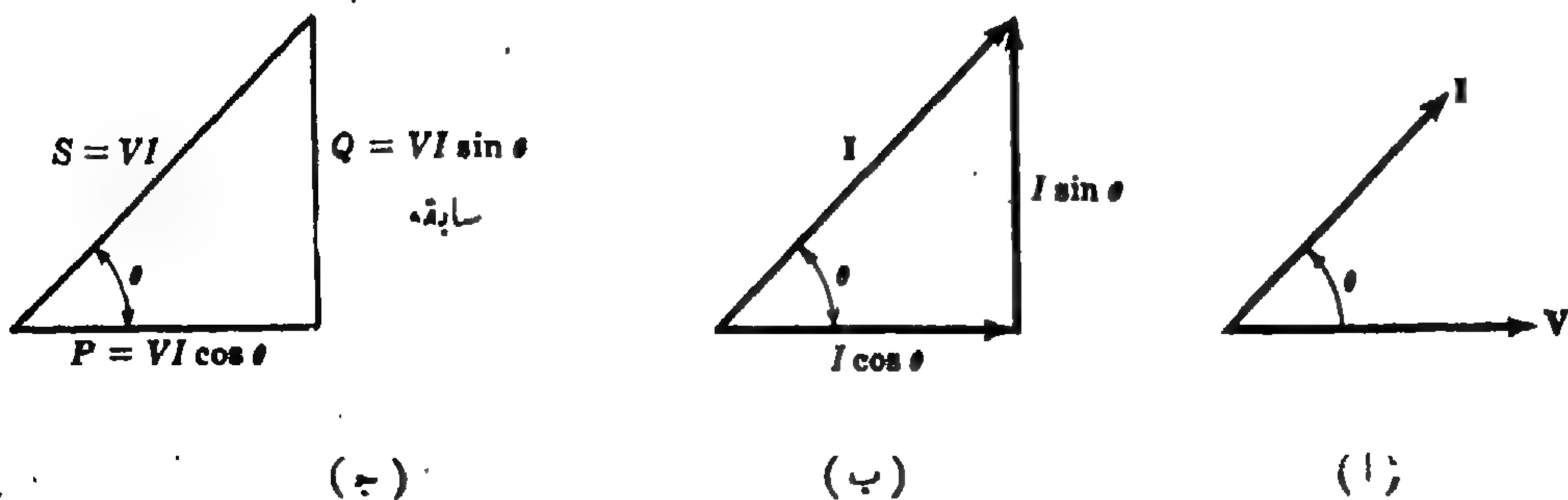
$$\text{القدرة الظاهرية} = \text{الجهود} \times \text{التيار} = VI$$

$$\text{القدرة المفاعلية} = \text{الجهود} \times \text{مركبة التيار التربيعية} = VI \sin \theta$$



شكل ٦ - ٧ مثلث القدرة لحمل حثي

يمكن إجراء نفس الشيء إذا كان التيار سابقاً ، كما هو موضح فى الشكل ٧ - ٧ . نلاحظ أن فى مثلث القوى لحمل سعى تكون المركبة Q فوق الأفق .



شكل ٧ - ٧ مثلث القوى لحمل سعى

القدرة المركبة :

يمكن الحصول على الأضلاع الثلاثة S و P و Q لمثلث القوى من حاصل الضرب VI^* . وحاصل الضرب في هذه الحالة عدد مركب يسمى القدرة المركبة S ، جزؤه الحقيقي يساوى متوسط القدرة P وجزؤه التخيلي يساوى القدرة المفاعلية Q .

$$\text{وإذا فرضنا أن } V = Ve^{j\alpha} \text{ و } I = Ie^{j(\alpha+\theta)} \text{ إذن}$$

$$S = VI^* = Ve^{j\alpha} Ie^{-j(\alpha+\theta)} = VIe^{-j\theta} = VI \cos \theta - jVI \sin \theta = P - jQ$$

والقيمة المطلقة لـ S هي القدرة الظاهرية $S = VI$. وإذا كانت زاوية الطور سابقة (التيار سابقا للجهد) فإن Q تكون سابقة ، بينما إذا كانت زاوية الطور لاحقة فإن Q تكون لاحقة . ويجب أن نتذكر ذلك جيدا عند رسم مثلث القدرة .

ويمكن تلخيص المعادلات التي يمكن استخدامها لتحديد مركبات مثلث القوى بما يلي :

$$\text{متوسط القدرة } P \text{ وتساوى } VI \cos \theta = I^2 R = V_R^2 / R = \operatorname{Re} VI^*$$

$$\text{القدرة المفاعلية } Q \text{ وتساوى } VI \sin \theta = I^2 X = V_X^2 / X = \operatorname{Im} VI^*$$

$$\text{القدرة الظاهرية } S \text{ وتساوى } VI = I^2 Z = V^2 / |Z| = \text{وهي القيمة المطلقة لـ } VI$$

$$\text{عامل القدرة } fp \text{ ويساوى } \cos \theta = R/Z = P/S$$

مثال ١ :

إذا أعطيت دائرة معاوقتها $Z = 3 + j4 \Omega$ والجهد المطاوع المؤثر عليها $V = 100 \angle 30^\circ \text{ V}$ ، فممن مثلث القدرة .

$$\text{إن التيار الناتج هو } I = V/Z = (100 \angle 30^\circ) / (5 \angle 53.1^\circ) = 20 \angle -23.1^\circ \text{ A.}$$

الطريقة الأولى :

$$P = I^2 R = (20)^2 3 = 1200 \text{ W}$$

$$Q = I^2 X = 1600 \text{ var} \quad (\text{لاحقه})$$

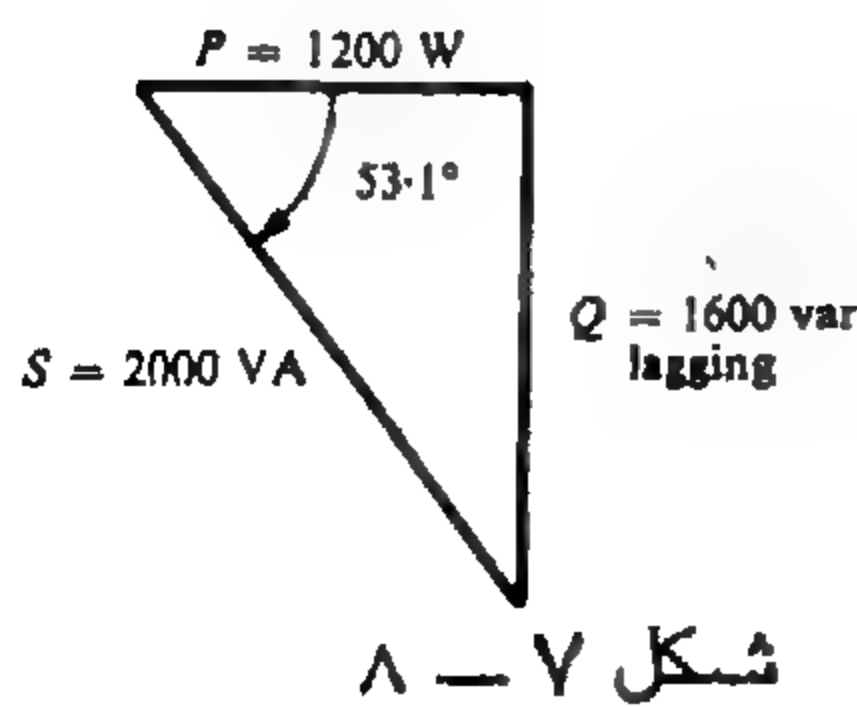
$$S = I^2 Z = 2000 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.} = \cos 53.1^\circ = 0.6 \quad (\text{لاحق})$$

الطريقة الثانية :

$$S = VI = 100(20) = 2000 \text{ VA}$$

$$P = VI \cos \theta = 2000 \cos 53.1^\circ = 1200 \text{ W}$$



$$Q = VI \sin \theta = 2000 \sin 53.1^\circ = 1600 \text{ var} \quad (\text{لاحق})$$

$$\text{p.f.} = \cos \theta = \cos 53.1^\circ = 0.6 \quad (\text{لاحق})$$

الطريقة الثالثة :

$$S = VI^* = (100 \angle 30^\circ)(20 \angle 23.1^\circ) = 2000 \angle 53.1^\circ = 1200 + j1600 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.} = \cos 53.1^\circ = 0.6 \quad (\text{لاحق}) \quad S = 2000 \text{ VA} \quad P = 1200 \text{ W}, Q = 1600 \text{ var} \quad (\text{لاحق})$$

الطريقة الرابعة :

$$V_R = IR = 20 \angle -23.1^\circ (3) = 60 \angle -23.1^\circ \text{ V}, V_X = (20 \angle -23.1^\circ)(4 \angle 90^\circ) = 80 \angle 66.9^\circ \text{ V}$$

$$P = V_R^2/R = 60^2/3 = 1200 \text{ W}$$

$$Q = V_X^2/X = 80^2/4 = 1600 \text{ var} \quad (\text{لاحق})$$

$$S = V^2/Z = 100^2/5 = 2000 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.} = P/S = 0.6 \quad (\text{لاحق})$$

يجب الاحتياط عند التعويض في المعادلة $P = V_R^2/R$. والخطأ الشائع هو استبدال V_R (الجهد عبر المقاومة فقط) بالجهد الكلي V عبر المعاوقة Z .

تصحيح عامل القدرة :

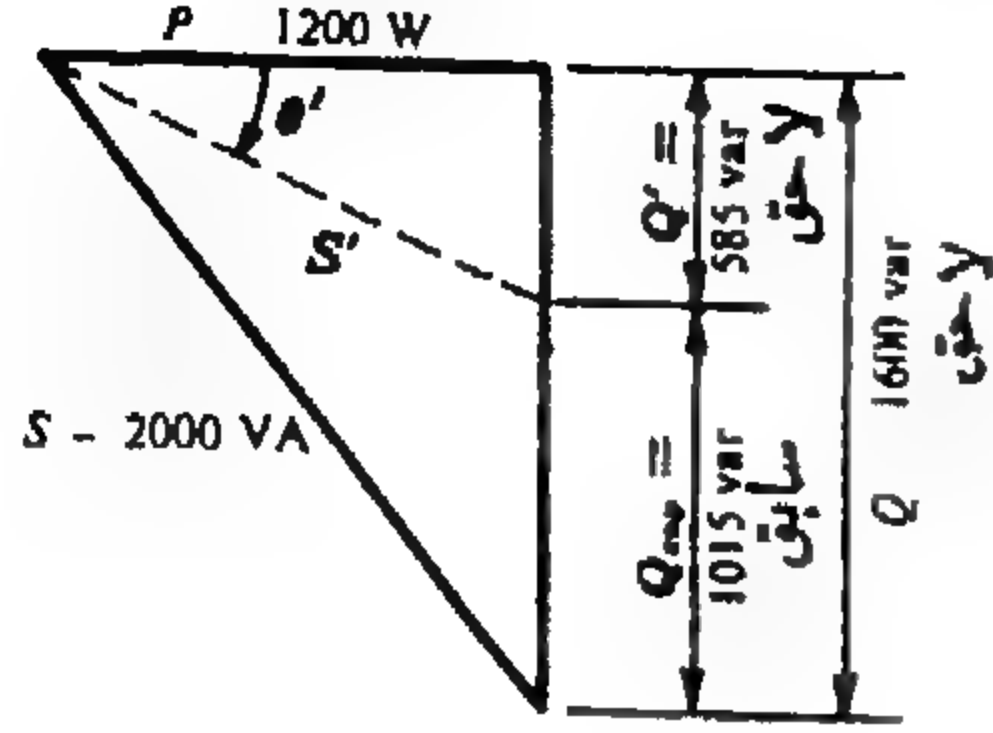
في التطبيقات المنزلية والصناعية يكون الحمل حثيا والتيار لاحقا للجهد المؤثر وتقاس القدرة المتوسطة P المعطاة للحمل بمقدار الشغل المستفاد به في وحدة الزمن . وترسل القدرة عادة من خلال محولات وخطوط توزيع .

وحيث أن المحول الذي يقدر بـ kVA عادة ما يكون ثابتا عند جهد معين فإن معدل kVA يدل غالباً على مقدار أكبر تيار مسموح به . وإذا وصلت سعة نفية أو حثت ثقي فإن المحول يكون محملاً تماماً وتكون القدرة المتوسطة المعطاة تساوى صفراً نظرياً

بالإشارة إلى مثلث القدرة ، يمثل وتر المثلث S قياس الحمل في نظام التوزيع ويمثل الضلع P قياس القدرة المفيدة المعطاة . وعلى ذلك فإنه من المستحسن جعل S أقرب ما يمكن من P أى جعل الزاوية θ تقترب من الصفر . وحيث أن $\text{p.f.} = \cos \theta$ فإن عامل القدرة يقترب من الوحدة . وفي الحالة العادية التي يكون فيها حملاً حثياً يمكن تحسين عامل القدرة وذلك بتوصيل سعة على التوازي مع الحمل . وبما أن الجهد على الحمل يظل ثابتاً فإننا نلاحظ القدرة المفيدة P لا تتغير أيضاً . وبما أن عامل القدرة يزداد فإن التيار والقدرة الظاهرية يقلان وبذلك نحصل على نظام توزيع ذي كفاءة عالية .

مثال ٢ :

في دائرة المثال (١) صحح عامل القدرة إلى 0.9 (لاحق)
وذلك بإضافة سعة على التوازي . أوجد S' بعد إدخال
التصحيح وكذلك القدرة المفاعلية للسعة اللازمة لتصحيح .



بإعادة رسم مثلث القوى في المثال (١) ، مع مراعاة أن
 $\cos \theta' = 0.9$ و $\theta' = 26^\circ$ إذن

$$S' = P / \cos \theta' = 1200 / \cos 26 = 1333 \text{ VA}$$

وبما أن (لاحق) $Q' = S' \sin \theta' = 1333 \sin 26 = 585 \text{ var}$ شكل ٧ - ١

والقدرة المفاعلية للسعة تساوي $Q - Q' = 1600 - 585 = 1015$ (سابق) .

وحيث أن القدرة تظل ثابتة فإن الشغل المبذول يظل ثابتا بعد تصحيح عامل القدرة . وعلى ذلك فإن قيمة S
تقل من 2000 VA إلى 1333 VA .

مسائل محلولة

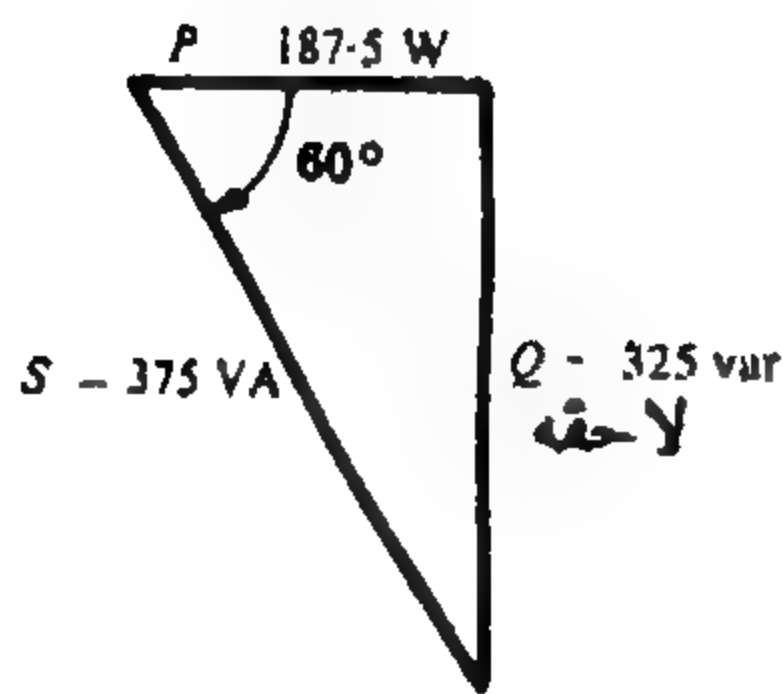
٧-١ إذا أعطيت دائرة يؤثر عليها جهد $v = 150 \sin(\omega t + 10^\circ)$ volts وكان التيار الناتج
 $i = 5 \sin(\omega t - 50^\circ)$ amperes ، فمبن مثلث القدرة .

$$V = (150/\sqrt{2}) \angle 10^\circ = 106 \angle 10^\circ \text{ V}$$

$$I = (5/\sqrt{2}) \angle -50^\circ = 3.54 \angle -50^\circ \text{ A}$$

إذن

$$S = VI^* = (106 \angle 10^\circ)(3.54 \angle 50^\circ) = 375 \angle 60^\circ = 187.5 + j325 \text{ VA}$$



$$P = \text{Re } VI^* = 187.5 \text{ W}$$

$$Q = \text{Im } VI^* = 325 \text{ var}$$

(لاحقة)

$$S = |VI^*| = 375 \text{ VA}$$

شكل ٧ - ١٠

$$\text{p.f.} = \cos 60^\circ = 0.5 \quad (\text{لاحق})$$

٧-٢ دائرة توالى تتكون من عنصرين لها قدرة 940 W وعامل قدرة 0.707 سابق . فإذا كان الجهد المؤثر
هو $v = 99 \sin(6000t + 30^\circ)$ volts فمبن ثوابت الدائرة .

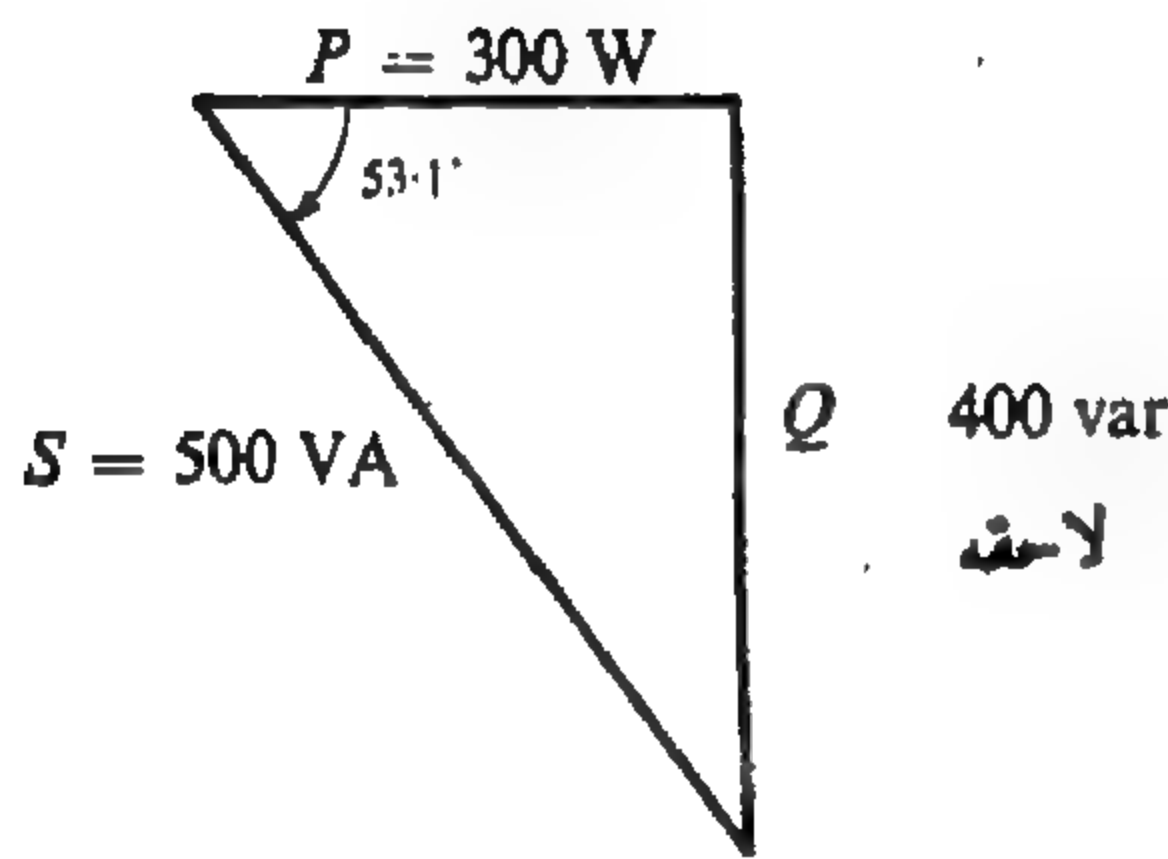
إن الصيغة المطاوعة الجهد هي $V = (99/\sqrt{2}) \angle 30^\circ = 70 \angle 30^\circ \text{ V}$ ، والقدرة هي $P = VI \cos \theta$.
 أى $940 = 70I(0.707)$ ، إذن $I = 19$. وبما أن عامل القدرة هو 0.707 سابق ، إذن يجب أن يسبق التيار
 المطاوع الجهد بزاوية $\cos^{-1} 0.707 = 45^\circ$ ، إذن $I = 19 \angle 75^\circ \text{ A}$ ومعاوقة الدائرة هي
 $Z = R - jX_C$. وبما أن $Z = V/I = (70 \angle 30^\circ) / (19 \angle 75^\circ) = 3.68 \angle -45^\circ = 2.6 - j2.6 \Omega$
 و $X_C = 1/\omega C$ ، إذن

$$R = 2.6 \text{ ohms and } C = \frac{1}{6000(2.6)} = 64.1 \mu\text{F}$$

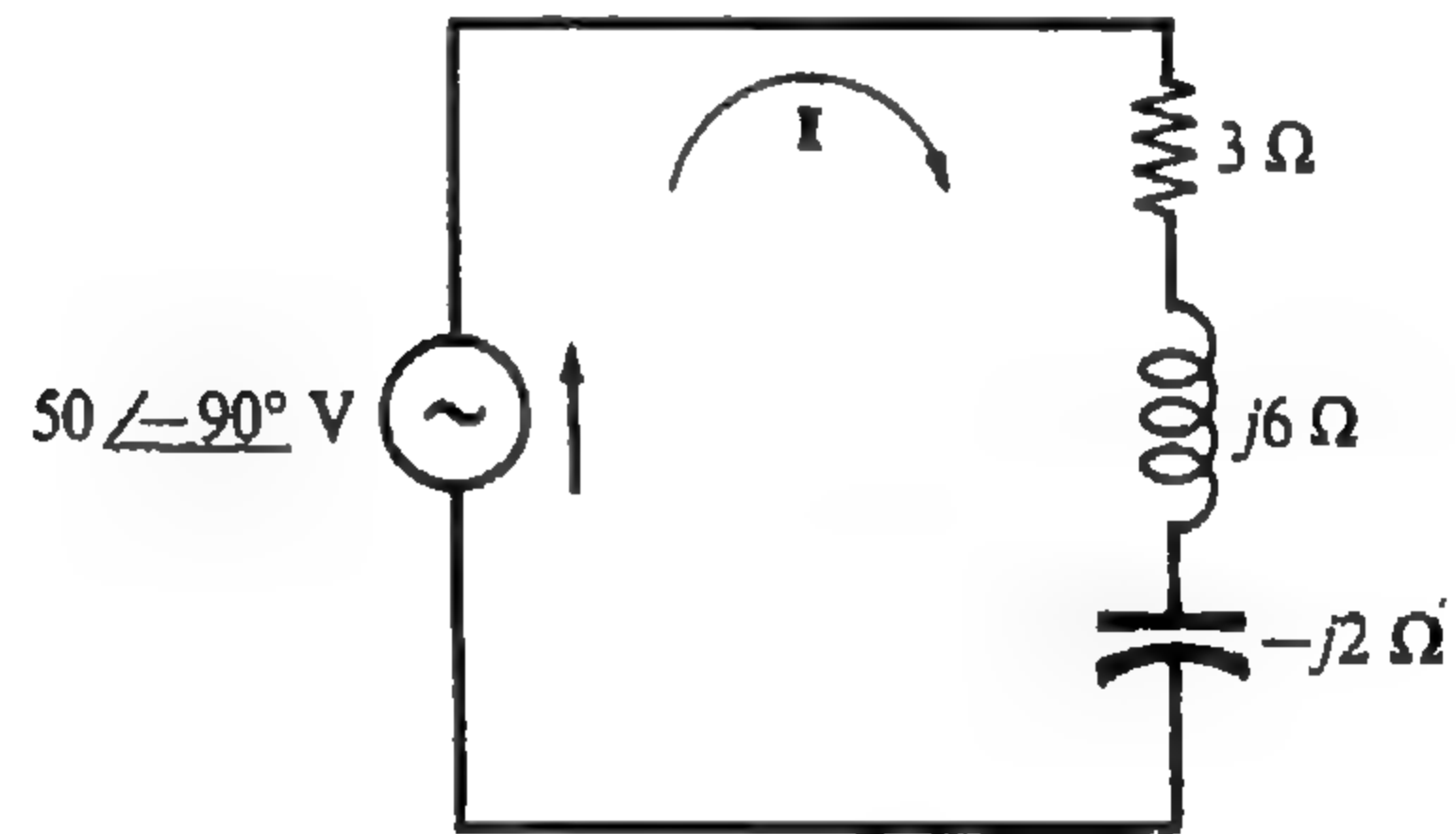
طريقة أخرى :

بوضع $I = 19$ في المعادلة $P = I^2 R$ نحصل على $940 = (19)^2 R$ ومنها $R = 2.6 \Omega$.
 إذن $Z = Z \angle -45^\circ = 2.6 - jX_C$ و $X_C = 2.6 \Omega$ ومنها ينتج أن $C = 1/\omega X_C = 64.1 \mu\text{F}$

٧-٣ عين مثلث القدرة لدائرة التوالى الموضحة في الشكل ٧-١١ .



شكل ٧ - ١٢



شكل ٧ - ١١

من الشكل ٧-١١ نجد أن $Z = 3 + j6 - j2 = 5 \angle 53.1^\circ \Omega$

$$I = V/Z = (50 \angle -90^\circ) / (5 \angle 53.1^\circ) = 10 \angle -143.1^\circ \text{ A}$$

إذن

$$S = VI^* = (50 \angle -90^\circ)(10 \angle 143.1^\circ) = 500 \angle 53.1^\circ = 300 + j400 \text{ VA}$$

وأضلاع مثلث القدرة الموضح في الشكل ٧-١٢ هي

$P = 300 \text{ W}$ و (لاحقة) $Q = 400 \text{ var}$ و $S = 500 \text{ VA}$ ، أما عامل القدرة فهو

$$pf = \cos 53.1 = 0.6 \quad (\text{لاحق})$$

طريقة أخرى :

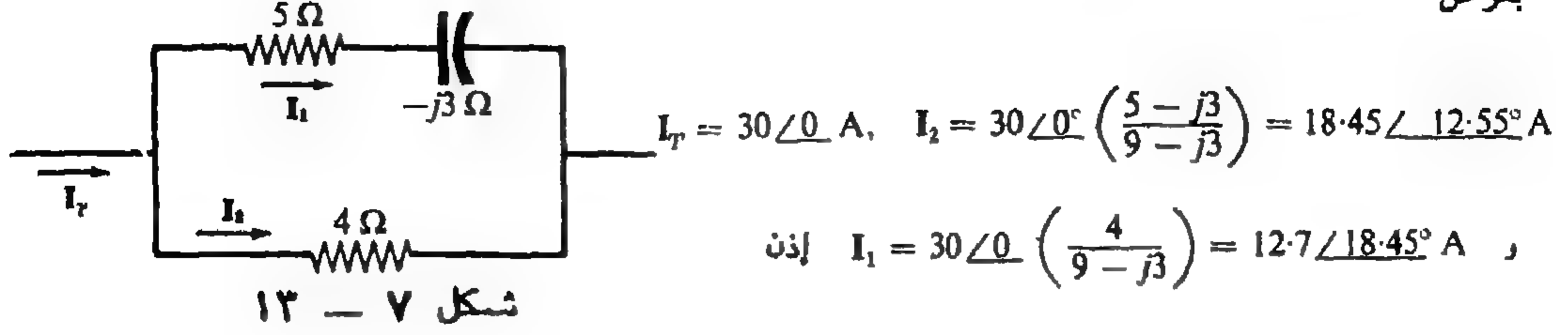
بالتعويض عن $I = 10$ في معادلة القدرة لكل عنصر نجد أن

$$P = I^2 R = 10^2(3) = 300 \text{ W} \quad (\text{لاحقة}) \quad Q_{j6} = 10^2(6) = 600 \text{ var} \quad (\text{سابقة})$$

$$Q = Q_{j6} + Q_{-j2} = 600 - 200 = 400 \text{ var} \quad (\text{لاحقة}) \quad Q_{-j2} = 10^2(2) = 200 \text{ var}$$

٧ - ٤ إذا كانت القيمة الفعالة لتيار الكل المار في الدائرة الموضحة في الشكل ٧ - ١٣ هي 30 A فحين علاقات القدرة .

بفرض



$$P = I_2^2 R_4 + I_1^2 R_5 = (18.45)^2 (4) + (12.7)^2 (5) = 2165 \text{ W}$$

$$Q = I_1^2 X = (12.7)^2 (3) = 483 \text{ var (سابقة)}$$

$$S = P - jQ = 2165 - j483 = 2210 \angle -12.6^\circ, S = 2210 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.} = P/S = 2165/2210 = 0.98 \text{ (سابق)}$$

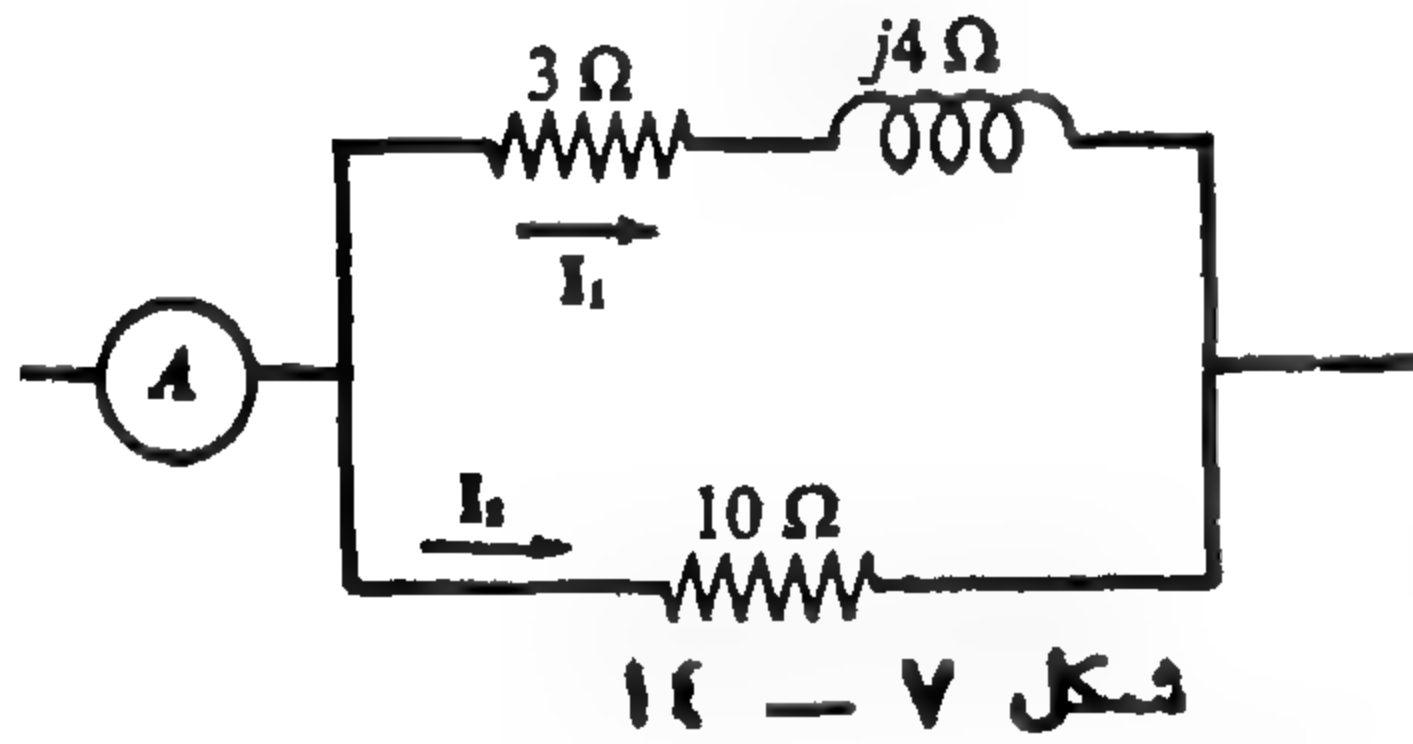
ويمكن أيضا الحصول على النتائج السابقة وذلك بحساب المعاودة المكافئة

$$Z_{eq} = \frac{(5 - j3)4}{9 - j3} = 2.4 - j0.533 \Omega$$

إذن

$$Q = 30^2 (0.533) = 479.7 \text{ var (سابقة)} \text{ و } P = I_T^2 R = 30^2 (2.4) = 2160 \text{ W}$$

٧ - ٥ إذا كانت القدرة الكلية لدائرة التوازي الموضحة في الشكل ٧ - ١٤ هي 1100 W فأوجد القدرة لكل مقاومة وكذلك قراءة الأميتر .



من الشكل ٧ - ١٤ نحصل على

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{V}{3 + j4} = \frac{V}{5 \angle 53.1^\circ} \quad I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{V}{10}$$

والنسبة بين قيم التيارين هي $\frac{I_1}{I_2} = \frac{V/5}{V/10} = \frac{2}{1}$. وباستخدام العلاقة $P = I^2 R$ نجد أن النسبة بين القدرتين للمقاومتين 10Ω, 3Ω هي

$$\frac{P_3}{P_{10}} = \frac{I_1^2 R_1}{I_2^2 R_2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

وبما أن $P_T = P_3 + P_{10}$. إذن بنفسه طرفي المعادلة على P_{10} نجد أن $P_T/P_{30} = P_3/P_{10} + 1$

$$P_{10} = 1100(5/11) = 500 \text{ W}, P_3 = 1100 - 500 = 600 \text{ W}$$

ربما أن $P = I^2 R$ أي أن $I_1^2(3) = 600$ إذن $I_1 = 14.14 \text{ A}$ ، إذا كان $V = V / 0^\circ$

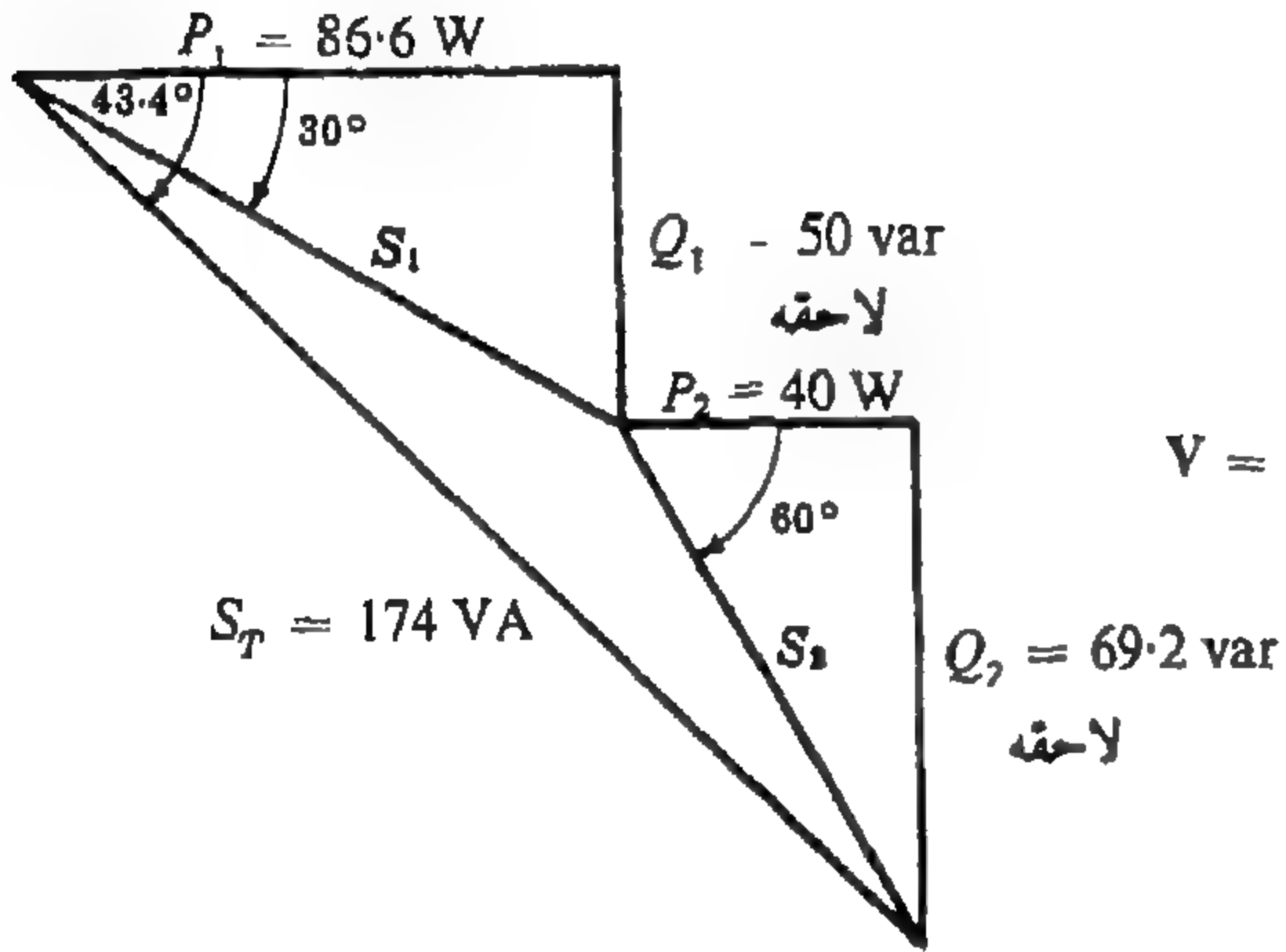
$$I_1 = 14.14 \angle -53.1^\circ = 8.48 - j11.31 \text{ A} \quad \text{إذن}$$

$$I_2 = 7.07 \angle 0^\circ = 7.07 \text{ A}$$

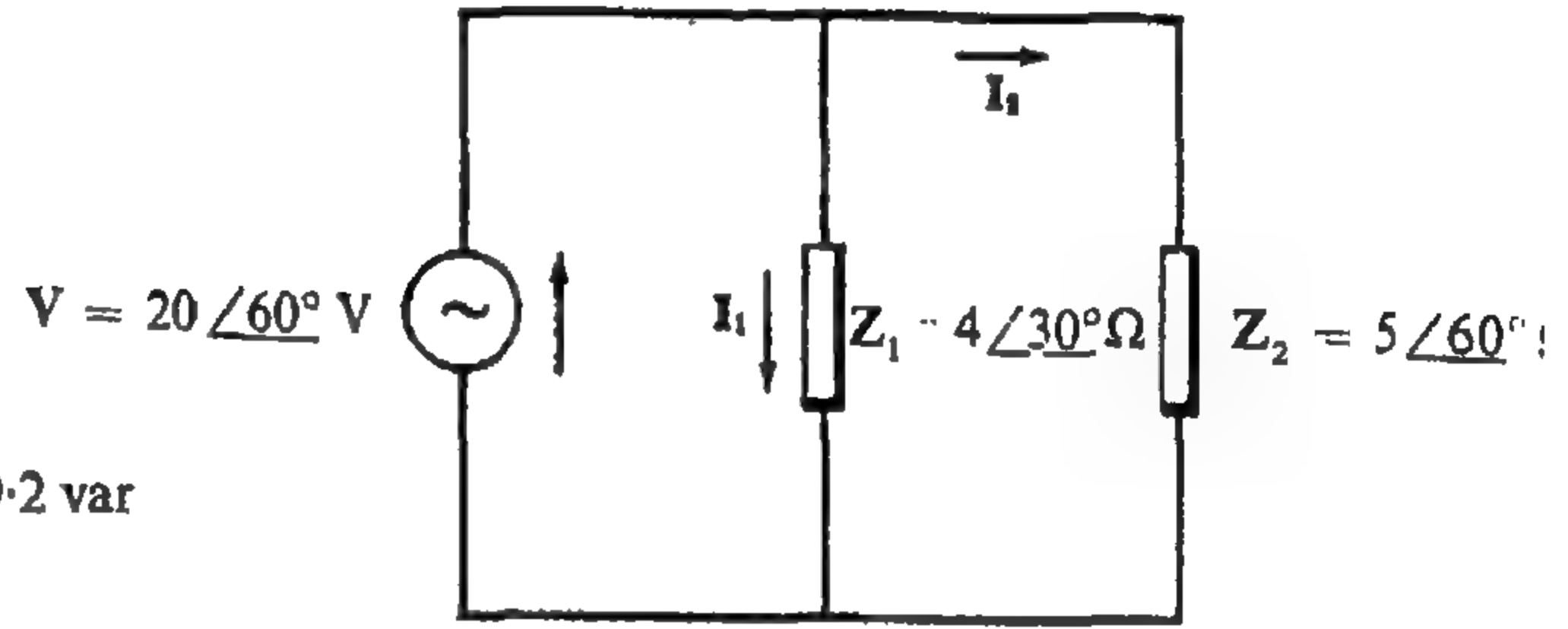
$$I_T = I_1 + I_2 = 15.55 - j11.31 = 19.25 \angle -36^\circ \text{ A} \quad \text{وهذا نجد أن}$$

وقراءة الأميتر هي 19.25 A .

٧ - ٦ عين مثلث القدرة لكل فرع من أفرع دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٧ - ١٥ ثم اجمعها لتحصل على مثلث القدرة للدائرة كلها .



شكل ١٦ - ٧



شكل ١٥ - ٧

الفرع ٢ :

$$I_2 = V/Z_2 = (20 \angle 60^\circ)/(5 \angle 60^\circ) = 4 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$S_2 = VI_2^* = (20 \angle 60^\circ)(4 \angle 0^\circ) = 80 \angle 60^\circ \text{ VA}$$

$$= 40 + j69.2 \text{ VA}$$

إذن

$$P_2 = 40 \text{ W}$$

$$Q_2 = 69.2 \text{ var} \quad (\text{لاحقة})$$

$$S_2 = 80 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.}_2 = 0.5 \quad (\text{لاحق})$$

الفرع ١ :

$$I_1 = V/Z_1 = (20 \angle 60^\circ)/(4 \angle 30^\circ) = 5 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$S_1 = VI_1^* = (20 \angle 60^\circ)(5 \angle -30^\circ) = 100 \angle 30^\circ \text{ VA}$$

$$= 86.6 + j50 \text{ VA}$$

إذن

$$P_1 = \text{Re } VI_1^* = 86.6 \text{ W}$$

$$Q_1 = \text{Im } VI_1^* = 50 \text{ var} \quad (\text{لاحقة})$$

$$S_1 = |VI_1^*| = 100 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.}_1 = P_1/S_1 = 0.866 \quad (\text{لاحق})$$

من النتيجة السابقة والشكل ٧-١٦ يمكن الحصول على مثلث القدرة كما يلي

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 50 + 69.2 = 119.2 \text{ var} \quad \text{و (لاحقة)} \quad P_T = P_1 + P_2 = 86.6 + 40 = 126.6 \text{ W}$$

$$S_T = P_T + jQ_T = 126.6 + j119.2 = 174 \angle 43.4^\circ \text{ VA} \quad \text{وبما أن}$$

$$S_T = |S_T| = 174 \text{ VA} \quad \text{إذن} \quad \text{و (لاحق)} \quad \text{p.f.}_T = P_T/S_T = 126.6/174 = 0.727$$

٧-٧ محرك سٲى يعطى قدرة 2 hp وكفاءته 85% ، فإذا كان عامل القدرة يساوى 0.8 لاحق ، فعين المعادلات الكاملة للقدرة الداخلة .

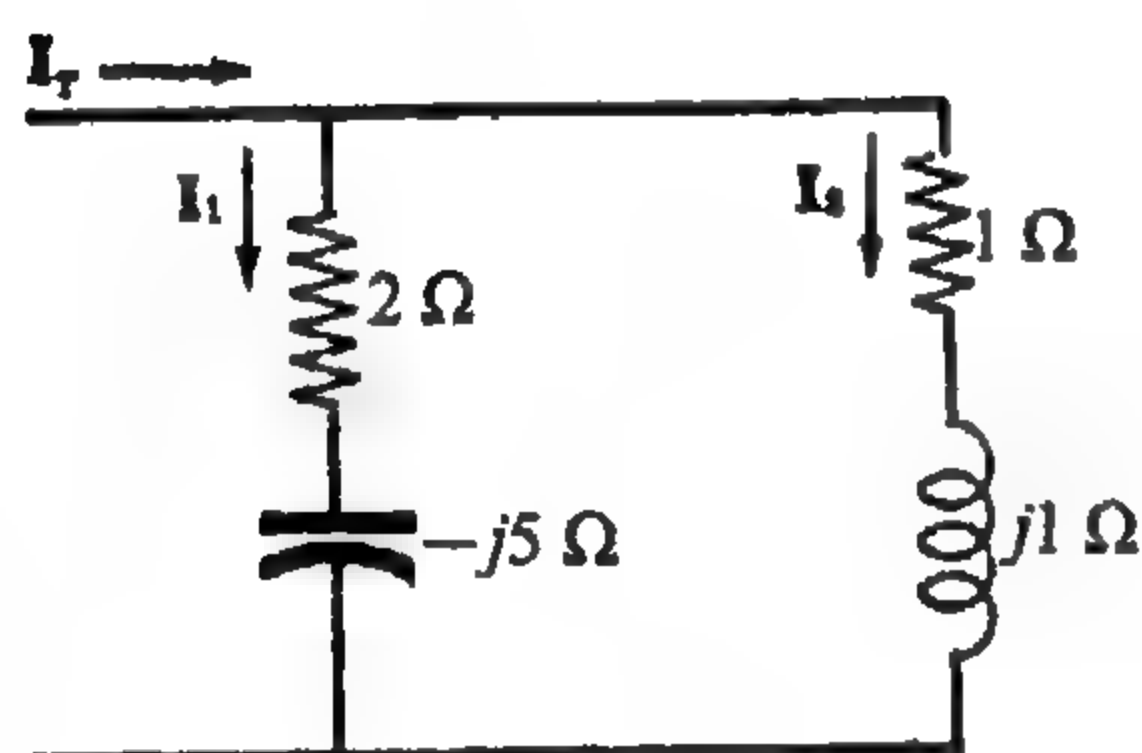
$$P_{in} = 2(746)/0.85 = 1755 \text{ W} \quad \text{إذن} \quad 1 \text{ hp} = 746 \text{ W} \quad \text{بما أن}$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.8) = 36.9^\circ \quad \text{ولكن} \quad S = 1755/0.8 = 2190 \text{ VA} \quad \text{و}$$

$$Q = 2190 \sin 36.9^\circ = 1315 \text{ var} \quad \text{إذن (لاحقة)}$$

٧-٨ عين مثلث القدرة لدائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٧-١٧

علما بأن القدرة فى المقاومة 2Ω هى 20W



شكل ٧-١٧

$$\text{من } P = I^2 R \quad \text{نجد أن} \quad I_1^2 (2) = 20 \text{ w} \quad \text{إذن}$$

$$I_1 = 3.16 \text{ A} \quad \text{وبما أن} \quad Z_1 = 2 - j5 = 5.38 \angle -68.2^\circ \Omega$$

$$\text{إذن} \quad V = I_1 Z_1 = 3.16(5.38) = 17 \text{ volts} \quad \text{وإذا كان}$$

$$V = 17 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{إذن} \quad I_1 = 3.16 \angle -68.2^\circ \text{ A}, \quad I_2 = V/Z_2 = (17 \angle 0^\circ)/(\sqrt{2} \angle 45^\circ) \text{ A}$$

$$\text{و} \quad I_T = I_1 + I_2 = 11.1 \angle -29.8^\circ \text{ A}$$

ولحساب مثلث القدرة فإنه يلزمنا معرفة S_T

$$S_T = VI_T^* = 17 \angle 0^\circ (11.1 \angle 29.8^\circ) = 189 \angle 29.8^\circ = 164 + j94 \text{ VA}$$

ومنها نجد أن

$$\text{(لاحقة)} \quad \text{p.f.}_T = 164/189 = 0.868 \quad S_T = 189 \text{ VA}, \quad P_T = 164 \text{ W}, \quad Q_T = 94 \text{ var}$$

٧-٩ عين مركبات القدرة لمجموعة ثلاثة أحمال بالمواصفات الآتية : الحمل ١ . 250 VA و p.f. 0.5 لاحق ،

حمل ٢ 180 W و p.f. 0.8 سابق ، حمل ٣ 300 VA ، 100 var (لاحقة)

يلزمنا حساب القدرة المتوسطة والقدرة المفاعلية لكل حمل أى أن

حمل ١ : مطي $S = 250 \text{ VA}$ و $p.f. = 0.5$ لاحق ، إذن

$$\theta = \cos^{-1} 0.5 = 60^\circ, P = S p.f. = 250(0.5) = 125 \text{ W (لاحقة)}$$

$$Q = S \sin \theta = 250 \sin 60 = 216 \text{ var}$$

حمل ٢ : مطي $P = 180 \text{ W}$ و $p.f. = 0.8$ سابق . إذن

$$\theta = \cos^{-1} 0.8 = 36.9^\circ, S = P/p.f. = 180/0.8 = 225 \text{ VA}$$

$$Q = 225 \sin 36.9^\circ = 135 \text{ var (سابقة)}$$

حمل ٣ : مطي $S = 300 \text{ VA}$ و $Q = 100 \text{ var}$ (لاحقة)

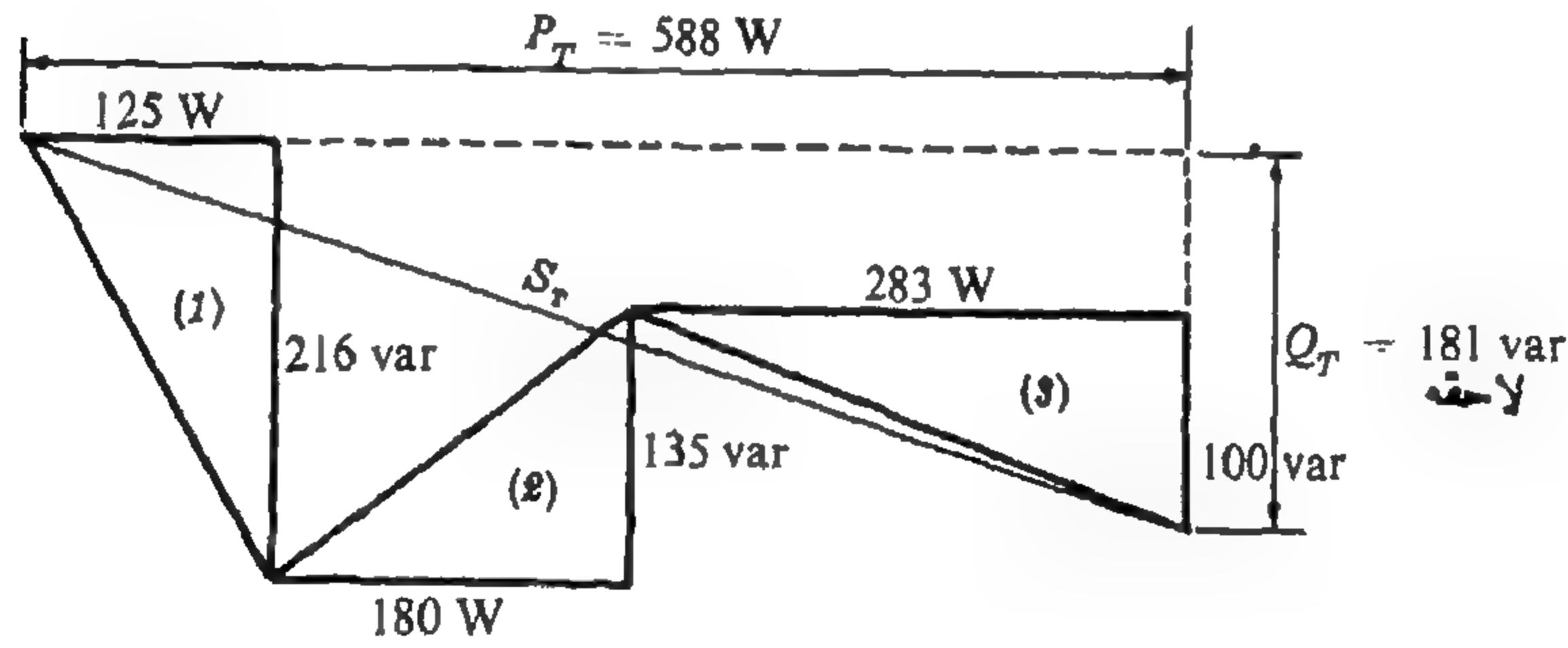
$$P = S \cos \theta = 300 \cos 19.5^\circ = 283 \text{ W} \quad \theta = \sin^{-1} (Q/S) = \sin^{-1} (100/300) = 19.5^\circ$$

$$Q_T = 216 - 135 + 100 = 181 \text{ var (لاحقة)} \quad P_T = 125 + 180 + 283 = 588 \text{ W} \quad \text{إذن}$$

$$\text{وبما أن } S_T = P_T + jQ_T = 588 + j181 = 616 \angle 17.1^\circ \text{ VA}$$

$$p.f. = P/S = 588/616 = 0.955 \text{ (لاحق) و } S_T = 616 \text{ VA}$$

ويوضح الشكل ٧ - ١٨ مثلثات القوى للأحمال الثلاثة كل على حدة وكذلك لمجموعة الأحمال



شكل ٧ - ١٨

٧-١٠ محول 25 kVA يغذي حملا بقدرة 12 kW ، فإذا كان عامل القدرة 0.6 لاحقا ، فأوجد النسبة المئوية لأقصى حمل يمكن أن ينفذه المحول . وإذا أضيف حمل بعامل قدرة يساوى الوحدة إلى نفس المحول فما هو عدد kW التي يمكن إضافتها قبل أن يصبح المحول محملا تماما .

في حالة حمل 12 kW نجد أن $S = P/p.f. = 12/0.6 = 20 \text{ kVA}$ إذن النسبة المئوية لأقصى حمل

$$\text{تساوى } 80\% = (20/25)100$$

$$\text{وبما أن } \theta = \cos^{-1} 0.6 = 53.1^\circ, Q = S \sin \theta = 20 \sin 53.1^\circ = 16 \text{ kvar}$$

وبما أن عامل القدرة للحمل الإضافي يساوى الوحدة ،
إذن القدرة المفاعلية تظل دون تغيير . إذن عند التحميل
بأقصى سعة تكون الزاوية $\theta' = \sin^{-1}(16/25) = 39.8^\circ$
والقدرة الكلية

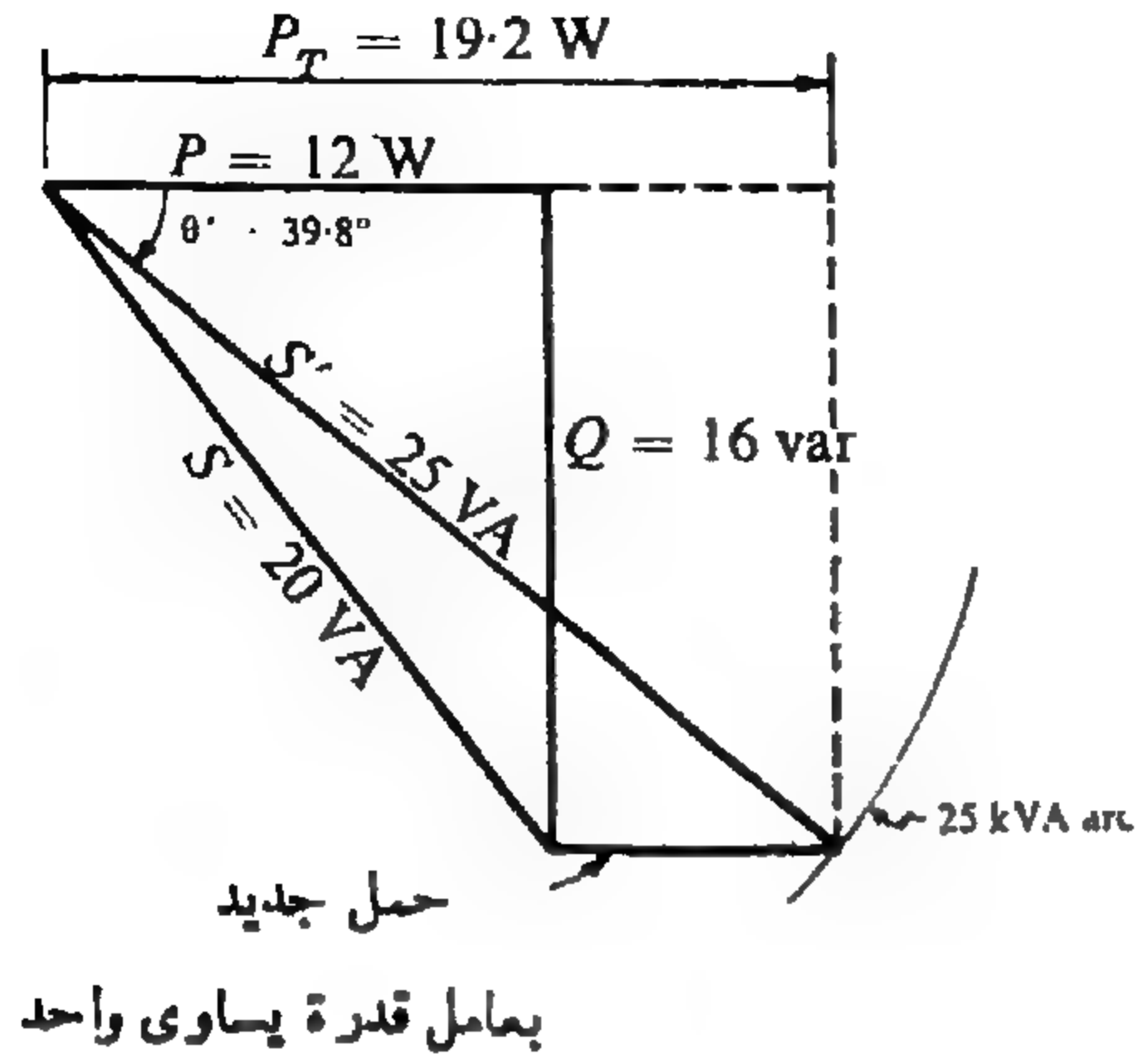
$$P_T = S' \cos \theta' = 25 \cos 39.8^\circ = 19.2 \text{ kW}$$

وعلى ذلك فإن الحمل الإضافي يساوى

$$P_T - P = 19.2 - 12$$

$$= 7.2 \text{ kW}$$

ويمكن الوصول إلى النتيجة السابقة بيانيا كما هو
موضح في الشكل ١٩-٧ .



شكل ٧ - ١٩

لاحظ أن إضافة حمل بعامل قدرة يساوى الوحدة

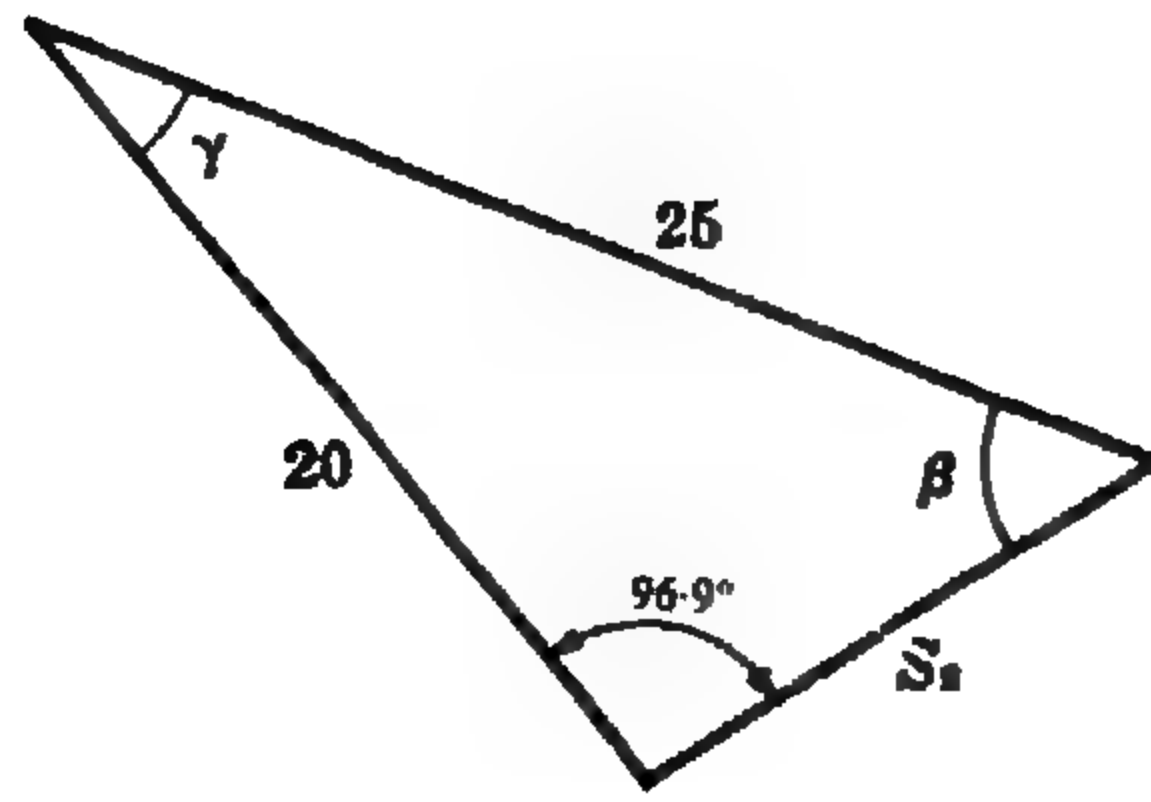
يحسن عامل القدرة الكلى أى أن : (لاحق) $P.f. = \cos 39.8^\circ = 0.768$

١١-٧ فى المسألة ١٠-٧ ، إذا كان الحمل المضاف له عامل قدرة يساوى 0.866 سابق فأوجد عدد الـ kVA التى
يمكن إضافتها بهذه الأحوال حتى يصبح المحول محملا بسعته الكاملة .

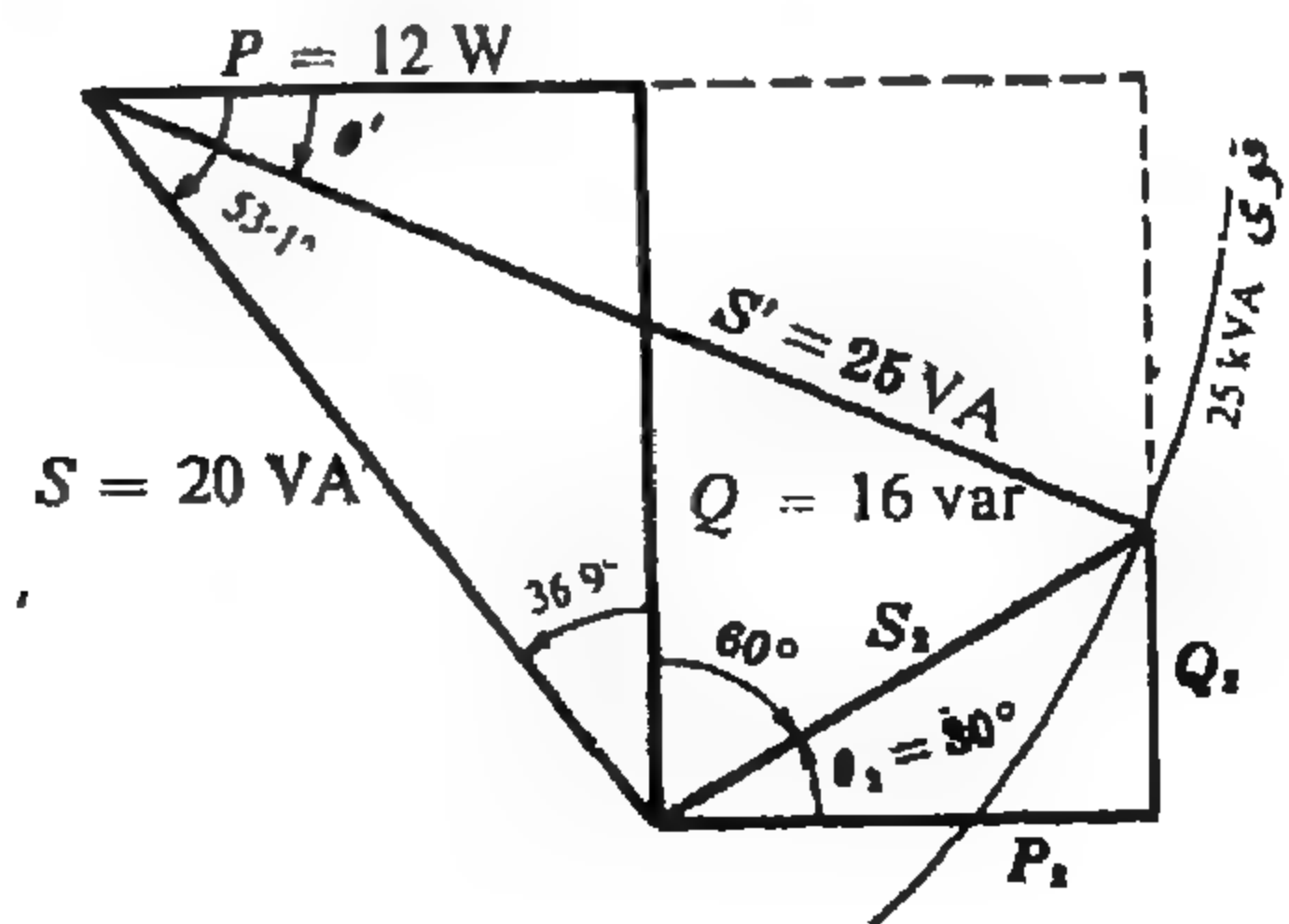
لدينا من المسألة ١٠-٧ أن $S = 20 \text{ kVA}$ و $\theta = 53.1^\circ$ (لاحقة) ، $Q = 16 \text{ kvar}$ نرسم مثلث
القدرة كما فى الشكل ٢٠-٧ (أ) ، وبإضافة حمل جديد له S_2 وزاوية $\theta_2 = \cos^{-1} 0.866 = 30^\circ$ فإنه
يلزمنا تحديد θ' ، ومن الشكل ١٠-٧ (ب) لدينا .

$$25/\sin 96.9^\circ = 20/\sin \beta, \sin \beta = 0.795, \beta = 52.6^\circ$$

$$\text{إذن } \theta' = 53.1^\circ - 30.5^\circ = 22.6^\circ. \quad \text{و} \quad \gamma = 180^\circ - (96.9^\circ + 52.6^\circ) = 30.5^\circ$$



(ب)



(أ)

شكل ٧ - ٢٠

والقدرة والقدرة المفاعلية للحمل الكلي هما $P_T = 25 \cos 22.6^\circ = 23.1 \text{ kW}$ و (لاحقة)

$$Q_T = 25 \sin 22.6^\circ = 9.6 \text{ kvar} \quad \text{على الترتيب . إذن لدينا الحمل الإضافي } P_2 = 23.1 - 12 = 11.1 \text{ kW}$$

$$S_2 = P_2 + jQ_2 = 11.1 - j6.4 = 12.8 \angle -30^\circ \text{ VA} \quad \text{و (سابقة) } Q_2 = 16 - 9.6 = 6.4 \text{ kvar} , \text{ وبما أن}$$

$$S_2 = 12.8 \text{ kVA} \quad \text{إذن}$$

وعلى ذلك فإنه يمكن إضافة حمل جديد له 12.8 kVA بعامل قدرة 0.866 سابق إلى الحمل الأصل 12 kW الذي عامل القدرة له يساوى 0.6 لاحق حتى يصبح المحول بكامل سعة .

طريقة أخرى :

من الشكل ٧ - ٢٠ (١) ولزاوية $\theta_2 = 30^\circ$ ، لدينا

$$P_2 = S_2 \cos 30^\circ = (\sqrt{3}/2)S_2, \quad Q_2 = S_2 \sin 30^\circ = \frac{1}{2}S_2,$$

$$(S')^2 = (P + P_2)^2 + (Q - Q_2)^2$$

وبما أن

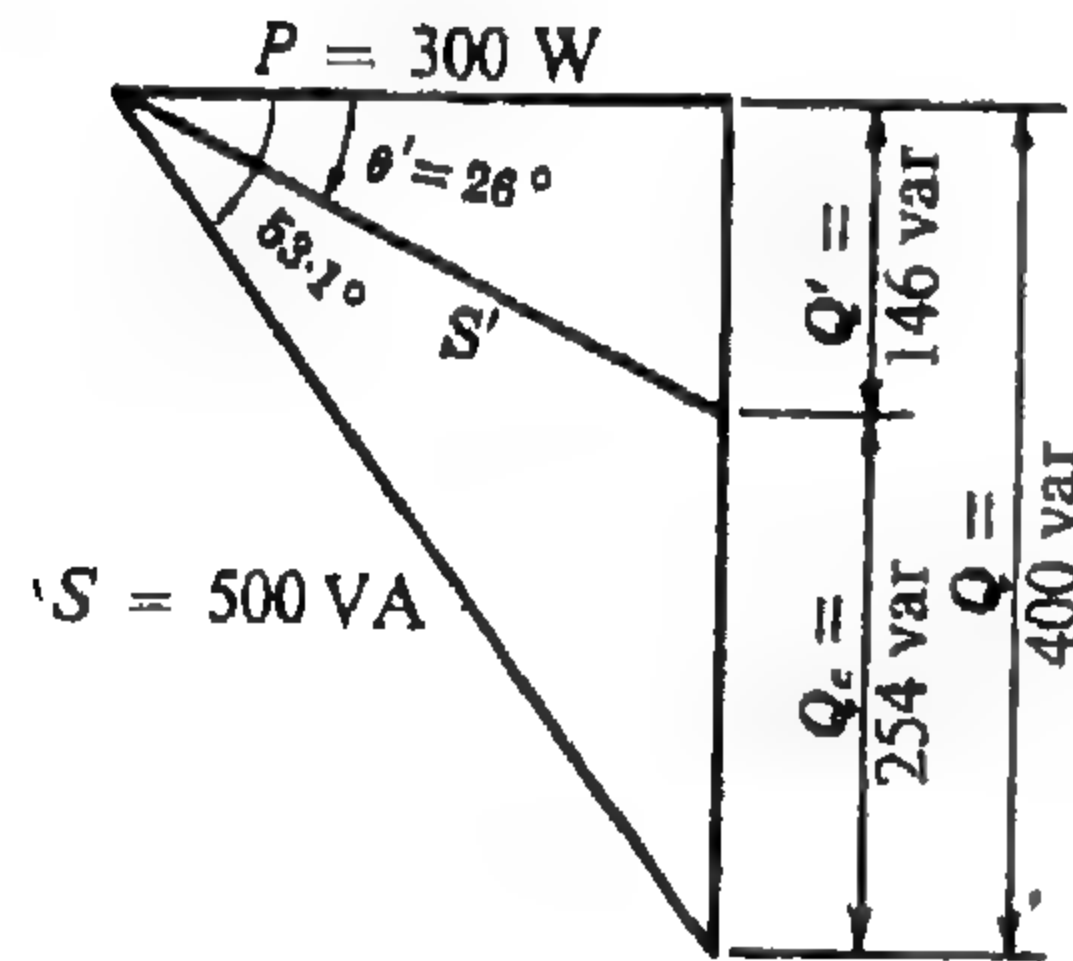
$$S_2 = 12.8 \text{ kVA} \quad , \quad (25)^2 = (12 + \sqrt{3}/2 S_2)^2 + (16 - \frac{1}{2}S_2)^2 \quad \text{وبالتعويض ينتج أن}$$

٧ - ٢١ محول 500 kVA يعمل بكامل سعة بعامل قدرة كل يساوى 0.6

لاحق . فإذا أريد تحسين عامل القدرة بإضافة مجموعة مكثفات حتى

يصبح عامل القدرة الكلى يساوى 0.9 لاحق ، فحين عدد الـ kvar

للمكثفات المطلوبة . ثم احسب النسبة المئوية لتحميل المحول بعد تصحيح عامل القدرة .



شكل ٧ - ٢١

عندما يكون المحول بكامل سعة (أنظر الشكل ٧ - ٢١) فإن

$$P = VI \cos \theta = 500(0.6) = 300 \text{ kW}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0.6 = 53.1^\circ$$

$$Q = VI \sin \theta = 500 \sin 53.1^\circ = 400 \text{ kvar} \quad \text{(لاحقة)}$$

عندما يكون $p.f. = 0.9$ لاحق ، فإن

$$Q' = 333 \sin 26^\circ = 146 \text{ kvar} \quad \text{(لاحقة)} , \quad S' = 300/0.9 = 333 \text{ kVA} \quad \text{و} \quad \theta' = \cos^{-1} 0.9 = 26^\circ$$

إذن عدد kvar للمكثفات اللازمة هي

$$Q - Q' = 400 - 146 = 254 \quad \text{(سابقة)}$$

والنسبة المئوية لتحميل المحول هي $(333/500)100 = 66.7\%$

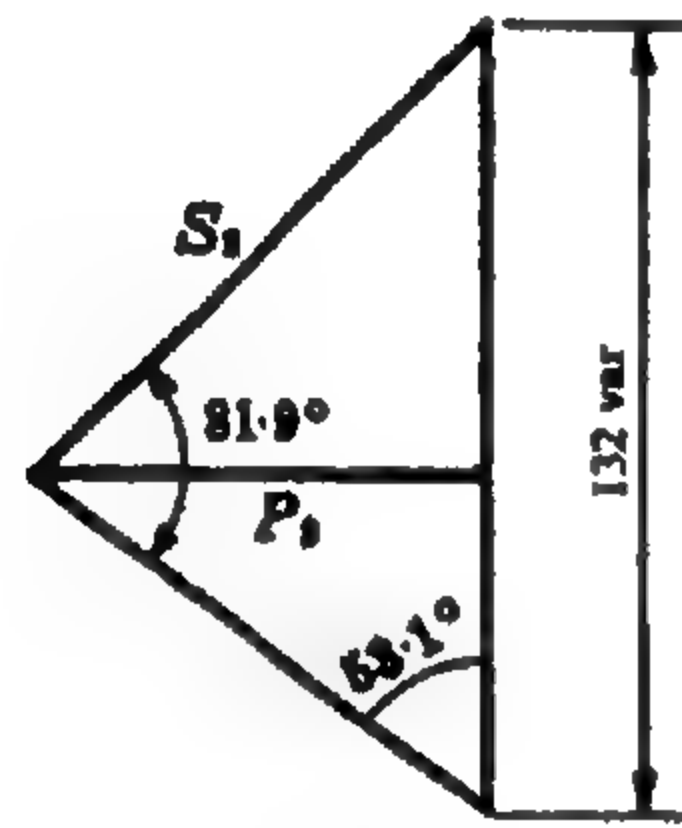
٧-١٣ مجموعة من المحركات الحثية متوسط قدرتها الكلية 500 kW وعامل القدرة لها 0.8 لاحق ، يراد إعادة تشغيلها جزئيا بمجموعة محركات تزامنية لها نفس الكفاءة ولكن عامل القدرة لها 0.707 سابق . ومع استمرار برنامج التشغيل يتحسن عامل القدرة باستمرار . أوجد النسبة المئوية للحمل الذى يمكن توصيله عندما يصل عامل القدرة للمجموعة 0.9 لاحق .

بما أن المحركات التزامنية لها نفس كفاءة المحركات الحثية فإن متوسط القدرة الكلية يبقى ثابتا عند 500 kW ، ولدينا قبل إعادة تشغيل المحركات .

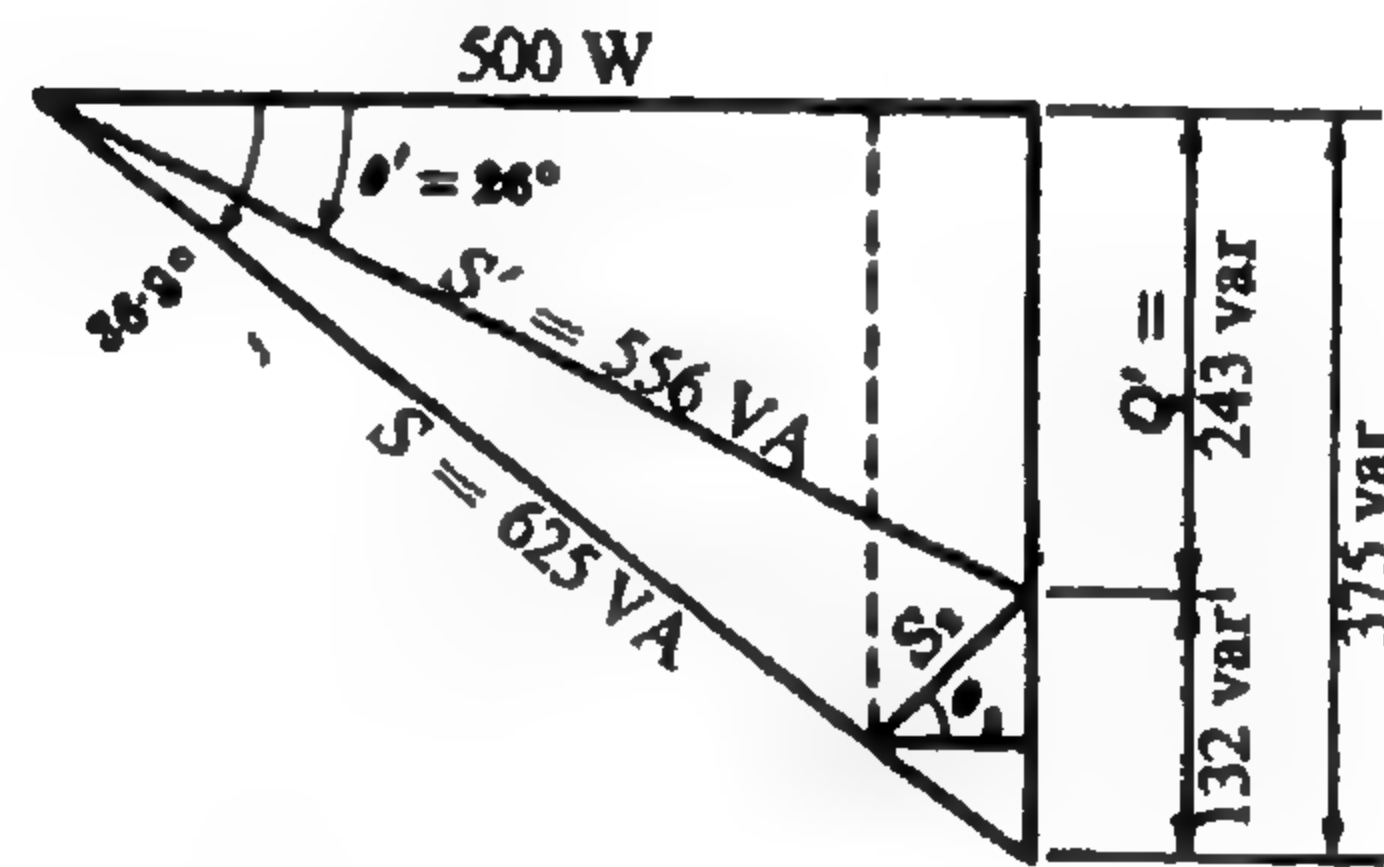
$$S = 500/0.8 = 625 \text{ kVA} , \theta = \cos^{-1} 0.8 = 36.9^\circ , \text{ لاحقة } Q = 625 \sin 36.9^\circ = 375 \text{ kvar}$$

وعندما يصبح عامل القدرة 0.9 لاحقا يكون

$$\theta = \cos^{-1} 0.9 = 26^\circ , S' = 500/0.9 = 556 \text{ kVA} , \text{ لاحقة } Q' = 556 \sin 26 = 243 \text{ kvar}$$



(ب)



(أ)

شكل ٧ - ٢٢

وبما أن عامل القدرة للمحركات التزامنية 0.707 سابق ، أى أن $\theta_2 = \cos^{-1} 0.707 = 45^\circ$

إذن من الشكل ٧-٢٢ (ب) وتطبيق قانون الجيب نحصل على

$$S_2/\sin 53.1^\circ = 132/\sin 81.9^\circ, S_2 = 106.5 \text{ kVA}$$

$$P_2 = 106.5 \cos 45^\circ = 75.3 \text{ kW}$$

إذن

والنسبة المئوية للتحميل هي $100 = 15\% (75.3/500)$

مسائل اضافية

٧ - ١٤ عين بالكامل مثلث القدرة لدائرة ، إذا علمت أن الجهد المؤثر هو $v = 200 \sin(\omega t + 110^\circ)$ volts والتيار الناتج هو $i = 5 \sin(\omega t + 20^\circ)$ amperes : لاجبة $Q = 500$ var و $P = 0$

٧ - ١٥ عين بالكامل مثلث القدرة لدائرة ، إذا علمت أن الجهد المؤثر هو $v = 14.14 \cos \omega t$ volts والتيار الناتج هو $i = 17.1 \cos(\omega t - 14.05)$ milli-amperes

الاجابة : $p.f. = 0.97$ لاحق ، $Q = 29.6$ mvar لاجبة ، $P = 117.5$ milliwatts

٧ - ١٦ عين بالكامل مثلث القدرة لدائرة ، إذا علمت أن الجهد المؤثر هو $v = 340 \sin(\omega t - 60^\circ)$ volts والتيار الناتج هو $i = 13.3 \sin(\omega t - 48.7)$ amperes : لاجبة $Q = 442$ var سابقة ، $P = 2215$ W ، $p.f. = 0.98$ سابق

٧ - ١٧ عين مثلث القدرة لدائرة توالى تتكون من عنصرين $R = 10 \Omega$ ، $X_C = 5 \Omega$ إذا علمت أن القيمة الفعالة للجهد المؤثر هي 120 V .
الاجابة : $S = 1154 - j577$ VA ، $p.f. = 0.894$ سابق

٧ - ١٨ عين مثلث القدرة لدائرة توالى تتكون من عنصرين $R = 5 \Omega$ ، $X_L = 15 \Omega$ إذا علمت أن القيمة الفعالة للجهد عبر المقاومة هي 31.6 V
الاجابة : $S = 200 + j600$ VA ، $p.f. = 0.316$ لاحق

٧ - ١٩ عين المعلومات الكاملة عن قدرة دائرة توالى تتكون من عنصرين $R = 8 \Omega$ و $X_C = 6 \Omega$ إذا علمت أن الجهد المؤثر هو $V = 50 \angle -90^\circ$ V
الاجابة : $S = 200 - j150$ VA ، $p.f. = 0.8$ سابق .

٧ - ٢٠ عين معاوقة الدائرة التى تأخذ 5040 VA بعامل القدرة 0.894 سابق إذا كان الجهد المطاوع المؤثر هو $V = 150 \angle 45^\circ$ V : لاجبة $4 - j2 \Omega$

٧ - ٢١ معاوقة تأخذ 3500 VA بعامل قدرة 0.76 لاحق ، فإذا كانت القيمة الفعالة للتيار المار فى المعاوقة هي 18 A فعين هذه المعاوقة .
الاجابة : $8.21 + j7.0 \Omega$

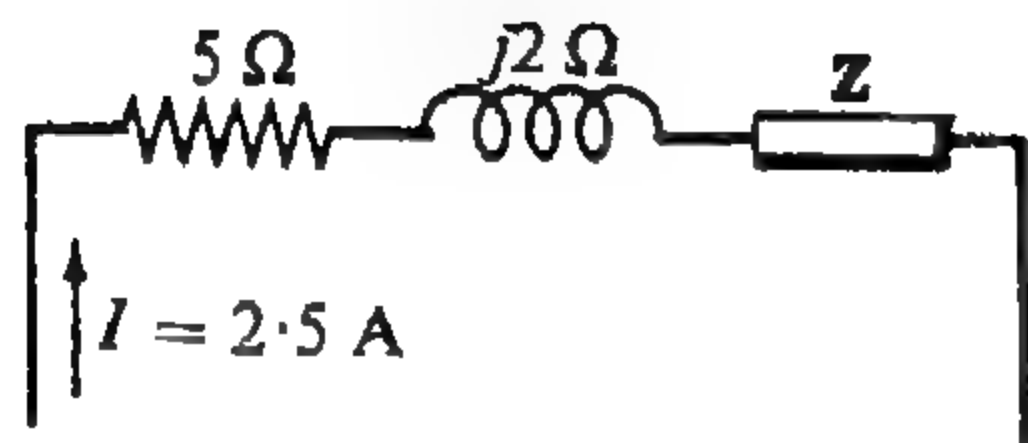
٧ - ٢٢ دائرة توالى تتكون من عنصرين ، فإذا كانت معادلة التيار الحظى المار بها هي $i = 4.24 \sin(5000t + 45^\circ)$ amperes وقدرة الدائرة 180 W وعامل القدرة 0.8 لاحق ، فعين ثوابت الدائرة .
الاجابة : $L = 3$ mH و $R = 20$ ohms

٧ - ٢٣ معاومتان $Z_1 = 5.83 \angle -59^\circ \Omega$ ، $Z_2 = 8.95 \angle 63.4^\circ \Omega$ متصلتان على التوالي ، فإذا كانت القيمة الفعالة للتيار المار بهما هي 5A . فعين المعلومات الكاملة عن القدرة .

الجواب : $S_T = 175 + j75 \text{ VA}$ ، $\text{p.f.} = 0.918$ لاحق

٧ - ٢٤ معاومتان $Z_1 = 5 \angle 45^\circ \Omega$ ، $Z_2 = 10 \angle 30^\circ \Omega$ متصلتان على التوالي فإذا كانت Q الكلية لهما لاحقة وتساوى 1920 var فأوجد متوسط القدرة P والقدرة الظاهرية S .

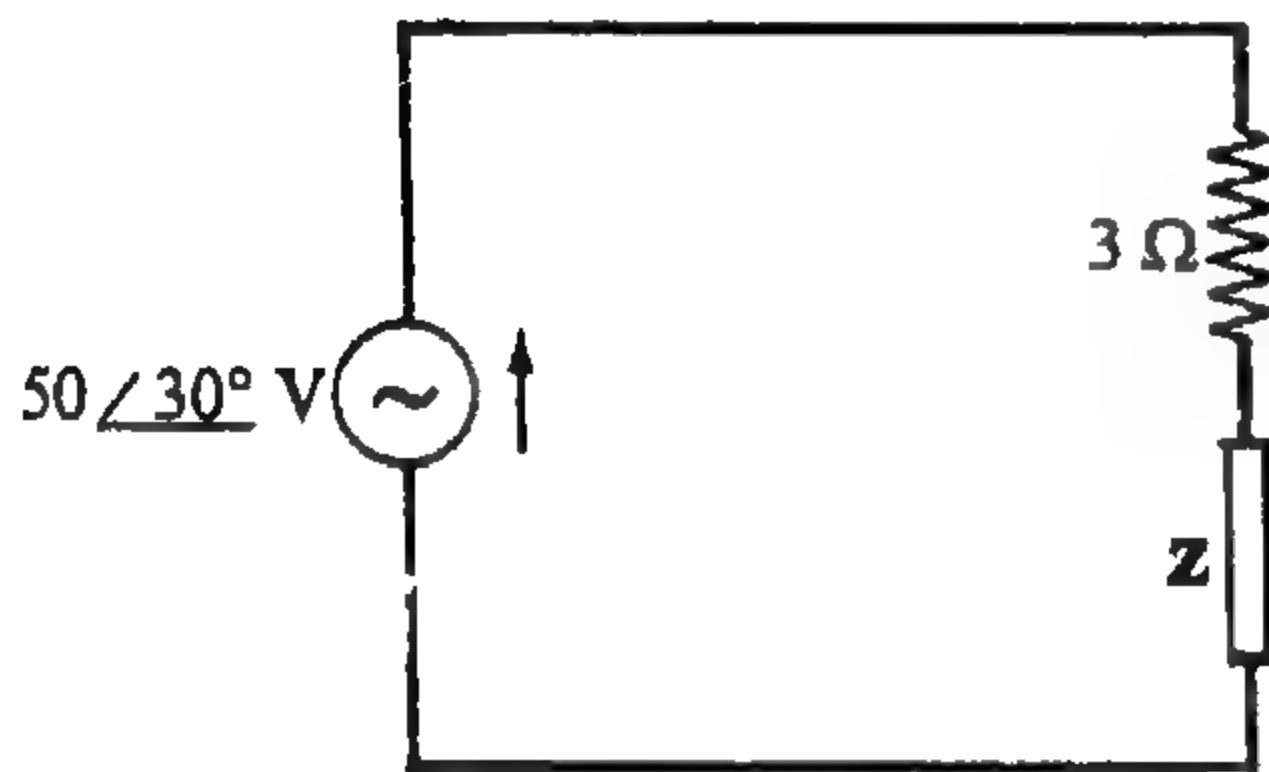
الجواب : $S = 3350 \text{ VA}$ ، $P = 2745 \text{ W}$



شكل ٧ - ٢٣

٧ - ٢٥ تأخذ دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٧ - ٢٣ 36.4 VA بمامل قدرة 0.856 لاحق ، عين Z في هذه الدائرة .

الجواب : $Z = 1 \angle 90^\circ \Omega$



شكل ٧ - ٢٤

٧ - ٢٦ إذا كانت قدرة دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٧ - ٢٤ هي 300 W وعامل القدرة لها 0.6 لاحق ، فعين بالكامل مثلث القدرة وكذلك المعاوقة المجهولة .

الجواب : $S = 300 + j400 \text{ VA}$ ، $Z = 4 \angle 90^\circ \Omega$

٧ - ٢٧ معاومتان $Z_1 = 4 \angle -30^\circ \Omega$ ، $Z_2 = 5 \angle 60^\circ \Omega$ متصلتين على التوازي ويؤثر عليهما جهد مطاور $V = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$. أوجد مثلث القدرة لكل فرع ثم اجمعهما لتحصل على مثلث القدرة الكلي .

الجواب : $Q = 19.3 \text{ var}$ لاحقة ، $P = 126.6 \text{ W}$

$\text{p.f.} = 0.99$ لاحق

٧ - ٢٨ دائرة تتكون من $R = 10 \Omega$ متصلة على التوازي مع $Z = 8 \angle -30^\circ \Omega$. فإذا كانت القيمة الفعالة للتيار الكلي تساوى 5 A ، فأوجد بالكامل مثلث القدرة .

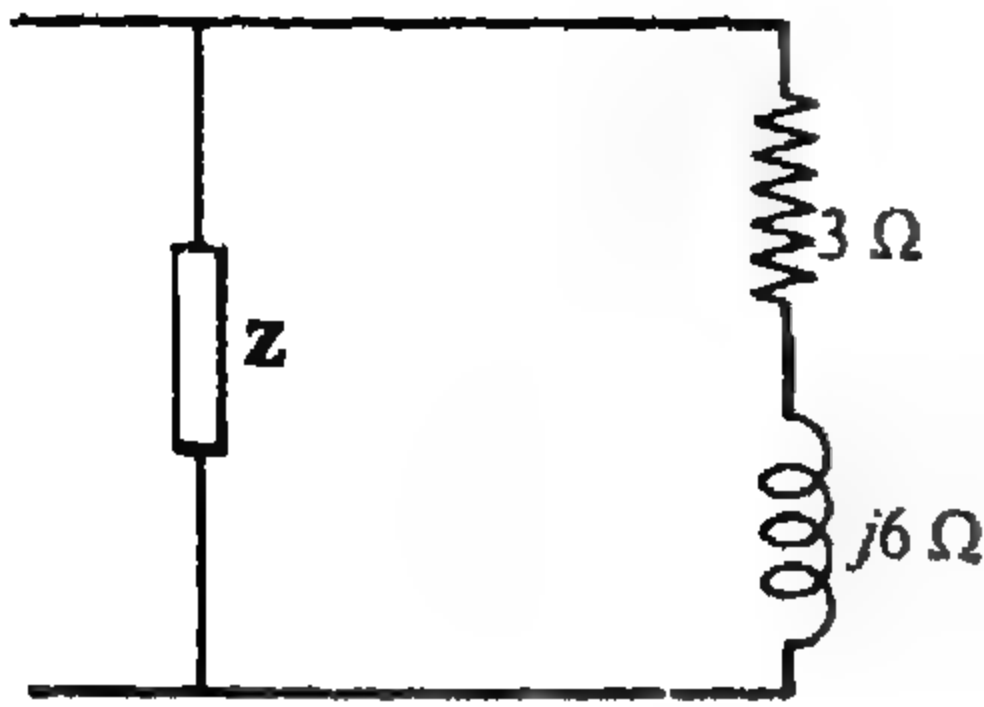
الجواب : $P = 110 \text{ W}$ ، $Q = 33 \text{ var}$ سابقة ، $\text{p.f.} = 0.957$ سابق .

٧ - ٢٩ إذا كان الفرع 1 في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٧ - ٢٥ يحتوي على 8 kvar ، فأوجد القدرة وعامل القدرة للدائرة كلها .

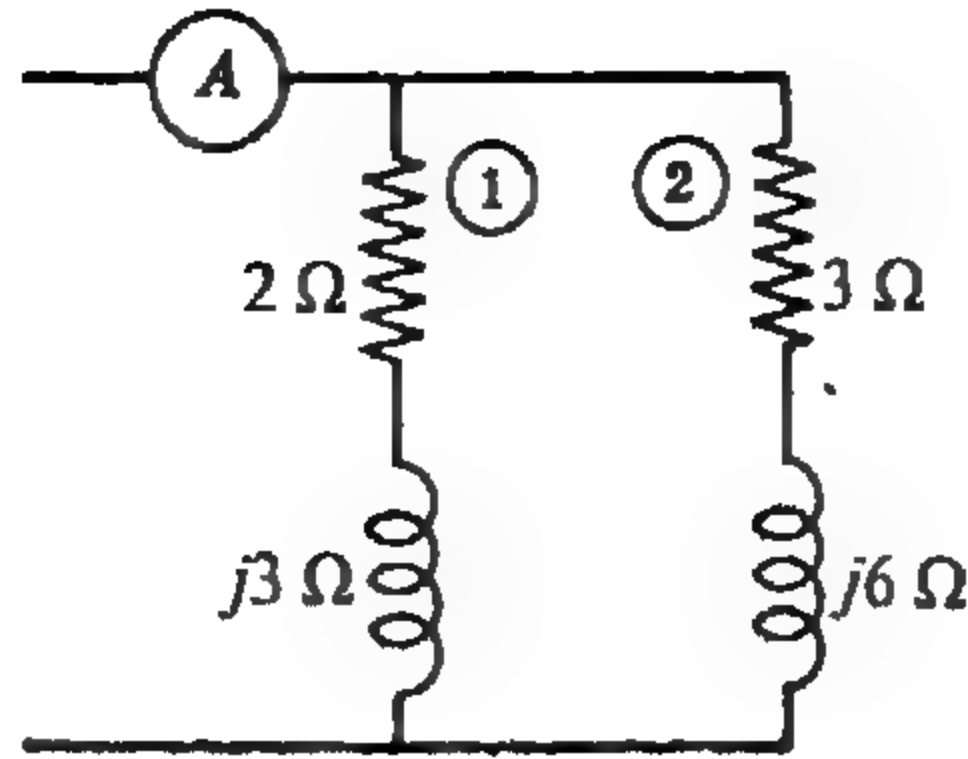
الجواب : 8 kw ، $\text{p.f.} = 0.555$ لاحق .

٧ - ٣٠ إذا كان الفرع 2 في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٧ - ٢٦ يحتوي على 1490 volt amperes ، فأوجد قراءة الأميتر ، عين المعلومات الكاملة عن القدرة .

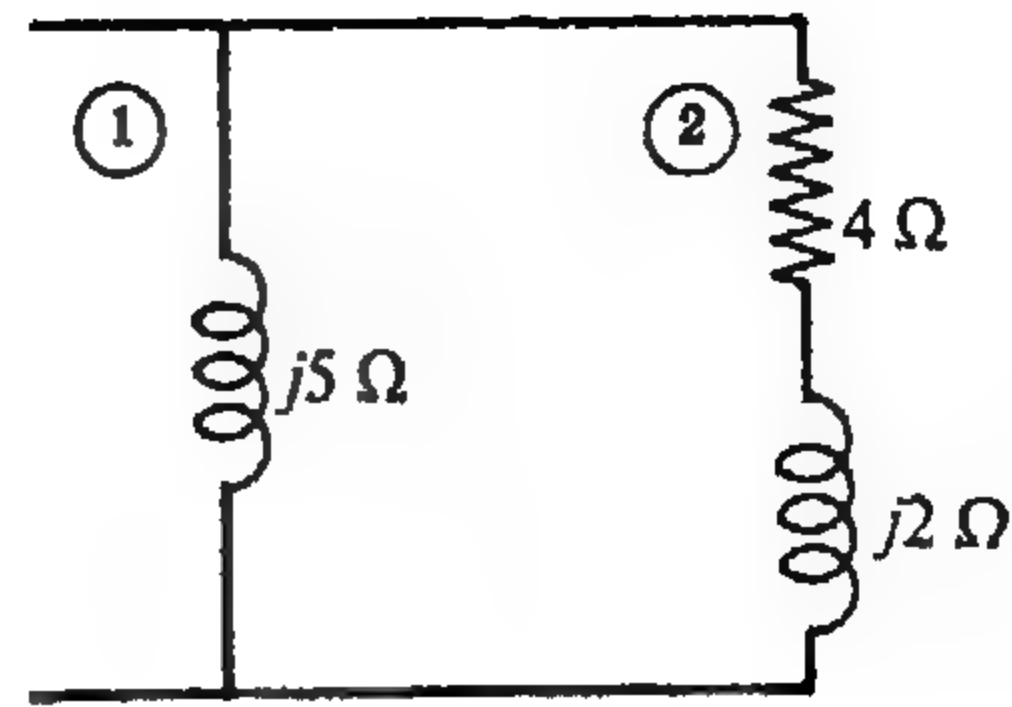
الجواب : 42.4 A ، $S = 2210 + j3630 \text{ VA}$ ، $\text{p.f.} = 0.521$ لاحق



شكل ٢٧ - ٧



شكل ٢٦ - ٧



شكل ٢٥ - ٧

٧ - ٣١ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٢٧-٧ ، كانت قدرة المقاومة 3Ω هي 666 W فإذا كانت الدائرة كلها تأخذ 3370 VA بعامل قدرة 0.937 سابق ، فأوجد Z .

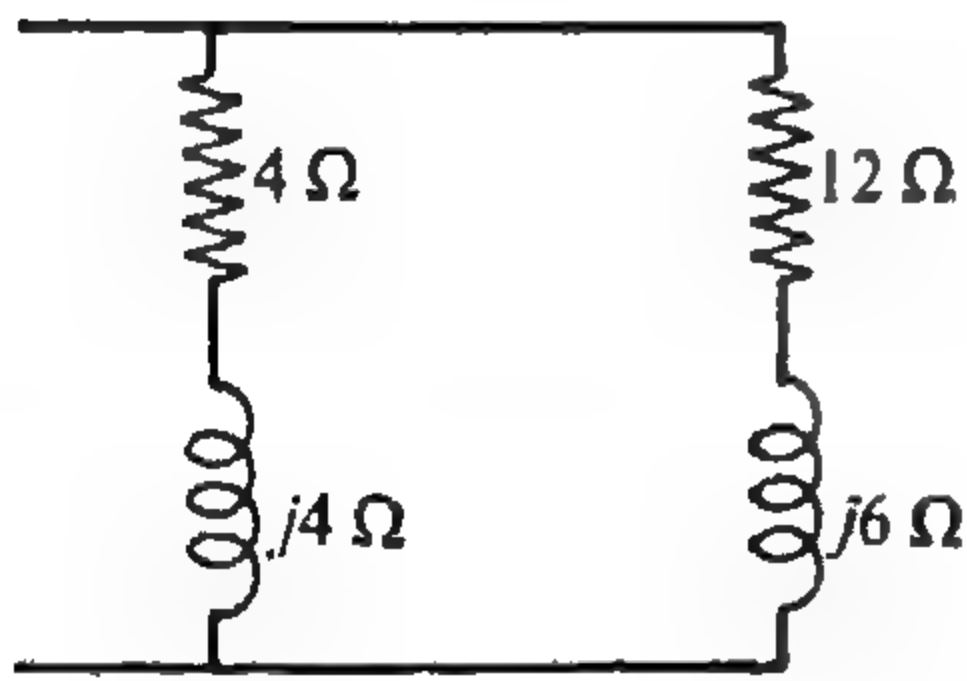
الجواب : $Z = 2 - j2 \Omega$

٧ - ٣٢ إذا كانت دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٢٨-٧ لها قدرة كلية 1500 W ، فعين بالكامل مثلث القدرة .

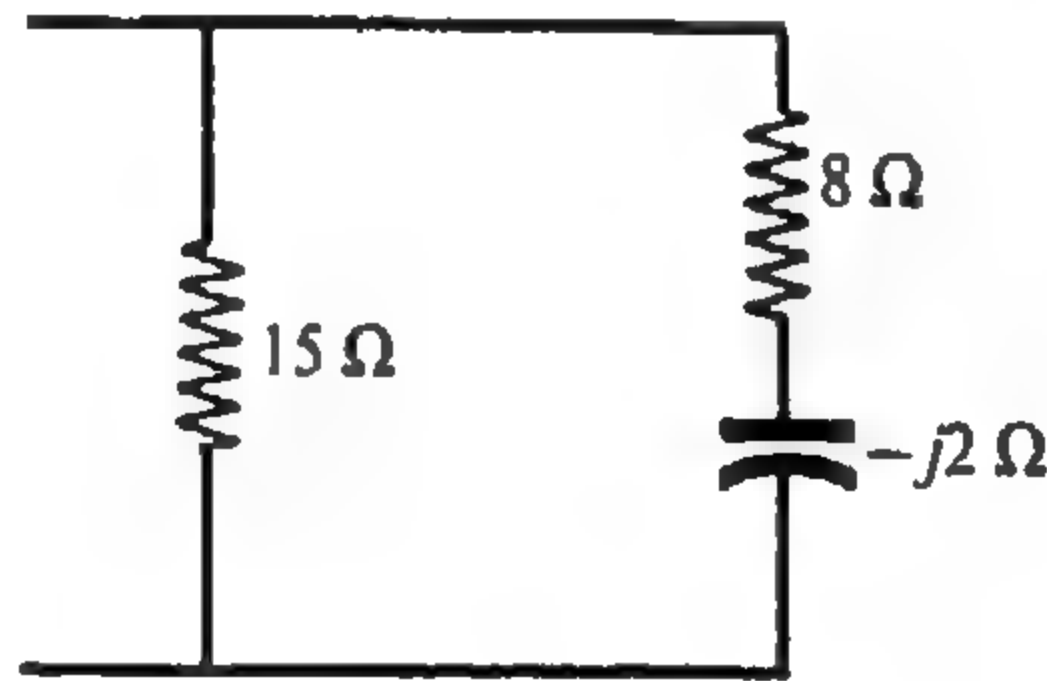
الجواب : $S = 1500 + j2480 \text{ VA}$ ، $\text{p.f.} = 0.518$ لاحق

٧ - ٣٣ إذا كانت القدرة الكلية للدائرة الموضحة في الشكل ٢٩-٧ هي 2000 W ، فأوجد القدرة في كل مقاومة .

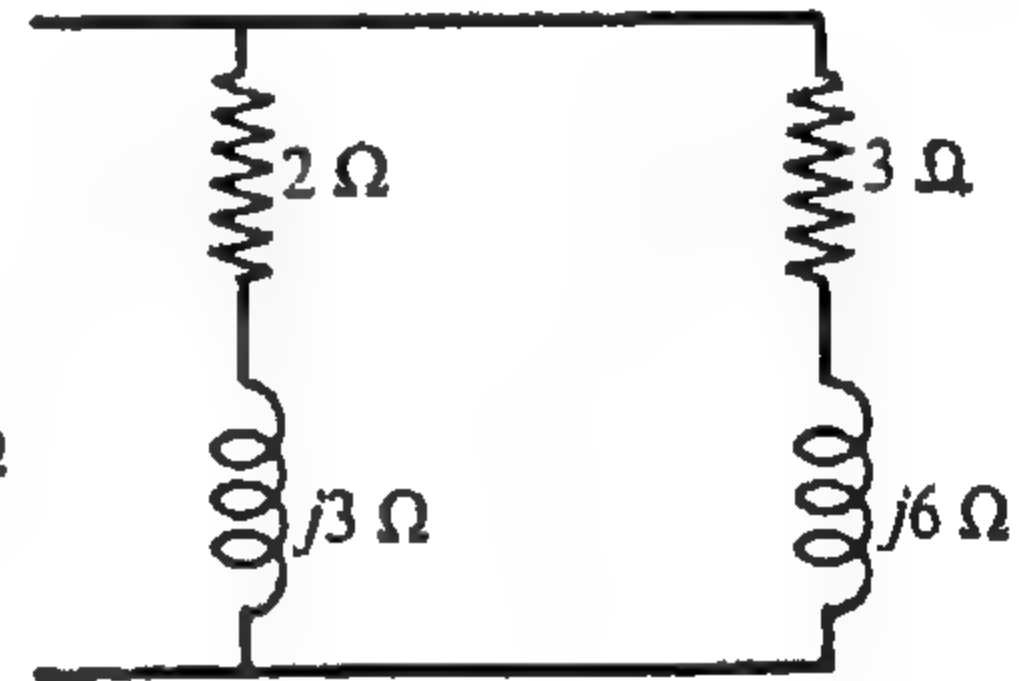
الجواب : $P_{15} = 724 \text{ W}$, $P_8 = 1276 \text{ W}$



شكل ٣٠ - ٧



شكل ٢٩ - ٧



شكل ٢٨ - ٧

٧ - ٣٤ إذا كانت Q الكلية لدائرة التوازي الموضحة في الشكل ٣١-٧ لاحقة وتساوي 2500 var ، فعين بالكامل مثلث القدرة .

الجواب : $\text{p.f.} = 0.771$ لاحق و $S = 3920 \text{ VA}$, $P = 3020 \text{ W}$

٧ - ٣٥ أوجد عامل القدرة لدائرة التوازي الموضحة في الشكل ٣١-٧ . إذا غيرت المقاومة 6Ω ليصبح عامل القدرة 0.9 لاحق فأوجد قيمة المقاومة الجديدة .

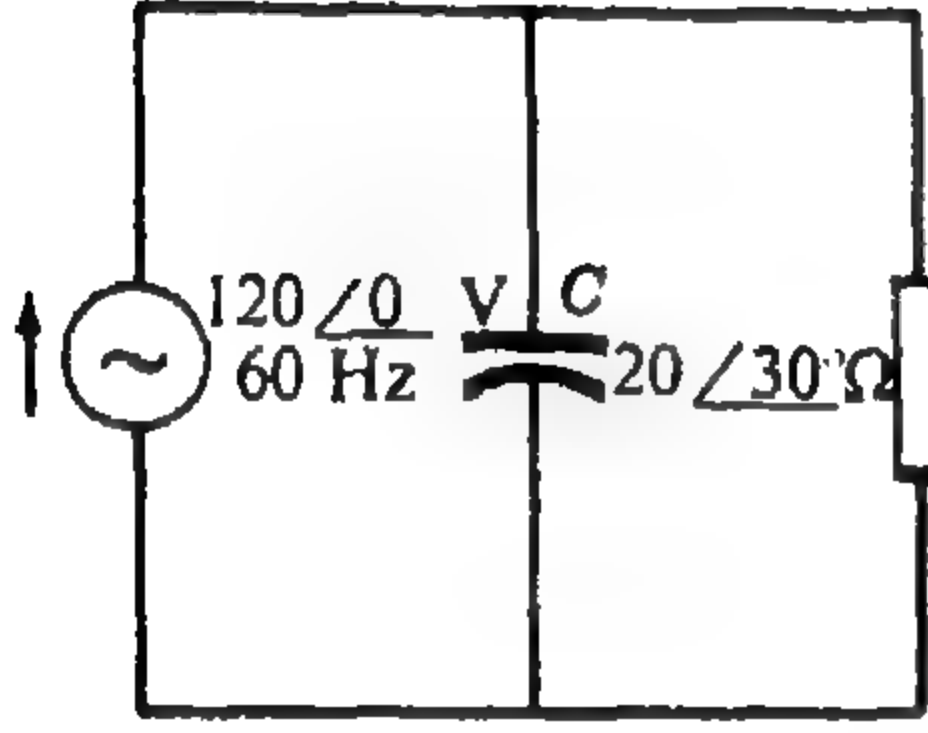
الجواب : $\text{p.f.} = 0.8$ لاحق ، $R = 3.22 \Omega$

٧ - ٣٦ إذا كان الحمل الأساسي للدائرة الموضحة في الشكل ٦ - ٣٢ هو $Z = 5 + j8.66 \Omega$ ، فإذا أضيف له مكثف $20 \mu F$ على التوازي وذلك لتحسين عامل القدرة ، فأوجد النسبة المئوية للنقص في التيار الكلي .

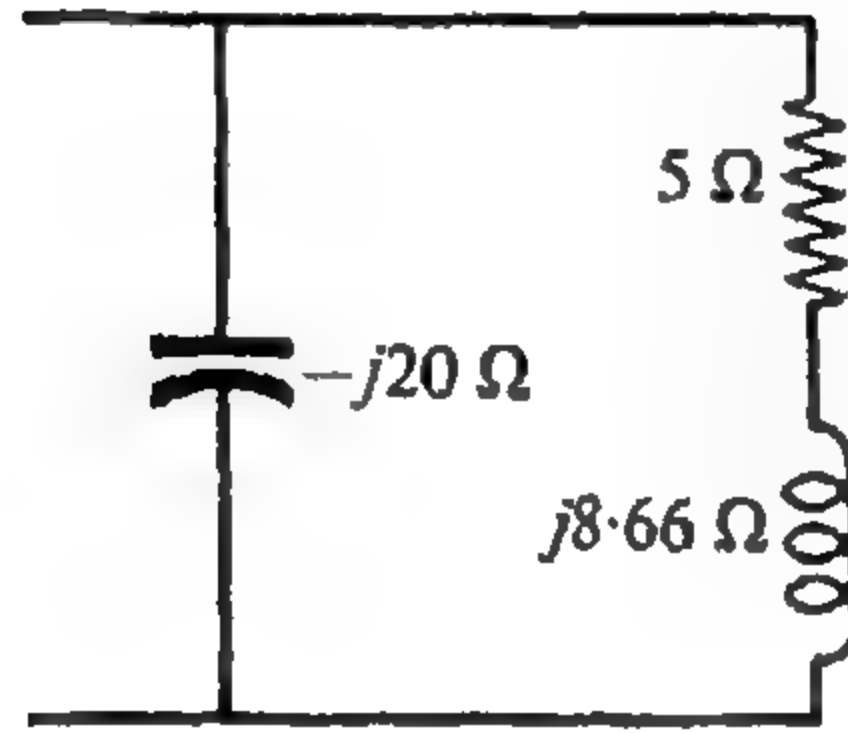
الجواب : 38 %

٧ - ٣٧ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٧ - ٣٣ ، أوجد سعة المكثف C اللازمة لتصحيح عامل القدرة ليصبح 0.95 لاحق .

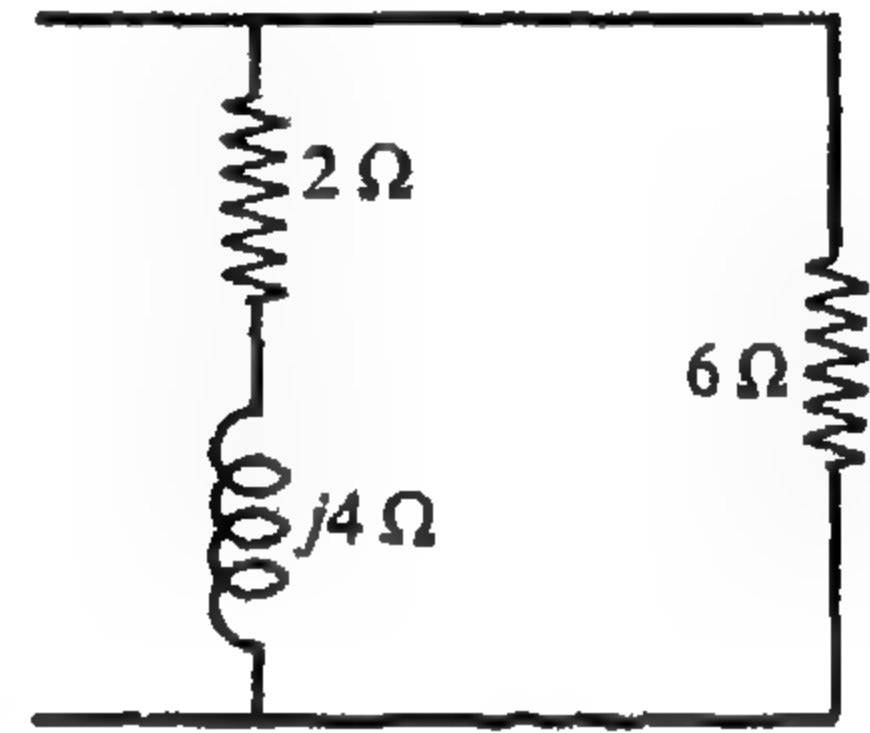
الجواب : $C = 28.9 \mu F$



شكل ٧ - ٣٣



شكل ٧ - ٣٢



شكل ٧ - ٣١

٧ - ٣٨ مصدر جهد تردده 60 Hz وقيته الفعالة 240V ، يغذى حملاً بـ 4500VA بعامل قدرة 0.75 لاحق . أوجد سعة المكثف اللازم توصيله على التوازي مع الحمل لتحسين عامل القدرة إلى (أ) 0.9 لاحق ، (ب) 0.9 سابق .

الجواب : (أ) $61.3 \mu F$ ، (ب) $212 \mu F$

٧ - ٣٩ في المسألة ٧ - ٣٨ أوجد النسبة المئوية للنقص في تيار الخط الناتج في الجزء (أ) . هل يوجد أى نقص آخر في تيار الجزء (ب) ؟

الجواب : 16.7% ، لا ، التيارات تظل كما هي .

٧ - ٤٠ ثلاث معاومات $Z_1 = 20 \angle 30^\circ \Omega$ ، $Z_2 = 15 \angle 45^\circ \Omega$ ، $Z_3 = 10 \angle 0^\circ \Omega$ متصلة على التوازي ويؤثر عليهم مصدر جهد $V = 100 \angle 45^\circ V$. أوجد مثلث القدرة لكل فرع ثم اجمعهما لتحصل على مثلث القدرة الكلي .

الجواب : $P = 1904 W$ ، $Q = 221 var$ سابقة ، $S = 1920 VA$ ، $p.f. = 0.993$ سابق .

٧ - ٤١ في المسألة ٧ - ٤٠ إذا كان مصدر الجهد 100 V يغذى الأفرع الثلاثة في دائرة التوازي بـ 1920 VA بعامل قدرة 0.993 سابق ، فاحسب التيار الكلي الذي تأخذه الدائرة .

الجواب : 19.2 A سابق للجهد V بزواوية 6.62°

٧ - ٤٢ : مصدر $V = 240 \angle -30^\circ$ يؤثر على ثلاث معاوقات $Z_1 = 25 \angle 15^\circ \Omega$ ، $Z_2 = 15 \angle 60^\circ \Omega$ ، $Z_3 = 15 \angle 90^\circ \Omega$. أوجد مثلث القدرة لكل فرع ثم اجمعهما لتحصل على مثلث القوى الكلى .

الجواب : $P = 4140 \text{ W}$ ، $Q = 1115 \text{ var}$ لاحق ، $S = 4290 \text{ VA}$ ، $\text{p.f.} = 0.967$ لاحق .

٧ - ٤٣ : أوجد مثلث القدرة الكلى للأحمال الثلاثة التالية : حمل ١ ، kW بعامل قدرة 0.8 لاحق . حمل ٢ : 4 kVA له تساوى 2 kvar سابقة ، حمل ٣ : 6 KVA بعامل قدرة 0.9 لاحق .

الجواب : $P = 13.86 \text{ kW}$ ، $Q = 4.38 \text{ kvar}$ لاحق ، $S = 14.55 \text{ kVA}$ ، $\text{p.f.} = 0.965$ لاحق .

٧ - ٤٤ : أوجد مثلث القدرة الكلى للأحمال الثلاثة التالية : حمل ١ : 200 VA بعامل قدرة 0.7 لاحق ، حمل ٢ : 350 VA بعامل قدرة 0.5 لاحق ، حمل ٣ : 275 VA بعامل قدرة يساوى الوحدة .

الجواب : $P = 590 \text{ W}$ ، $Q = 446 \text{ var}$ لاحق ، $S = 740 \text{ VA}$ ، $\text{p.f.} = 0.798$ لاحق .

٧ - ٤٥ : حمل 300 kW بعامل قدرة 0.65 لاحق يراد تحسين عامل القدرة له إلى 0.90 لاحق وذلك بإضافة مكثف على التوازي . احسب عدد الـ kVA للمكثف المطلوب وكذلك النسبة المئوية للنقص فى kVA الناتج .
الجواب : 204 kvar ، 28% .

٧ - ٤٦ : حمل صناعى 25 kVA عامل القدرة الكلى له 0.8 لاحق . وصل به مجموعة مقاومات وحدات تسخين (p.f. يساوى الوحدة) ، فوجد أن عامل القدرة للحقل الصناعى كله 0.85 لاحق احسب عدد kW التى تأخذها مقاومات التسخين .
الجواب : 4.3 kW .

٧ - ٤٧ : حمل عبارة عن محرك حتى 1500 W بعامل قدرة 0.75 لاحق . وصل مع محركات متزامنة 500 VA بعامل قدرة 0.65 سابق . احسب Kvat للمكثفات اللازمة لتحسين عامل القدرة الكلى لمجموعتى المحركات إلى 0.95 لاحق . احسب كذلك النسبة المئوية للنقص فى VA الناتج .
الجواب : 347 var ، 6.3% .

٧ - ٤٨ : صحح عامل القدرة لحمل إلى 0.9 لاحق وذلك بإضافة مكثفات 20 kvar ، فإذا كان kVA النهائى هو 185 ، فأوجد مثلث القدرة للحمل قبل التصحيح .
الجواب : $P = 166.5 \text{ kW}$ ، $Q = 101.0 \text{ kvar}$ لاحق ، $\text{p.f.} = 0.856$ لاحق

٧ - ٤٩ : وصل محرك حتى 2000 VA بعامل قدرة 0.8 لاحق مع محركات تزامنية 500 VA ، فإذا كان عامل القدرة الكلى 0.90 لاحقاً ، فأوجد عامل القدرة للمحركات التزامنية .
الجواب : 0.92 سابق .

٧ - ٥٠ وصل حمل 65 kVA بعامل قدرة لاحق مع 25 kVA محركات تزامنية بعامل قدرة 0.6 سابق . فإذا كان عامل القدرة الكلي 0.85 لاحقاً ، فأوجد عامل القدرة للحمل 65 kVA .

الجواب : 0.585

٧ - ٥١ محول 100 kVA حمل إلى 80% من تحميله الكلي وكان عامل القدرة 0.85 لاحقاً . فإذا وصل به حمل عامل القدرة له 0.6 لاحق ، فأوجد عدد الـ kVA لهذا الحمل بشرط عدم زيادة معدل التحميل الكلي للمحول .

الجواب : 21.3. kVA

٧ - ٥٢ محول 250 kVA محمل تحميلاً كلياً وعامل القدرة له 0.8 لاحق . فإذا أردنا تصحيح عامل القدرة إلى 0.9 لاحق وذلك بإضافة مكثفات على التوازي ، فاحسب (أ) عدد kvar للمكثفات المطلوبة ، (ب) عدد kW لحمل جديد عامل القدرة له يساوى الوحدة يمكن إضافته بشرط عدم زيادة معدل التحميل الكلي للمحول .

الجواب : 52.5 kvar ، 30.0 kW .

٧ - ٥٣ فى المسألة ٧ - ٥٢ إذا وصلنا حملاً جديداً عامل القدرة له 0.5 لاحق إلى المجموعة بعد توصيل المكثفات فاحسب عدد kVA لهذا الحمل الذى يمكن إضافتها مع عدم زيادة معدل kVA للمحول .

الجواب : 32kVA

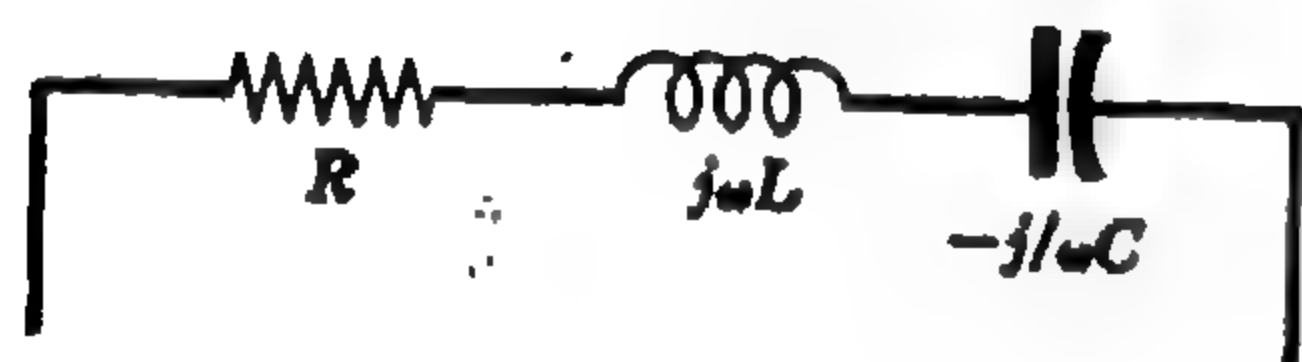
الفصل الثامن

رنين التوالي والتوازي

مقدمة :

يقال عن دائرة إنها في حالة رنين إذا كان الجهد المؤثر V والتيار الناتج I في طور واحد . وعلى ذلك فإنه في حالة الرنين تتكون المعاوقة المكافئة المركبة للدائرة من المقاومة R فقط .
وحيث أن V و I في طور واحد فإن عامل القدرة لدائرة رنين يساوى الوحدة .

رنين التوالي :

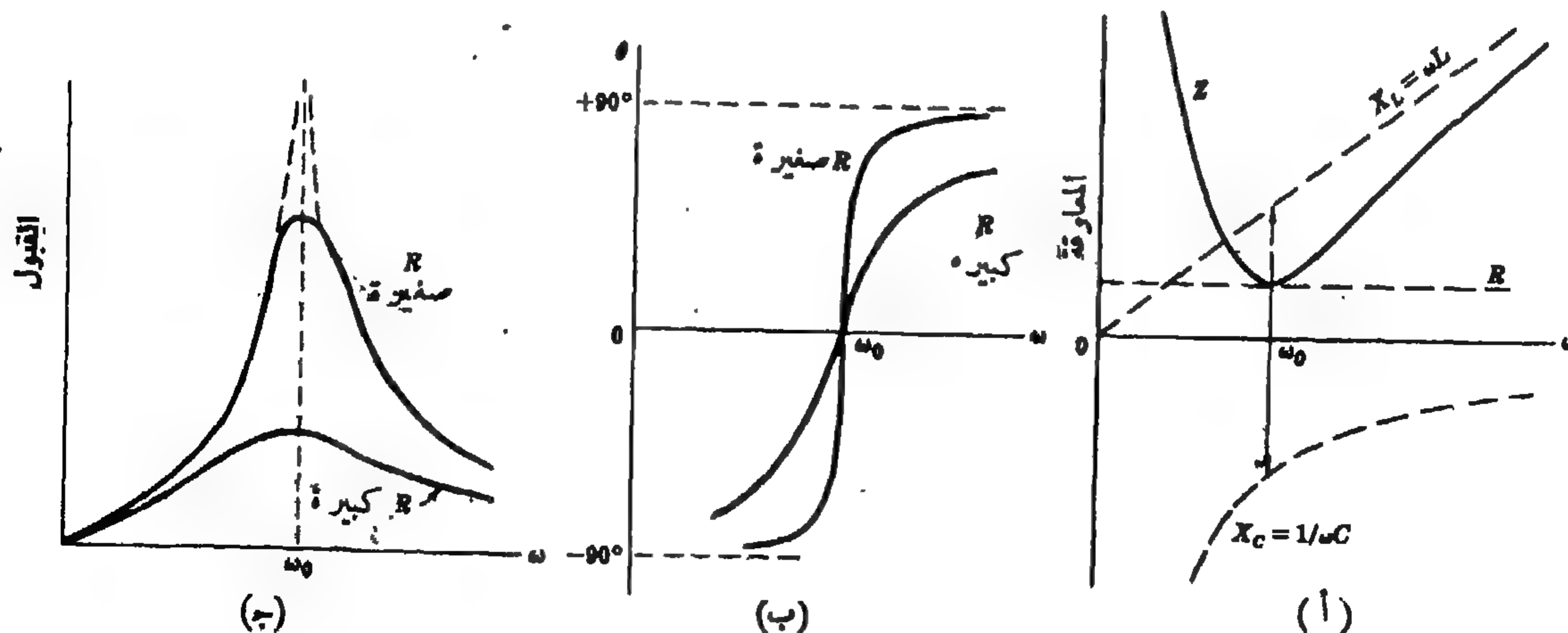


شكل ٨ - ١

معاوقة الدائرة التي تتكون من RLC على التوالي والموضحة في الشكل ٨ - ١ هي $Z = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + jX$ وعلى ذلك فإن الدائرة تكون في حالة رنين إذا كانت $X = 0$ ، أى عندما $\omega L = 1/\omega C$ أو $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. وبما أن $\omega = 2\pi f$ فإن ذبذبة الرنين تعطى بالمعادلة .

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$

يوضح الشكل ٨ - ٢ (أ) تغير القيمة المطلقة لـ Z وكذلك مركباتها الثلاثة R و X_L و X_C كدوال في ω . ونلاحظ أنه عندما $\omega = \omega_0$ فإن الممانعة الحثية تساوى الممانعة السعوية ، وبما أن $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ فإن $Z = R$. وعلى ذلك فإن المعاوقة Z تكون أصغر ما يمكن عند الرنين ، بما أن $I = V/Z$ فإن التيار يكون نهاية كبرى .



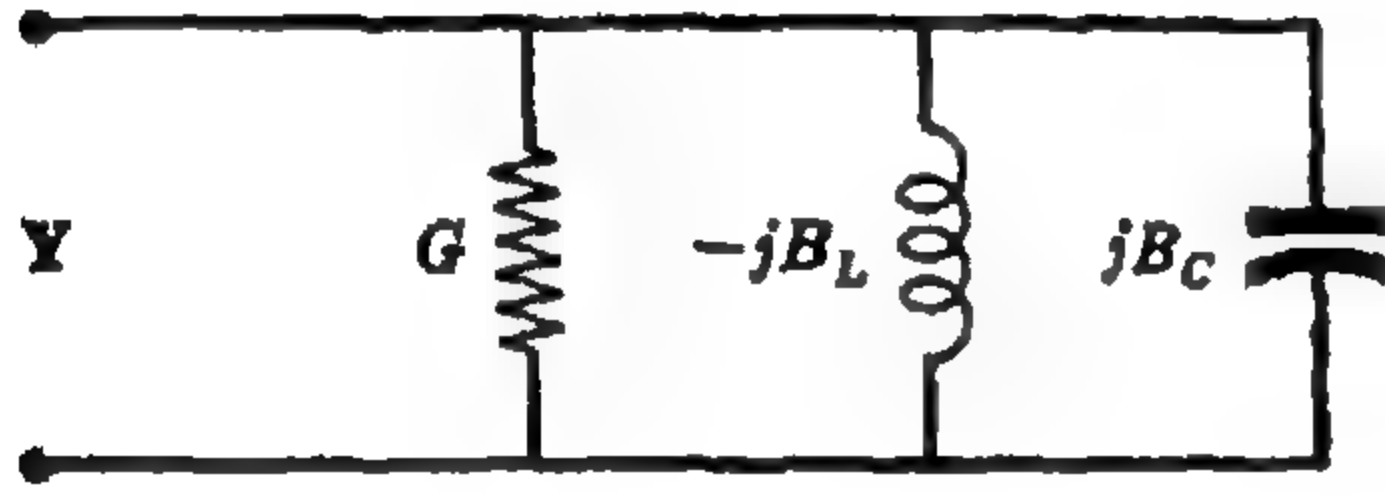
شكل ٨ - ٢ . دائرة توالى Z و θ و I كدوال في ω

وعند ذبذبات أقل من ω_0 فإن الممانعة السعوية تكون أكبر من الممانعة الحثية ، ولهذا تكون زاوية المعاوقة سالبة . إذا كانت قيمة المقاومة صغيرة فإن الزاوية تتغير بسرعة أكبر مع الذبذبة كما هو موضح في الشكل ٨ - ٢ (ب) . وعندما تقترب ω من الصفر فإن زاوية المعاوقة تقترب من $90^\circ -$.

وعند ذبذبات أكبر من ω_0 فإن الممانعة الحثية تكون أكبر من الممانعة السعوية ، ولهذا تكون زاوية المعاوقة موجبة وتقترب من $90^\circ +$ عندما $\omega \gg \omega_0$.

يوضح الشكل ٨ - ٢ (ج) تغير مسامحة دائرة التوازي $Y = 1/Z$ كدالة في ω . وبما أن $I = VY$ فإن هذا الرسم يعطى أيضا دلالة على تغير التيار مع ω . وعلى ذلك فإن الشكل ٨ - ٢ (ج) يوضح أن التيار يصل إلى نهايته العظمى عند ω_0 ، وعندما تكون قيمة المقاومة صغيرة فإن قيمة التيار تكون كبيرة . ويوضح المنحنى النقطي الحالة النهائية عندما $R = 0$. وزاوية المسامحة (غير موضحة هنا) تساوى سالب زاوية المعاوقة الموضحة في الشكل ٨ - ٢ (ب) .

رنين التوازي ، دائرة RLC نقية



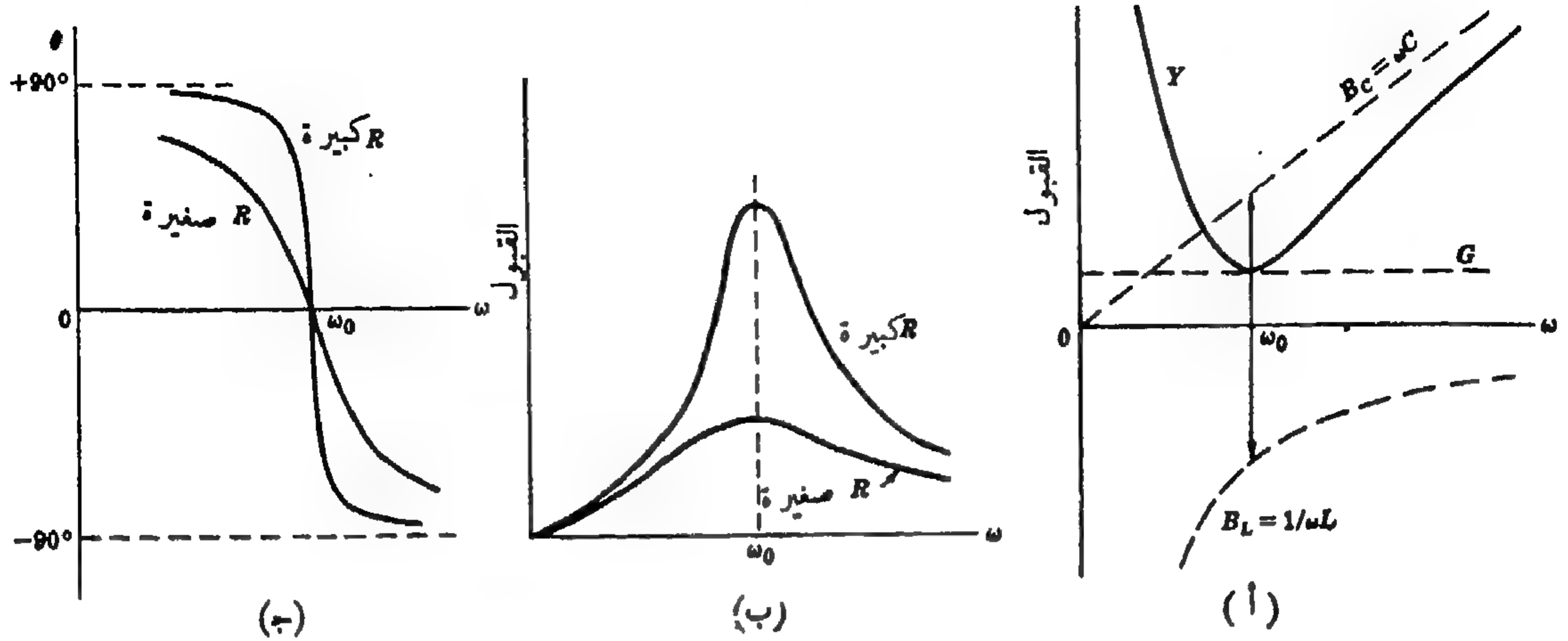
شكل ٨ - ٢

تعرف دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٢ والتي تتكون من أفرع في كل منها عنصر من العناصر R ، L ، C بأنها دائرة مثالية . وعلى ذلك فإن عمل هذه الدائرة من الأهمية في موضوع الرنين عموما . ويمكن مقارنة دائرة التوازي المثالية هذه بدائرة التوازي السابق دراستها بما يوضح ازدواجية مشتركة بين الدائرتين .

إن مسامحة العناصر الثلاثة هي $Y = G + j(\omega C - 1/\omega L) = G + jB$ حيث $B_L = 1/\omega L$ ، $B_C = \omega C$. والدائرة في حالة رنين عندما $B = 0$. أي عندما $\omega C = 1/\omega L$ أو $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. وكما في دائرة التوازي RLC فإن ذبذبة الرنين هي

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$

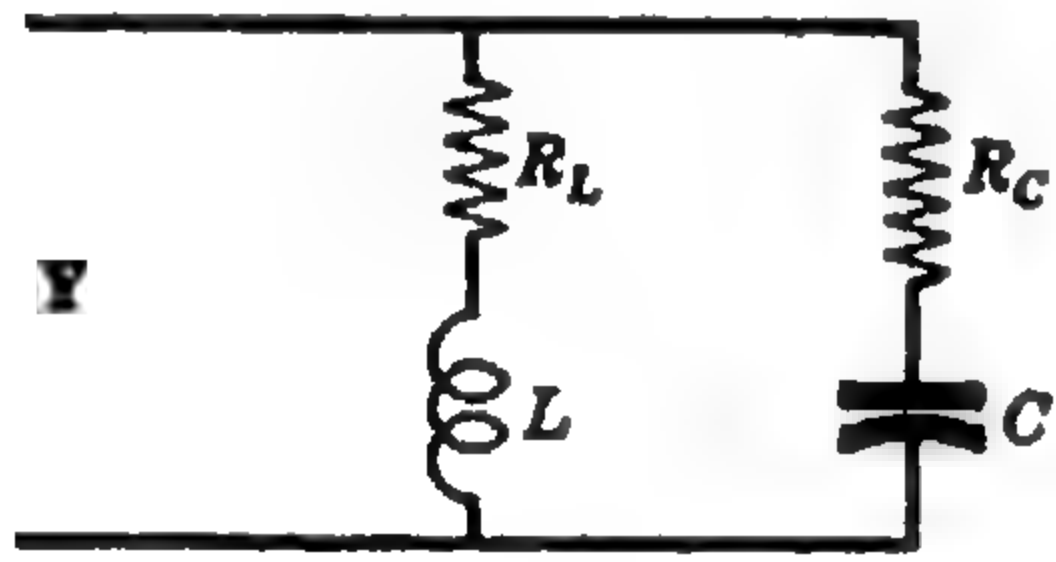
ويوضح الشكل ٨ - ٤ (أ) تغير كل من القيمة المطلقة للمسامحة Y ومركباتها الثلاثة G ، B_C ، B_L كدوال في الذبذبة ω وعند $\omega = \omega_0$ فإن التقبلية السعوية والحثية تكونان متساويتين و $Y = G$. وعلى ذلك فعند الرنين تكون المسامحة نهاية صغرى ، وبما أن $I = VY$ فإن التيار يكون نهاية صغرى أيضا .



شكل ٨ - ٤ : دائرة توازي Y ، Z و θ دوال في ω

عند ذبذبة أقل من ω_0 تزيد التقبيلية الحثية عن التقبيلية السعوية وتكون زاوية Y سالبة . وعلى ذلك فإن زاوية المعاوقة تكون موجبة وتقترب من $+90^\circ$ عندما تقترب ω من الصفر . أنظر الشكل ٨ - ٤ (ج) .

وعند ذبذبة أكبر من ω_0 فإن زاوية Z تكون سالبة ويكون تغييرها كدالة في ω أسرع عندما تكون قيمة R كبيرة .



رنين التوازي ، دائرة من فرعين

تكون المساحة Y لدائرة التوازي المكونة من فرعين الموضحة في الشكل ٨ - ٥ من مجموع مساحات كل فرع على حدة .

$$\begin{aligned} Y &= Y_L + Y_C = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C} \\ &= \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} \right) + j \left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \right) \end{aligned}$$

والدائرة تكون في حالة رنين إذا كانت المساحة المركبة عددا حقيقيا ، إذن $X_C/(R_C^2 + X_C^2) = X_L/(R_L^2 + X_L^2)$

$$(1) \quad \frac{1}{\omega_0 C} (R_L^2 + \omega_0^2 L^2) = \omega_0 L (R_C^2 + 1/\omega_0^2 C^2)$$

ويمكن تغيير أى من الكميات الخمس الموجودة في المعادلة (١) للحصول على الرنين .

وبحل المعادلة (١) للحصول على ω_0 نجد أن

$$(2) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

وعلى ذلك فإن ذبذبة الرنين ω_0 لدائرة توازي تتكون من فرعين تختلف عن مثيلتها في دائرة التوازي التي تتكون من العناصر النقية R ، L و C على التوازي بالعامل .

$$\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

وحيث أن الذبذبة لا بد وأن تكون عددا حقيقيا موجبا فإن يكون للدائرة ذبذبة رنين ω_0 إذا $R_L^2 > L/C$ و $R_C^2 > L/C$ أو $R_L^2 < L/C$ و $R_C^2 < L/C$. وعندما $R_L^2 = R_C^2 = L/C$ فإن الدائرة تكون في حالة رنين عند جميع الذبذبات ، وهذه الحالة الخاصة أنظر المسألة ٨ - ٢ .

وبحل المعادلة (١) لنحصل على L ، نجد أن

$$L = \frac{1}{4}C \left[(R_C^2 + X_C^2) \pm \sqrt{(R_C^2 + X_C^2)^2 - 4R_L^2 X_C^2} \right]$$

$$\text{أو ، بما أن } Z_C = \sqrt{R_C^2 + X_C^2}$$

$$L = \frac{1}{4}C \left[Z_C^2 \pm \sqrt{Z_C^4 - 4R_L^2 X_C^2} \right] \quad (٢)$$

والآن إذا كان في المعادلة (٢) $Z_C^4 > 4R_L^2 X_C^2$ فإننا نحصل على قيمتين لـ L تكون الدائرة عندهما في حالة رنين . وإذا كان $Z_C^4 = 4R_L^2 X_C^2$ فإن الدائرة تكون في حالة رنين عند $L = \frac{1}{4}C Z_C^2$ وعندما $Z_C^4 < 4R_L^2 X_C^2$ فإنه لا توجد قيمة لـ L تجعل الدائرة في حالة رنين .

وبحل المعادلة (١) لنحصل على C ، نجد أن

$$C = 2L \left[\frac{1}{Z_L^2 \pm \sqrt{Z_L^4 - 4R_C^2 X_L^2}} \right] \quad (٤)$$

وهنا إذا كان $Z_L^4 > 4R_C^2 X_L^2$ فإننا نحصل على قيمتين لـ C تكون الدائرة عندهما في حالة رنين .

وبحل المعادلة (١) لنحصل على R_L ، نجد أن

$$R_L = \sqrt{\omega^2 L C R_C^2 - \omega^2 L^2 + L/C} \quad (٥)$$

وبالحل لنحصل على R_C ، نجد أن

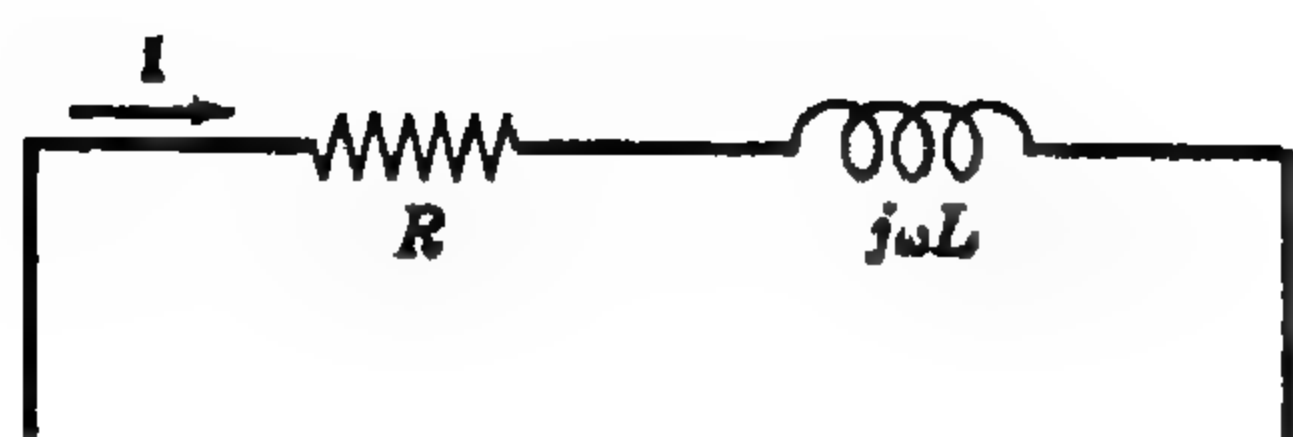
$$R_C = \sqrt{R_L^2 / (\omega^2 L C) - 1/\omega^2 C^2 + L/C} \quad (٦)$$

وإذا كان الجذر في كل من المعادلتين (٥) ، (٦) موجبا فإننا نحصل على قيمة لكل من R_C ، R_L تكون عندهما دائرة التوازي المكونة من فرعين في حالة رنين .

عامل الجودة Q

يعرف عامل الجودة للملفات والمكثفات والدوائر بأنه

$$Q = \frac{\text{أكبر طاقة مخزونة}}{2\pi \times \text{الطاقة المستنفذة في كل دورة}}$$

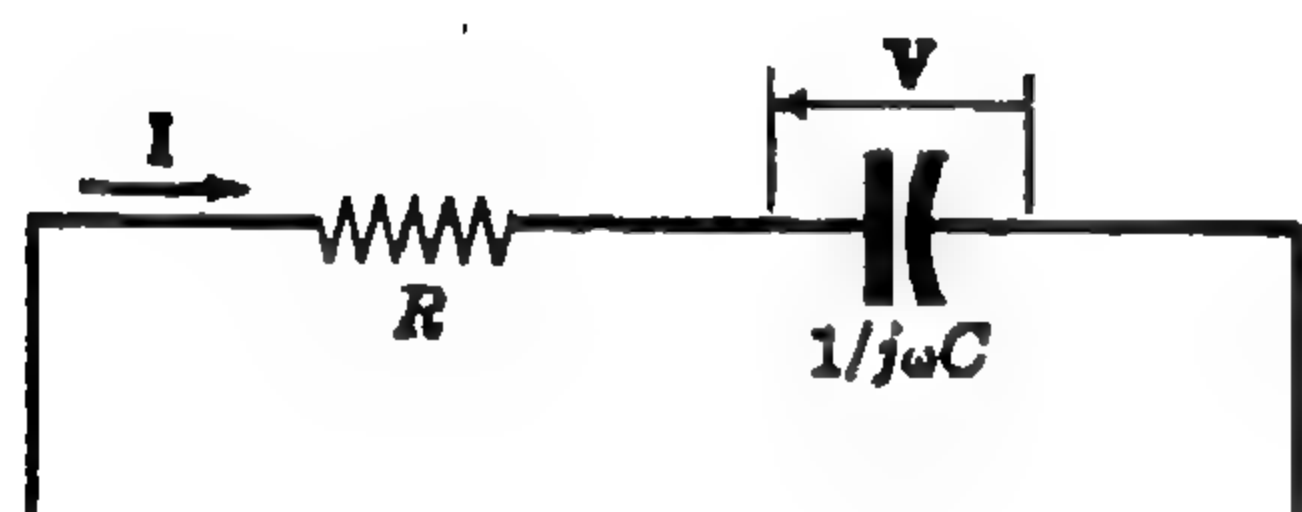


شكل ٨ - ٦

تعطى الطاقة المستنفذة في الدورة للدائرة الموضحة في الشكل ٨ - ٦ والشكل ٨ - ٧ بحاصل ضرب متوسط الطاقة في المقاومة $(I_{\max}/\sqrt{2})^2 R$ وزمن الدورة T أو $1/f$.

وتعطى أكبر طاقة مخزونة في دائرة التوالي RL الموضحة في الشكل ٨ - ٦ بالقيمة $\frac{1}{2}LI_{\max}^2$. إذن

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI_{\max}^2}{(I_{\max}^2/2)R(1/f)} = \frac{2\pi fL}{R} = \frac{\omega L}{R}$$



شكل ٨ - ٧

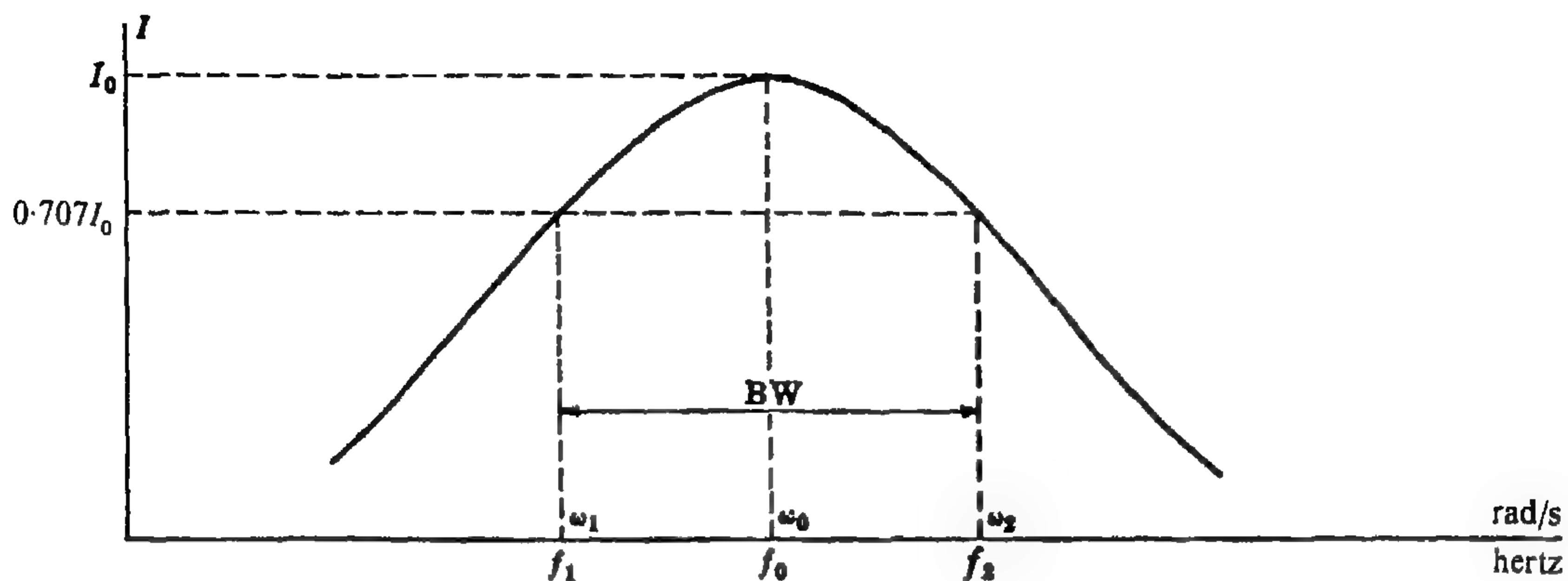
وتعطى أكبر طاقة في دائرة التوالي RC الموضحة في الشكل ٨ - ٧ بالقيمة $\frac{1}{2}CV_{\max}^2$ أو $\frac{1}{2}I_{\max}^2/\omega^2 C$. إذن

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}I_{\max}^2/\omega^2 C}{(I_{\max}^2/2)R(1/f)} = \frac{1}{\omega CR}$$

والطاقة المخزونة في دائرة RLC على التوالي عند الرنين ثابتة. وذلك لأنه عندما يكون جهد المكثف أكبر ما يمكن يكون تيار الملف مساوياً للصفر والعكس بالعكس، $\frac{1}{2}CV_{\max}^2 = \frac{1}{2}LI_{\max}^2$. إذن

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

في دائرة التوالي RLC نجد أن للتيار دالة في الذبذبة مشابهة لمنحنى المساحة في الشكل ٨ - ٢ (ج). وفي الشكل ٨ - ٨ رسم تيار دائرة RLC كدالة في ω أو كدالة في f وذلك مع تغيير مناسب في المحور الأفقي. وعند ω_0 يصل التيار I_0 إلى قيمته العظمى. وقد وضع في الرسم النقطة التي يكون عندها التيار مساوياً 0.707 من قيمته العظمى، والذبذبات المقابلة هي ω_1 و ω_2 .



شكل ٨ - ٨

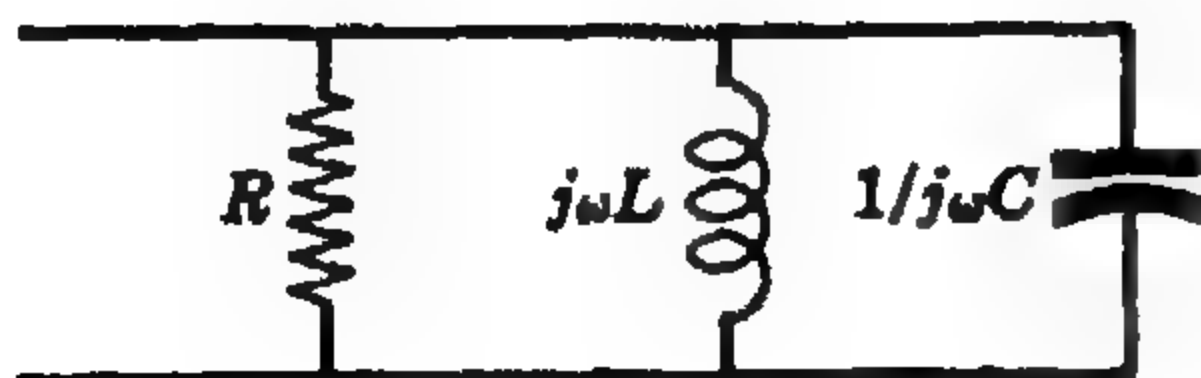
وبما أن القدرة الممتصة للدائرة هي $I^2 R$ ، فعند $I = 0.707 I_0$ تكون القدرة نصف قيمتها العظمى الناتجة عند ω_0 وتسمى النقطتان المقابلتان لـ ω_1 و ω_2 بنقطتي نصف القدرة وتسمى المسافة بين هاتين النقطتين مقدرة بوحدة hertz باتساع الشريط BW .

والآن يمكن التعبير عن عامل الجودة بالنسبة بين ذبذبة الرنين إلى اتساع الشريط ، إذن (أنظر المسألة ٨ - ١٣) .

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{BW}$$

وذبذبة الرنين ω_0 هي المتوسط الهندسي للذبذبتين ، ω_1 و ω_2 (أنظر المسألة ٨ - ٦)

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$



شكل ٨ - ٩

تحتزن دائرة التوازي المكونة من الأفرع الثلاثة والموضحة في الشكل ٨ - ٩ عند الرنين كمية ثابتة من الطاقة . وذلك لأنه إذا كان تيار الملف نهاية عظمى يكون جهد المكثف مساوياً للصفر والعكس بالعكس

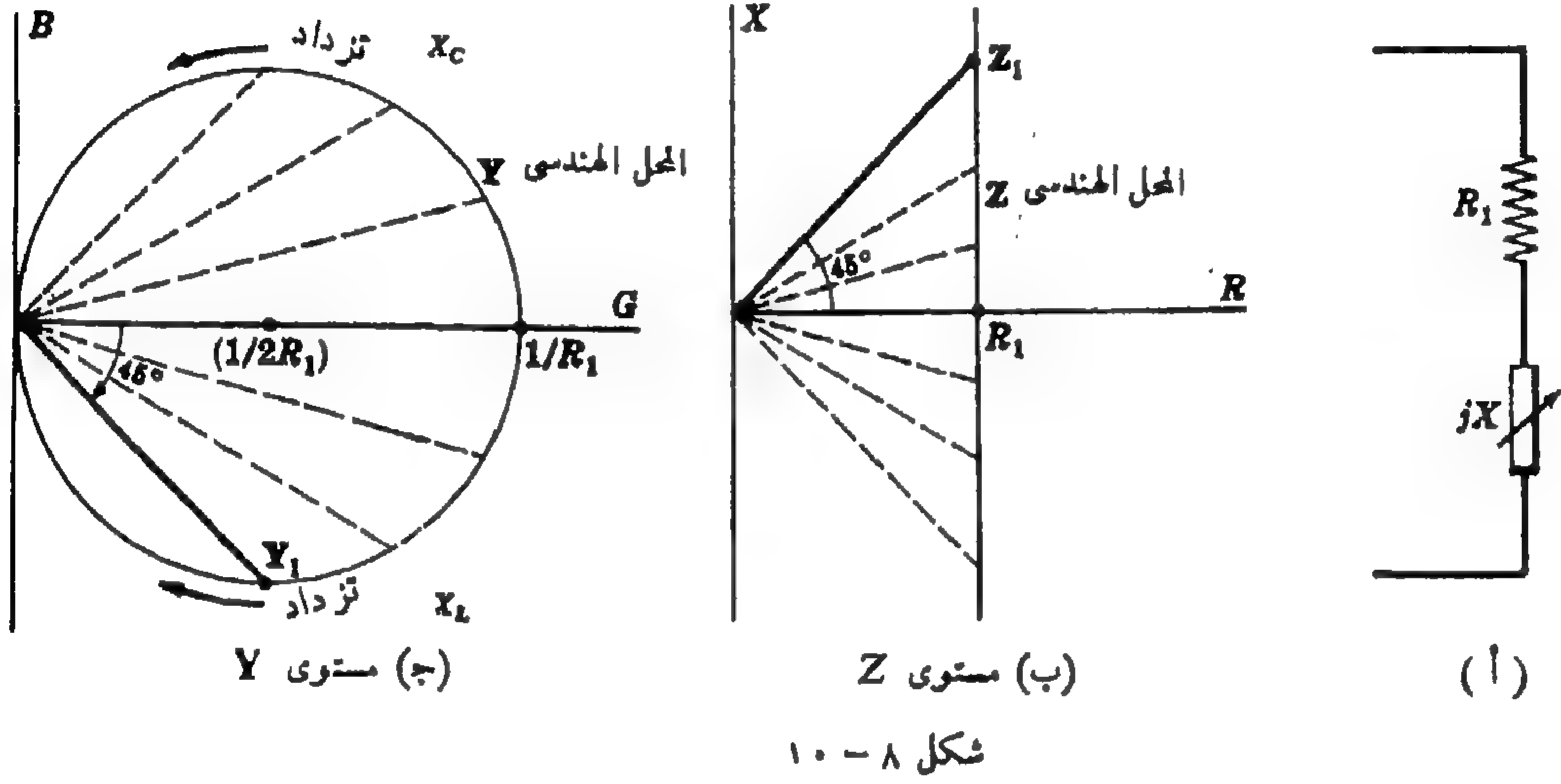
$$\text{أي أن } \frac{1}{2} L I_{\max}^2 = \frac{1}{2} C V_{\max}^2$$

$$\text{إذن } Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 C R$$

أشكال المحل الهندسى :

يمكن تحليل الدوائر ذات العنصر الواحد باستخدام أشكال المحل الهندسى لمساحة الدائرة ، وحيث أن $I = VY$ ، V ثابت ، فإن المحل الهندسى للكمية Y يمثل تغير I مع تغير العنصر المتغير .

تتكون دائرة التوالى الموضحة فى الشكل ٨ - ١٠ (أ) من مقاومة ثابتة وبمانعة متغيرة يمكن أن تأخذ قيما موجبة أو سالبة . وإذا اعتبرنا أن مستوى Z يتركب من مجموعة الأحداثيات الكرتيزية R ، X ، فإن المحل الهندسى للمعاوقة Z للدائرة المعطاة هو خط مستقيم يوازي المحور X ويقطع المحور R عند R_1 ، كما هو موضح فى الشكل ٨ - ١٠ (ب)



ويمكننا تعيين المحل الهندسى لمساحة الدائرة المعطاة Y فى مستوى Y المتكون من مجموعة الأحداثيات الكرتيزية G ، B .

$$Z = 1/Y$$

$$(١) \quad R_1 + jX = \frac{1}{G + jB}$$

وبتجزء المعادلة (١) على شكل كسور ومساواة الأجزاء الحقيقية نجد أن

$$R_1 = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$(٢) \quad G^2 - G/R_1 + B^2 = 0 \quad \text{أو}$$

وبإضافة $1/4R_1^2$ لكلا طرفى المعادلة (٢) ثم تبسيطها نجد أن

$$(٣) \quad \left(G - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2$$

وبمقارنة الصيغة القياسية لمعادلة دائرة فى الهندسة التحليلية $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ بالمعادلة (٣) ، نلاحظ

أن المحل الهندسى للمستوى للكمية Y هو عبارة عن دائرة مركزها عند $(1/2R_1, 0)$ ، ونصف قطرها $1/2 R_1$.

كما هو موضح فى الشكل ٨ - ١٠ (ج) .

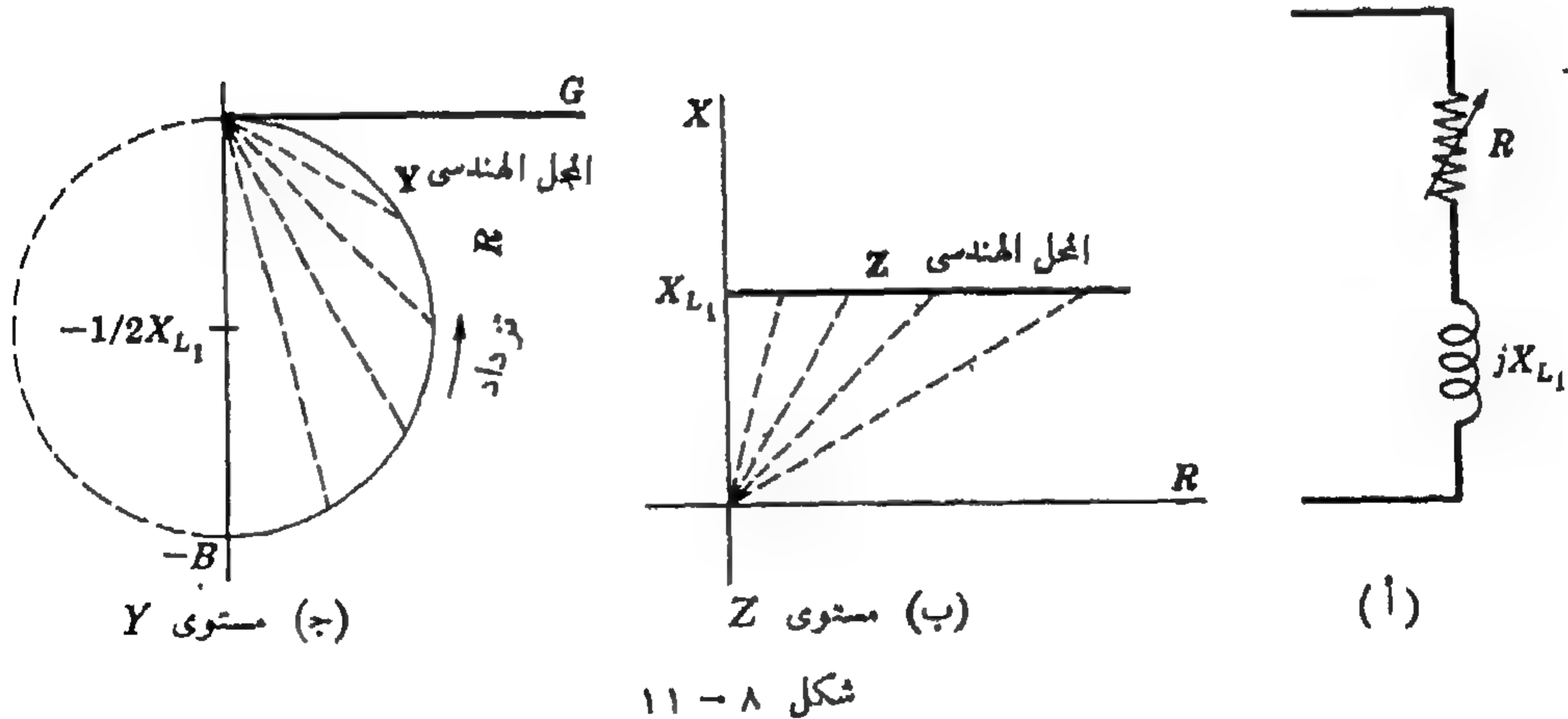
ويقابل كل نقطة في المحل الهندسي للمعاوقة Z نقطة في المحل الهندسي للمساحة Y . ويقابل كل نقطة في المحل الهندسي لـ Z فوق المحور R نقطة على نصف الدائرة تحت المحور G في مستوى Y . وأيضا $+\infty$ على المحل الهندسي لـ Z تقابل نقطة الأصل في مستوى Y . وبالمثل فإن أي نقطة تحت المحور R في المحل الهندسي لـ Z يقابلها نقطة على النصف دائرة فوق المحور G في مستوى Y . و $-\infty$ على المحل الهندسي لـ Z تقابل نقطة الأصل في المستوى Y . وبملاحظة المواقع النسبية لـ Z_1 و Y_1 فإن بعدى Z_1 و Y_1 عن نقطة الأصل المقابلة مختلفان بينما تتساوى الزوايا على المحور الأفقي ولكن بإشارة مختلفة .

بتثبيت الممانعة الحثية وتغيير المقاومة كما هو في الشكل ٨ - ١١ (أ) يكون المحل الهندسي للمعاوقة Z عبارة عن خط مستقيم في الربع الأول لمستوى Z عند X تساوى X_{L1} . وباستخدام نفس الطريقة السابقة تكون معادلة المحل الهندسي لـ Y هي

$$(٤) \quad G^2 + (B - 1/2X_{C1})^2 = (1/2X_{C1})^2$$

وبمقارنة المعادلة (٤) بالصيغة القياسية لمعادلة دائرة ، نجد أن المحل الهندسي لـ Y هو دائرة مركزها عند $(0, -1/2 X_{L1})$ ونصف قطرها $1/2 X_{L1}$ في مستوى Y . أنظر الشكل ٨ - ١١ (ج) .

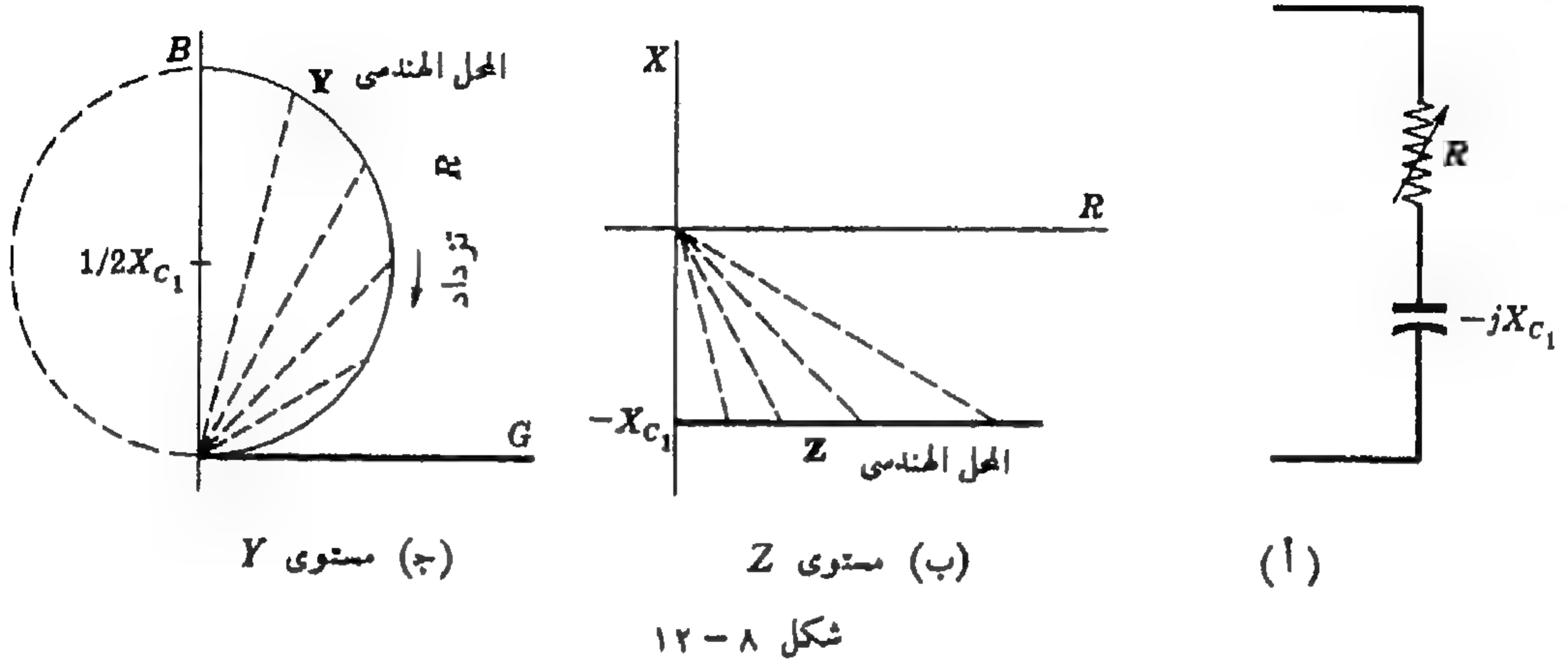
وحيث أن المحل الهندسي لـ Z في الشكل ٨ - ١١ (ب) يتكون من خط مستقيم في الربع الأول في المستوى Z فإن نصف الدائرة الواقع في الربع الرابع في مستوى Y هو فقط تحويل المحل الهندسي لـ Z لهذه الدائرة .



عند توصيل بماتعة سعوية على التوالى مع مقاومة متغيرة كما في الشكل ٨ - ١٢ (أ) فإن المحل الهندسي لـ Z يكون خطا أفقيا في الربع الرابع في مستوى Z عند $X = -X_{C1}$. انظر الشكل ٨ - ١٢ (ب) . وباستخدام نفس الطريقة السابقة تكون معادلة المحل الهندسي لـ Y هي .

$$(٥) \quad G^2 + (B + 1/2X_{L1})^2 = (1/2X_{L1})^2$$

وبمقارنة المعادلة (٥) بالصيغة القياسية لمعادلة دائرة ، نرى أن المحل الهندسي لـ Y عبارة عن نصف دائرة مركزها عند $(0 \text{ و } 1/2X_{C1})$ ونصف قطرها $1/2X_{C1}$ في الربع الرابع لمستوى Y . أنظر الشكل ٨-١٢ (ج) .



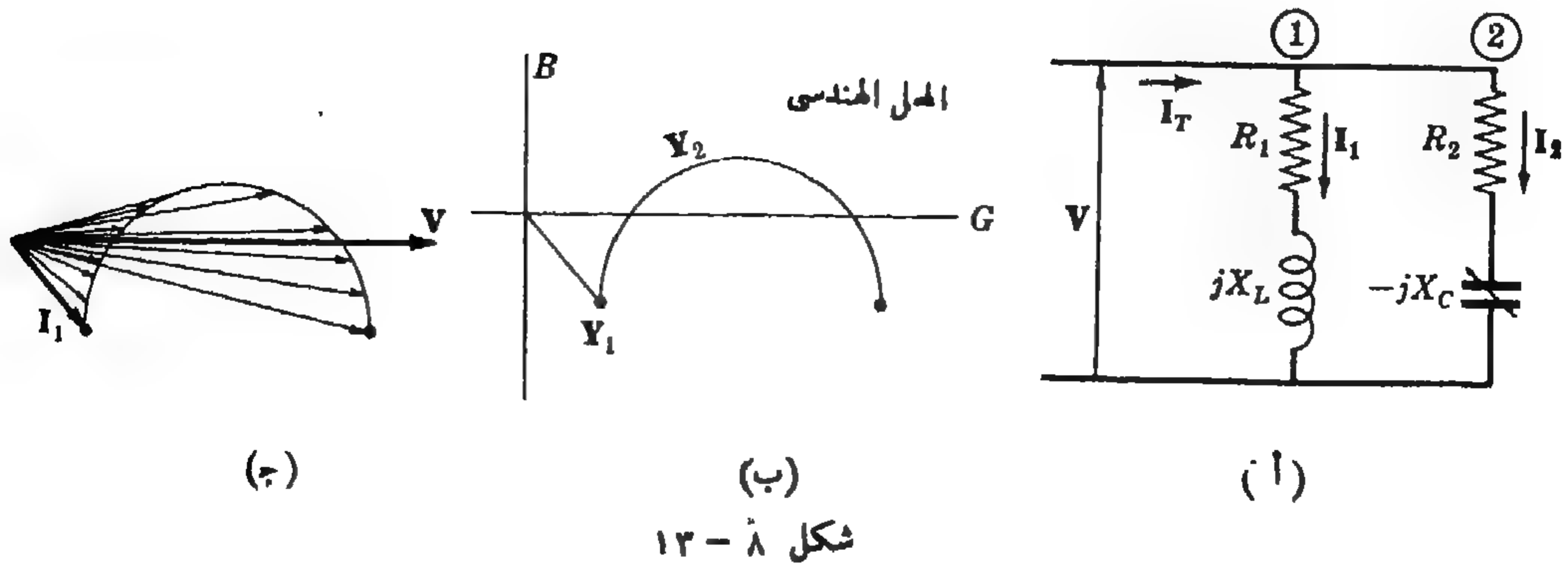
شكل ٨-١٢

أشكال المحل الهندسي للتيار :

أعتبر دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨-١٣ (أ) والتي تتكون من مقاومة ثابتة R_1 متصلة على التوالي مع ممانعة ثابتة jX_L في الفرع الأول ومقاومة ثابتة R_2 متصلة على التوالي مع ممانعة متغيرة $-jX_C$ في الفرع الثاني . وتكون المساحة الكلية للفرعين المتصلين على التوازي هي

$$Y_T = Y_1 + Y_2$$

في الشكل ٨-١٣ (ب) بإضافة المحل الهندسي للفرع الثاني Y_2 إلى النقطة الثابتة Y_1 نحصل على المحل الهندسي Y_T .



شكل ٨-١٣

وحيث أن التيار يعطى بـ $I = VY$ فإن الشكل ٨ - ١٣ (ج) يبين أنه بإضافة التيار الثابت I_1 إلى القيم المختلفة للتيار I_2 ينتج لدينا المحل الهندسي للتيار الكلي. ويوضح الشكل أيضا كيف أنه توجد قيمتان لـ C يكون عندهما التيار الكلي في نفس اتجاه V .

وبإعادة اختبار الشكل ٨ - ١٣ (ج) يتضح أنه تحت ظروف معينة فإنه من المحتمل ألا نجد قيمة لـ C يحدث عندها الرنين. فإذا نقص نصف قطر دائرة المحل الهندسي بطريقة ما بحيث لا يتقاطع المنحنى مع المحور V فإنه لا توجد قيمة لـ C يحدث عندها رنين. وفي المسائل التالية اختبارات لتطبيقات لأشكال المحل الهندسي.

مسائل محلولة

٨ - ١ في دائرة RLC على التوالي $R = 10 \Omega$ ، $L = 5 \text{ mH}$ ، $C = 12.5 \mu\text{F}$ ارسم قيمة وزاوية المعاوقة كدالة في ω مع تغير ω من $0.8\omega_0$ إلى $1.2\omega_0$.

نجد عند الرنين

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{(5 \times 10^{-3})(12.5 \times 10^{-6})} = 4000 \text{ rad/s}$$

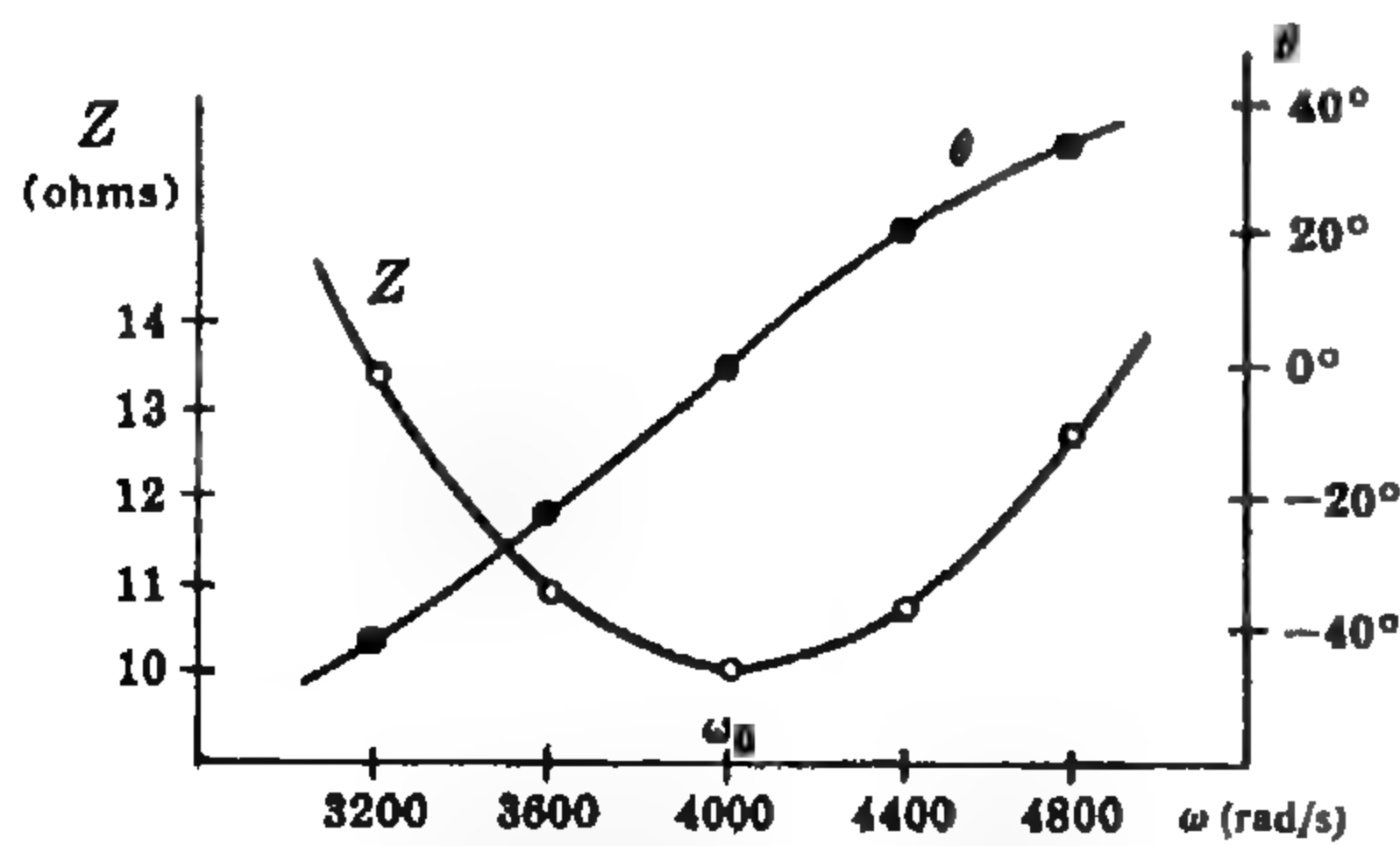
$$X_{L_0} = \omega_0 L = 4000(5 \times 10^{-3}) = 20 \text{ ohms}$$

$$X_{C_0} = 1/\omega_0 C = 1/(4000 \times 12.5 \times 10^{-6}) = 20 \text{ ohms}$$

$$Z_0 = R + j(X_{L_0} - X_{C_0}) = 10 + j(20 - 20) = 10 \angle 0^\circ \text{ ohms} \quad \text{إذن}$$

وبما أن $X_L = \omega L$ ، $X_C = 1/\omega C$ ، إذن $X_L/X_{L_0} = \omega/\omega_0$ و $X_C/X_{C_0} = \omega_0/\omega$. وعلى ذلك فإنه يمكن حساب قيم Z و X_C و X_L عند ذبذبات أخرى .

وفي الشكل ٨ - ١٤ (أ) دونت قيم الممانعات والمعاوقات ، ويوضح الشكل ٨ - ١٤ (ب) الرسم المطلوب .



(ب)

| ω (rad/s) | X_L (Ω) | X_C (Ω) | Z (Ω) | |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|
| 3200 | 16 | 25 | $10 - j9$ | $13.4 / -42^\circ$ |
| 3600 | 18 | 22.2 | $10 - j4.2$ | $10.8 / -22.8^\circ$ |
| 4000 | 20 | 20 | 10 | $10 / 0^\circ$ |
| 4400 | 22 | 18.2 | $10 + j3.8$ | $10.7 / 20.8^\circ$ |
| 4800 | 24 | 16.7 | $10 + j7.3$ | $12.4 / 36.2^\circ$ |

(أ)

٨-٢ إذا أثر جهد $V = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ على دائرة التوالي الموضحة في المسألة ٨-١ . فأوجد الجهد عبر كل عنصر عندما ω تساوي 3600 و 4000 و 4400 rad/s . ارسم شكل الجهد المطاور عند كل ذبذبة .

عند $\omega = 3600 \text{ rad/s}$ فإن $I = V/Z = (100 \angle 0^\circ) / (10.8 \angle -22.8^\circ) = 9.26 \angle 22.8^\circ \text{ A}$ إذن

$$V_R = 9.26 \angle 22.8^\circ (10) = 92.6 \angle 22.8^\circ \text{ V}, V_L = 9.26 \angle 22.8^\circ (18 \angle 90^\circ) = 167 \angle 112.8^\circ \text{ V}, V_C = 206 \angle -67.2^\circ \text{ V}$$

عند $\omega = 4000 \text{ rad/s}$ فإن $I = (100 \angle 0^\circ) / (10 \angle 0^\circ) = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$ إذن

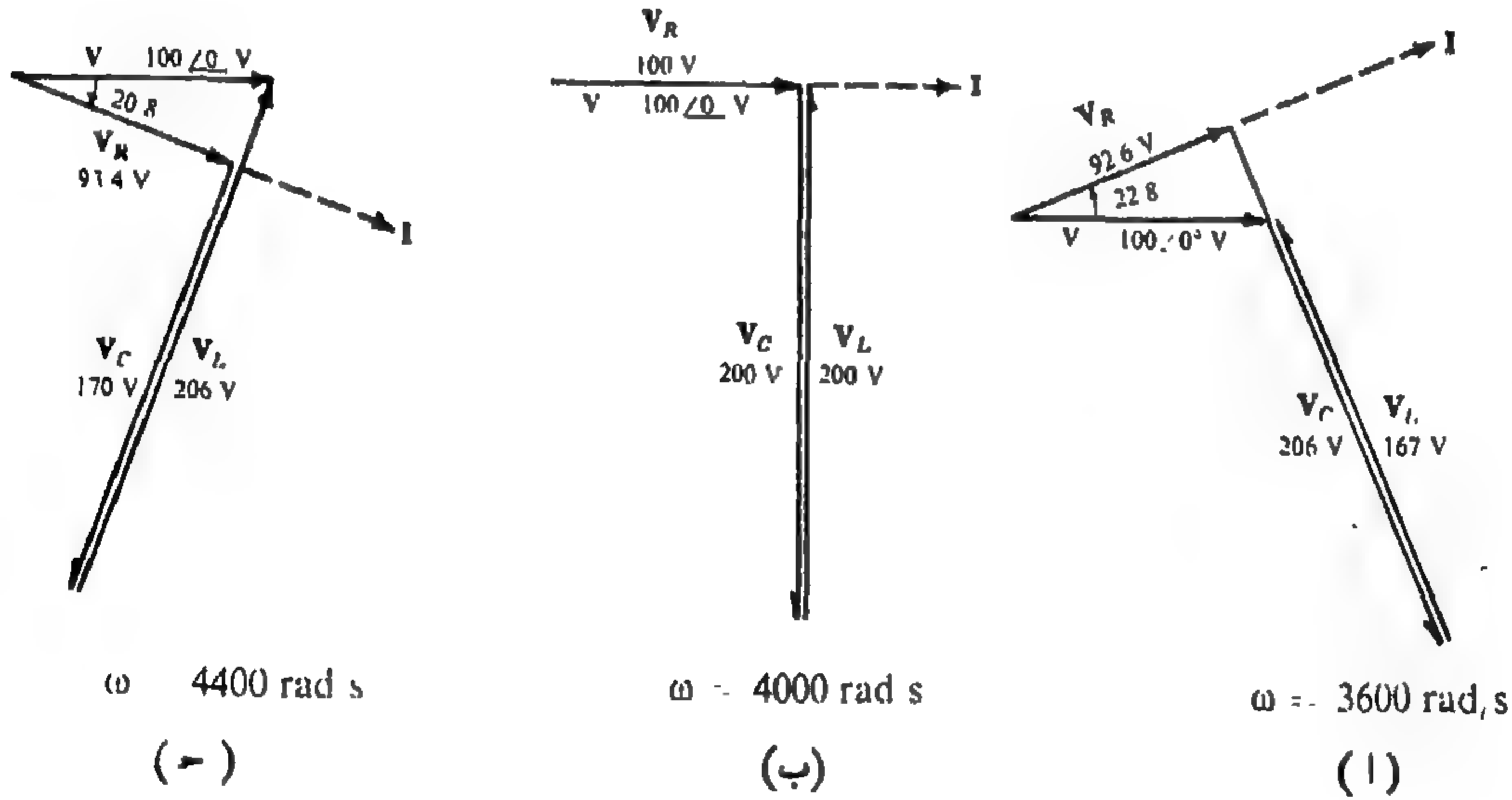
$$V_R = 100 \angle 0^\circ \text{ V}, V_L = 10 \angle 0^\circ (20 \angle 90^\circ) = 200 \angle 90^\circ \text{ V}, V_C = 200 \angle -90^\circ \text{ V}$$

وعند $\omega = 4400 \text{ rad/s}$ فإن $I = (100 \angle 0^\circ) / (10.7 \angle 20.8^\circ) = 9.34 \angle -20.8^\circ \text{ A}$ إذن

$$V_R = 9.34 \angle -20.8^\circ (10) = 93.4 \angle -20.8^\circ \text{ V}, V_L = 9.34 \angle -20.8^\circ (22 \angle 90^\circ) = 206 \angle 69.2^\circ \text{ V},$$

$$V_C = 170 \angle -110.8^\circ \text{ V}$$

ويوضح الشكل ٨-١٥ أشكال الجهود الثلاثة المطاورة . لاحظ أنه بالقرب من الرنين فإن قيمة الجهد عبر كل عنصر ممانع في دائرة التوالي تزيد عن قيمة الجهد المؤثر .



شكل ٨-١٥

٨-٣ دائرة توالى تتكون من $L = 20 \text{ mH}$ و $R = 5 \Omega$ و سعة متغيرة C ، فإذا أثرنا عليها بجهد ذبذبت $f = 1000 \text{ Hz}$. فأوجد قيمة C عند الرنين .

بما أنه عند الرنين تكون الممانعات متساوية أى أن $2\pi fL = 1/2\pi fC$. إذن

$$C = \frac{1}{L(2\pi f)^2} = \frac{1}{(20 \times 10^{-3})(2\pi \times 1000)^2} = 1.27 \mu\text{F}$$

٨ - ٤ دائرة توالى تتكون من $C = 20 \mu F$ و $R = 5 \text{ ohms}$ وحث متغير L ، يؤثر عليها جهد $V = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$ بذبذبة قدرها 1000 rad/s فإذا ضبطت قيمة L بحيث يصل الجهد عبر المقاومة إلى قيمته العظمى فأوجد الجهد عبر كل عنصر .

بما أن $V_R = IR$ فإن الجهد عبر المقاومة يصل إلى قيمته العظمى عند الرنين أى عندما يصل التيار إلى قيمته العظمى . وحيث أنه تتساوى الممانعات عند الرنين إذن .

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000(20 \times 10^{-6})} = 50 \text{ ohms}, X_L = 50 \text{ ohms}$$

و $Z = R = 5 \angle 0^\circ \Omega$ وحيث أن $I = V/Z = (10 \angle 0^\circ)/(5 \angle 0^\circ) = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$ إذن

$$V_C = 100 \angle -90^\circ \text{ V} \text{ و } V_R = 2 \angle 0^\circ (5) = 10 \angle 0^\circ \text{ V}, V_L = (2 \angle 0^\circ)(50 \angle 90^\circ) = 100 \angle 90^\circ \text{ V}$$

٨ - ٥ إذا أعطيت دائرة RLC على التوالي فيها $C = 40 \mu F$ و $L = 0.5 \text{ H}$ و $R = 100 \Omega$ ، فاحسب ذبذبة الرنين وكذلك ذبذبتى إتساع الشريط ω_1 و ω_2 (ذبذبتى منتصف القدرة)

$$f_0 = \omega_0/2\pi = 35.7 \text{ Hz. و } \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0.5(40 \times 10^{-6})} = 224 \text{ rad/s}$$

عند ذبذبة منتصف القدرة الصغرى ω_1 ، تزداد الممانعة السعوية عن الممانعة الحثية ويكون التيار مساوياً لـ 0.707 من قيمته العظمى . وبما أن $I = V/Z$ إذن $|Z|$ يساوى 1.414 مرة من قيمته عند ω_0 . وبما أن $Z = 100 \Omega$ عند ω_0 إذن $|Z| = 141.4 \text{ ohms}$ عند ω_1 . وحيث أن

$$Z = 100 - j(X_C - X_L) = 141.4 \angle \theta \text{ و } \cos \theta = R/Z = 100/141.4 = 0.707 \text{ و } \theta = -45^\circ \text{ إذن}$$

$$(١) \quad 1/\omega_1 C - \omega_1 L = R \quad \text{أو} \quad X_C - X_L = R$$

وبالتعويض فى المعادلة (١) بالقيم المعطاة وحلها للحصول على ω_1 نجد أن $\omega_1 = 145 \text{ rad/s}$

$$\text{و } f_1 = 145/2\pi = 23.1 \text{ Hz}$$

عند ذبذبة منتصف القدرة ω_2 ، تزداد الممانعة الحثية عن الممانعة السعوية وتكون $|Z|$ تساوى أيضاً 141.4Ω و $\theta = +45^\circ$ إذن

$$(٢) \quad \omega_2 L - 1/\omega_2 C = R \quad \text{أو} \quad X_L - X_C = R$$

وبالتعويض فى المعادلة (٢) وحلها للحصول على ω_2 نجد أن $\omega_2 = 345 \text{ rad/s}$ و $f_2 = 55 \text{ Hz}$.

وحيث أن ω_0 هى المتوسط الهندسى للقيمتين ω_1 و ω_2 إذن

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{145 \times 345} = 224 \text{ rad/s}$$

٨ - ٦ بين أن ذبذبة الرنين ω_0 لدائرة RLC على التوالى هى المتوسط الهندسى لـ ω_1 و ω_2 أى المتوسط الهندسى للحد الأدنى والأعلى للذبذبة منتصف القدرة على الترتيب .

من المسألة ٨ - ٥ نجد أنه عند ω_1, ω_2 $1/\omega_1 C - \omega_1 L = R$ وعند ω_2 $\omega_2 L - 1/\omega_2 C = R$ إذن

$$(١) \quad 1/\omega_1 C - \omega_1 L = \omega_2 L - 1/\omega_2 C$$

بضرب المعادلة (١) في C والتعويض عن $\omega_0^2 = 1/LC$ نجد أن

$$1/\omega_1 + 1/\omega_2 = (\omega_1 + \omega_2)/\omega_0^2 \quad \text{أو} \quad 1/\omega_1 = \omega_1/\omega_0^2 \quad \omega_2/\omega_0^2 = 1/\omega_2$$

ومنها نجد أن $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

٨ - ٧ دائرة توالى فيها $C = 20 \mu F$ و $L = 0.05 H$ و $R = 50 \Omega$ ، يؤثر عليها جهد $V = 100/0^\circ V$ بذبذبة متغيرة . أوجد أقصى جهد على الملف مع تغير الذبذبة .

إن قيمة المعاوقة كدالة في ω هى $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ ، إذن قيمة التيار هى $I = V/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$. قيمة الجهد عبر L هى

$$(١) \quad V_L = \omega L I = \omega L V / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

وبوضع المشتقة $dV_L/d\omega$ فى المعادلة (١) مساوية للصفر ثم بالحل للحصول على ω ، نحصل على قيمة ω عندما يصل V_L إلى نهايته العظمى .

$$(٢) \quad \frac{dV_L}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \omega L V (R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{(R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{1/2} L V - \omega L V \frac{1}{2} (R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2} (2\omega L^2 - 2/\omega^3 C^2)}{R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2}$$

وبتجزئ ، ويتجزئ $L V (R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2}$ فى المعادلة (٢) مع وضع البسط مساوياً للصفر نجد أن

$$R^2 - 2L/C + 2/\omega^2 C^2 = 0$$

$$(٣) \quad \omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2 C^2}} = 1/\sqrt{LC} \sqrt{\frac{2}{2 - R^2 C/L}}$$

ومنها نجد أن

وحيث أن $Q_0^2 = L/R^2 C$ ، $\omega_0 L/R = 1/\omega_0 C R$ ، بالتعويض عنها فى المعادلة (٣) نجد أن

$$(٤) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٣) بالقيم المعطاة نجد أن

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2(-0.05)(20 \times 10^{-6}) - (50 \times 20 \times 10^{-6})^2}} = 1414 \text{ rad/s}$$

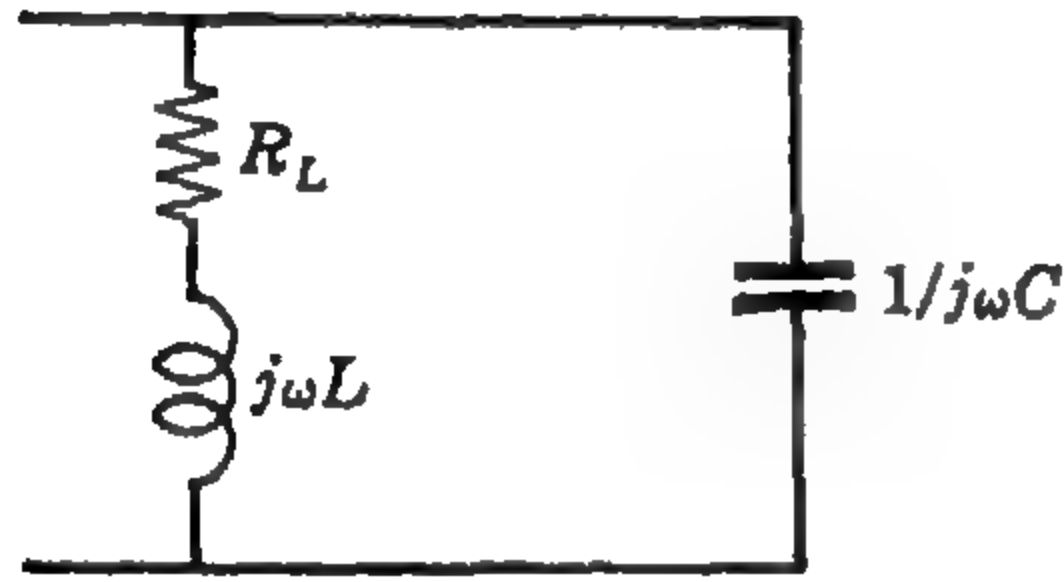
وبما أن $X_L = \omega L = 1414(0.05) = 70.7 \text{ ohms}$ و $X_C = 1/(\omega C) = 1/(1414 \times 20 \times 10^{-6}) = 35.4 \text{ ohms}$

و $Z = 50 - j(70.7 - 35.4) = 50 - j35.4 = 61.2 \angle -35.3^\circ \Omega$ ، إذن $I = V/Z = 100/61.2 = 1.635 \text{ A}$

$$V_{L(\max)} = 1.635(70.7) = 115.5 \text{ V}$$

توضح المعادلة (٤) أنه عندما تكون قيمة Q كبيرة فإن أكبر قيمة للجهد عبر L تكون عند $\omega_0 \approx 1/\sqrt{LC}$. وإذا كانت Q كبيرة فإننا نحصل أيضاً على أكبر قيمة للجهد عبر كل من R و C عند ω_0 . وعندما تكون Q صغيرة فإن أكبر قيمة لـ V_C تحدث عند ω أقل من ω_0 بينما أكبر قيمة لـ V_L تحدث عند ω أكبر من ω_0 .
أنظر المسألة ٨ - ٢٨ .

٨ - ٨ الشكل ٨ - ١٦ يوضح دائرة توازي يتصل فيها مكثف مع ملف حيث R_L هي مقاومة الملف. أوجد ذبذبة الرنين لهذه الدائرة .



شكل ٨ - ١٦

مساحة الدائرة الكلية هي

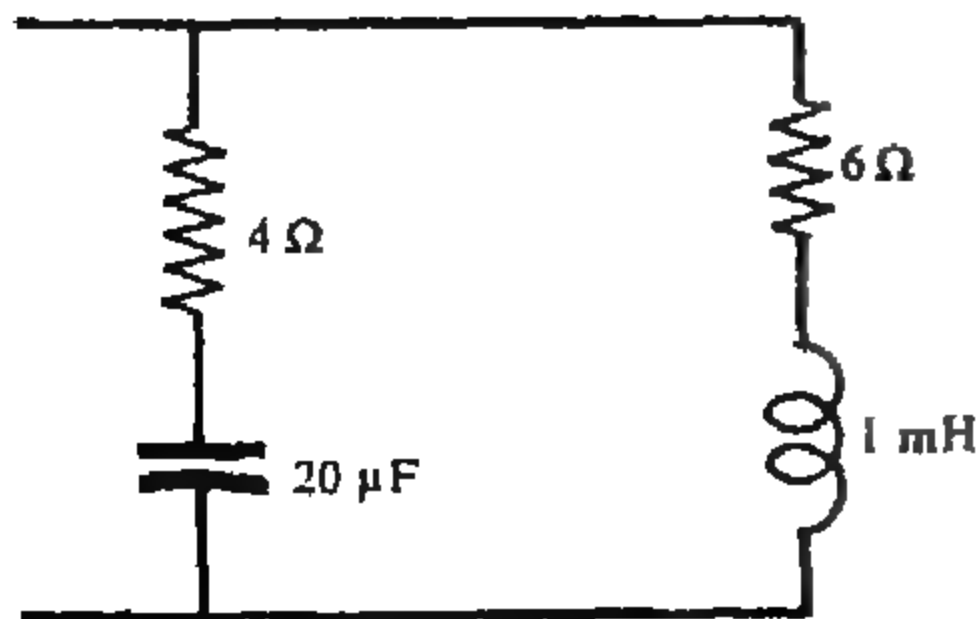
$$Y_T = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C$$

$$= \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

وعند الرنين يكون الجزء التخيلي مساوياً للصفر أو

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}} \quad \text{ومنها} \quad \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C$$

وإذا كانت مقاومة الملف صغيرة بالمقارنة بـ $\omega_0 L$ فإن ذبذبة الرنين تعطى بـ $1/\sqrt{LC}$.



شكل ٨ - ١٧

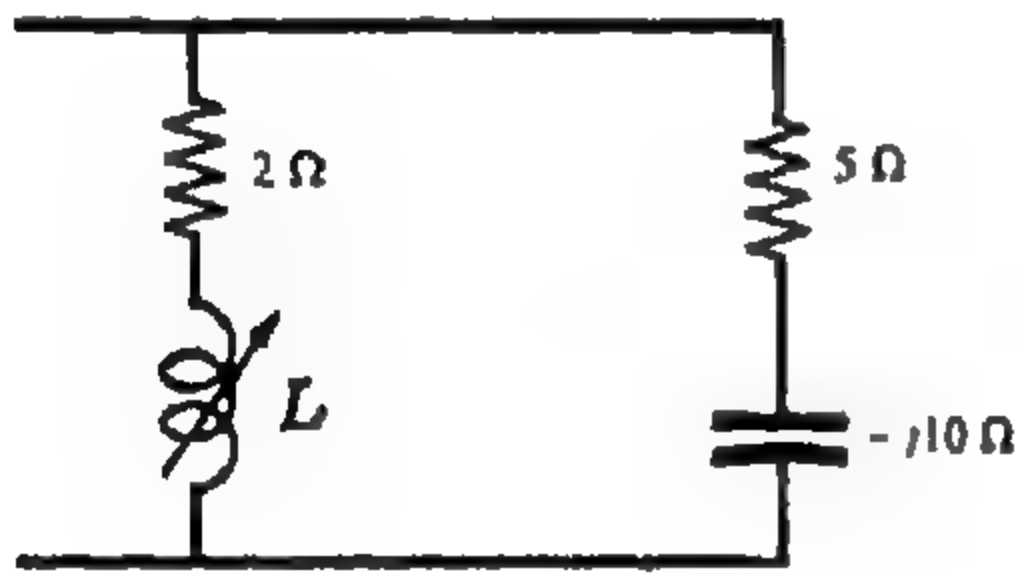
٨ - ٩ أوجد ذبذبة الرنين ω_0 لدائرة التوازي المكونة من فرعين والموضحة في الشكل ٨ - ١٧. إذا زادت قيمة المقاومة في الفرع RC فما هي أكبر قيمة لها نجد عندها ذبذبة رنين ؟

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 20 \times 10^{-6}}} \sqrt{\frac{6^2 - 10^{-3}/(20 \times 10^{-6})}{4^2 - 10^{-3}/(20 \times 10^{-6})}} \\ &= 4540 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

إن قيمة بسط المقدار الجذرى هي $36 - 50 = -14$. إذن يكون المقدار الجذرى جذر حقيق إذا كان المقام سالباً أى أنه إذا كان $R_C^2 < L/C$ أو $R_C < 7.07 \Omega$ وعندما تقترب قيمة R_C من 7.07Ω فإن الذبذبة ω_0 تقترب من ما لا نهاية .

إذا زادت قيمة R_L فإن ω_0 تقترب من الصفر عندما تقترب R_L من 7.07Ω .

١٠ - ٨ أوجد قيمة L التى تكون عندها الدائرة الموضحة فى الشكل ٨ - ١٨ فى حالة رنين عند ذبذبة $\omega = 5000 \text{ rad/s}$



شكل ٨ - ١٨

المساحة الكلية للدائرة هي،

$$\begin{aligned}Y &= \frac{1}{2 + jX_L} + \frac{1}{5 - j10} \text{ siemens} \\ &= \left(\frac{2}{4 + X_L^2} + \frac{5}{125} \right) + j \left(\frac{10}{125} - \frac{X_L}{4 + X_L^2} \right)\end{aligned}$$

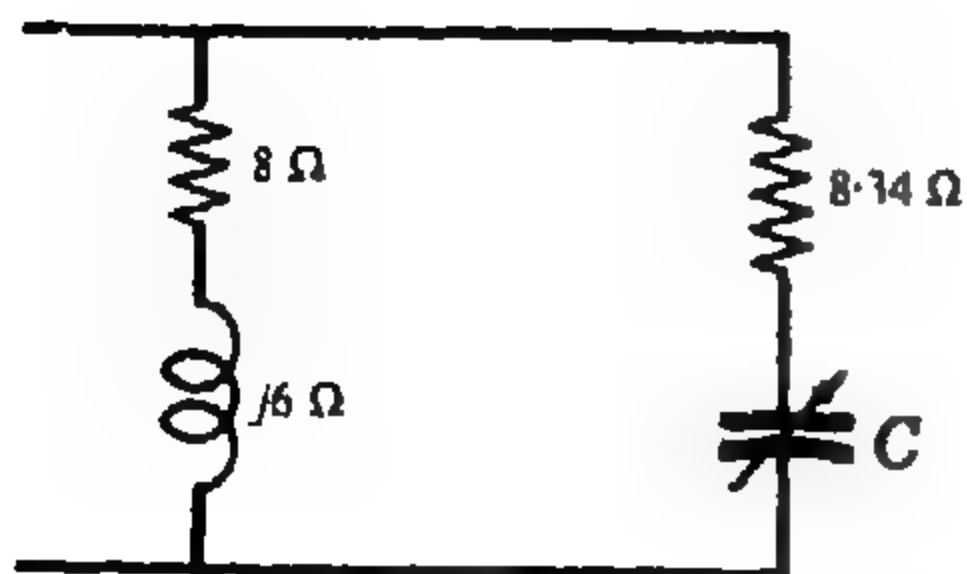
وبوضع الجزء التخيل مساوياً للصفر نجد أن

$$10/125 = X_L/(4 + X_L^2) \text{ أو } X_L^2 - 12.5X_L + 4 = 0 \quad (1)$$

وجذرا المعادلة (١) هما $X_L = 0.33 \Omega$ و $X_L = 12.17 \Omega$

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة $X_L = \omega L$ نجد أن شرط رنين الدائرة هو $L = 2.43 \text{ mH}$ أو 0.066 mH .

١١ - ٣ أوجد قيمة C التى يحدث عندها رنين فى الدائرة الموضحة فى الشكل ٨ - ١٩ عندما $\omega = 5000 \text{ rad/s}$



شكل ٨ - ١٩

$$\begin{aligned}Y &= \frac{1}{8 + j6} + \frac{1}{8.34 - jX_C} \text{ siemens} \\ &= \left(\frac{8}{100} + \frac{8.34}{69.5 + X_C^2} \right) + j \left(\frac{X_C}{69.5 + X_C^2} - \frac{6}{100} \right)\end{aligned}$$

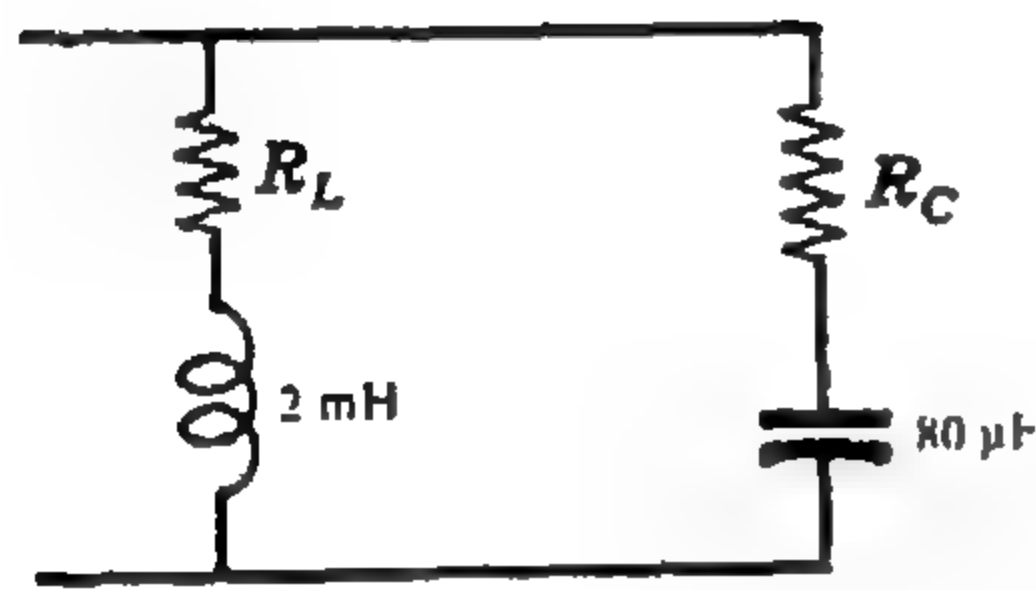
عند الرنين تكون المساحة المركبة عدداً حقيقياً . إذن

$$X_C/(69.5 + X_C^2) = 6/100 \quad \text{و} \quad X_C^2 - 16.7X_C + 69.5 = 0$$

ومنها نجد أن $X_C = 8.35 \Omega$ وبالتعويض عن هذه القيمة في $X_C = 1/\omega C$ وحلها ، نجد أن $C = 24 \mu F$.

٨ - ١٢ عين قيم R_C و R_L التي تجعل الدائرة الموضحة في الشكل ٨ - ٢٠ في حالة رنين عند كل الذبذبات

الدائرة في حالة رنين عند ذبذبة



شكل ٨ - ٢٠

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

إن ω_0 تأخذ أى قيمة إذا كان $R_L^2 - L/C = R_C^2 - L/C$. إذا كان $L/C = (2 \times 10^{-3})/(80 \times 10^{-6})$ إذن

$$R_L = R_C = \sqrt{25} = 5 \text{ ohms}$$

يترك الطالب اختبار هذه النتيجة عند قيم $\omega = 2500 \text{ rad/s}$ و $\omega = 5000 \text{ rad/s}$

٨ - ١٣ بين أن $Q_0 = \omega_0 L/R = f_0/BW$ لدائرة RLC على التوالي .

عند ذبذبات منتصف القدرة تكون محصلة الممانعة مساوية للمقاومة .

وعند ذبذبة منتصف القدرة الصغرى تكون الممانعة السعوية أكبر من الممانعة الحثية . إذن

$$f_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L} \quad \text{ومنها نجد أن} \quad 1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R$$

وعند ذبذبة منتصف القدرة الكبرى تكون الممانعة الحثية أكبر من الممانعة السعوية إذن

$$f_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L} \quad \text{ومنها نجد أن} \quad 2\pi f_2 L - 1/2\pi f_2 C = R$$

وبما أن $BW = f_2 - f_1$, $BW = R/2\pi L$. إذن

$$Q_0 = f_0/BW = 2\pi f_0 L/R = \omega_0 L/R$$

٨ - ١٤ احسب Q_0 لدائرة التوالي التي فيها $R = 20 \Omega$ و $L = 0.05 \text{ H}$ و $C = 1 \mu\text{F}$ وذلك باستخدام الصيغ الثلاثة المكافئة لـ Q_0 : $\omega_0 L/R$ و $1/\omega_0 CR$ و f_0/BW .

ذبذبة الرنين هي $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0.05 \times 10^{-6}} = 4470 \text{ rad/s}$ و $f_0 = \omega_0/2\pi = 712 \text{ Hz}$ إذن

$$Q_0 = \omega_0 L/R = 4470(0.05)/20 = 11.2$$

$$Q_0 = 1/\omega_0 CR = 1/(4470 \times 10^{-6} \times 20) = 11.2 \text{ أو}$$

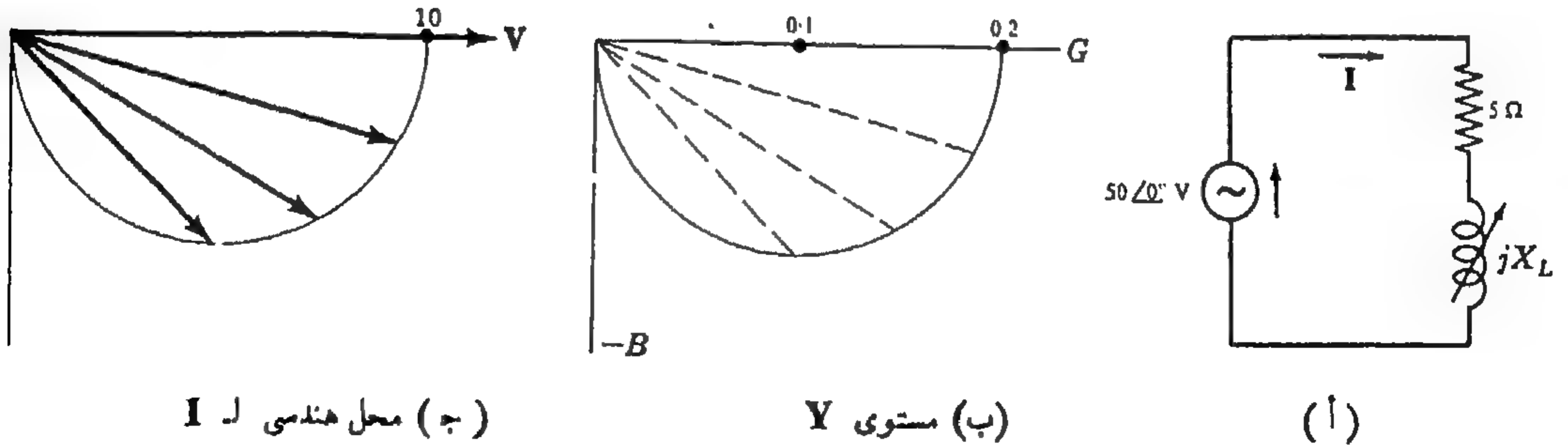
من المسألة ٨ - ١٣ نجد عند الذبذبة الصغرى لمتصف القدرة أن $1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R$. وبالتعويض

$$f_1 = 681 \text{ Hz و } 1/(2\pi f_1 \times 10^{-6}) - 2\pi f_1(0.05) = 20$$

وعند الذبذبة الكبرى لمتصف القدرة نجد أن $2\pi f_2 L - 1/2\pi f_2 C = R$. وبالتعويض نجد أن $f_2 = 745 \text{ Hz}$

$$Q_0 = f_0/BW = 712/(745 - 681) = 11.1 \text{ و } BW = (745 - 681) \text{ Hz} \text{ إذن}$$

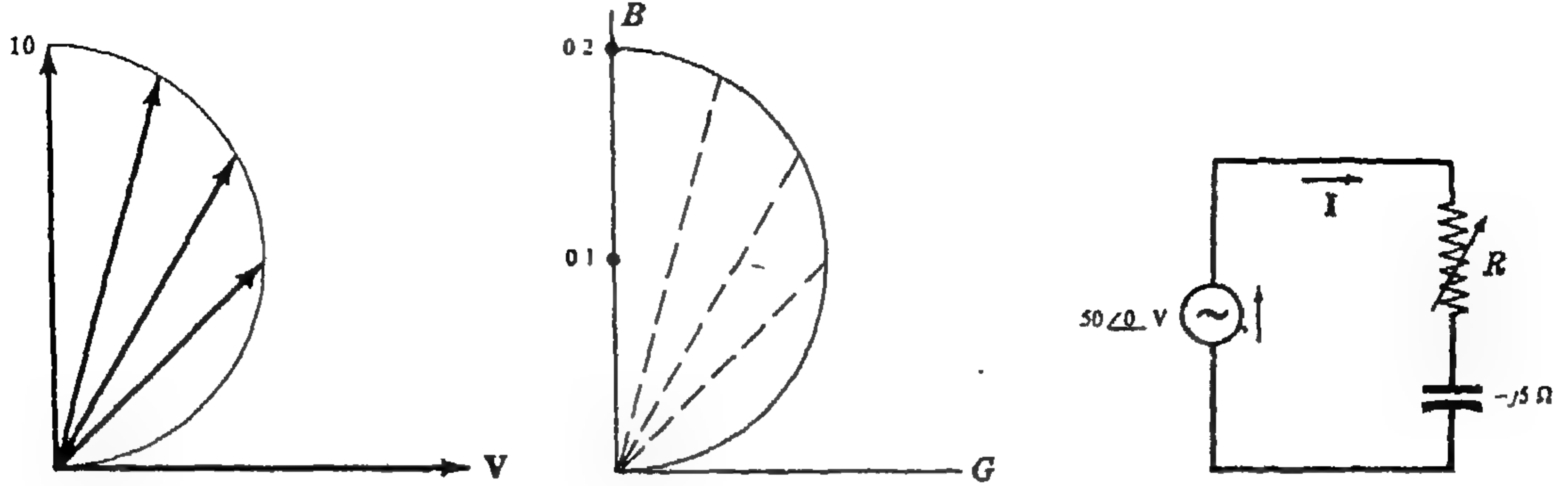
٨ - ١٥ أوجد المحل الهندسي للتيار في الدائرة المبينة في الشكل ٨ - ٢١ (أ) والتي فيها ممانعة حثية متغيرة X_L .
المحل الهندسي لـ Y هو نصف دائرة نصف قطرها $r = 1/2R = 0.1$ كما هو موضح في الشكل ٨ - ٢١ (ب)



شكل ٨ - ٢١

وحيث أن المحل الهندسي للتيار يوجد من العلاقة $I = VY$ حيث $V = 50/0^\circ \text{ V}$ إذن المحل الهندسي للتيار مشابه للمحل الهندسي لـ Y وله قيمة عظمى تساوي 10 A عندما $X_L = 0$. أنظر الشكل ٨ - ٢١ (ج)

٨-١٦ أوجد المحل الهندسي للتيار في الدائرة الموضحة في الشكل ٨-٢٢ (أ) والتي فيها مقاومة متغيرة R وممانعة سعوية ثابتة .
المحل الهندسي لـ Y هو نصف دائرة نصف قطرها $r = 1/2X_C = 0.1$ كما هو موضح في الشكل ٨-٢٢ (ب).



(ج) المحل الهندسي I

(ب) مستوى Y

(أ)

شكل ٨-٢٢

وحيث أن المحل الهندسي للتيار I يوجد من المعادلة $I = VY$ حيث $V = 50 \angle 0^\circ$ إذن يصل التيار إلى قيمته العظمى 10 A عندما $R = 0$. أنظر الشكل ٨-٢٢ (ج) .

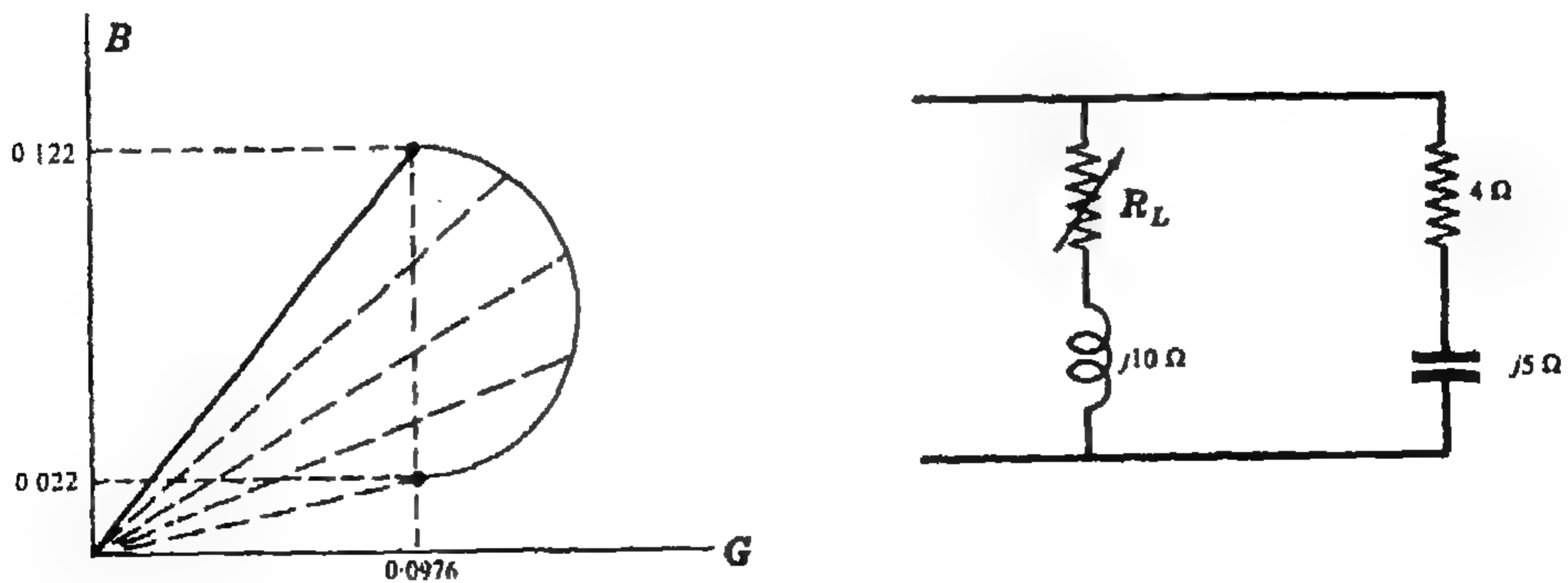
٨-١٧ أوجد قيمة R_L التي تجعل الدائرة الموضحة في الشكل ٨-٢٣ (أ) في حالة رنين . ارسم المحل الهندسي لـ Y . ثم

فسر النتائج التي تحصل عليها .

المسامحة الكلية للدائرة هي

$$Y_T = \frac{1}{R_L + j10} + \frac{1}{4 - j5} = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + 100} + \frac{4}{41} \right) + j \left(\frac{5}{41} - \frac{10}{R_L^2 + 100} \right) \text{ siemens}$$

وحيث أنه عند الرنين يكون الجزء التخيلي لـ Y مساوياً للصفر أي أن $5/41 - 10/(R_L^2 + 100) = 0$ ومنها نجد أن $R_L^2 = -18$. أي أنه لا توجد قيمة لـ R_L تجعل الدائرة في حالة رنين .



(ب) المحل الهندسي لـ Y_{eq}

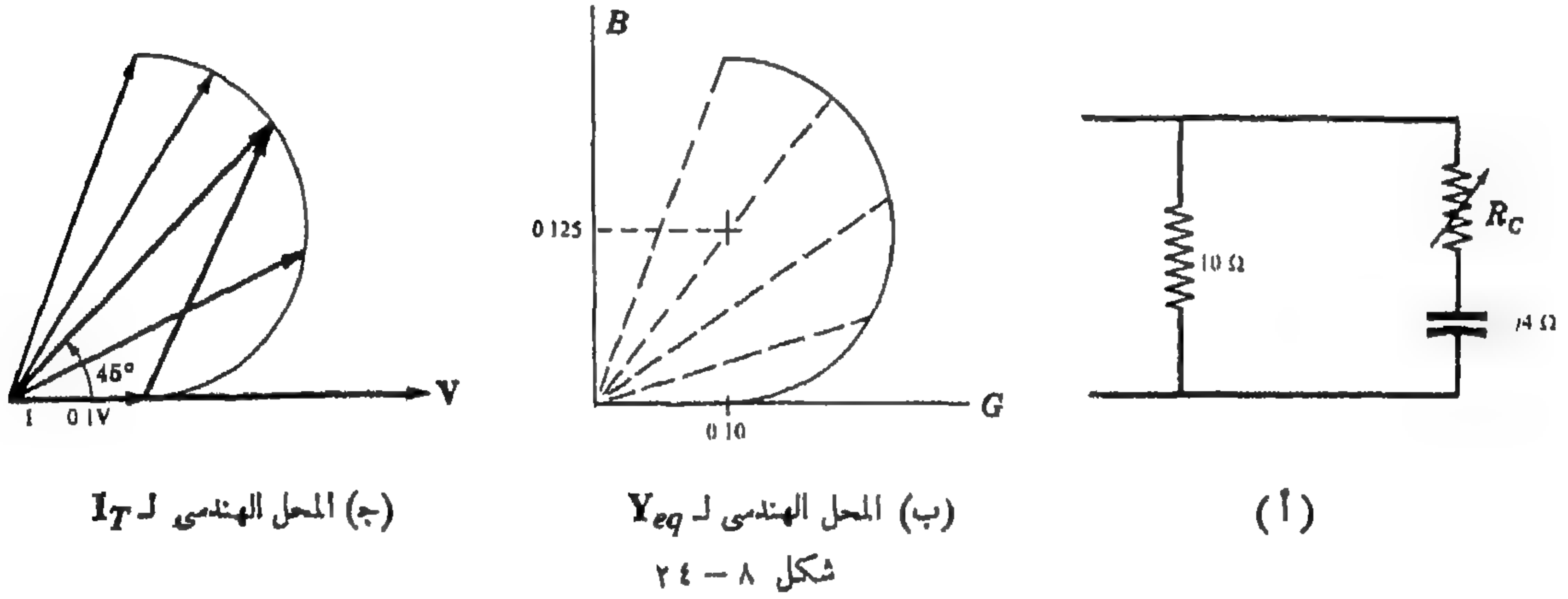
(أ)

شكل ٨-٢٣

إن المساحة للفرع ذي العناصر الثابتة هي $1/(4 - j5) = 0.0976 + j0.122 \text{ S}$ ، المحل الهندسي لمساحة الفرع ذي العناصر المتغيرة هو نصف دائرة نصف قطرها $r = 1/2X_L = 1/20 = 0.05$ أى أن القطر يساوى 0.10 وحيث أن الموصلة السعوية للفرع ذي العناصر الثابتة تساوى 0.122 S فإن المحل الهندسي للفرع ذي العناصر المتغيرة لا يقطع المحور الحقيقي . وبذلك لا يمكن أن يحدث رنين .

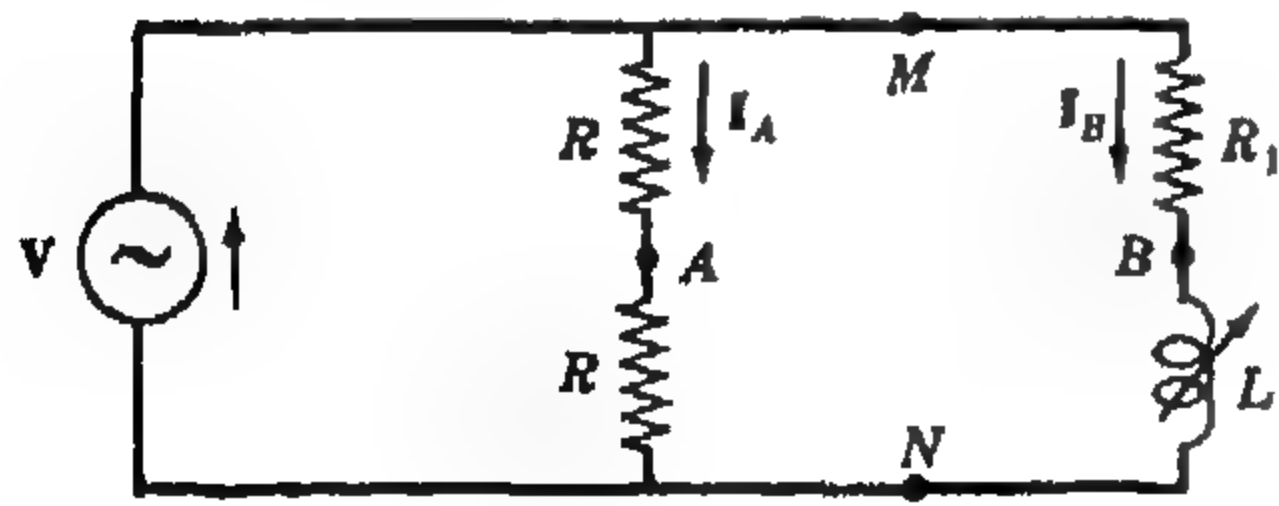
١٨-٨ أوجد المحل الهندسي لتيار الدائرة الموضحة في الشكل ٢٤-٨ (أ) ثم أوجد قيمة R_C التى تجعل زاوية الطور بين V و I تساوى 45° .

١٩-٨ إن مساحة الفرع ذي العناصر الثابتة هي $1/R = 0.1 \text{ S}$. والمحل الهندسي النصف دائرة للفرع RC نصف قطره $r = 1/2 X_C = 1/8 = 0.125$. أنظر الشكل ٢٤-٨ (ب) .



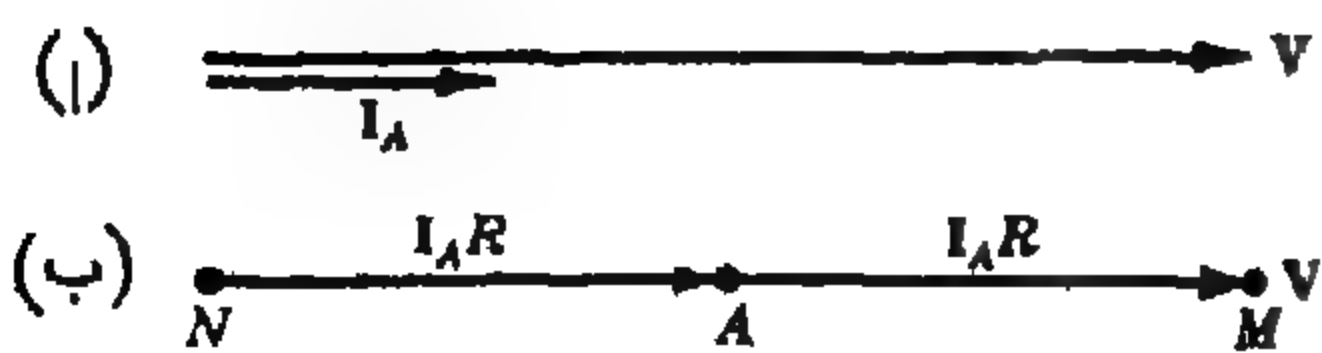
من الشكل ٢٤-٨ (ج) نجد أن التيار سابق للجهد بزاوية 45° عند النقطة الموضحة . ومن هذا ينتج أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لـ Y_T متساويان . وإذا كان

$$Y_T = \left(0.1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16}\right) + j\left(\frac{4}{R_C^2 + 16}\right) \text{ siemens} \quad \text{إذن} \quad \frac{R_C}{R_C^2 + 16} = \frac{4}{R_C^2 + 16} \quad \text{و} \quad R_C = 2 \text{ ohms}$$



شكل ٢٥-٨

١٩-٨ اختبرت الدائرة الموضحة في الشكل ٢٥-٨ في المسألة ١٨-٦ ووجد أن القيمة المطلقة V_{AB} ثابتة . أى أن $V_{AB} = 1/2 V$ والجهد المطاوع V_{AB} لاحق للجهد المؤثر V بزاوية 2θ حيث $\theta = \tan^{-1} \omega L/R$. وضح هذه النتائج بيانياً .



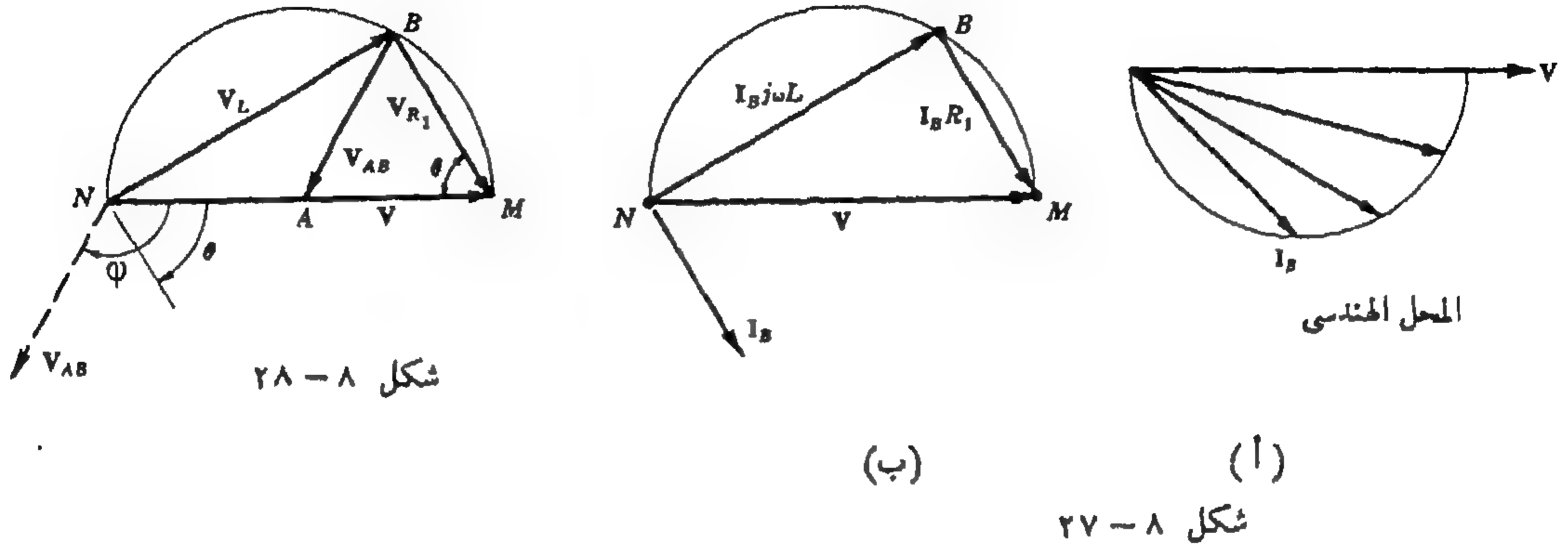
شكل ٢٦-٨

في الفرع الأول نجد أن $Z = 2R$ و $Y = 1/2R$ و $I_A = V/2R$ إذن الجهد عبر المقاومة هو

$$V_R = IR = V/2$$

الشكل ٢٦-٨ يوضح الشكل المطاوع للجهدين V_{MA} و V_{AN} حيث A منتصف V .

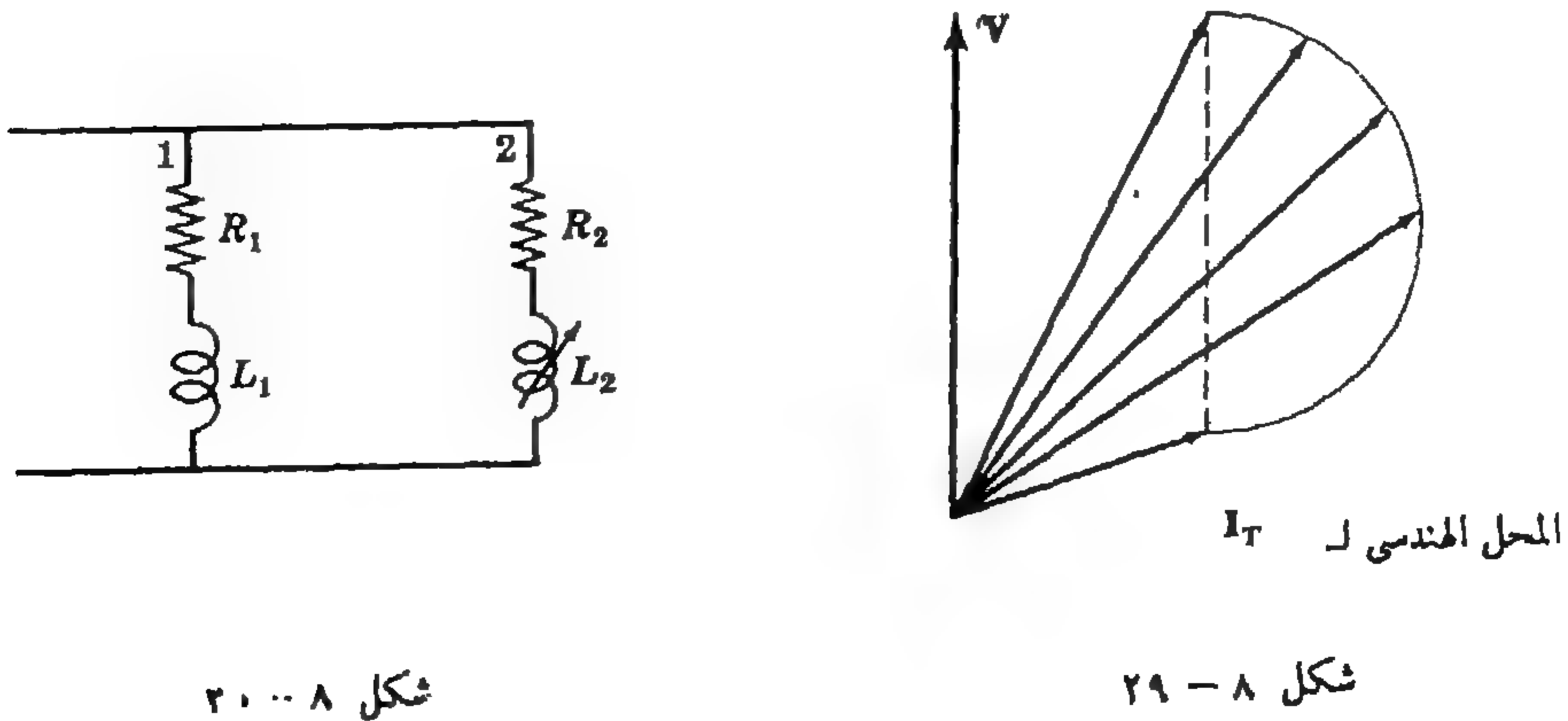
حيث أن المحل الهندسى لمساحة الفرع الثانى V نصف دائرة ، اذن المحل الهندسى للتيار هو أيضا نصف دائرة كما هو موضح فى الشكل ٢٧-٨ (١) . ويتكون شكل الجهد المطاور من الجهد عبر الحث ، V_{BN} والجهد عبر V_{MB} ، R . وبإضافة الجهدين ينتج الجهد V . لاحظ أن I_B لاحق لـ V_{BN} بزاوية 90° .



الجهدان V_{BN} و V_{MB} متعامدان لجميع قيم L . وعندما تتغير L من صفر إلى ∞ تتحرك B من M إلى N على المحل الهندسى النصف دائرى .

والآن بتركيب الجهدين المطاورين فى الشكلين ٢٦-٨ (ب) ، ٢٧-٨ (ب) كما فى الشكل ٢٨-٨ نرى أن V_{AB} هو نصف قطر النصف دائرة ويساوى $V/2$ أى أنه ثابت القيمة . وعلاوة على ذلك فإن V_{AB} لاحق للجهد بزاوية ϕ تساوى 2θ حيث $\theta = \tan^{-1} \omega L/R$

٢٠-٨ الشكل ٢٩-٨ يوضح المحل الهندسى للتيار الكلى لدائرة توازى مكونة من فرعين ، عين عناصر كل فرع ووضح أى العناصر يمكن تغييره .



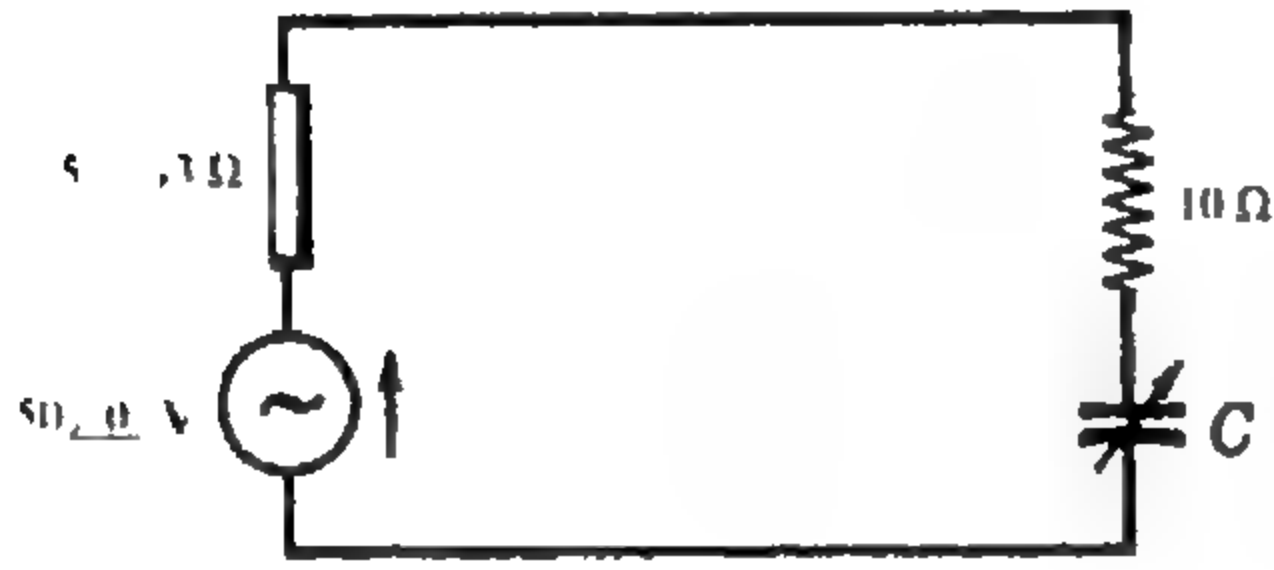
النقطة في قاع النصف دائرة تقابل الشرط الذي عنده يكون تيار الفرع 1 ذو العناصر المتغيرة مساويا للصفر. وعلى ذلك فإن التيار الكلي عند نفس النقطة ينتج من تيار الفرع 1 ذو العناصر الثابتة. وحيث أن هذا التيار لاحق للجهد إذن الفرع الثابت لابد أن يحتوى على R_1 و L_1 .

الحل الهندسى النصف دائرى لتيار الفرع 2 يبين أن التيار في اتجاه الجهد عند قيمته العظمى. وعند جميع النقط الأخرى في الحل الهندسى يكون I_2 لاحق لـ V . إذن الفرع 2 يتكون من R_2 و L_2 بحث متغير كما هو موضح في الشكل ٨-٣٠.

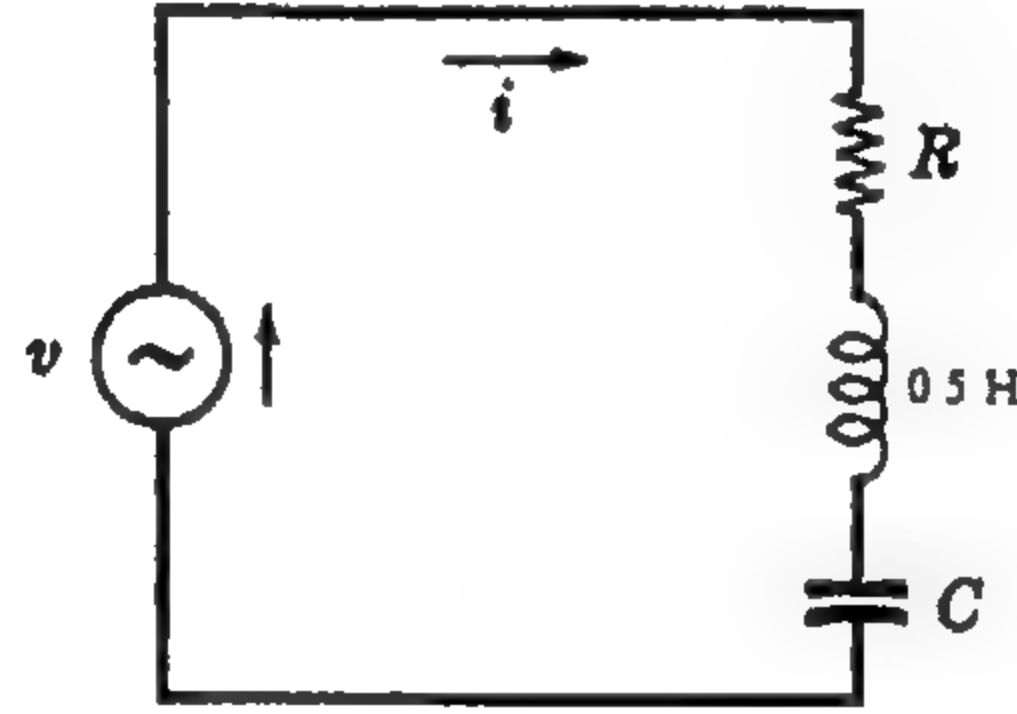
مسائل إضافية

٨-٢١ في دائرة التوالي RLC الموضحة في الشكل ٨-٣١ إذا كانا الجهد والتيار المحظين يعطيان بالمعادلتين $v = 70.7 \sin(500t + 30^\circ)$ volts و $i = 2.83 \sin(500t - 30^\circ)$ amperes ، فأوجد R و C .

الجواب : $R = 25 \Omega$ و $C = 8 \mu F$



شكل ٨-٣٢



شكل ٨-٣١

٨-٢٢ في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٨-٣٢ إذا كانت المعاوقة للمصدر هي $5 + j3 \Omega$ وذبذبة المصدر هي 2000 Hz ، فعند أي قيمة لـ C تصل القدرة في المقاومة 10Ω إلى قيمتها العظمى ؟

الجواب : $C = 26.6 \mu F, P = 111 \text{ W}$

٨-٢٣ في دائرة توالى RLC فيها $L = 25 \text{ mH}$ و $C = 75 \mu F$ كانت زاوية الطور لها لاحقة وتساوى 25° عند $\omega = 2000 \text{ rad/s}$. عند أي ذبذبة تكون زاوية الطور سابقة وتساوى 25° ؟ أوجد أيضا ω_0 .

الجواب : $\omega = 267 \text{ rad/s}, \omega_0 = 730 \text{ rad/s}$

٨-٢٤ إذا كان الجهد المحظي لدائرة التوالي RLC والتي فيها $L = 0.5 \text{ H}$ هو $v = 70.7 \sin(500t + 30^\circ)$ volts والتيار المحظي هو $i = 1.5 \sin(500t)$ amperes. فأوجد قيمة R و C . عند أي ذبذبة ω_0 تكون الدائرة في حالة رنين ؟

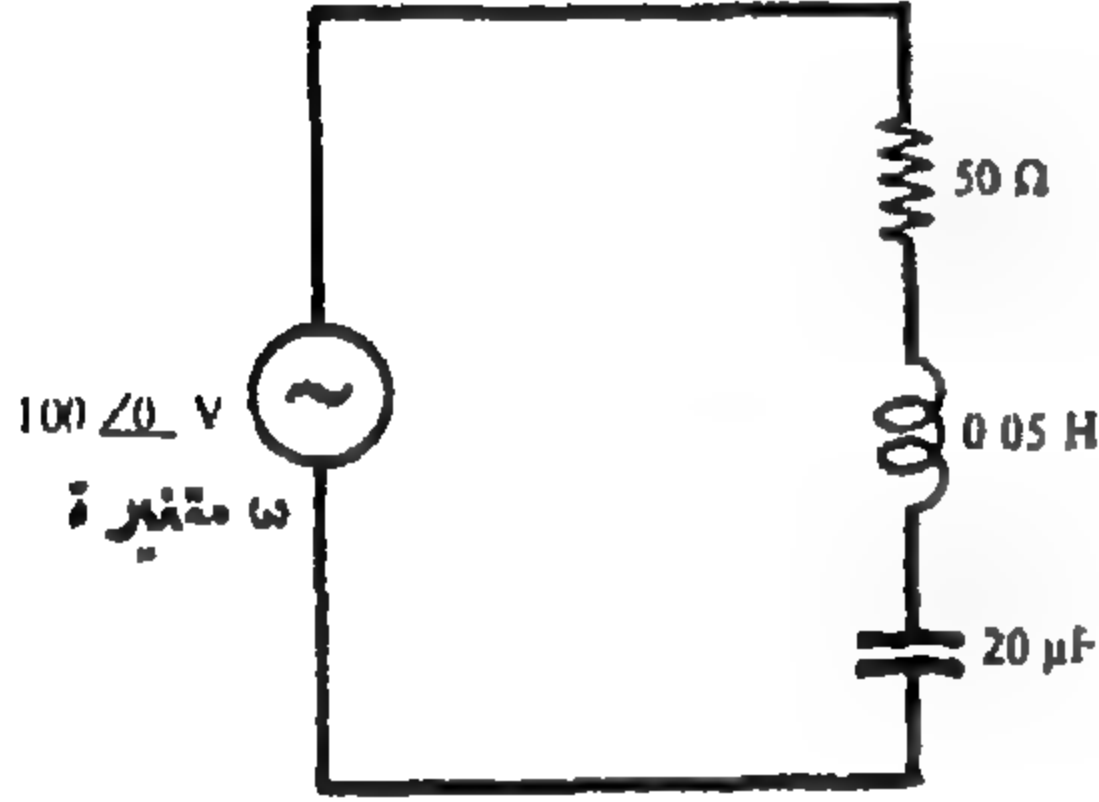
الجواب : $R = 40.8 \text{ ohms}, C = 8.83 \mu F, \omega_0 = 476 \text{ rad/s}$

٢٥-٨ دائرة توالى فيها $R = 10 \Omega$ و $L = 0.2 H$ و $C = 40 \mu F$ يؤثر عليها جهد ذبذبة متغيرة ، أوجد الذبذبات f_1 و f_0 و f_2 التى يكون عندها التيار : سابق للجهد بزاوية 30° ، فى اتجاه الجهد ، لاحق للجهد بزاوية 30° على الترتيب .
الجواب : $f_1 = 54.0 Hz, f_0 = 56.3 Hz, f_2 = 58.6 Hz$

٢٦-٨ دائرة RLC على التوالي فيها $R = 25 \Omega$ و $L = 0.6 H$ زاوية الطور لها سابقة وتساوى 60° عند ذبذبة تساوى $40 Hz$. أوجد الذبذبة التى تكون عندها الدائرة فى حالة رنين .

الجواب : $f_0 = 45.4 Hz$

٢٧-٨ فى دائرة التوالي الموضحة فى الشكل ٣٣-٨ غيرت الذبذبة حتى وصل الجهد عبر المكثف إلى قيمته العظمى ، فإذا كانت القيمة الفعالة للجهد المؤثر $100 volts$ ، فأوجد أكبر قيمة للجهد على المكثف والذبذبة التى تحدث عندها .



شكل ٣٣-٨

الجواب : $\omega = 707 rad/s, V_C = 115.5 V$

٢٨-٨ إذا كان عامل الجودة لدائرة التوالي الموضحة فى المسألة ٢٧-٨ هو Q_0 ، فإذا كانت Q_0 تساوى 5 عندما $R = 10 \Omega$ فأوجد الذبذبة التى يصل عندها الجهد عبر المكثف إلى قيمته العظمى .

كرر نفس الشيء عندما $R = 5 \Omega$

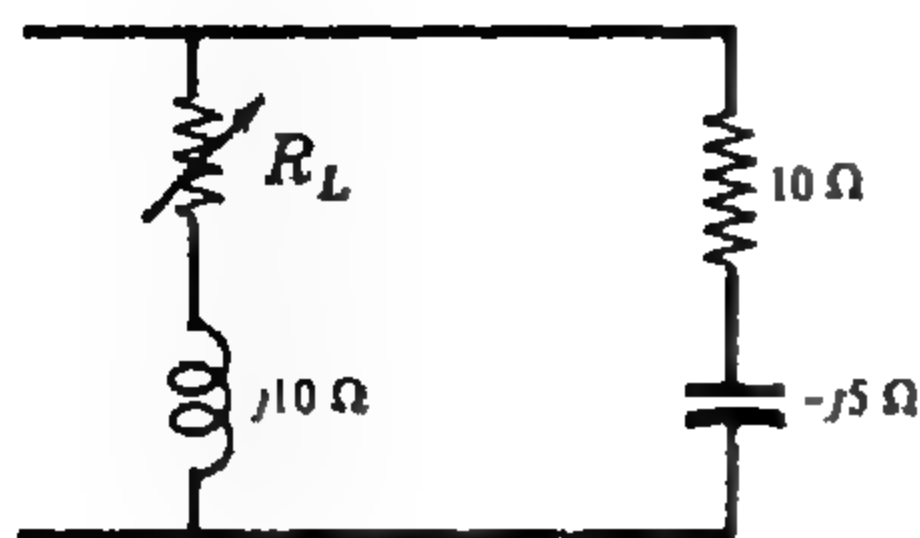
الجواب : $998 rad/s$ و $990 rad/s$

ملحوظة : عندما $Q_0 > 10$ فإنه يمكن القرض بأن الجهود عبر R و L و C تصل إلى قيمتها العظمى عند ذبذبة الرنين ω_0 أو f_0 .

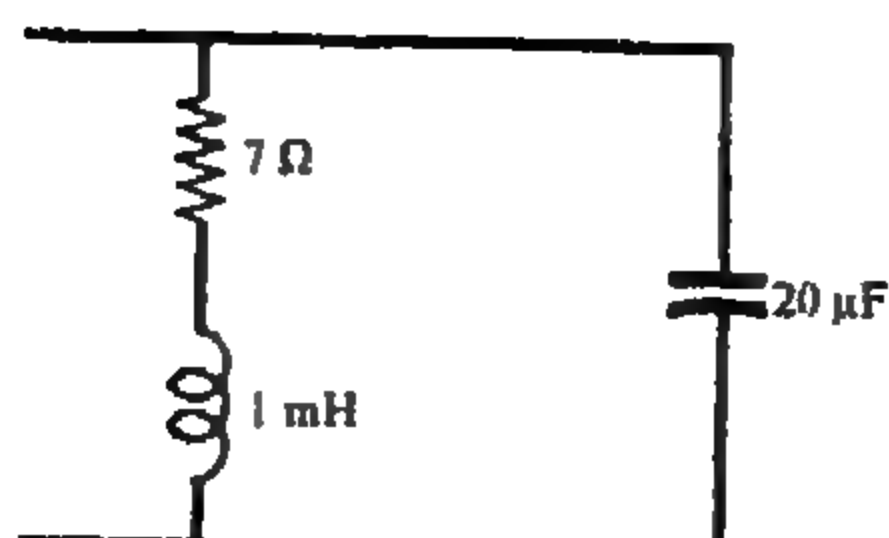
٢٩-٨ لتوضيح تأثير Q على قيمة التيار بالقرب من ذبذبة الرنين ، ارسم القيمة المطلقة لـ Y مع ω للدائرتين بالثوابت التالية . الدائرة الأولى $R = 5 \Omega$ و $L = 0.05 H$ و $C = 20 \mu F$. الدائرة الثانية : $R = 10 \Omega$ و $L = 0.05 H$ و $C = 20 \mu F$.

٣٠-٨ فى دائرة التوازي الموضحة فى الشكل ٣٤-٨ ، إذا كانت $L = 0.2 H$ و $C = 30 \mu F$. فعين ذبذبة الرنين عندما $R_L = 0$ ثم قارنها بذبذبة الرنين عندما $R = 50 \Omega$.

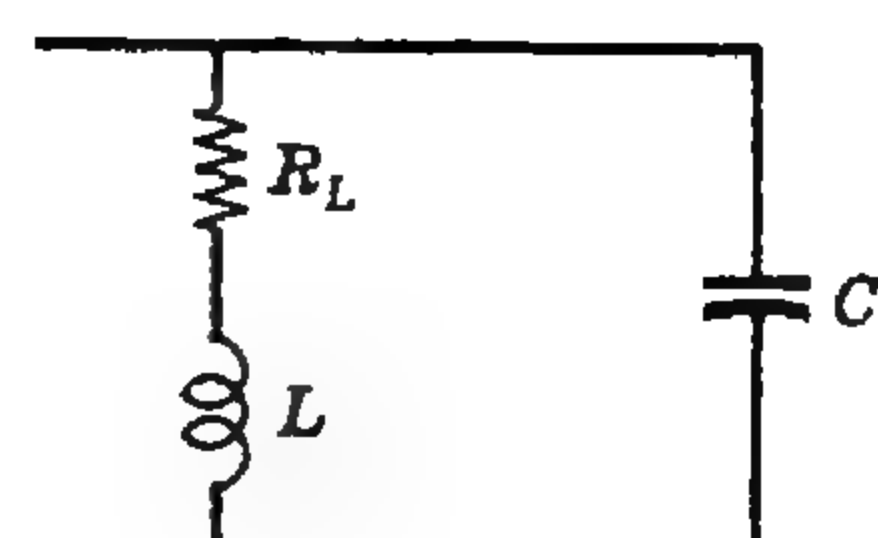
الجواب : $\omega_0 = 408 rad/s, \omega_0 = 323 rad/s$



شكل ٨ - ٣٦



شكل ٨ - ٣٥



شكل ٨ - ٣٤

٨ - ٣١ أوجد ذبذبة الرنين f_0 لدائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٣٥ .

الجواب : $f_0 = 159 \text{ Hz}$.

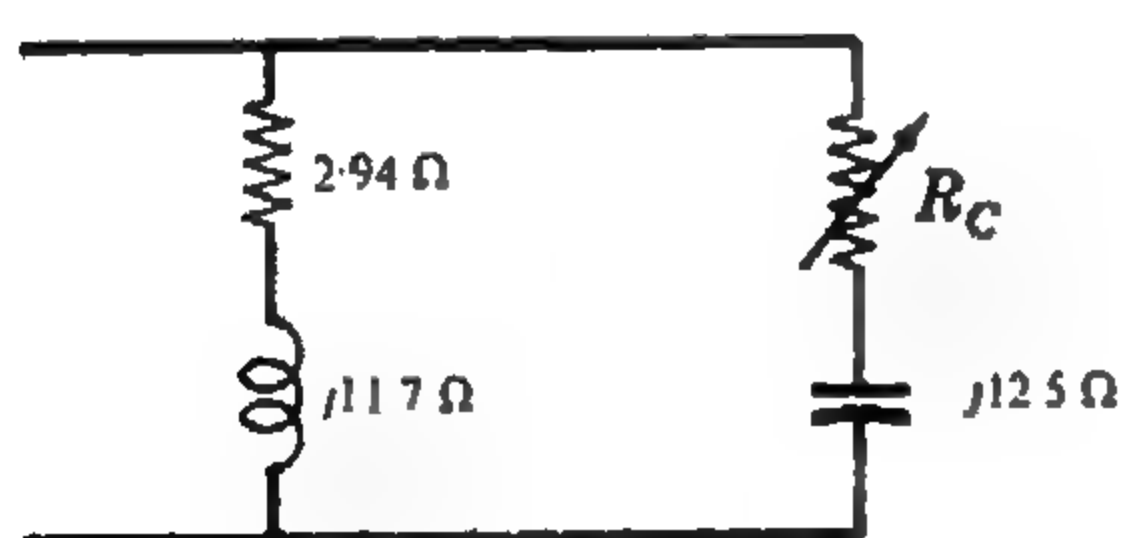
٨ - ٣٢ في المسألة ٨ - ٣١ ، أوجد قيمة المقاومة التي يجب توصيلها على التوالي مع المكثف حتى تصبح ذبذبة الرنين 300 Hz .

الجواب : $R_C = 6 \Omega$.

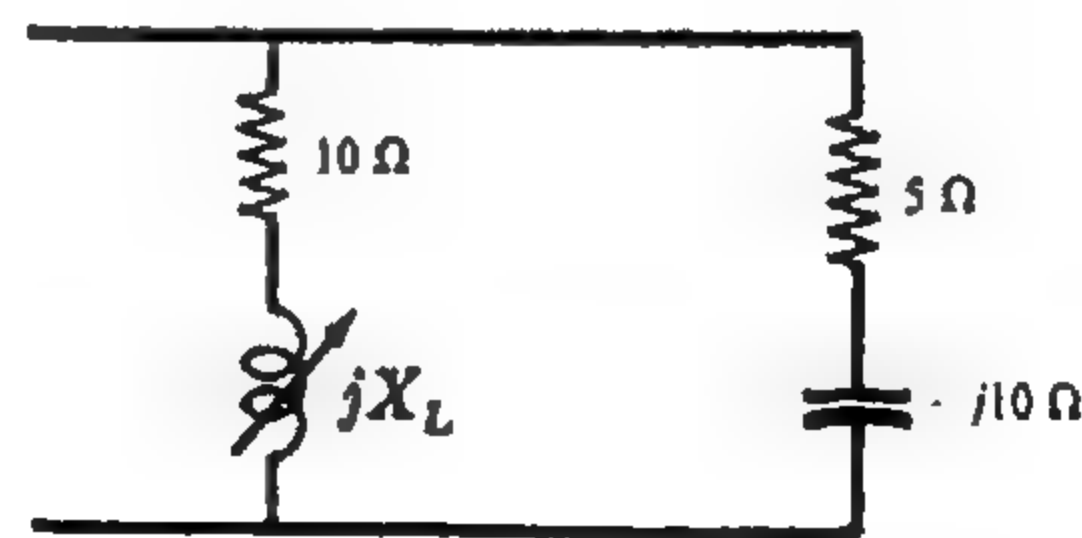
٨ - ٣٣ أوجد قيمة R_L التي تجعل دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٣٦ في حالة رنين .

الجواب : $R_L = 12.25 \Omega$.

٨ - ٣٤ عند أية قيمة لـ X_L تكون دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٣٧ في حالة رنين ؟ بين المحل الهندسي لـ Y لتوضيح النتائج .



شكل ٨ - ٣٨



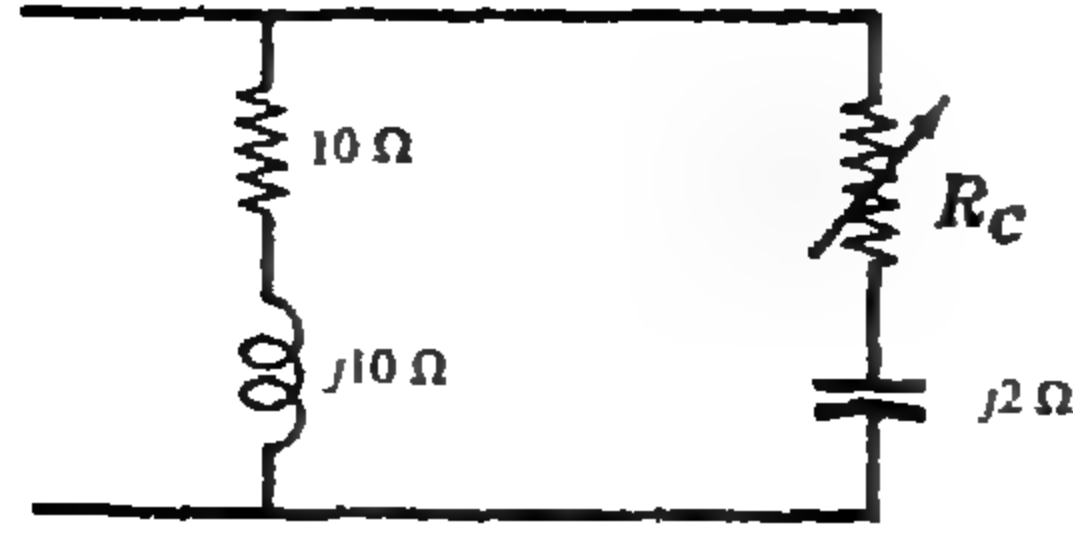
شكل ٨ - ٣٧

٨ - ٣٥ أوجد قيمة R_C التي تجعل دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٣٨ في حالة رنين . بين المحل الهندسي لـ Y لتوضيح هذه النتيجة .

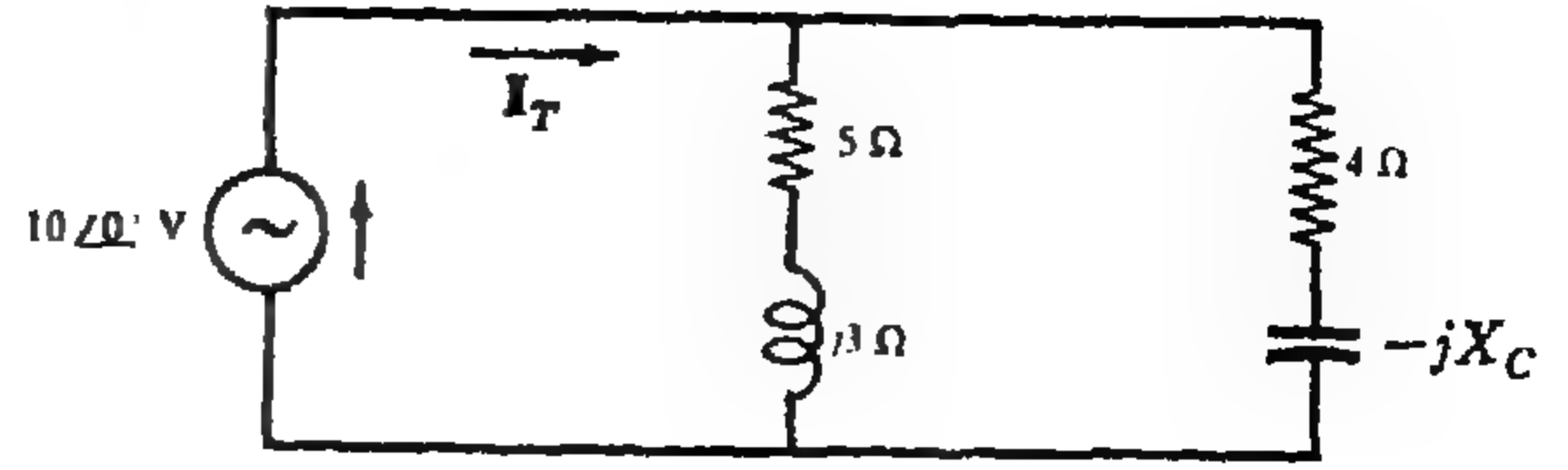
الجواب : $R_C = 0$.

٨ - ٣٩ تكون دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٣٩ في حالة رنين عندما $X_C = 9.68 \Omega$ وعندما $X_C = 1.65 \Omega$. أوجد التيار المطاور الكل لكل قيمة من قيم المعاوقة السعوية .

الجواب : $1.83 \angle 0^\circ \text{ A}, 3.61 \angle 0^\circ \text{ A}$.



شكل ٨ - ٤٠



شكل ٨ - ٣٩

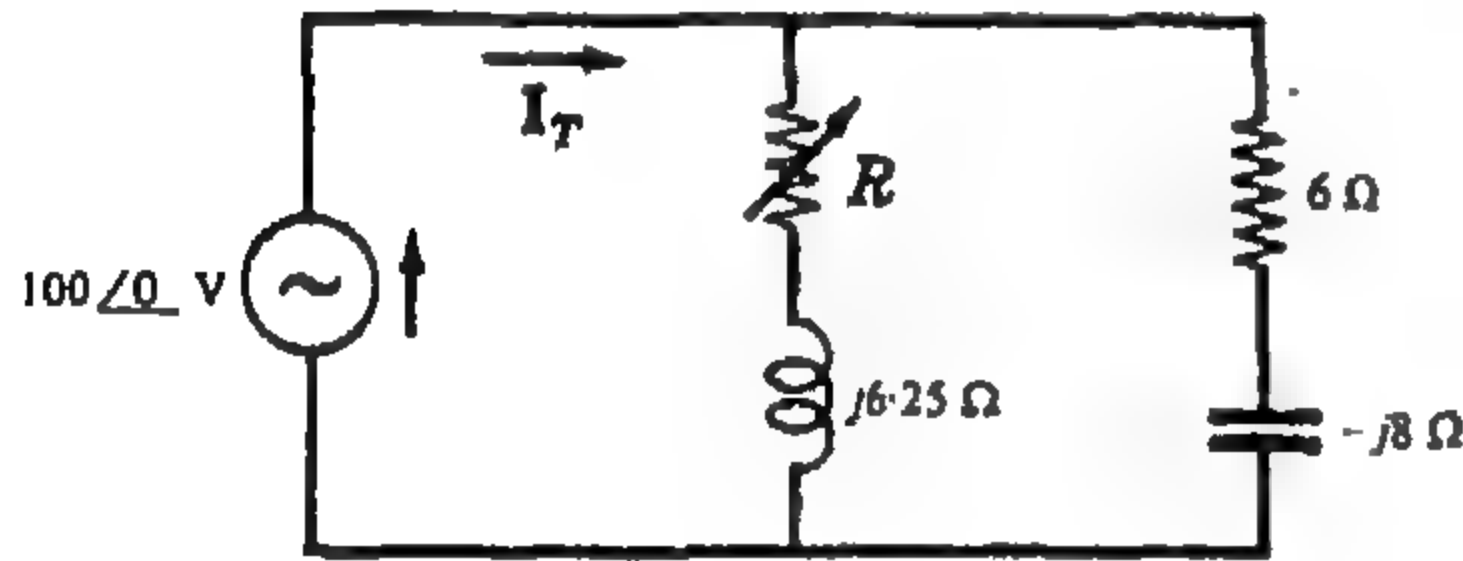
٨ - ٣٧ عند أية قيمة لـ R_C تكون دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٤٠ في حالة رنين ؟

الجواب : $R_C = 6 \Omega$

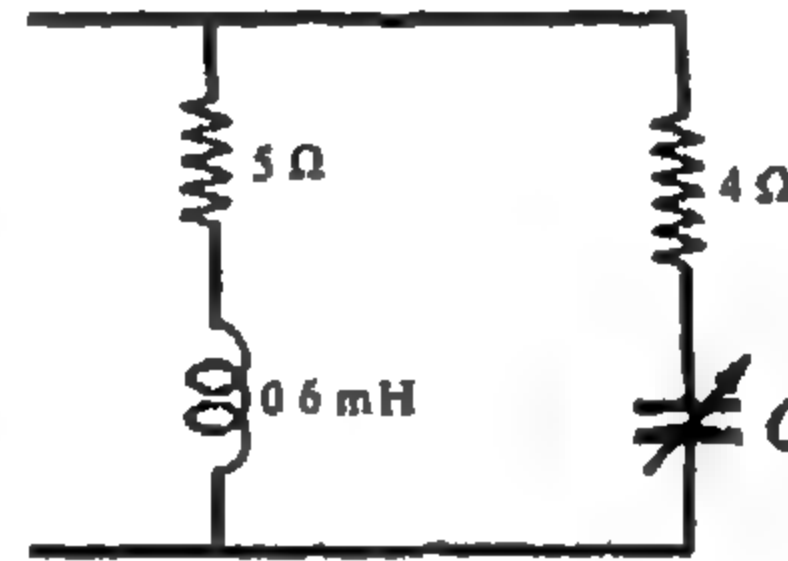
٨ - ٣٨ يؤثر جهد $V = 50 \angle 0^\circ \text{ V}$ على دائرة توالى تتكون من ممانعة حثية ثابتة $X_L = 5 \Omega$ ومقاومة متغيرة . ارسم المحل الهندسى لمساحة وتيار هذه الدائرة .

٨ - ٣٩ يؤثر جهد $V = 50 \angle 0^\circ \text{ V}$ على دائرة توالى تتكون من مقاومة ثابتة $R = 5 \Omega$ وسعة متغيرة C . ارسم المحل الهندسى لمساحة وتيار هذه الدائرة .

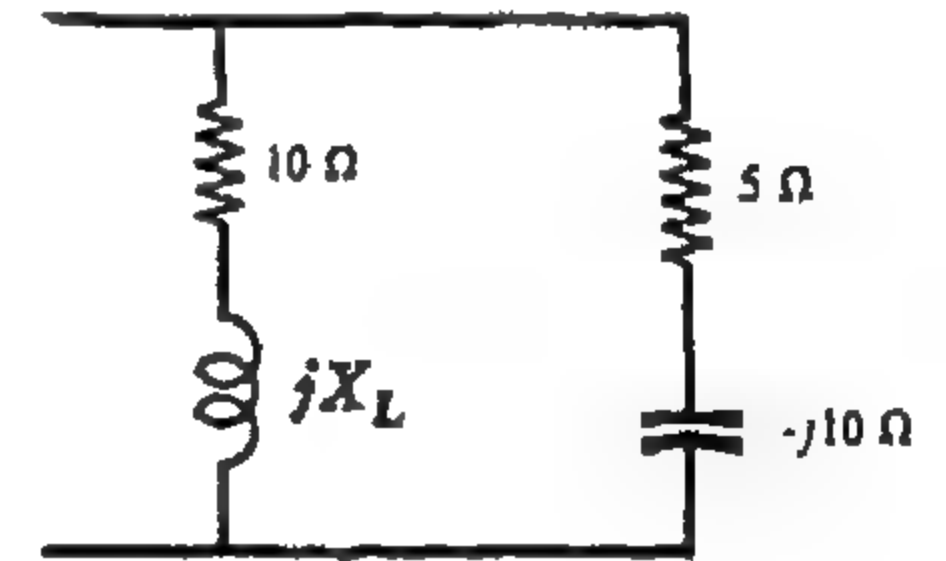
٨ - ٤٠ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٤١ احدث بدون حدود . ارسم المحل الهندسى لمساحة الدائرة لتبين أنه لا يمكن الحصول على رنين في هذه الدائرة .



شكل ٨ - ٤٣



شكل ٨ - ٤٢



شكل ٨ - ٤١

٨ - ٤١ الدائرة الموضحة في الشكل ٨ - ٤٢ تكون في حالة رنين عند قيمتين للسعة C عندما $\omega = 5000 \text{ rad/s}$. أوجد قيمتي C ثم ارسم المحل الهندسى للمساحة .

الجواب : $20.6 \mu\text{F}$ ، $121 \mu\text{F}$

٨ - ٤٢ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٤٣ كان التيار I_T لاحقاً للجهد بزاوية 53.1° عندما $R = 0$ وإذا كانت $R = \infty$ (دائرة مفتوحة) فإن I_T يكون سابقاً للجهد بنفس الزاوية . ارسم المحل الهندسى للمساحة لتوضيح هذه النتيجة - عند أية قيمة لـ R تكون الدائرة في حالة رنين ؟

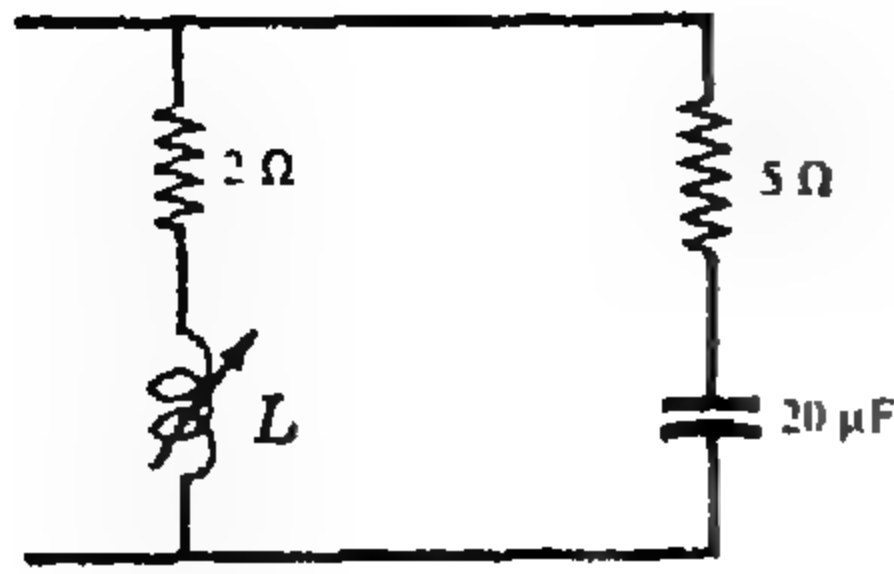
الجواب : $R = 6.25 \Omega$

٨ - ٤٣ أوجد قيمة R التي تجعل دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٤٤ في حالة رنين ثم ارسم المحل الهندسى للمساحة لتوضيح النتيجة .

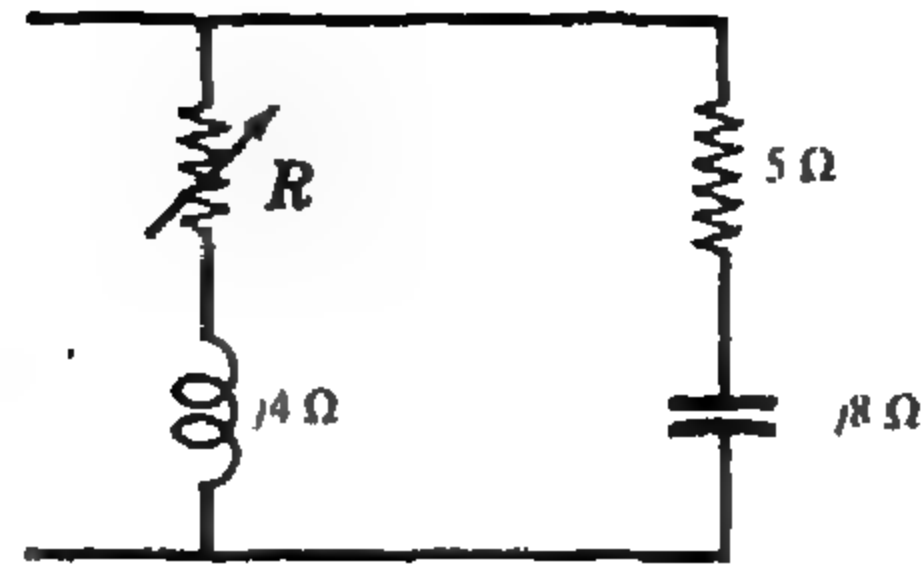
٨ - ٤٤ في المسألة ٨ - ٤٣ ، ما هو التنوير الذى يجب ادخاله على الممانعة الحثية حتى نحصل على رنين عند قيمة ما للمقاومة المتغيرة R ؟ الجواب : $X_L \leq 8.2 \Omega$

٨ - ٤٥ أوجد قيمة R التي تجعل دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨ - ٤٥ في حالة رنين ثم ارسم المحل الهندسى .

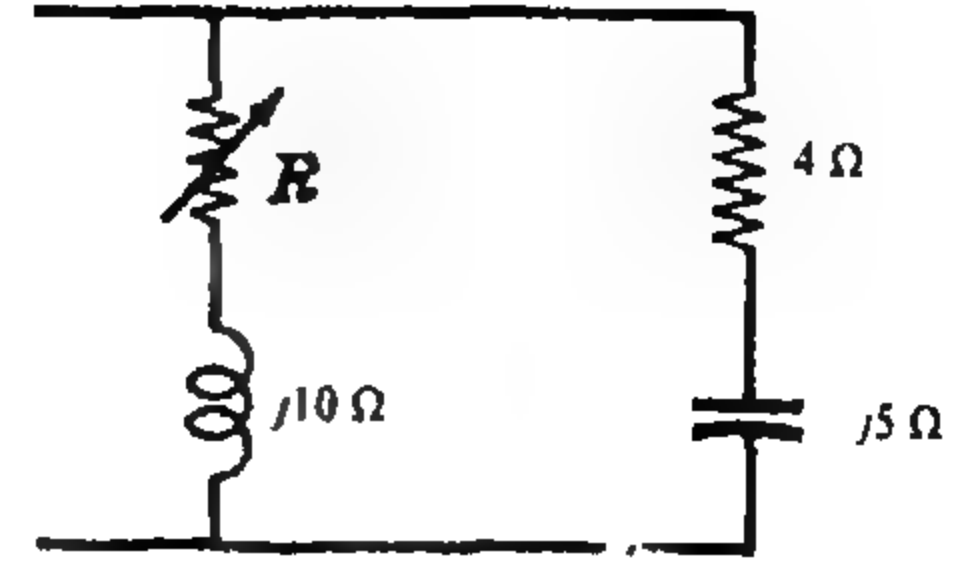
الجواب : $R = 5.34 \Omega$



شكل ٨ - ٤٦



شكل ٨ - ٤٧



شكل ٨ - ٤٨

٨ - ٤٦ في المسألة ٨-١١ ، حصلنا على رنين في الدائرة بتغيير السعة C . استخدم المحل الهندسى للمساحة لتبين أنه توجد قيمة واحدة للسعة C تجعل الدائرة في حالة رنين بدلا من من القيمتين المعتادتين .

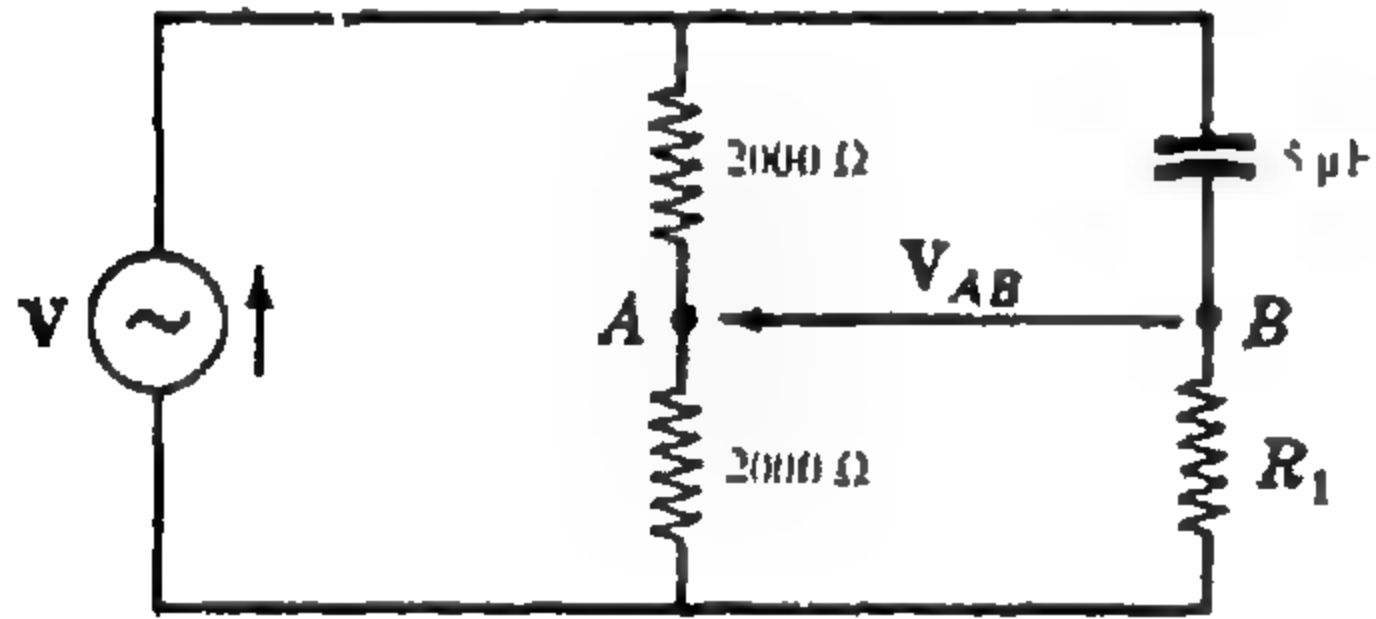
٨ - ٤٧ دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٨-٤٦ تصبح في حالة رنين بتغيير L . ارسم المحل الهندسى للمساحة وعين قيمة L عند الرنين إذا كانت $\omega = 5000 \text{ rad/s}$.
الجواب : $L = 2.43 \text{ mH}, 0.066 \text{ mH}$

٨ - ٤٨ باستخدام المحل الهندسى للمساحة في المسألة ٨-٤٧ ، أوجد قيمة L التي تجعل التيار الكلى أقل ما يمكن . ثم أوجد قيمة التيار إذا كانت القيمة الفعالة للجهد المؤثر هي 100 volts .

الجواب : $I_T = 5.1 \text{ A}$ و $L = 2.95 \text{ mH}$

٨ - ٤٩ في المسألة ٨-٤٧ إذا كان الجهد المؤثر هو $V = 150/75^\circ \text{ V}$ فاحسب قيمة I_T عند كل قيمة لـ L تجعل الدائرة في حالة رنين .

الجواب : $I_T = 7.98/75^\circ \text{ A}, 78.9/75^\circ \text{ A}$

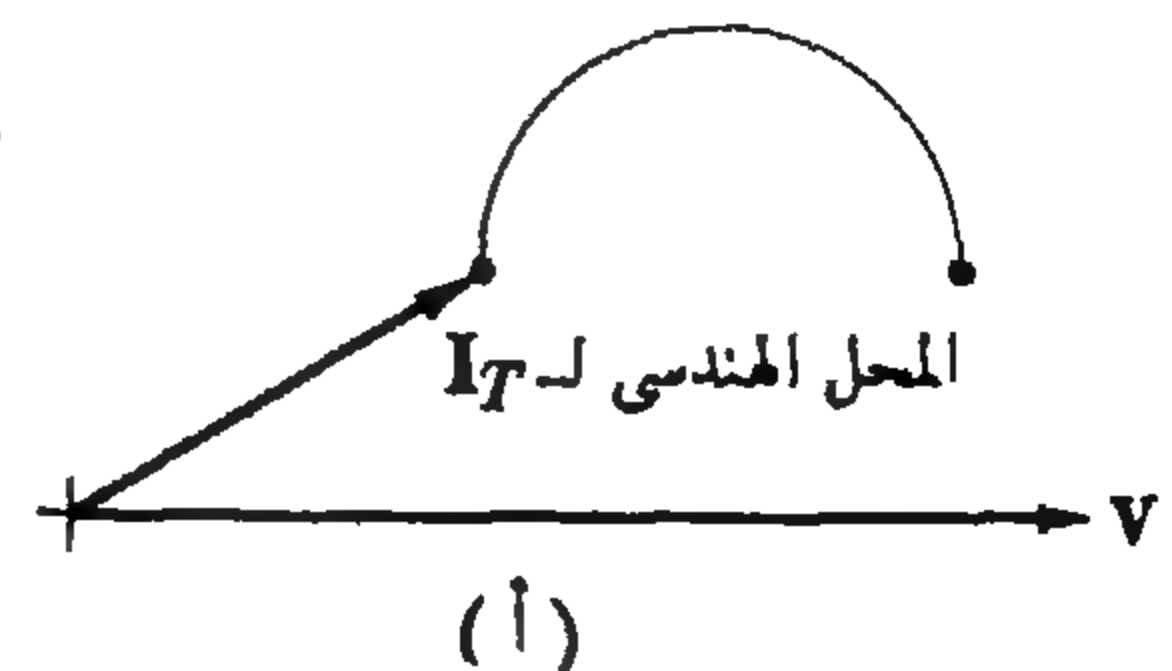
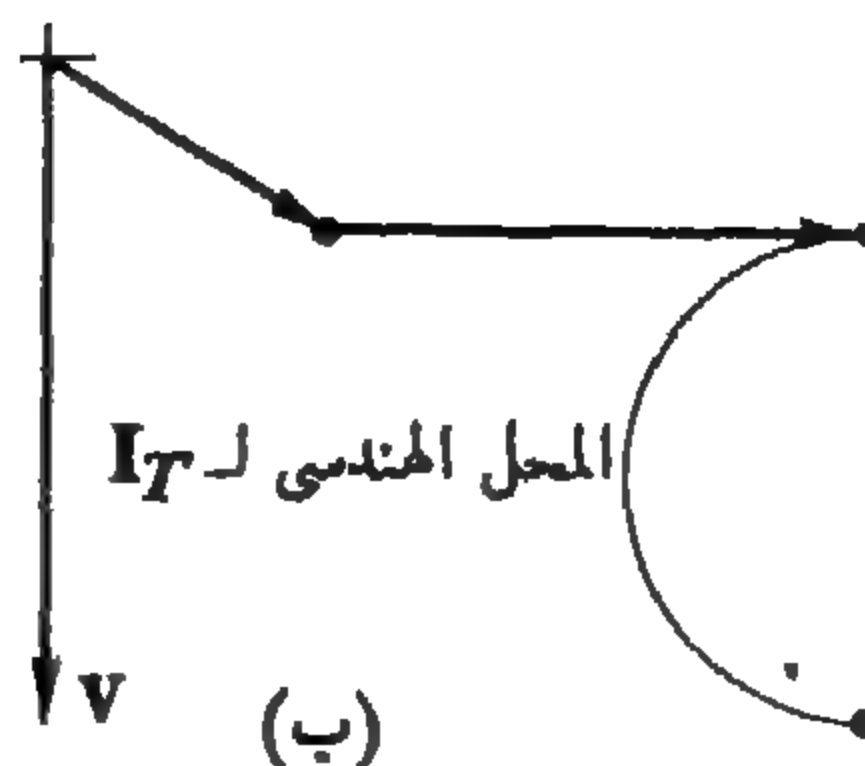
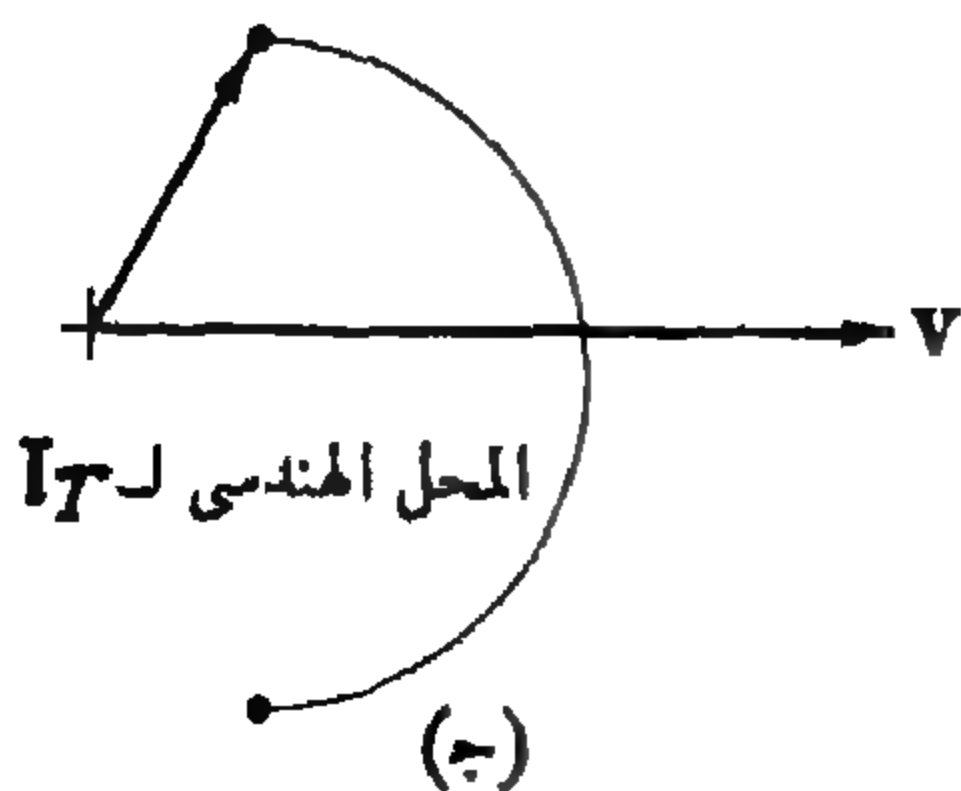


شكل ٨ - ٤٧

٨ - ٥٠ في دائرة تغيير الطور الموضحة في الشكل ٨-٤٧ يراد تغيير طور V_{AB} في المدى من 10° لاحق إلى 170° لاحق بالنسبة للجهد المؤثر V . فإذا كانت الذبذبة هي 60 Hz فأوجد مدى R_1 الذى يحقق هذا التنوير .

الجواب : $46.4 \rightarrow 6080 \Omega$

٨ - ٥١ توضح الأشكال ٨-٤٨ (أ) ، (ب) ، (ج) المحل الهندسى للتيار الكلى المار في دائرة تحتوى على عنصر متغير واحد . وضح الدائرة المقابلة لكل محل هندسى .

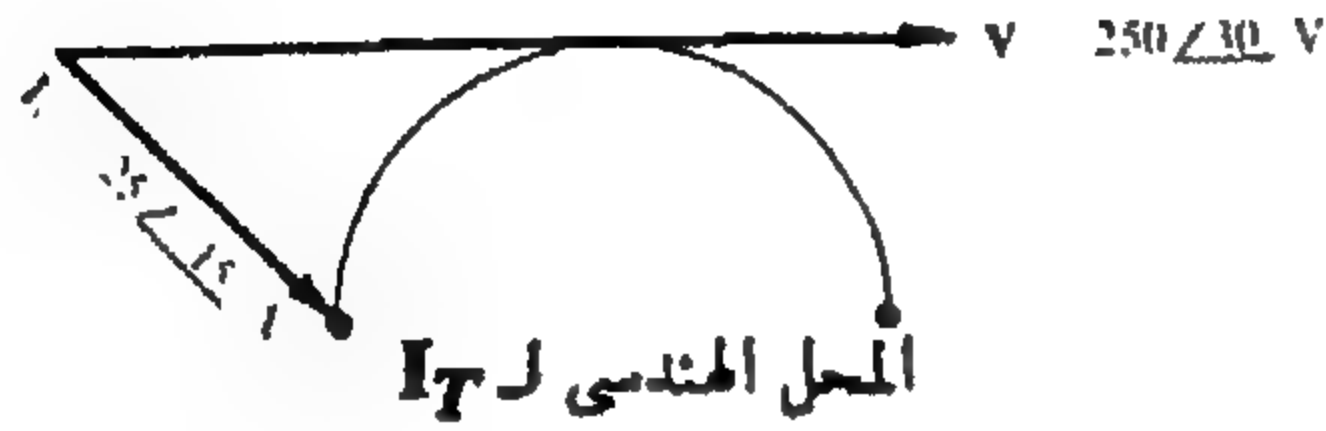


شكل ٨ - ٤٨

الجواب (أ) - دائرة توازي من فرعين الأول به R و X_C ثابتان والثاني به R ثابتة و X_C متغيرة .

(ب) - دائرة توازي من ثلاثة أفرع : الأول به R و X_C ثابتان والثاني به X_C ثابتة والثالث به R ثابتة و X_L متغيرة .

(ج) - دائرة توازي من فرعين : الأول به R و X_C ثابتان والثاني به X_L ثابتة و R متغيرة .



٨-٥٢ أوجد ثوابت الدائرة وطريقة توصيلها التي تقابل المحل الهندسي للتيار الموضح في الشكل ٨-٤٩ ، علما بأن $\omega = 2000 \text{ rad/s}$.

الجواب : الفرع الأول :

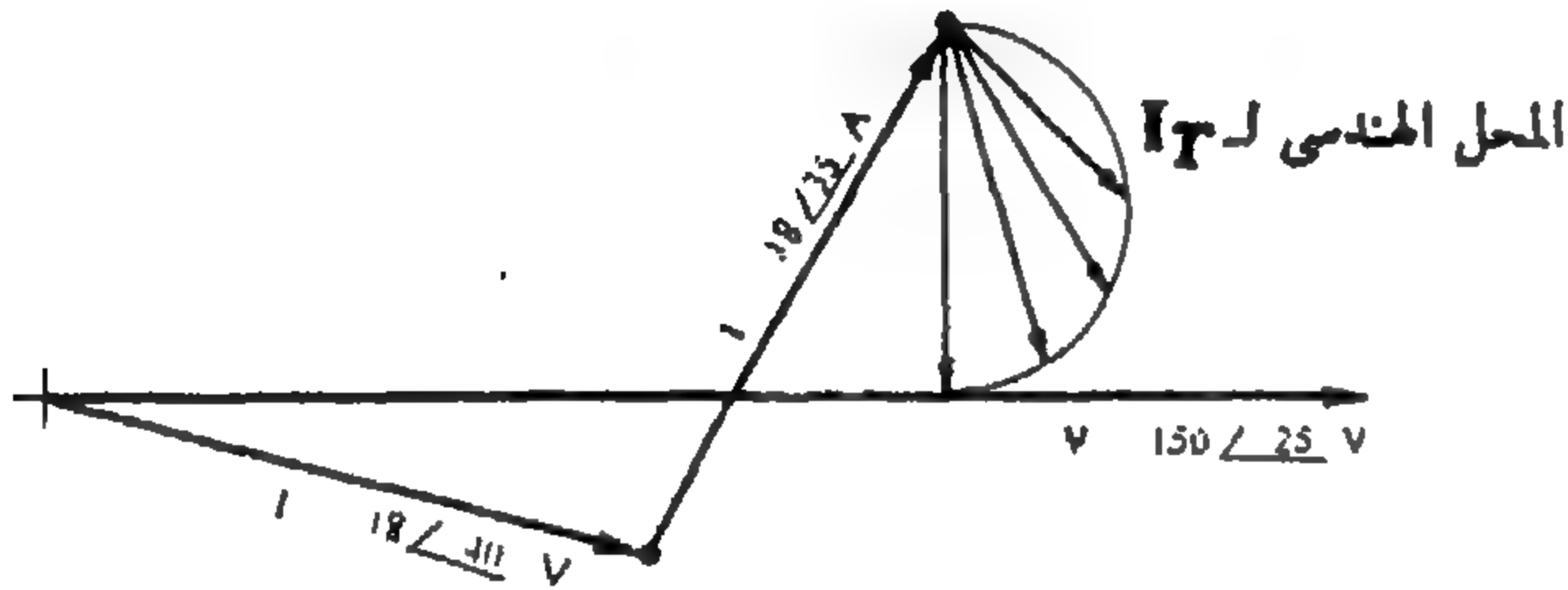
$$R = 7.07 \Omega , L = 3.54 \text{ mH}$$

الفرع الثاني : C متغيرة ، $R = 7.07 \Omega$

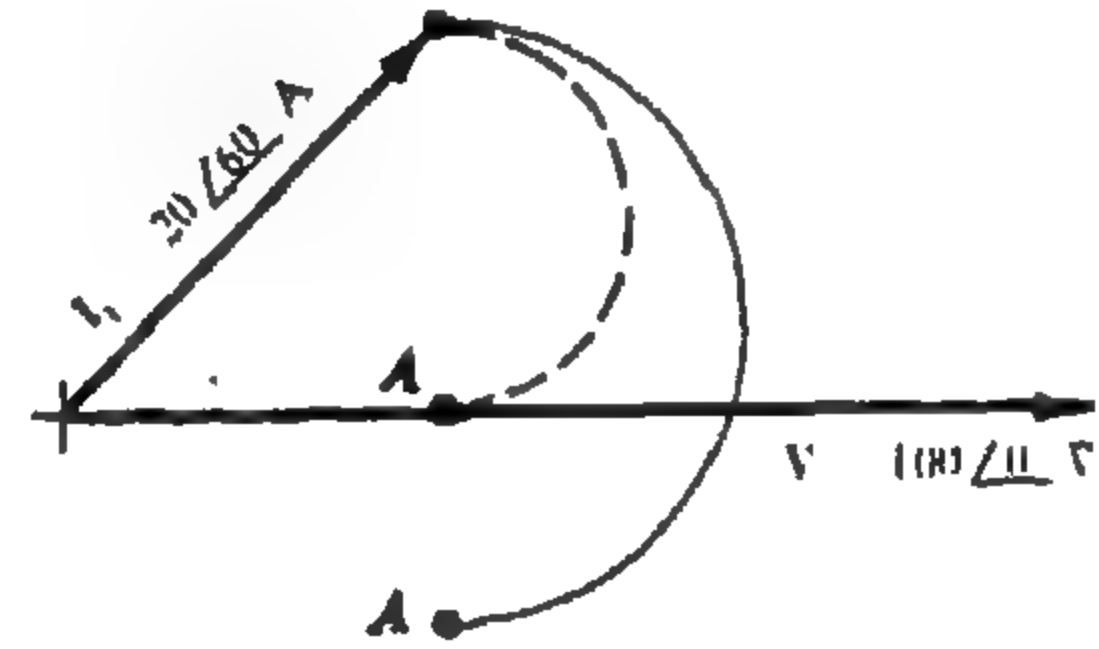
شكل ٨-٤٩

٨-٥٣ يوضح الشكل ٨-٥٠ المحل الهندسي لتيار دائرة توازي تتكون من فرعين . ما هو التغير اللازم في الفرع RL الذي يجعل النقطة A تقع على الجهد المطاوع ؟

الجواب : وضع $X_L = 5.78 \Omega$



شكل ٨-٥١



شكل ٨-٥٠

٨-٥٤ إذا كان الشكل ٨-٥١ يوضح المحل الهندسي لتيار دائرة توازي تتكون من ثلاثة أفرع فحين جميع ثوابت الدائرة علما بأن $\omega = 5000 \text{ rad/s}$.

الجواب : الفرع الأول : $R = 8.05 \Omega , L = 0.423 \text{ mH}$.

الفرع الثاني : $R = 4.16 \Omega , C = 27.7 \mu\text{F}$.

الفرع الثالث : R متغيرة و $L = 2.74 \text{ mH}$.

الفصل التاسع

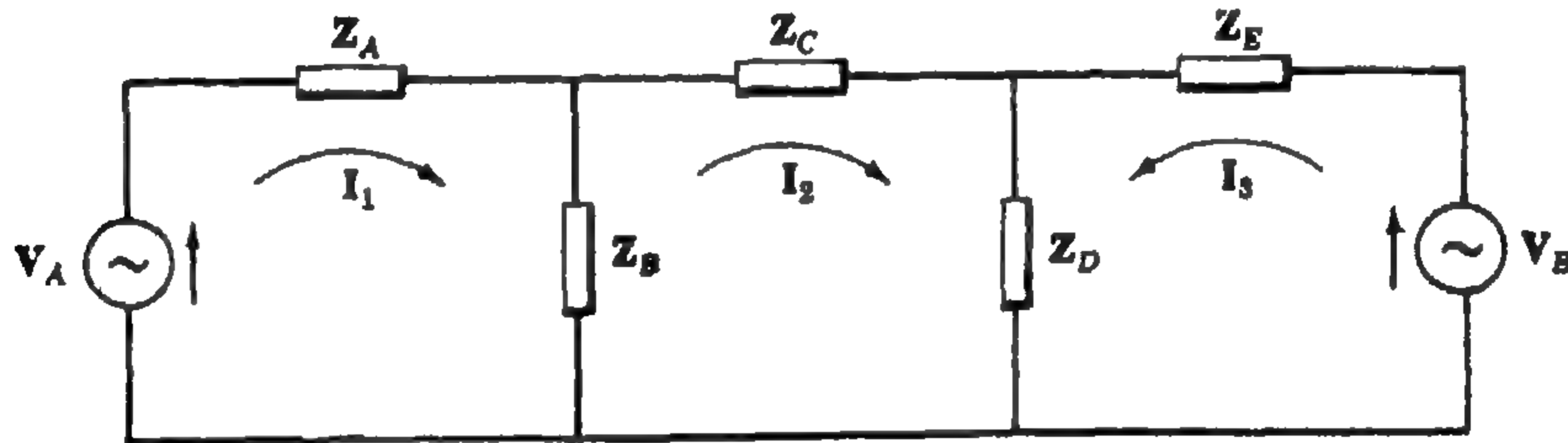
تحليل الشبكات الكهربائية بطريقة تيار الشبكة

مقدمة :

إن وجود مصادر الجهد في الدوائر الكهربائية أو الشبكات ينتج عنه مرور تيار في كل فرع وفروق جهد عبر عناصر الدائرة .
وحل الشبكة الكهربائية عبارة عن إيجاد التيارات في الأفرع المختلفة أو الجهود عبر العناصر .

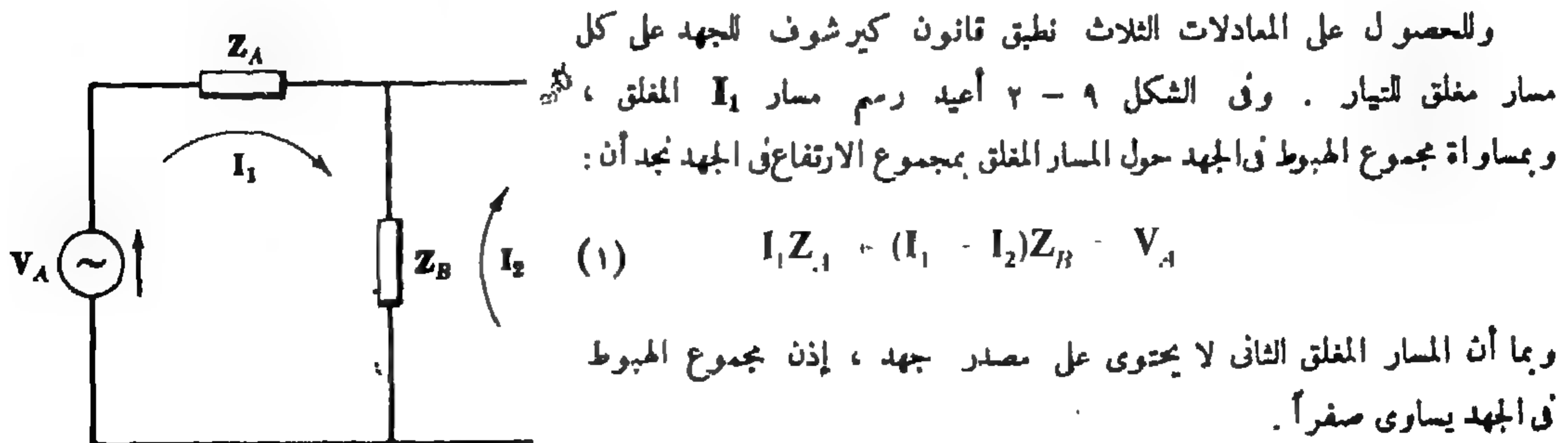
تيارات الشبكة :

لتطبيق « طريقة تيار الشبكة » نختار مساراً مغلقاً للتيار يسمى تيارات الشبكة أو تيارات المسار المغلق ، كما هو موضح في الشكل ٩ - ١ ثم نكتب ثلاث معادلات في المجهول الثلاثة I_1 و I_2 و I_3 ونحلها . والآن فإن تيار أى فرع يمكن الحصول عليه إما مباشرة كواحد من تيارات الشبكة أو بالتجميع فيما بينهم .



شكل ٩ - ١ تيارات الشبكة أو المسار المغلق في الشبكة الكهربائية

ولما كان التيار في Z_A هو I_1 فإن التيار في Z_B هو $I_1 - I_2$. وذلك بفرض أن اتجاه التيار الموجب هو لأسفل خلال المعاوقة . وعلى ذلك فإن تيار أى فرع في الشبكة يمكن الحصول عليه بطريقة ماثلة . والجهد عبر أى عنصر من عناصر الدائرة هو حاصل ضرب التيار المتأور المار في العنصر في المعاوقة المركبة .



وللحصول على المعادلات الثلاث نطبق قانون كيرشوف للجهد على كل مسار مغلق للتيار . وفي الشكل ٩ - ٢ أعيد رسم مسار I_1 المغلق ، وبمساواة مجموع الهبوط في الجهد حول المسار المغلق بمجموع الارتفاع في الجهد نجد أن :

$$(1) \quad I_1 Z_A + (I_1 - I_2) Z_B = V_A$$

وبما أن المسار المغلق الثاني لا يحتوي على مصدر جهد ، إذن مجموع الهبوط في الجهد يساوي صفراً .

$$(2) \quad I_2 Z_C + (I_2 + I_3) Z_D + (I_2 - I_1) Z_B = 0$$

شكل ٩ - ٢

وبتطبيق قانون كيرشوف على المسار المغلق الثالث نجد أن :

$$(٣) \quad I_3 Z_E + (I_3 + I_2) Z_D = V_B$$

وبإعادة الترتيب نحصل على :

$$(١) \quad (Z_A + Z_B) I_1 - Z_B I_2 = V_A$$

$$(٢) \quad -Z_B I_1 + (Z_B + Z_C + Z_D) I_2 + Z_D I_3 = 0$$

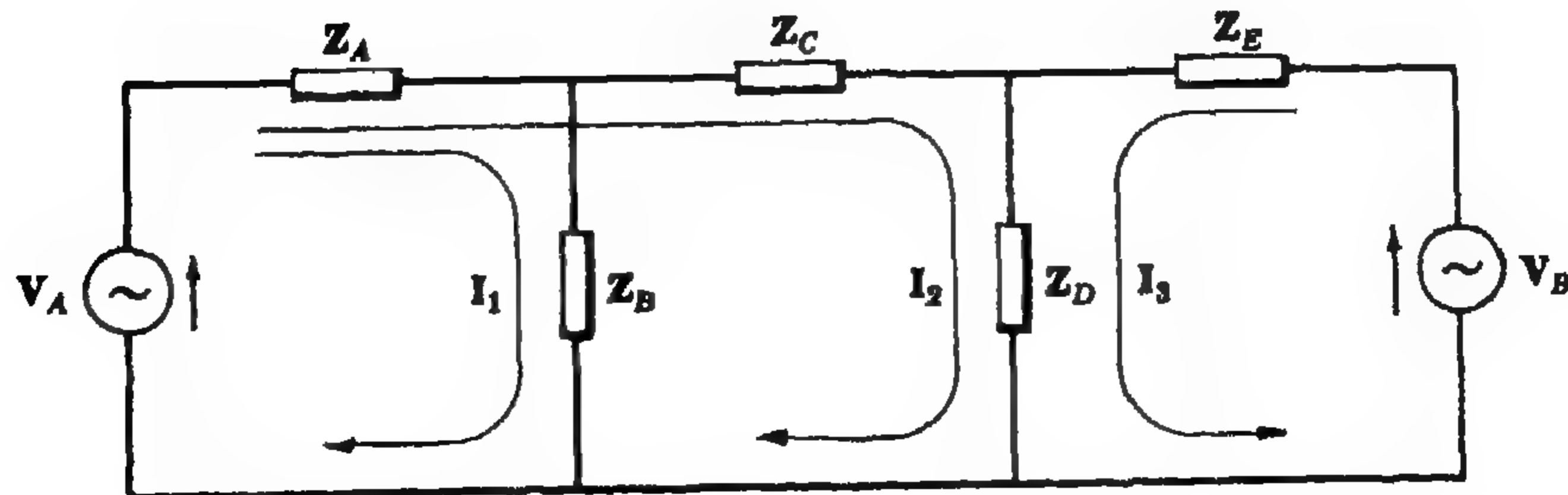
$$(٣) \quad Z_D I_2 + (Z_D + Z_E) I_3 = V_B$$

ويمكننا الحصول على المعادلات السابقة مباشرة ، فإذا اعتبرنا المسار المغلق الموضح في الشكل ٩ - ٢ وأخذنا اتجاه التيار I_1 في اتجاه عقارب الساعة فإن جميع الهبوط في الجهد في هذا المسار والنتيجة من I_1 تكون موجبة . ويمر أيضاً تيار الشبكة I_2 في Z_B ولكن في اتجاه مخالف لاتجاه I_1 . ولذلك فإن الهبوط في الجهد على Z_B والنتيجة من I_2 يكون $-Z_B I_2$. ونلاحظ أن الجهد V_A يكون موجباً لأنه في نفس اتجاه I_1 . والآن إذا طبقنا قانون كيرشوف مع كل هذه الاعتبارات على المسار المغلق نحصل على المعادلة (١) . ويمكن الحصول على المعادلتين (٢) و (٣) بطريقة مماثلة .

لقد استمرنا هنا تعبيري « الارتفاع في الجهد » و « الهبوط في الجهد » من دوائر التيار المستمر حيث معناهما هناك أكثر وضوحاً عنه في الدوائر الجيبية التي فيها التيار والجهد الحظيان لها فترات موجبة وسالبة . وفي الحالة الجيبية المستقرة ، فإن تطبيق قانون كيرشوف على مسار مغلق يعنى مساواة طورية يتساوى فيها مجموع الجهود المطاوعة عبر الماوقات بمجموع الجهود المطاوعة للمصادر المؤثرة على نفس المسار المغلق .

اختيار تيارات الشبكة :

في حالة تطبيق طريقة تيارات الشبكة ، يمكن تبسيط حل المسألة المعطاة عن طريق الاختيار المناسب للمسار المغلق في الشبكة الكهربائية . فإذا أردنا تعيين التيار المار في الفرع الذي يحتوي على Z_B فقط في الشكل ٩ - ١ ، فإنه من الأسهل اختيار مسار مغلق واحد فقط يمر بـ Z_B ، حيث أننا نريد الحصول على تيار الشبكة I_1 فقط . ويوضح الشكل ٩ - ٣ المسارات الجديدة المختارة .



شكل ٩ - ٣

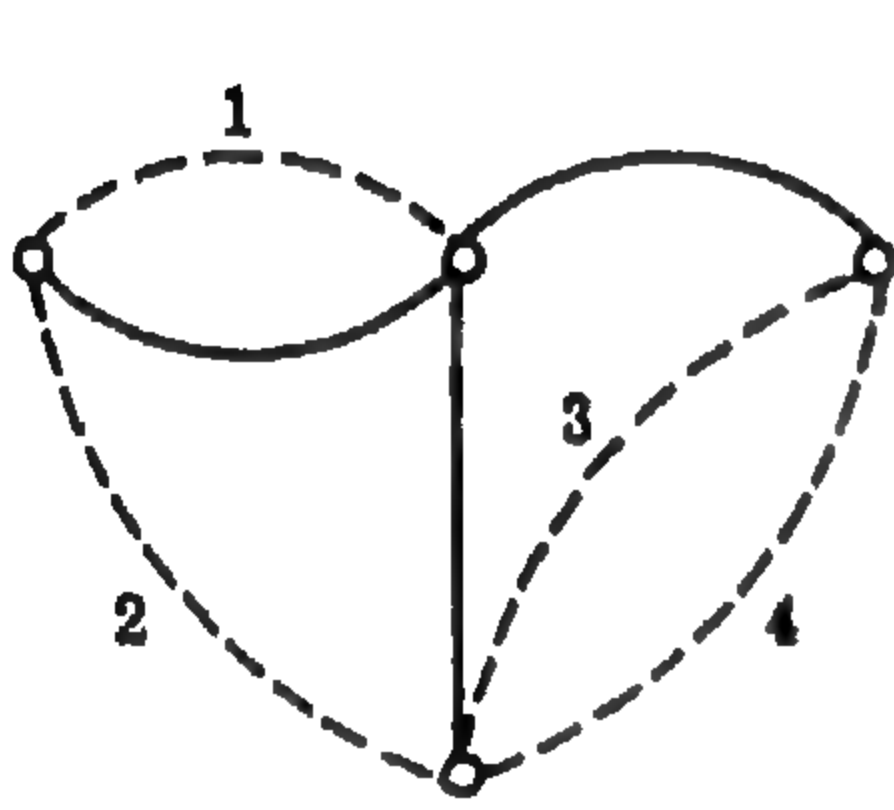
ومعادلات تيار الشبكة المقابلة لهذا الاختيار هي :

$$\begin{aligned}(Z_A + Z_B)I_1 + Z_A I_2 &= V_A \\ Z_A I_1 + (Z_A + Z_C + Z_D)I_2 + Z_D I_3 &= V_A \\ Z_D I_2 + (Z_D + Z_E)I_3 &= V_B\end{aligned}$$

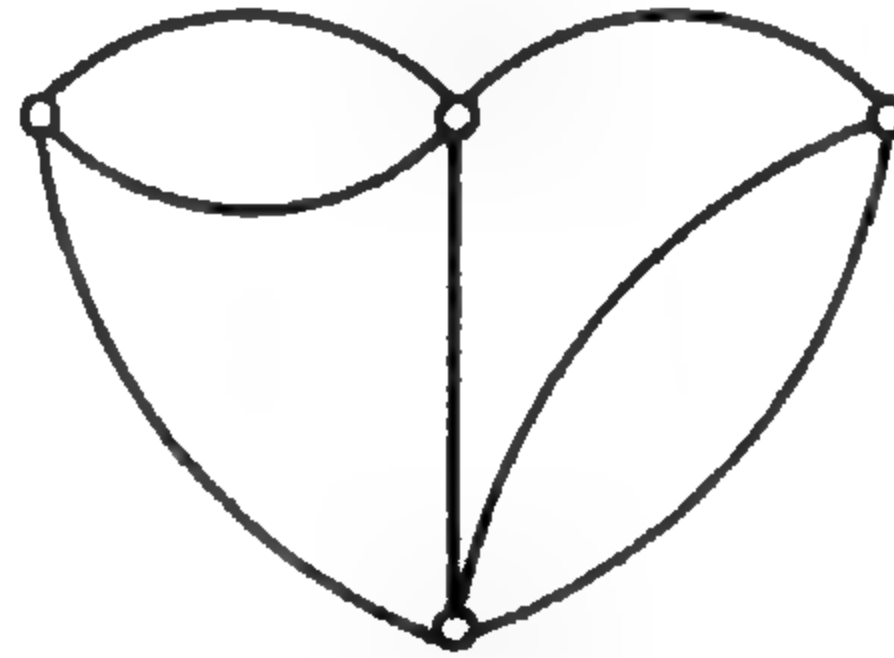
وعموماً فإنه في أى اختيار لتيار الشبكة الكهربائية لابد أن يكون لكل عنصر من عناصر الدائرة تيار واحد فقط على الأقل ، وألا نفترض وجود فرعين لها نفس التيار أو نفس مجموعة تيارات . ونورد في الفقرة التالية قواعد اختيار عدد تيارات الشبكة اللازمة لحل الشبكة الكهربائية ، علماً بأن مجموعة التيارات الصحيحة هي ليست أقل عدد من تيارات الشبكة .

إيجاد العدد اللازم من تيارات الشبكة :

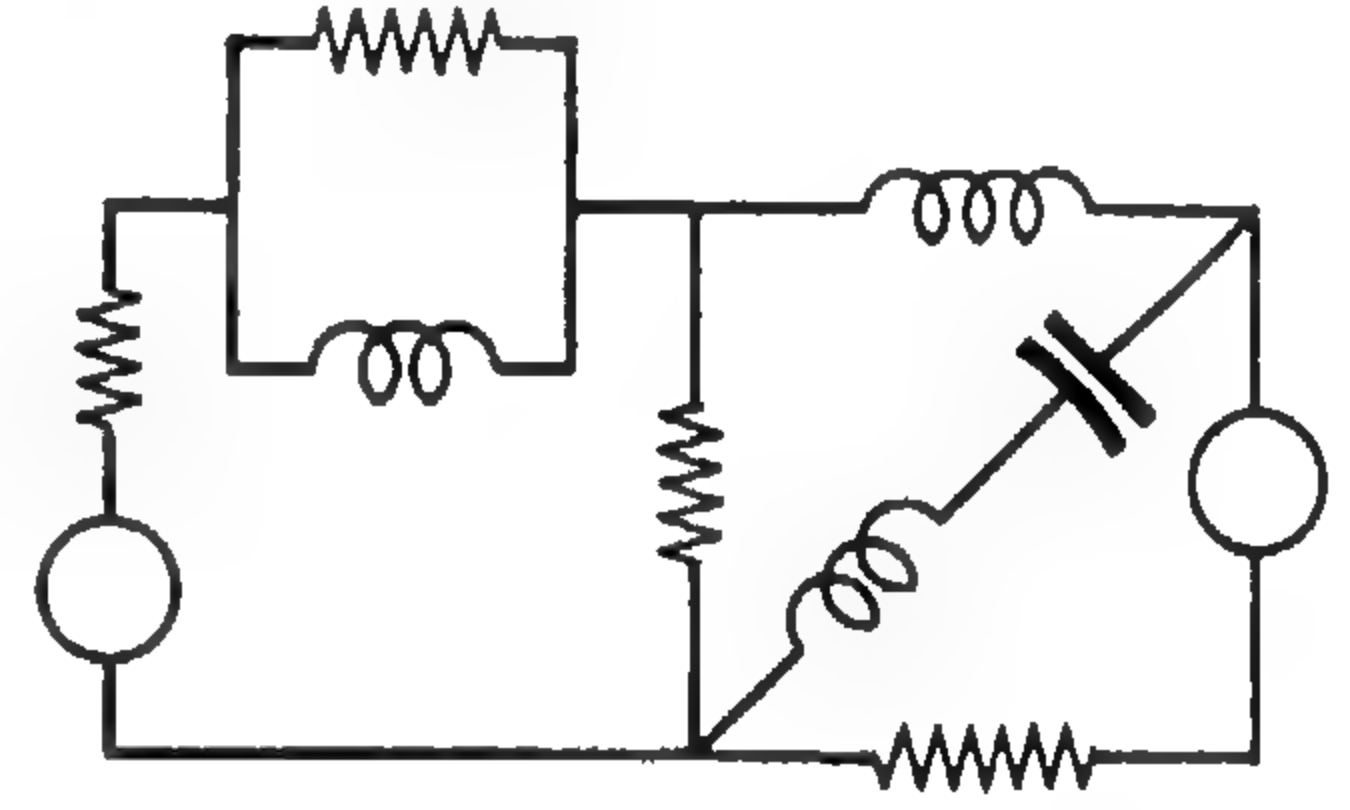
من السهل تحديد العدد اللازم من تيارات الشبكة لحل شبكة كهربائية بسيطة . أما في حالة وجود عديد من الشبكات فإن يلزمنا طريقة لتحديد عدد المعادلات اللازمة .



(ج)



(ب)



(أ)

شكل ٩ - ٤ : شبكة كهربائية . بيانها وهيكلها

يوضح الشكل ٩ - ٤ (ب) بيان الشبكة الكهربائية وفيه مثلت نقاط الاتصال بدوائر صغيرة وأفرع الشبكة بخطوط . والشكل ٩ - ٤ (ج) يوضح لنا هيكل الشبكة الكهربائية والذي حصلنا عليه باعتبار الأفرع التي لا تمثل مسارات مغلقة فقط . وهيكل الشبكة الكهربائية ليس وحيداً . وتسمى الخطوط المتصلة في الشكل ٩ - ٤ (ج) بهيكل الأفرع أما الخطوط المتقطعة فتسمى أفرع اتصال ، وكل فرع اتصال ينتج عنه مسار مغلق . إن عدد تيارات الشبكة اللازمة في هذه الشبكة الكهربائية هو عدد أفرع الإتصال (أربعة) . نفس النتيجة يمكن الحصول عليها بقطع أفرع الشبكة الأصلية بحيث أن كل قطع يفتح لنا مساراً مغلقاً . وعندما لا يبقى عندنا مسارات مغلقة فإن عدد الأفرع المقطوعة يمثل عدد تيارات الشبكة اللازمة .

وهناك طريقة ثالثة تتكون من عدد الأفرع ونقط الاتصال في الشبكة الكهربائية ، ويعطى عدد تيارات الشبكة اللازمة بالعلاقة الآتية :

$$\text{عدد المعادلات} = \text{عدد الأفرع} - (\text{عدد نقاط الاتصال} - 1)$$

وفي الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ٤ (أ) لدينا سبعة أفرع وأربع نقاط اتصال ، وعلى ذلك فإن عدد تيارات

$$\text{الشبكة اللازمة هو } 7 - (4 - 1) = 4$$

معادلات الشبكة عن طريق الفحص :

الصورة العامة لمعادلات الشبكة الكهربائية التي بها ثلاث شبكات فرعية هي

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 \pm Z_{13}I_3 &= V_1 \\ \pm Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \pm Z_{23}I_3 &= V_2 \\ \pm Z_{31}I_1 \pm Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 &= V_3 \end{aligned}$$

تسمى Z_{11} المعاوقة الذاتية للمسار المغلق الأول وتعطى بمجموع جميع المعاوقات التي يمر فيها التيار I_1 . Z_{22} و Z_{33} هما المعاوقتان الذاتيتان للمسارين المغلقين الثاني والثالث . ويعطيان بمجموع المعاوقات في المسار المغلق لكل منهما .

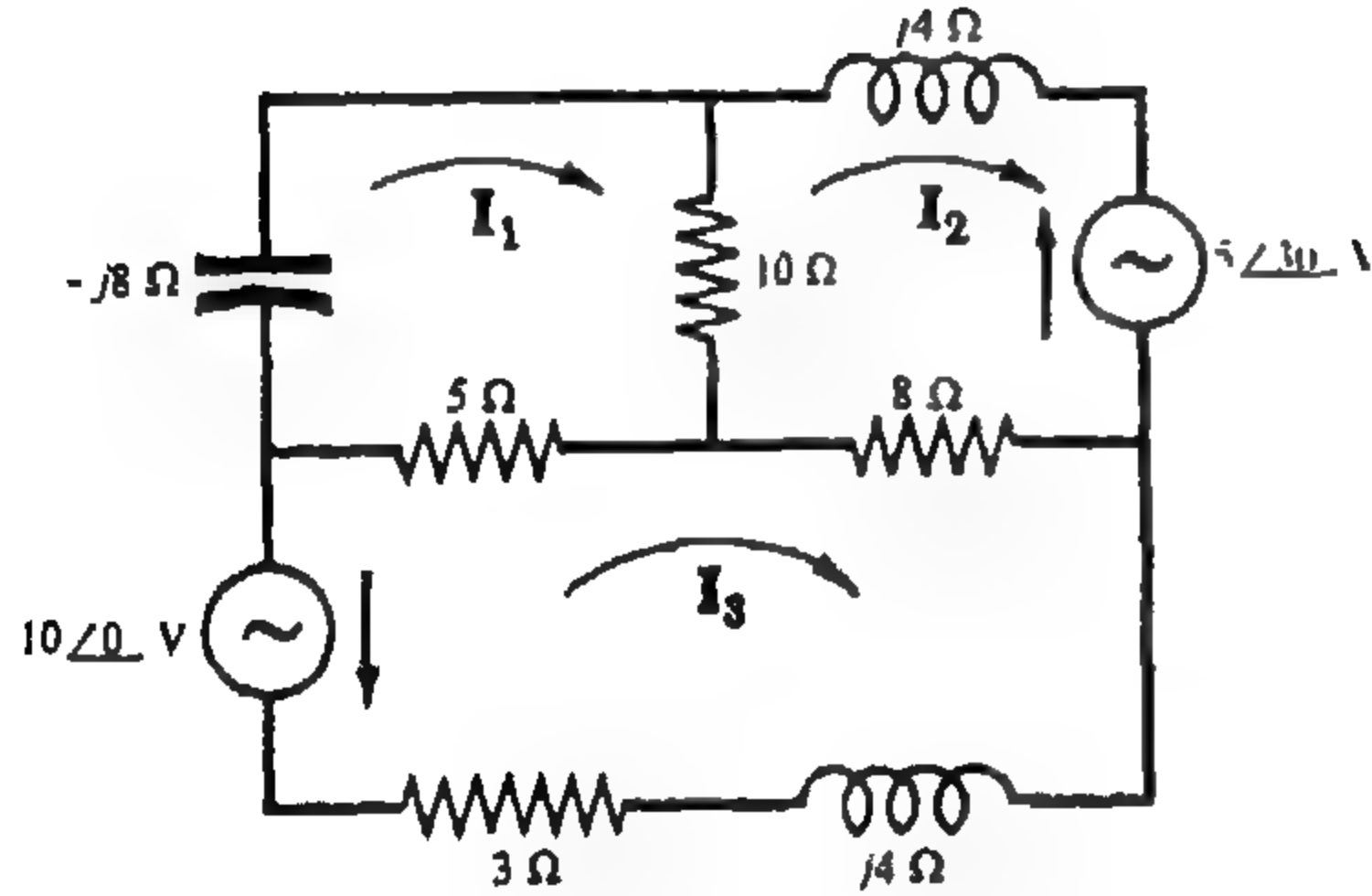
Z_{12} هي مجموع كل المعاوقات المشتركة بين تيارى الشبكة I_1 و I_2 . من هذا ينتج أن $Z_{12} = Z_{21}$. والمعاوقات Z_{13} و Z_{31} و Z_{23} و Z_{32} هي مجموع المعاوقات المشتركة بين التيارات المارة في المسارات المغلقة الخاصة بها . وتستخدم الإشارة الموجبة إذا كان كل من التيارات التي تمر في المعاوقة المشتركة في نفس الاتجاه ، وتستخدم الإشارة السالبة في عكس ذلك .

تمثل V_1 مجموع الجهود التي تعمل في المسار الأول . وتستخدم الإشارة الموجبة إذا كان المصدر يعمل في اتجاه تيار الشبكة والإشارة السالبة إذا كان يعمل في عكس اتجاه تيار الشبكة . V_2 و V_3 هما مجموع المصادر التي تعمل في المسار المغلق لكل منهما .

مثال ١ :

اكتب معادلات تيارات الشبكة الكهربائية الموضحة في

الشكل ٩ - ٥ .



شكل ٩ - ٥

إن تيارات الشبكة موضحة في رسم الدائرة ، وبما أنه لا يوجد مصدر للجهود في المسار المغلق الأول فإن مجموع الجهود في الجهد يساوي صفراً .

$$I_1(-j8) + (I_1 - I_2)10 + (I_1 - I_3)5 = 0$$

وبما أن مصدر الجهد $5\angle 30^\circ$ والذي يعمل في المسار المغلق الثاني اتجهه في عكس اتجاه التيار إذن فأشارته سالبة .

$$I_2(j4) + (I_2 - I_3)8 + (I_2 - I_1)10 = -(5\angle 30^\circ)$$

وبتطبيق قانون كيرشوف للجهود على المسار الثالث نحصل على

$$I_3(3 + j4) - (I_3 - I_1)5 + (I_3 - I_2)8 = -(10\angle 0^\circ)$$

وبإعادة ترتيب الحدود في المعادلات الثلاث نحصل على

$$(15 - j8)I_1 - 10I_2 - 5I_3 = 0$$

$$-10I_1 + (18 + j4)I_2 - 8I_3 = -(5\angle 30^\circ)$$

$$-5I_1 - 8I_2 + (16 + j4)I_3 = -(10\angle 0^\circ)$$

وبمقارنة مجموعة المعادلات هذه بالصورة العامة للمعادلات الثلاث الخاصة بالشبكة الكهربائية ذات ثلاث شبكات فرعية ، نجد أن المعاوقة الذاتية للمسار الأول هي $Z_{11} = (5 - 10 - j8) = 15 - j8 \Omega$ والمعاوقة المشتركة بين المسارين المغلقين الأول والثاني هي $Z_{12} = 10 \Omega$ وعلى ذلك فإن I_2 في عكس اتجاه التيار I_1 ، أي أن Z_{12} لها إشارة سالبة . وبالمثل نجد أن المعاوقة المشتركة بين المسارين المغلقين الأول والثالث هي $Z_{13} = -5 \Omega$. ولاحظ أن $Z_{12} = Z_{21}$ ، $Z_{13} = Z_{31}$ ، $Z_{23} = Z_{32}$. ولكنه يعمل في عكس اتجاه تيار الشبكة وعلى ذلك فإشارته سالبة . ويمكن اختبار كل حد في مجموعة المعادلات السابقة بالصيغة العامة .

مصفوفات :

المصفوفة هي ترتيب تعامدى لأعداد أو دوال موضوعة بين قوسين ونخضع لقواعد خاصة في العمليات في المصفوفة ،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى الأعداد أو الدوال a_{ij} بعناصر المصفوفة ، فالعنصر a_{ij} يقع في الصف i والعمود j ورتبة هذه المصفوفة ذات m صف و n عموداً " $m \times n$ " وتسمى « المصفوفة A » أو « $m \times n$ مصفوفة A » أو « $m \times n$ مصفوفة $[a_{ij}]$.

يقال عن مصفوفتين أنهما متساويتان إذا - وإذا فقط - كانت أحدهما مطابقة تماماً للثانية .

جمع المصفوفات :

يمكن جمع أو طرح مصفوفتين إذا كانتا من نفس الرتبة وإذا اختلفتا مصفوفتين في الرتبة فإنه لا يمكن جمعها أو طرحها .

إن مجموع (فرق) مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ مثل $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ هو مصفوفة C من الرتبة $m \times n$ بحيث كل عنصر في C هو مجموع (فرق) العنصرين المتقابلين في A و B أي $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$

مثال ٢ :

$$\text{إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{فإن :}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} , \quad A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات :

إن حاصل الضرب AB (بنفس الترتيب) المصفوفتين : $A = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}]$ مصفوفة $1 \times m$ ،

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة } m \times 1$$

هو 1×1 مصفوفة حيث

$$C = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k1} \right]$$

لاحظ أن كل عنصر في الصف قد ضرب في العنصر المقابل له في العمود ثم جمع حاصل الضرب .

$$[1 \ 3 \ 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = [1(2) + 3(4) + 5(-2)] = [4] \quad \text{مثال ٣ :}$$

إن حاصل الضرب AB (بنفس الترتيب) $A = [a_{ij}]$ مصفوفة $m \times s$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة $s \times n$ هو $C = [c_{ij}]$ مصفوفة $m \times n$ حيث

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٤ :}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + 1I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٥ :}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + 2(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٦ :}$$

ويقال إن مصفوفة A مناسبة للضرب في مصفوفة B ، أى أن حاصل الضرب AB يمكن تعريفه ، إذا كان عدد الأعمدة في A يساوى عدد الصفوف في B . وعلى ذلك إذا كانت A هي المصفوفة 3×2 و B هي المصفوفة 2×5 فإن حاصل الضرب AB يكون معرّفًا أما حاصل الضرب BA فهو غير معرف . وإذا كانت D هي المصفوفة 3×3 و E هي المصفوفة 3×3 فإن كلا من حاصل الضرب DE و ED يكون معرّفًا .

التعاكس :

يقال إن التعاكس موجود في ترتيب معين لأعداد موجبة صحيحة إذا كان العدد الصحيح الأكبر سابقاً للعدد الصحيح الأصغر في هذا الترتيب .

مثلاً نجد في 132 أن 3 تسبق 2 وعلى ذلك فإنه يوجد تعاكس واحد . وفي 4213 نجد أن 4 تسبق كلا من 3 ، 1 ، 2 ، وأن 2 تسبق 1 وعلى ذلك فإنه توجد أربعة تعاكسات . وفي 3421 نجد أن 3 تسبق كلا من 1 ، 2 ، كما أن 4 تسبق كلا من 1 ، 2 ، كما أن 2 تسبق 1 . على ذلك فإنه توجد خمسة تعاكسات .

محددة المصفوفة المربعة :

خذ n عنصراً من المصفوفة المربعة $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ثم شكل حاصل الضرب $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$ بحيث ينتمي عنصر وعنصر واحد فقط لكل صف وبحيث ينتمي عنصر وعنصر واحد فقط لكل عمود . لاحظ أن متتابعة الدليل الأول هي من الرتبة n و 2 و 1 وأن متتابعة الدليل الثاني j_1 و j_2 و j_3 هي تبديله من 1 و 2 و 3 و \dots و n تبديلات للأعداد الصحيحة n و 2 و 1 . الإشارة الموجبة أو السالبة لحاصل الضرب تتبع عدد التعاكسات في الدليل الثاني إذا كان زوجياً أو فردياً .

إن محدة المصفوفة المربعة A من رتبة n وتكتب $|A|$ هي مجموعة كل $n!$.

تسمى محدة المصفوفة المربعة من رتبة n بمحددة من الرتبة n .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{مثال ٧ :}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad \text{مثال ٨ :}$$

المحددات والعوامل المشتركة :

إن محدة العنصر a_{ij} لمحددة من الرتبة n هو محدة من الرتبة $(n-1)$ والتي نحصل عليها بحذف الصف والعمود المحتويين للعنصر المعطى . ويرمز لمحددة العنصر a_{ij} بالرمز $|M_{ij}|$.

وتسمى المحددة $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ بالعامل المشترك لـ a_{ij} ويرمز لها بالرمز Δ_{ij} .

مثال ٩ :

$$[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{للمحددة من الرتبة الثالثة} \quad \text{بحيث أن .}$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

قيمة المحددة :

إن قيمة المحددة $|A|$ من الرتبة n هي مجموع الـ n حاصل ضرب و الذي يحصل عليه بضرب كل عنصر في أي صف (عمود) نختاره في $|A|$ بعامله المشترك أي أن

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} \\ &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

هو التعبير عن $|A|$ من خلال العمود الثاني .

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\{4(-6) - 7(1)\} - 5\{1(-6) - 7(2)\} + 0 = 7 \end{aligned} \quad \text{مثال ١٠ :}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5\{1(3) - 2(4)\} = 25 \quad \text{مثال ١١ :}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 5\{4(-3) - (-2)(8)\} = 20 \quad \text{مثال ١٢ :}$$

خواص المحددات :

١. - إذا تطابق صفان (عمودان) في محدة فإن قيمة المحددة تساوى صفراً . فمثلاً :

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

٢ - إذا ضرب كل عنصر في صف k (عمود) في المحددة بأي عدد k فإن المحددة تكون مضروبة في k . فمثلا

$$2 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

٣ - إذا تبادلا أى صفين (عمودين) في محددة فإن إشارة المحددة تتغير. فمثلا

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ -6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

٤ - إذا عوضنا عن كل عنصر من عناصر صف (عمود) في محددة بمجموع عددين أو أكبر ، فإنه يمكن كتابة المحددة على صورة مجموع محددين أو أكثر. فمثلا .

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9+2 & 5 \\ 2 & 4+0 & -5 \\ 1 & 8-2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

٥ - إذا أضفنا إلى عناصر أى صف (عمود) في محددة k مرة من العنصر المقابل لأى صف (عمود) آخر فإن قيمة المحددة لا تتغير .

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9+3(-3) & -3 \\ 4 & 6+3(-2) & -2 \\ -3 & 1+3(5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 16 & 5 \end{vmatrix}$$

هل المعادلات الخطية باستخدام المحددات . قاعدة كرامر :

يمكن كتابة مجموعة المعادلات الثلاث الخطية في المجاهيل الثلاثة x_1 و x_2 و x_3

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3$$

على صورة مصفوفة مثل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

تكون القيمة العددية لمعامل المحددة Δ_a مضروبة و x_1 إذا ضربنا كل عنصر من عناصر العمود الأول في x_1 (خاصية ٢) .

$$x_1 \Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

والآن إذا أضفنا إلى كل عنصر من عناصر العمود الأول في المحددة الأخيرة x_2 مرة من العنصر المقابل في العمود الثاني و x_3 مرة من العنصر المقابل في العمود الثالث . (خاصية ٣) فإننا نحصل على :

$$x_1 \Delta_a = \begin{vmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a} \quad \text{أو}$$

طالما أن $\Delta_a \neq 0$ وبالمثل :

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

وتسمى هذه الطريقة في الحل بقاعدة كرامر . ويمكن تطبيقها على أي مجموعة تحتوي على n من المعادلات الخطية في n مجهول طالما أن عوامل المحددة لا تساوي صفراً .

طريقة المصفوفة في تحليل التوائر :

إن معادلات تيار الشبكة الثلاث :

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 \pm Z_{13}I_3 &= V_1 \\ \pm Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \pm Z_{23}I_3 &= V_2 \\ \pm Z_{31}I_1 \pm Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 &= V_3 \end{aligned}$$

يمكن كتابتها الآن على صيغة مصفوفة :

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$[Z][I] = [V]$$

أو

وهي الصيغة المصفوفية لقانون أوم حيث $[Z]$ هي مصفوفة المعاوقة ، $[I]$ هي مصفوفة التيار ، $[V]$ هي مصفوفة الجهد .

ويمكن الحصول على تيارات الشبكة I_1 و I_2 و I_3 كنسبة بين محددتين .

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ V_2 & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ V_3 & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & V_1 & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & V_2 & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & V_3 & Z_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \quad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & V_1 \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & V_2 \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & V_3 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

وعند فك محدد البسط بواسطة العمود المحتوى على الجهود فإننا نحصل على معادلات تيارات الشبكة التالية .

$$(1) \quad I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_z} \right)$$

$$(2) \quad I_2 = V_1 \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_z} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_z} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_z} \right)$$

$$(3) \quad I_3 = V_1 \left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_z} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_z} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_z} \right)$$

إن الحدود التي في الطرف الأيمن للمعادلات (1) و (2) و (3) هي المركبات الطورية الناتجة عن مصادر الجهد المختلفة . وعلى ذلك فإن تيار الشبكة I_1 في المعادلة (1) يتكون من ثلاثة أجزاء : $V_1 (\Delta_{11}/\Delta_z)$ نتيجة مصدر الجهد V_1 و $V_2 (\Delta_{21}/\Delta_z)$ نتيجة مصدر الجهد V_2 و $V_3 (\Delta_{31}/\Delta_z)$ نتيجة مصدر الجهد V_3 .

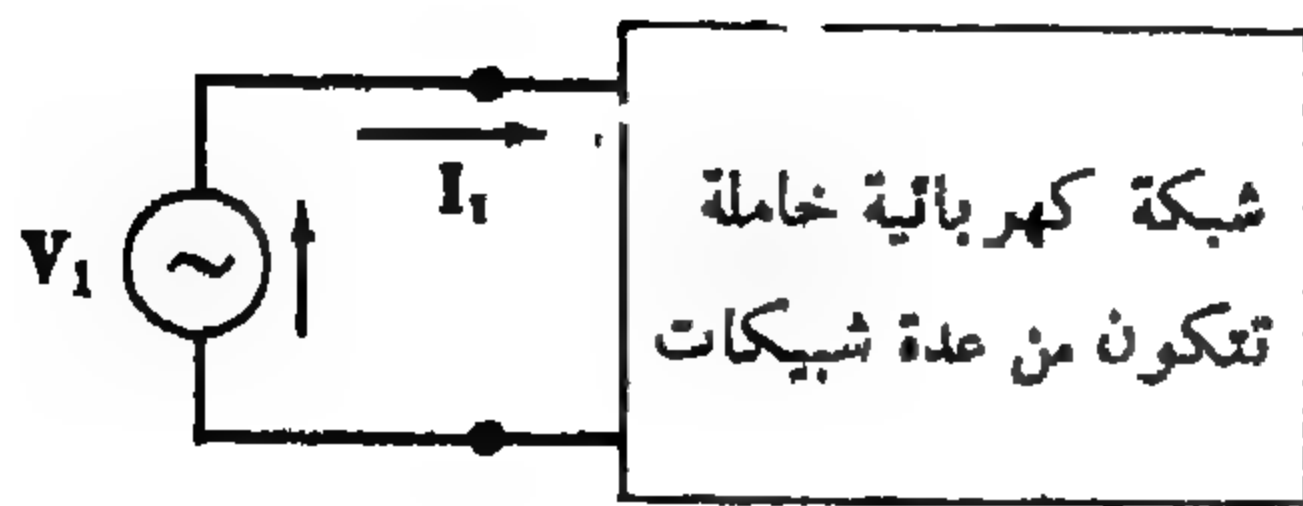
نقطة المعاوقة المحركة :

اعتبر الشبكة الحاملة أو الخالية من المصادر الموضحة في الشكل ٩ - ٦ والتي لها نقطتا اتصال خارجيتان ، فإذا أثر عليها مصدر جهد V_1 وكان تيار الشبكة هو I_1 ، وحيث أنه لا توجد مصادر أخرى في الشبكة الكهربائية ، فإن معادلة تيار الشبكة I_1 تكون

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} \right) + (0) \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} \right) + (0) \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_z} \right) + \dots = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} \right)$$

وتعرف المعاوقة الداخلة أو نقطة المعاوقة المحركة بأنها النسبة بين الجهد المؤثر V_1 والتيار الناتج I_1 . أى أن

$$Z_{input 1} = V_1 / I_1 = \Delta_z / \Delta_{11}$$

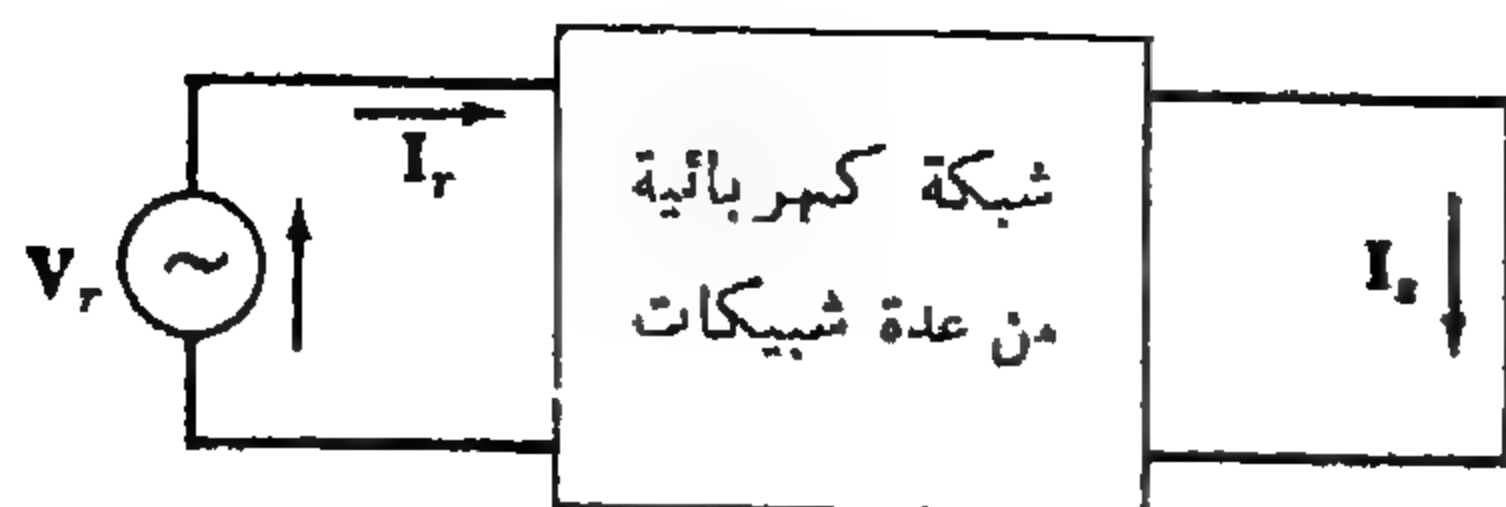


شكل ٩ - ٦

وتعرف المعاوقة الداخلة لشبكة كهربائية نشطة بأنها معاوقة الشبكة الكهربائية بين نهايتين محددين وذلك مع رفع جميع المصادر الداخلية ووضع معاوقاتها الداخلية بدلا منها . وعلى ذلك فإن النسبة Δ_z / Δ_{11} هي نقطة المعاوقة المحركة للمسار المفلق الأول بغض النظر عن الشبكة الكهربائية سواء كانت خاملة أو نشطة .

معاوقة الانتقال :

إن وجود مصدر محرك للجهد في أى شبكة فرعية ينتج عنه تيار في الشبكات الفرعية الأخرى للشبكة الكهربائية الكلية . وتعرف معاوقة الانتقال بأنها النسبة بين الجهد المحرك في شبكة فرعية والتيار الناتج في شبكة فرعية أخرى مع وضع جميع المصادر مساوية للصفر .



شكل ٩ - ٧

وباعتبار الشبكة الموضحة في الشكل ٩ - ٧ والتي فيها V_r هو الجهد المحرك في الشبكة r والتيار الناتج I_s في الشبكة s فإن

$$I_s = (0)\left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_z}\right) + \dots + V_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}\right) + \dots + (0)\left(\frac{\Delta_{ns}}{\Delta_z}\right) = V_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}\right)$$

$$Z_{transfer\ rs} = V_r/I_s = \Delta_z/\Delta_{rs}$$

والدليل المزدوج ، rs لمعاوقة الانتقال يعني اتجاه الفعل ، أى أن المصدر في الشبكة r والتيار الناتج في الشبكة s . وعلى ذلك فإن محدة المقام هي العامل المشترك للموضع ، sr ، Δ_{rs} ، وب نفس دليل معاوقة الانتقال .

مسائل محلولة

٩ - ١ إذا أعطيت الاختيار الموضح في الشكل ٩ - ٨ لتيارات الشبكة فاكتب معادلات تيارات الشبكة ثم ضعها في الصيغة المصفوفية .

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على كل من الشبكات الثلاث الفرعية :

$$I_1(2 - j2) + (I_1 - I_2)(j5) + (I_1 - I_3)5 = 10/0^\circ$$

$$I_2(10) + (I_2 - I_3)(2 - j2) + (I_2 - I_1)(j5) = -(5/30^\circ)$$

$$I_3(10) + (I_3 - I_1)(5) + (I_3 - I_2)(2 - j2) = -(10/90^\circ)$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على :

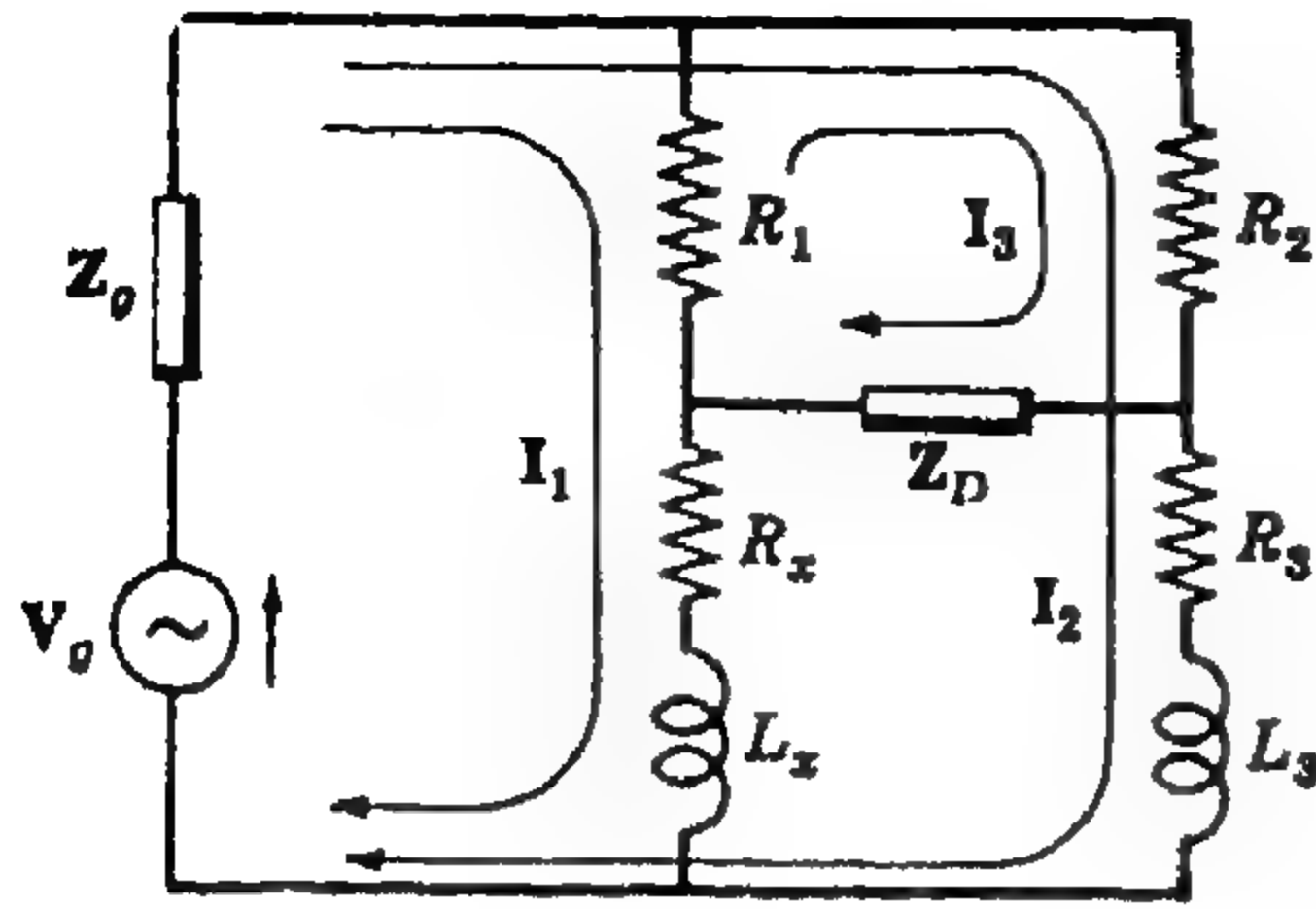
$$(7 + j3)I_1 - (j5)I_2 - (5)I_3 = 10/0^\circ$$

$$-(j5)I_1 + (12 + j3)I_2 - (2 - j2)I_3 = -(5/30^\circ)$$

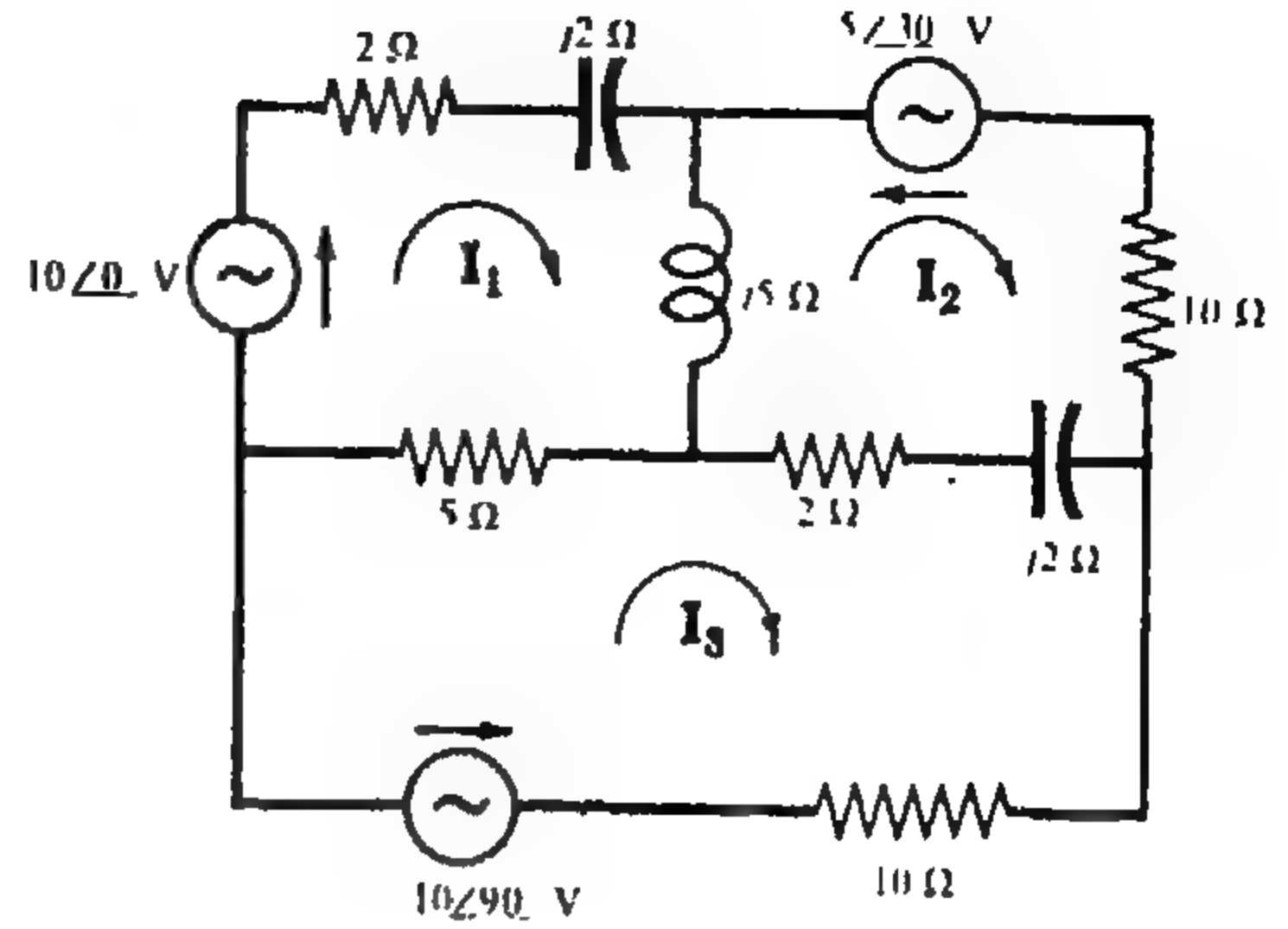
$$-(5)I_1 - (2 - j2)I_2 + (17 - j2)I_3 = -(10/90^\circ)$$

والذي يمكن التعبير عنهم بالصورة المصفوفية على الشكل :

$$\begin{bmatrix} 7 + j3 & -j5 & -5 \\ -j5 & 12 + j3 & -(2 - j2) \\ -5 & -(2 - j2) & 17 - j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/0^\circ \\ -(5/30^\circ) \\ -(10/90^\circ) \end{bmatrix}$$



شكل ٩ - ٩

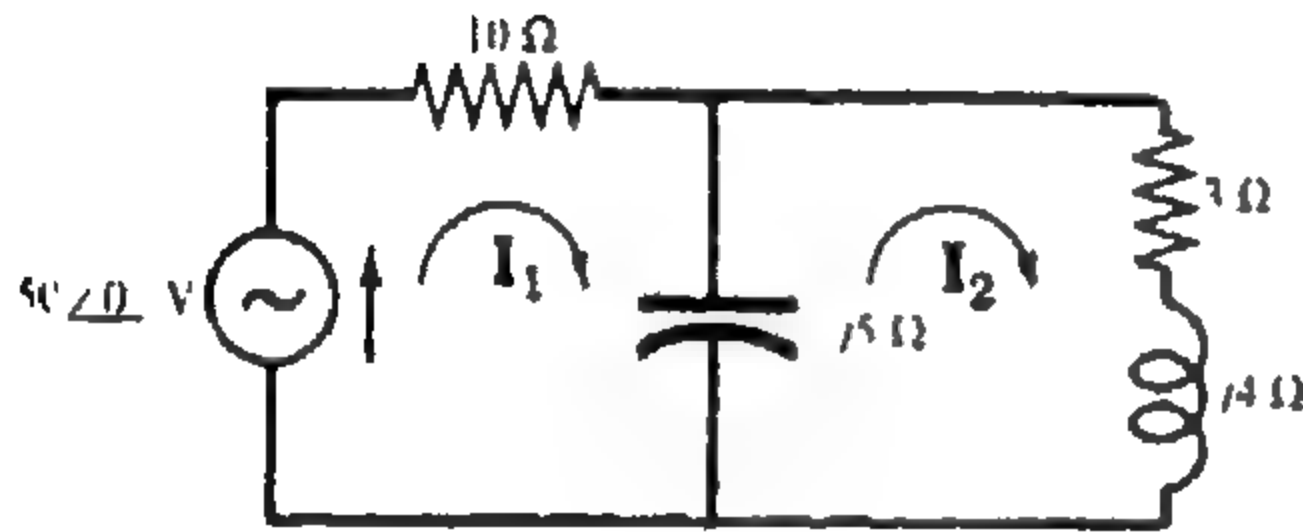


شكل ٩ - ٨

٩-٢ أكتب معادلات تيار الشبكة على الصيغة المصفوفية بالفحص وذلك للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩-٩ .

تحدد الحدود في مصفوفة المعاوقة بتعريفاتهم . Z_{11} المعاوقة الذاتية للمسار المغلق الأول وهي مجموع جميع ،
المعاوقات في المسار المغلق ، $(R_1 + R_x + j\omega L_x + Z_0)$. Z_{12} المعاوقة المشتركة لتيارى الشبكة الأول والثاني
و Z_{22} بإشارة موجبة وذلك لأن التيارين يمران في اتجاه واحد . إن مصفوفة التيار تتكون ببساطة من I_1 و I_2 و I_3
ومصفوفة الجهد تتكون من الجهود المحركة في المسارات المغلقة . وعلى ذلك فالمعادلة المصفوفية هي

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_x + j\omega L_x + Z_0) & Z_0 & -R_1 \\ Z_0 & (R_2 + R_3 + j\omega L_3 + Z_0) & R_2 \\ -R_1 & R_2 & (R_1 + R_2 + Z_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



شكل ٩ - ١٠

٩-٣ أوجد القدرة الداخلة لمصدر الجهد للدائرة الموضحة في الشكل ٩-١٠
ثم عين أيضاً قدرة مقاومات الدائرة .

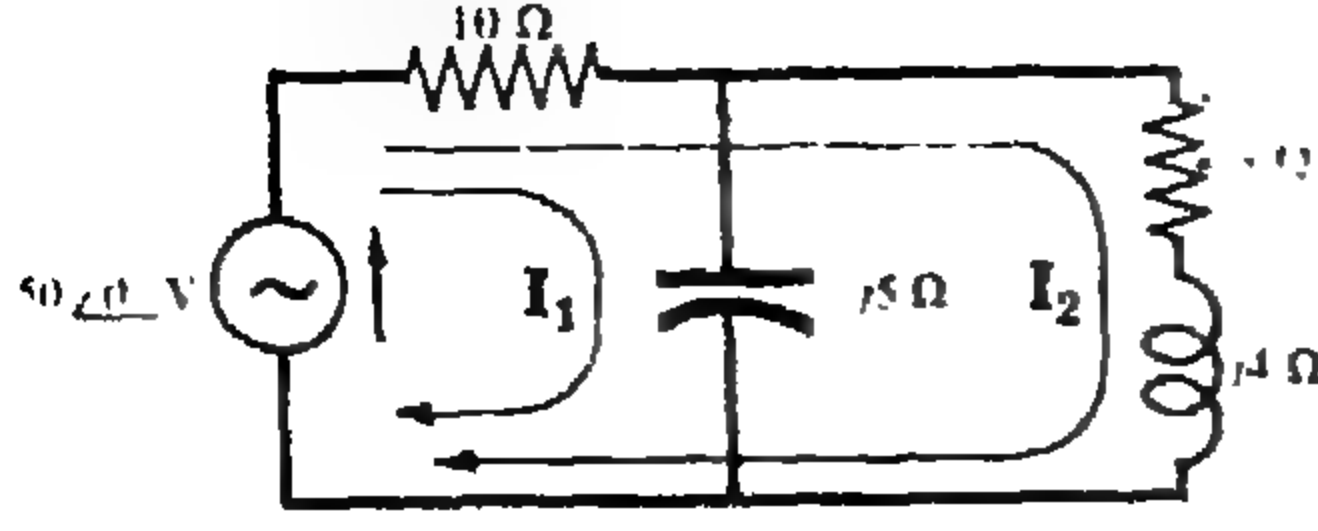
نختار تيارات الشبكة كما هو موضح في شكل الدائرة وعلى
ذلك فإن المصدر يحتوى على تيار واحد . إذن

$$\begin{bmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50/0^\circ & j5 \\ 0 & 3 - j1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j1 \end{vmatrix}} = \frac{150 - j50}{50 - j25} = 2.83/8.14^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 50/0^\circ \\ j5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{-j250}{50 - j25} = 4.47/-63.4^\circ \text{ A}$$

ومصدر القدرة $P = VI \cos \theta = 50(2.83) \cos (8.14) = 140 \text{ W}$ ، والقدرة في المقاومة 10Ω هي $P_{10} = (I_1)^2 10 = (2.83)^2 10 = 80 \text{ W}$ والقدرة في المقاومة 3Ω هي $P_3 = (I_2)^2 3 = 60 \text{ W}$ ، ومجموعهما هو 140 W وهو يساوى القدرة الداخلة للمصدر .



شكل ٩ - ١١

٤ إذا اختيرت تيارات الشبكة لنفس دائرة المسألة ٩ - ٣ بالطريقة الموضحة في الشكل ٩ - ١١ ، فأوجد القدرة الخارجة للمصدر .

إن معادلات تيارات الشبكة في الصيغة المصفوفية هي

$$\begin{bmatrix} 10 - j5 & 10 \\ 10 & 13 + j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/0^\circ \\ 50/0^\circ \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50/0^\circ & 10 \\ 50/0^\circ & 13 + j4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 10 \\ 10 & 13 + j4 \end{vmatrix}} = \frac{150 + j200}{50 - j25} = 4.47/79.7^\circ \text{ A}$$

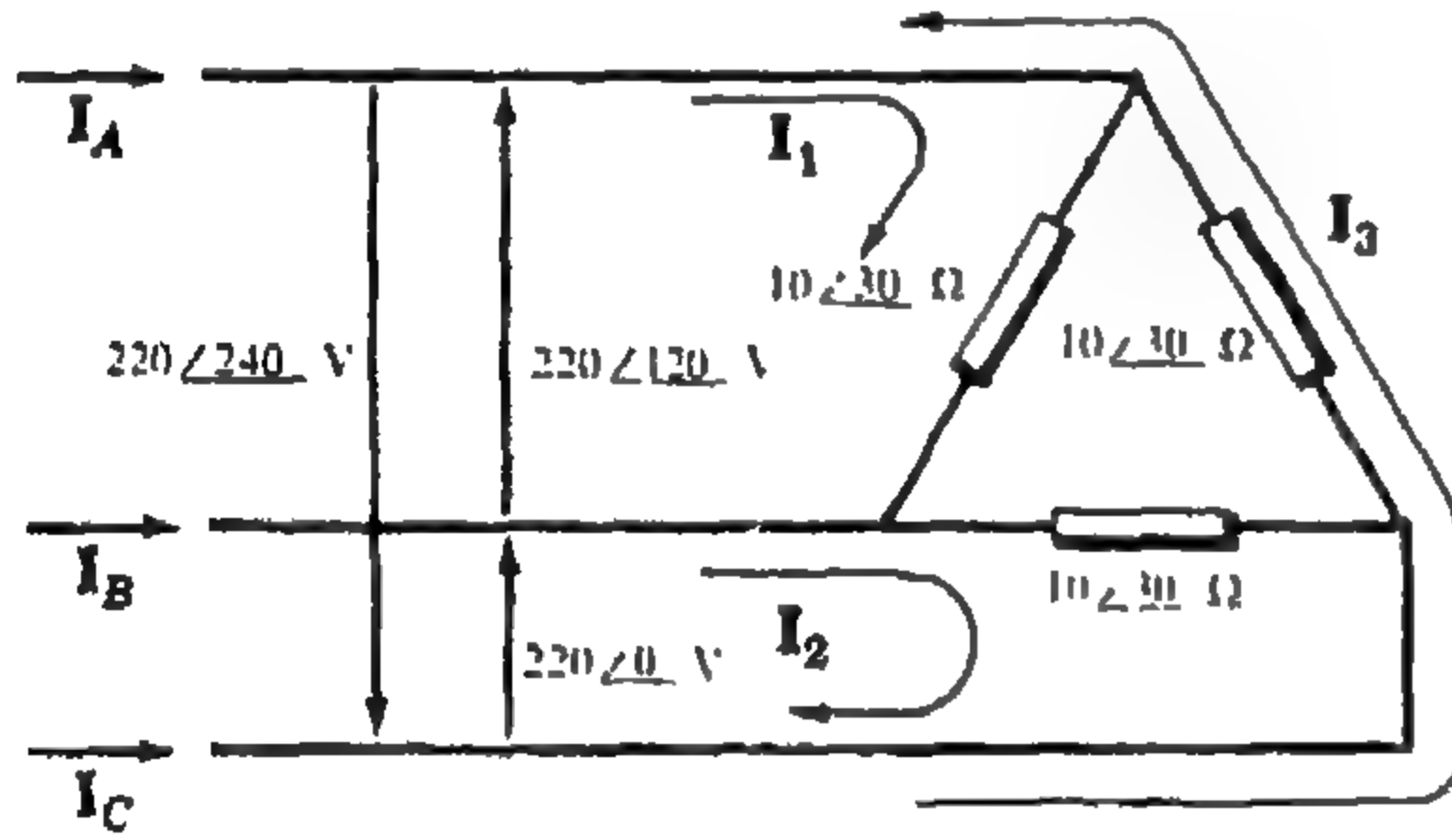
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 50/0^\circ \\ 10 & 50/0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{-j250}{50 - j25} = 4.47/-63.4^\circ \text{ A}$$

وبما أن الفرع الذي يحتوي على المصدر يمر به تياران إذن

$$I_1 + I_2 = \left(\frac{150}{50} + j\frac{200}{25} \right) + \left(\frac{-j250}{50} + \frac{250}{25} \right) = 2.83 \angle 8.14^\circ \text{ A}$$

$$P = I^2 \cos \theta = 50(2.83) \cos 8.14 = 140 \text{ W}$$

وقدرة المصدر هي



شكل ٩ - ١٢

٥ - ٩ إذا كان للدائرة الموضحة في الشكل ٩ - ١٢ جهود بين كل زوجين من الخطوط الثلاثة . فأوجد التيارات I_A و I_B و I_C .

وباختيار التيارات كما هو موضح بالرسم نجد أن التيارات مستقلة عن بعضها . ويتضح هذا عند كتابة المصفوفة بالصورة :

$$\begin{bmatrix} 10/30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 10/30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 10/30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220/120^\circ \\ 220/0^\circ \\ 220/240^\circ \end{bmatrix}$$

ومنها ينتج التيارات الثلاثة :

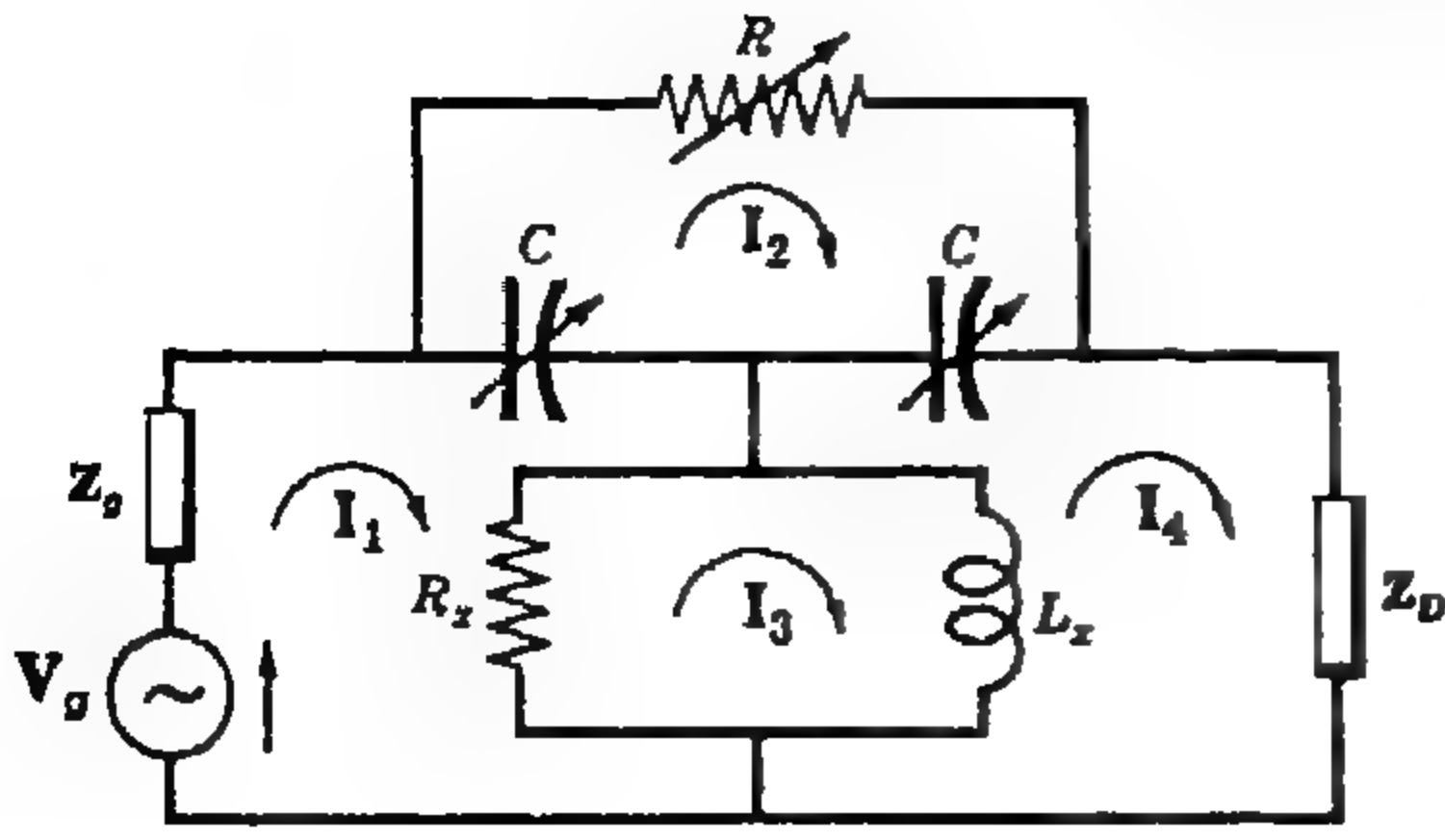
$$I_1 = \frac{220/120^\circ}{10/30^\circ} = 22/90^\circ \text{ A}, \quad I_2 = \frac{220/0^\circ}{10/30^\circ} = 22/-30^\circ \text{ A}, \quad I_3 = \frac{220/240^\circ}{10/30^\circ} = 22/210^\circ \text{ A}$$

$$I_A = I_1 - I_3 = (22/90^\circ - 22/210^\circ) = 38.1/60^\circ \text{ A}$$

إذن :

$$I_B = I_2 - I_1 = (22/-30^\circ - 22/90^\circ) = 38.1/-60^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_3 - I_2 = (22/210^\circ - 22/-30^\circ) = 38.1/180^\circ \text{ A}$$



شكل ٩ - ١٣

٩ - ٦ إذا اختيرت تيارات الشبكة للشبكة الكهربائية التي تحتوي على أربع شبكات فرعية كما هو موضح في الشكل ٩ - ١٣ ، وإذا اختيرت قيم R وسعة المكثفين المتساويين في السعة C farads بحيث كان التيار المار في Z_D يساوى صفراً . فعبّر عن المجهولين R_x و L_x بدلالة كل من R و C وذنبه المصدر ω rad/s .

إن معادلات التيار في الصيغة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} \left(R_x + \frac{1}{j\omega C} + Z_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & 0 \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_x) & -(j\omega L_x) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) & \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L_x + Z_D\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض عن I_4 ، التيار المار في Z_D ، في صيغة محددة ومساواتها بالصفر .

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} \left(R_x + \frac{1}{j\omega C} + Z_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & V_g \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_x) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_x} = 0$$

وبفك البسط بواسطة عناصر العمود الرابع نحصل على

$$-V_g \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_x) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) \end{vmatrix} = 0$$

وحيث أن هذه المحددة مساوية للصفر إذن :

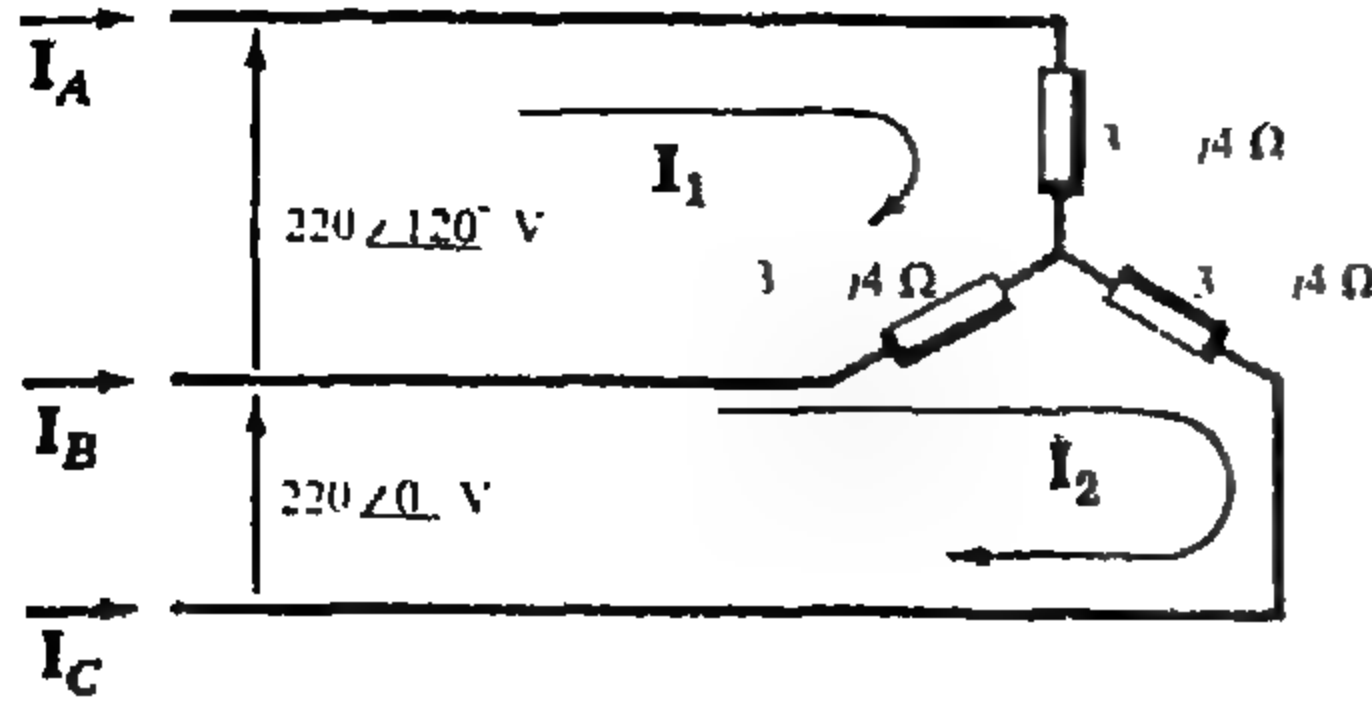
$$-(-R_x)(R + 1/j\omega C + 1/j\omega C)(-j\omega L_x) - (-1/j\omega C)(-1/j\omega C)(R_x + j\omega L_x) = 0$$

$$L_x = 1/2\omega^2 C \quad \text{و} \quad R_x = 1/\omega^2 C^2 R$$

ومنها نحصل على

٧ - ٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ٩ - ١٤ عين التيارات I_A و I_B و I_C .

إذا اختير تيارى الشبكة كما هو موضح في الشكل فإن معدنتهما في الصيغة المصفوفية هي :



$$\begin{bmatrix} 6 - j8 & -(3 - j4) \\ -(3 - j4) & 6 - j8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220/120^\circ \\ 220/0^\circ \end{bmatrix}$$

شكل ٩ - ١٤

ومنها نجد أن .

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 220/120^\circ & -(3 - j4) \\ 220/0^\circ & 6 - j8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 - j8 & -(3 - j4) \\ -(3 - j4) & 6 - j8 \end{vmatrix}} = \frac{2200/66.9^\circ + 1100/-53.1^\circ}{100/-106.2^\circ - 25/-106.2^\circ} = \frac{1905/36.9^\circ}{75/-106.2^\circ} = 25.4/143.1^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 - j8 & 220/120^\circ \\ -(3 - j4) & 220/0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{2200/-53.1^\circ + 1100/66.9^\circ}{75/-106.2^\circ} = \frac{1905/-23.2^\circ}{75/-106.2^\circ} = 25.4/83^\circ \text{ A}$$

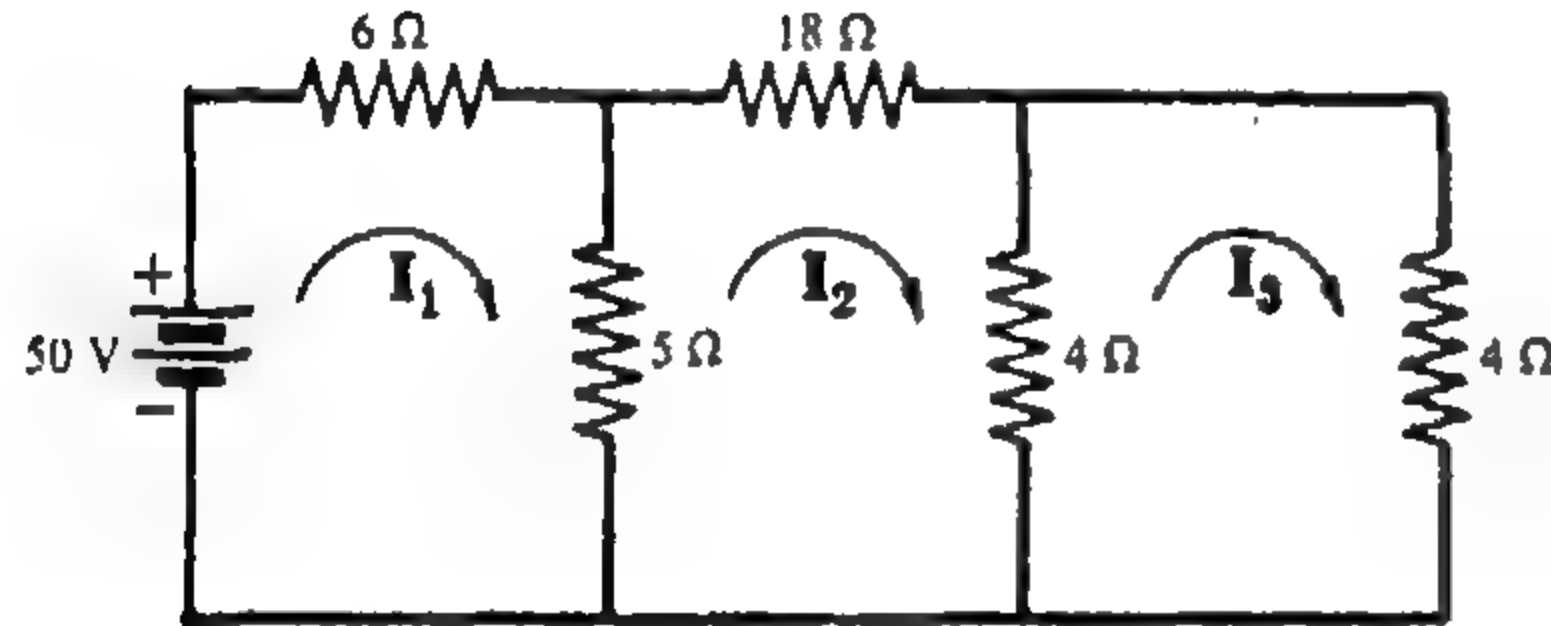
والتيارات المطلوبة هي

$$I_A = I_1 = 25.4/143.1^\circ \text{ A}, I_B = I_2 = I_1 = (25.4/83^\circ - 25.4/143.1^\circ) = 25.4/23.1^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_2 = 25.4/97^\circ \text{ A}$$

٨ - ٩ باستخدام طرق المصفوفات عين المعاوقة الداخلة للمصدر 50 V

للدائرة الموضحة في الشكل ٩ - ١٥ ، ثم احب I_3 باستخدام هذه المعاوقة .



شكل ٩ - ١٥

إن المعاوقة الداخلة للمسار المغلق الأول هي :

$$Z_{\text{input } 1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -5 & 27 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 27 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{200} = 10 \Omega$$

$$I_1 = V_1/Z_{\text{input } 1} = 50/10 = 5 \text{ A. ومنها}$$

٩ - ٩ للدائرة الموضحة في الشكل ٩ - ١٥ أوجد تيار الشبكة I_3 وذلك باستخدام معاوقة الانتقال .

بما أن المصدر في المسار المغلق الأول والتيار المطلوب في المسار المغلق الثالث ، إذن معاوقة الانتقال المطلوبة هي

$$Z_{\text{transfer } 13} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \frac{2000}{\begin{vmatrix} -5 & 27 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{20} = 100 \Omega$$

$$I_3 = V_1/Z_{\text{transfer } 13} = 50/100 = 0.5 \text{ A} : \text{ وتيار الشبكة المطلوب هو}$$

٩ - ١٠ : للدائرة الموضحة بالشكل ٩ - ١٥ أوجد تيار الشبكة I_2 وذلك باستخدام معاوقة الانتقال .

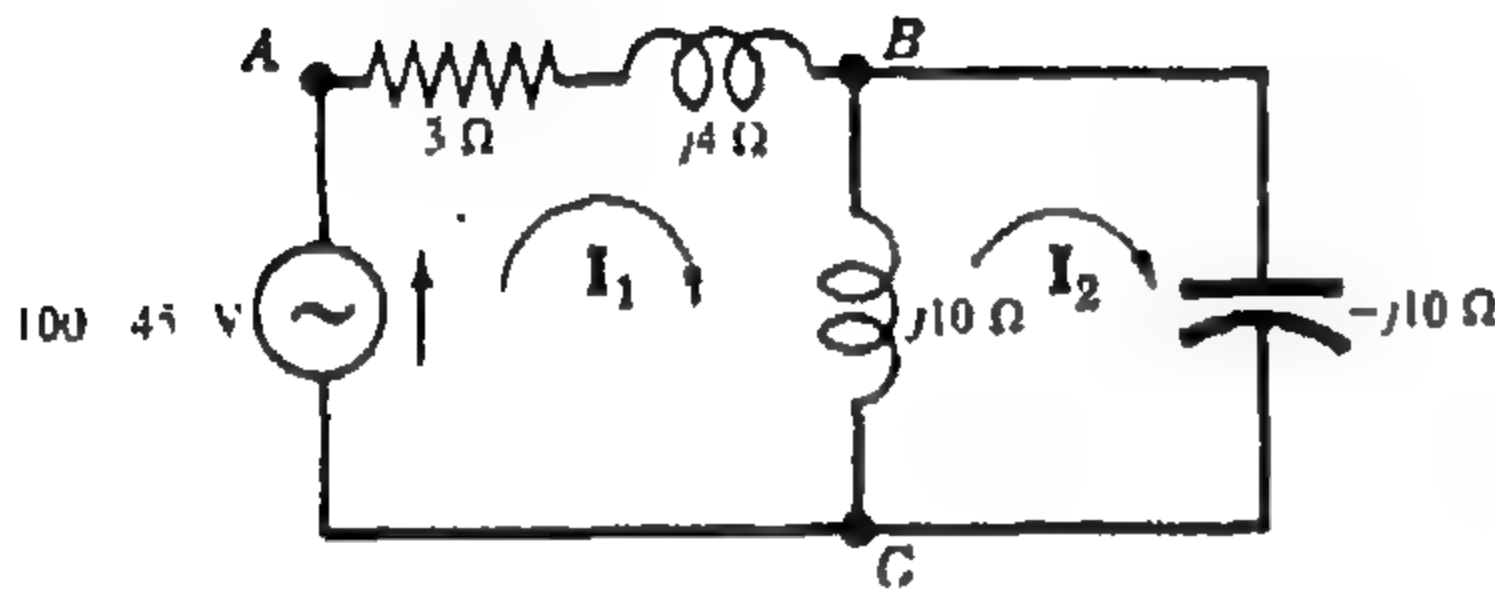
بما أن المصدر في المسار المغلق الأول والتيار المطلوب في المسار المغلق الثاني ، إذن معاوقة الانتقال المطلوبة هي

$$Z_{\text{transfer } 12} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{2000}{(-1) \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{40} = 50 \Omega$$

$$I_2 = V_1 / Z_{\text{transfer } 12} = 50 / 50 = 1 \text{ A.}$$

والتيار المطلوب هو :

٩ - ١١ : في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ١٦ أوجد الجهود V_{BC} و V_{AB} .



شكل ٩ - ١٦

معادلات تيارات الشبكة بالصيغة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} 3 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\angle45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن هنا نجد أن .

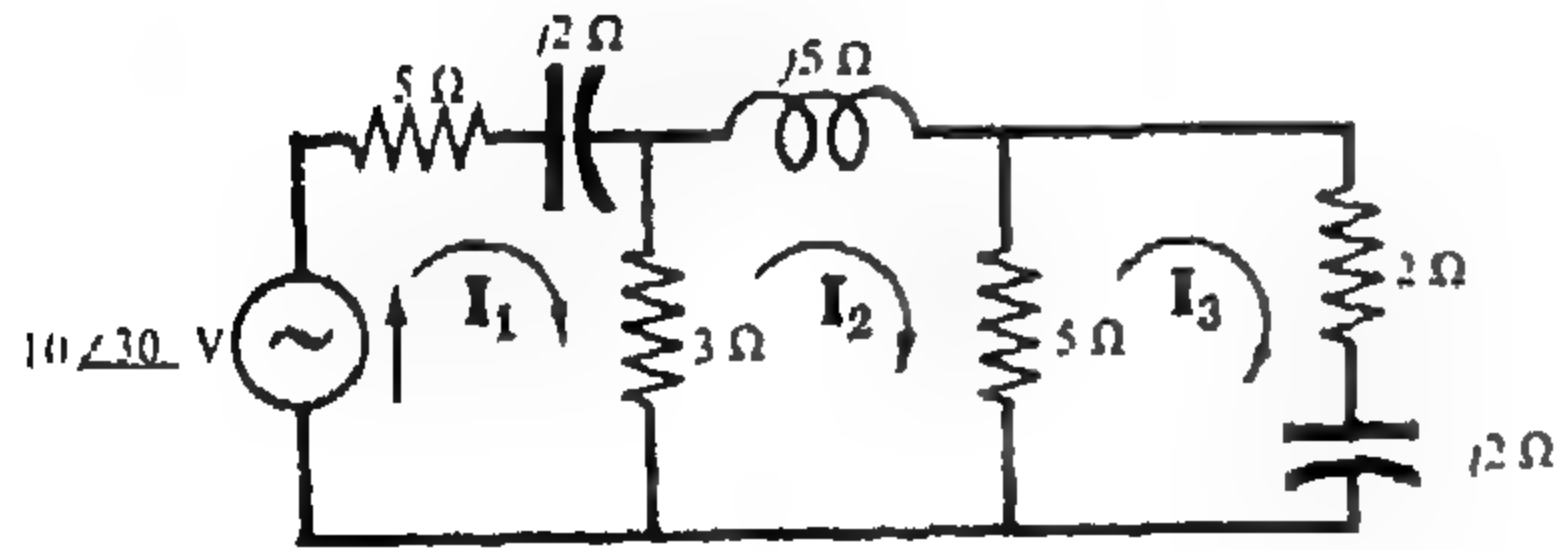
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100\angle45^\circ & -j10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0}{100} = 0, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j14 & 100\angle45^\circ \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{1000\angle135^\circ}{100} = 10\angle135^\circ \text{ A}$$

$$V_{BC} = I_2(-j10) = 10\angle135^\circ(10\angle-90^\circ) = 100\angle45^\circ \text{ V} \quad \text{و} \quad V_{AB} = I_1(3 + j4) = 0$$

والمجموع هو $100\angle45^\circ \text{ V}$ وهو الجهد المطاوع المطلوب

٩ - ١٢ : للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ١٧ أوجد

المركبات الثلاثة لمثلث القدرة وذلك للمصدر $10\angle30^\circ$



شكل ٩ - ١٧

نختار تيارات الشبكة كما هو موضح فيكون هناك

تيار واحد فقط I_1 في الفرع الذي يحتوي على المصدر

وبما أنه لا يوجد غير مصدر واحد في الشبكة الكهربائية

فإنه يمكن استخدام نقطة المعاوقة المحركة لحساب I_1 .

$$Z_{\text{input } 1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8 - j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8 + j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7 - j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 + j5 & -5 \\ -5 & 7 - j2 \end{vmatrix}} = \frac{315\angle16.2^\circ}{45.1\angle24.9^\circ} = 6.98\angle-8.7^\circ \Omega$$

$$I_1 = V_1 / Z_{\text{input } 1} = (10\angle30^\circ) / (6.98\angle-8.7^\circ) = 1.43\angle38.7^\circ \text{ A}$$

وقدرة المصدر الداخلة هي 14.1 W $= 10(1.43) \cos 8.7^\circ$ و $P = V_1 I_1 \cos \theta$ والقدرة المعاوقة سابقة وتساوى

$$S = V_1 I_1 = 14.3 \text{ VA} \quad \text{والقدرة الظاهرة هي} \quad Q = V_1 I_1 \sin 8.7^\circ = 2.16 \text{ var}$$

٩ - ١٣ للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ١٧ أوجد تيارات الشبكة I_2 و I_3 وذلك باستخدام معاوقى الانتقال بما أن المصدر في المسار المغلق الأول والتيار المطلوب في المسار الثانى . إذن معاوقة الانتقال اللازمة هي

$$Z_{\text{transfer } 12} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{315/16.2^\circ}{(-1) \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 7 - j2 \end{vmatrix}} = \frac{315/16.2^\circ}{21.8/-16^\circ} = 14.45/32.2^\circ \Omega$$

والتيار المطلوب هو

$$I_2 = V_1 / Z_{\text{transfer } 12} = (10/30^\circ) / (14.45/32.2^\circ) = 0.693/-2.2^\circ \text{ A}$$

وبالمثل

$$Z_{\text{transfer } 13} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \frac{315/16.2^\circ}{\begin{vmatrix} -3 & 8 + j5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{315/16.2^\circ}{15} = 21/16.2^\circ \Omega$$

$$I_3 = V_1 / Z_{\text{transfer } 13} = (10/30^\circ) / (21/16.2^\circ) = 0.476/13.8^\circ \text{ A}$$

٩ - ١٤ للشكل ٩ - ١٧ أوجد القدرة في مقاومات الشبكة الكهربائية ثم قارنها بقدرة المصدر

$$I = 1.43 \angle 38.7^\circ \text{ A}, I_2 = 0.693 \angle -2.2^\circ \text{ A}, I_3 = 0.476 \angle 13.8^\circ \text{ A} \quad \text{لدينا من المسألتين ٩ - ١٢ ، ٩ - ١٣}$$

والقدرة في المقاومة 5Ω هو $P = (I_1)^2 5 = (1.43)^2 5 = 10.2 \text{ W}$ ويمر في المقاومة 3Ω تياران من تيارات الشبكة وعلى ذلك فإن تيار الفرع د،

$$(I_1 - I_2) = (1.115 + j0.895) - (0.693 - j0.027) = 0.422 + j0.922 = 1.01 \angle 65.4^\circ \text{ A}$$

$$P = (1.01)^2 3 = 3.06 \text{ W} \quad \text{إذن}$$

وبالمثل فإن التيار المار في الفرع الذى يحتوى على المقاومة 5Ω هو

$$(I_2 - I_3) = (0.693 - j0.027) - (0.462 + j0.113) = 0.231 - j0.140 = 0.271 \angle -31.2^\circ \text{ A}$$

$$P = (I_3)^2 2 = (0.476)^2 2 = 0.453 \text{ W} \quad \text{والقدرة في المقاومة } 2\Omega \text{ هي}$$

والقدرة الكلية للشبكة الكهربائية هي 14.1 W $= 10.2 + 3.06 + 0.367 + 0.453$ P_T وهي تساوى القدرة الداخلة في المسألة ٩ - ١٢ .

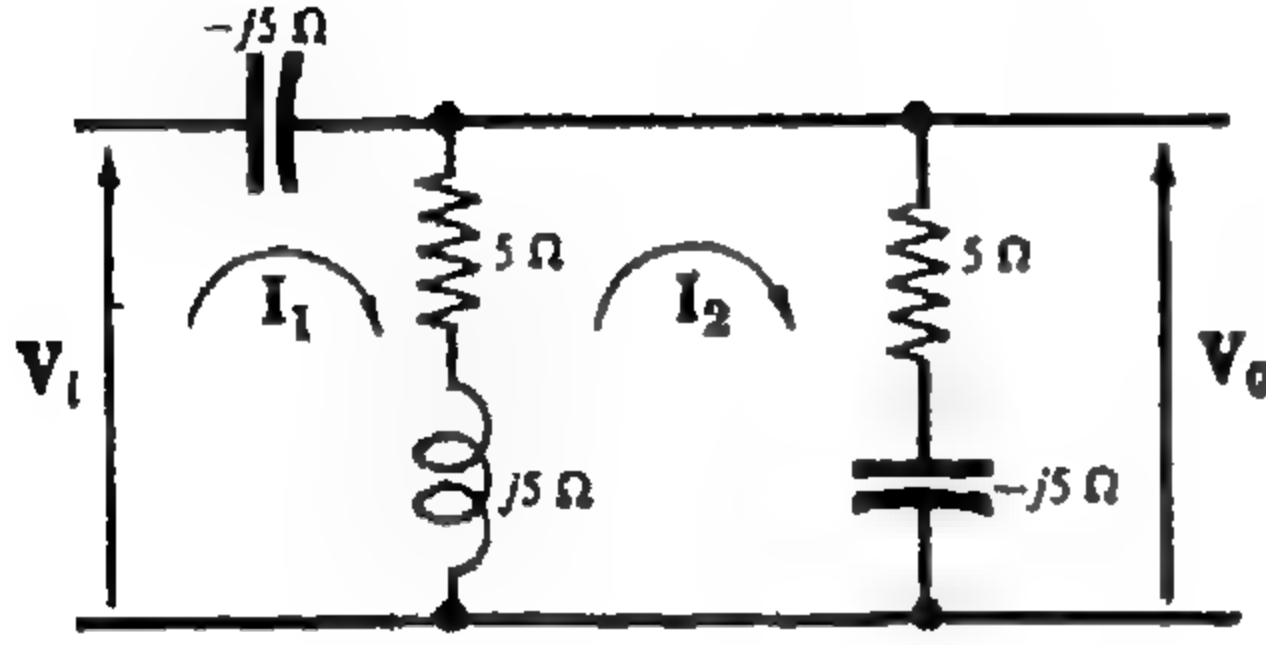
٩ - ١٥ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ١٨ ينتج جهد V_0 عبر المعاوقة $2 - j2 \Omega$ نتيجة لمصدر الجهد V_1 . أوجد الجهد V_1 الذى يقابل $V_0 = 5 \angle 0^\circ \text{ V}$.

$$\text{لمصدر الجهد } V_0 \text{ يكون تيار الشبكة هو } I_3 = \frac{V_0}{2 - j2} = \frac{5 \angle 0^\circ}{2\sqrt{2} \angle -45^\circ} = 1.76 \angle 45^\circ \text{ A} \quad \text{وبالتعبير عنه}$$

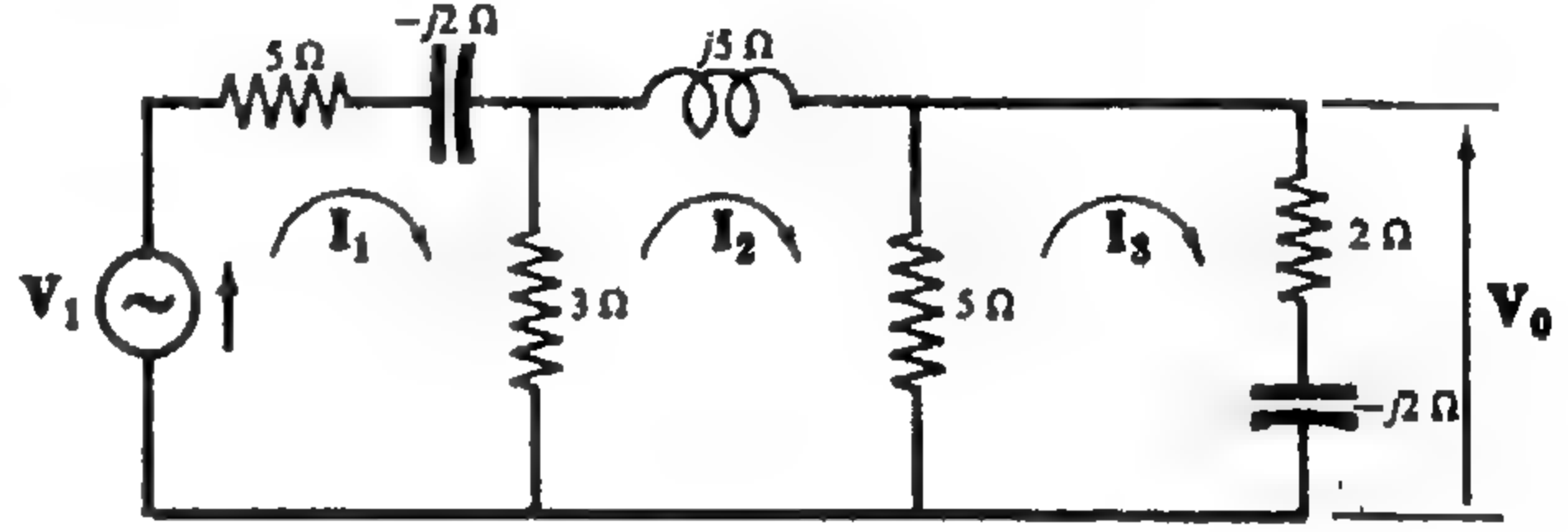
بصيغة محددة :

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & V_1 \\ -3 & 8+j5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{vmatrix}} = V_1 \frac{\begin{vmatrix} -3 & 8+j5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}}{315/16.2^\circ} = V_1 (0.0476 \angle -16.2^\circ) \text{ A}$$

$$V_1 = \frac{I_2}{0.0476 \angle -16.2^\circ} = \frac{1.76 \angle 45^\circ}{0.0476 \angle -16.2^\circ} = 36.9 \angle 61.2^\circ \text{ V.} \quad \text{إذن}$$



شكل ٩ - ١٩



شكل ٩ - ١٨

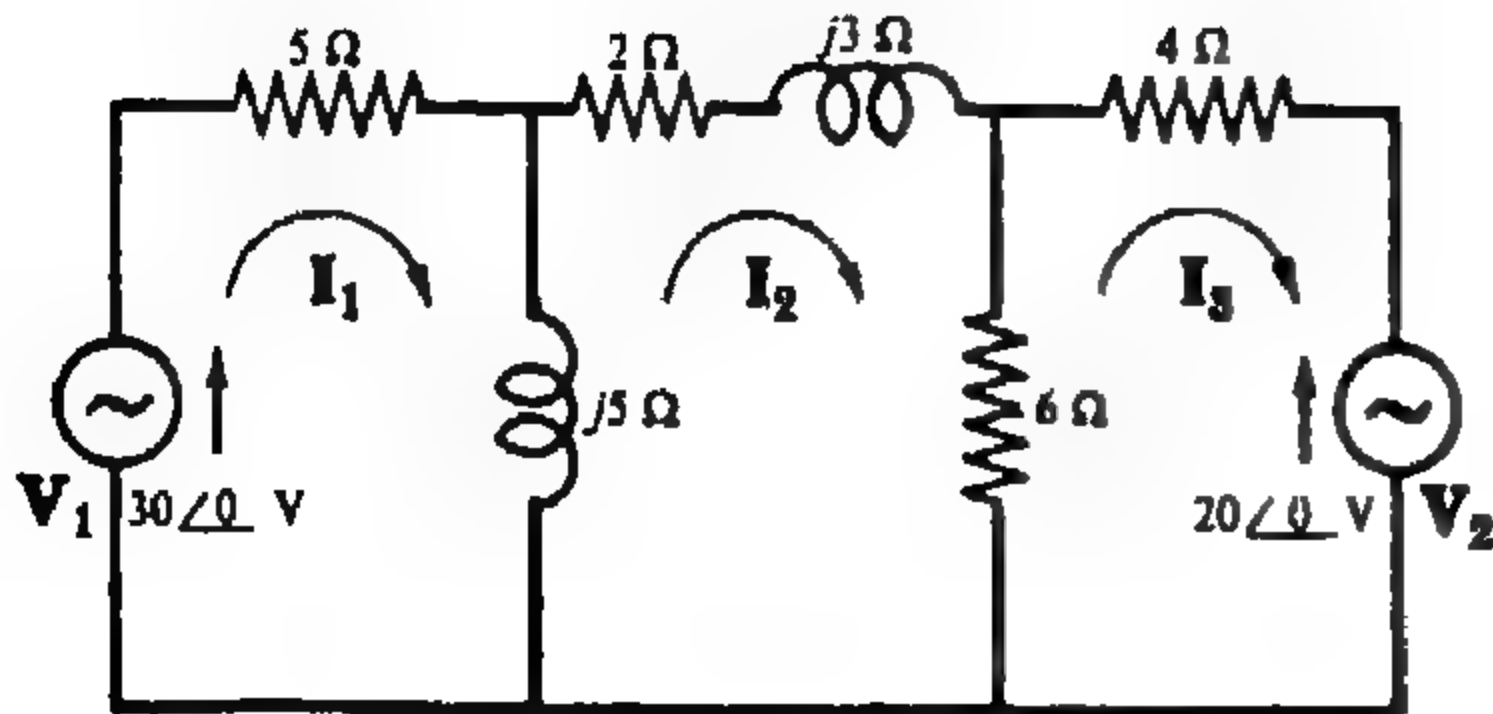
٩ - ١٦ عند توصيل الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ١٩ بحمل معاوقته كبيرة فإن الجهد يعطى بالهبوط في الجهد على المعاوقة $5 - j5 \Omega$ عين دالة انتقال الجهد V_0/V_1 للشبكة الكهربائية .
إن معادلتى تيارى الشبكة الموضحين في الشكل على الصيغة المصفوفية هما

$$\begin{bmatrix} 5 & -(5+j5) \\ -(5+j5) & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والجهد الخارج V_0 هو

$$V_0 = I_2(5-j5) = (5-j5) \frac{\begin{vmatrix} 5 & V_1 \\ -(5+j5) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -(5+j5) \\ -(5+j5) & 10 \end{vmatrix}} = \frac{(5-j5)(5+j5)V_1}{(50-j50)} = \frac{50V_1}{50\sqrt{2} \angle -45^\circ}$$

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{50}{50\sqrt{2} \angle -45^\circ} = 0.707 \angle 45^\circ \quad \text{ومنه نجد}$$



شكل ٩ - ٢٠

٩ - ١٧ تحتوى الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ٢٠

على مصدرين للجهد - أوجد التيار المار في المعاوقة $2 + j3 \Omega$ نتيجة وجود كل من المصدرين .

نختار تيارات الشبكة بحيث يعطى التيار المطلوب المار في المعاوقة بتيار الشبكة I_2 مباشرة . وتكون معادلة تيارات الشبكة المختارة في الصيغة المصفوفة هي

$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \angle 0^\circ \\ 0 \\ -20 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8 + j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 70 + j620 = 624/83.55^\circ$$

بفك محدد المعاوقة عن I_2 من خلال عناصر العمود الثاني نجد أن

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 30/0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & -6 \\ 0 & -20/0^\circ & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 30/0^\circ (-) \frac{\begin{vmatrix} -j5 & -6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} + 0 + (-20/0^\circ)(-) \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 0 \\ -j5 & -6 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

$$= -30/0^\circ \left(\frac{50/-90^\circ}{624/83.55^\circ} \right) + 20/0^\circ \left(\frac{42.4/-135^\circ}{624/83.55^\circ} \right) = 2.41/6.45^\circ + 1.36/141.45^\circ \text{ A}$$

وعلى ذلك فإنه ينتج عن المصدر V_1 تيار $2.41/6.45^\circ \text{ A}$ في المعاوقة $2 + j3 \Omega$ ، وينتج عن المصدر V_2 تيار $1.36/141.45^\circ \text{ A}$ في نفس المعاوقة . وينتج من ذلك أن هذين التيارين هما مركبتا I_2

$$I_2 = 2.41/6.45^\circ + 1.36/141.45^\circ = 1.74/40.1^\circ \text{ A.}$$

١٨ - ٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ٢٠ عين (أ) القدرة المعطاة بكل مصدر للجهد .
(ب) القدرة في مقاومات الشبكة .

(أ) التيار المار في الفرع الذي يحتوي على V_1 هو

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 30/0^\circ & -j5 & 0 \\ 0 & 8 + j8 & -6 \\ -20/0^\circ & -6 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{2240/53.8^\circ}{624/83.55^\circ} = 3.59/-29.75^\circ \text{ A}$$

والقدرة المعطاة لهذا المصدر هي $P_1 = V_1 I_1 \cos \theta = 30(3.59) \cos 29.75^\circ = 93.5 \text{ W}$

التيار المار في الفرع الذي يحتوي على V_2 هو

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 & 30/0^\circ \\ -j5 & 8 + j8 & 0 \\ 0 & -6 & -20/0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{860/-125.6^\circ}{624/83.55^\circ} = 1.38/-209.15^\circ \text{ A}$$

لاحظ أن V_2 و I_3 ليس في اتجاه واحد . وعلى هذا فإن القدرة المعطاة بهذا المصدر هي

$$P_2 = V_2(I_3) \cos \theta = (-)(20)(1.38) \cos -209.15^\circ = 24.1 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي $P_T = P_1 + P_2 = 93.5 + 24.1 = 117.6 \text{ W}$

(ب) - القدرة في المقاومة 5Ω هي $P_5 = (I_1)^2 5 = (3.59)^2 5 = 64.5 \text{ W}$ و في المقاومة 2Ω هي

$$P_2 = (I_2)^2 2 = (1.74)^2 2 = 6.05 \text{ W}$$

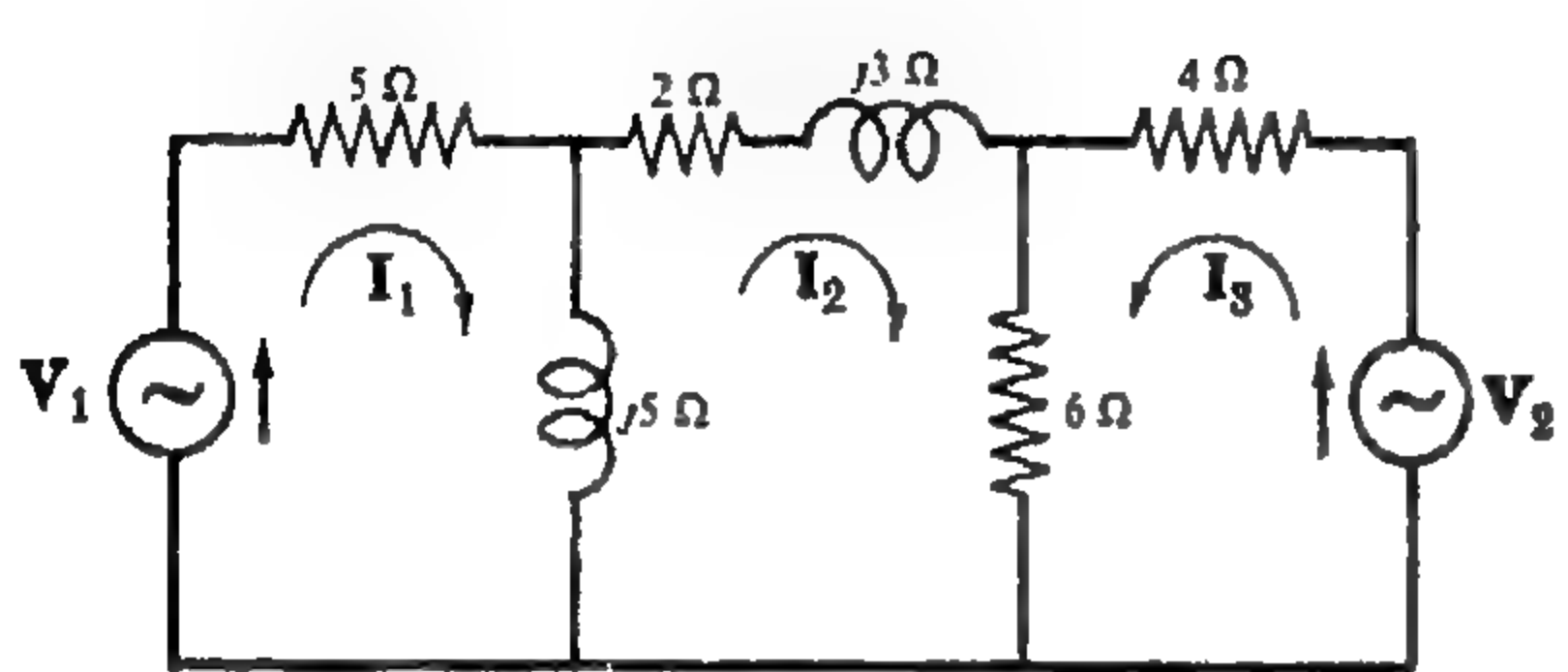
و بما أن التيار المار في فرع المقاومة 6Ω هو $(I_2 - I_3) = (1.33 + j1.12) - (-1.205 + j0.672) = 2.535 + j0.45 = 2.57/10.1^\circ \text{ A}$

إذن $P_6 = (2.57)^2 6 = 39.6 \text{ W}$. والقدرة في المقاومة 4Ω هي $P_4 = (I_3)^2 4 = (1.38)^2 4 = 7.61 \text{ W}$

إذن القدرة الكلية هي $P_T = 64.5 + 6.05 + 39.6 + 7.61 = 117.76 \text{ W}$

٩ - ١٩ تحتوي الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ٢١ على مصدرين للجهد V_1 و V_2 فإذا كان $V_1 = 30 \angle 0^\circ \text{V}$ فعين V_2 بحيث يكون التيار المار في المعاوقة $2 + j3 \Omega$ مساوياً للصفر .

نختار تيارات الشبكة كما هو موضح وبحيث يمر في المعاوقة $2 + j3 \Omega$ تيار واحد فقط . وبذلك فإن المعادلات الناتجة في الصيغة المصفوفية هي :



$$\begin{bmatrix} 5 + j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8 + j8 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \angle 0^\circ \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن :

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 30 \angle 0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & V_2 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

شكل ٩ - ٢١

وبالفك نحصل على :

$$\begin{vmatrix} -30 \angle 0^\circ & -j5 & 6 \\ 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} - V_2 \begin{vmatrix} 5 + j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$-30 \angle 0^\circ (50 \angle -90^\circ) - V_2 (6)(5\sqrt{2} \angle 45^\circ) = 0$$

$$V_2 = \frac{-30 \angle 0^\circ (50 \angle -90^\circ)}{6(5\sqrt{2} \angle 45^\circ)} = 35.4 \angle 45^\circ \text{ V}$$

حل آخر : إذا كان لا يمر تيار في الفرع $2 + j3 \Omega$ أي أن I_2 يساوى صفراً فإن الهبوط في الجهد على الممانعة $j5 \Omega$ يساوى الهبوط في الجهد على المقاومة 6Ω . أي أن

$$I_1(j5) = I_3(6)$$

وبالتعويض نحصل على $I_1 = 30 \angle 0^\circ / (5 + j5)$ و $I_3 = V_2 / 10$ ،

$$V_2 = \frac{30 \angle 90^\circ}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} \left(\frac{10}{6} \right) = 35.4 \angle 45^\circ \text{ V} \quad \text{ومنها نجد :} \quad \frac{30 \angle 0^\circ}{5 + j5} (j5) = \frac{V_2}{10} (6)$$

٩ - ٢٠ إذا كان في الشكل ٩ - ٢١ $V_2 = 20 \angle 0^\circ \text{V}$. عين مصدر الجهد V_1 الذي ينتج عنه عدم مرور تيار في الفرع المحتوى على V_2 .

باعتبار تيارات الشبكة الموضحة في الشكل ٩ - ١٩ وبمساواة محددة I_3 بالصفر فإن :

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 & V_1 \\ -j5 & 8 + j8 & 0 \\ 0 & 6 & 20 \angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

وبالفعل نحصل على :

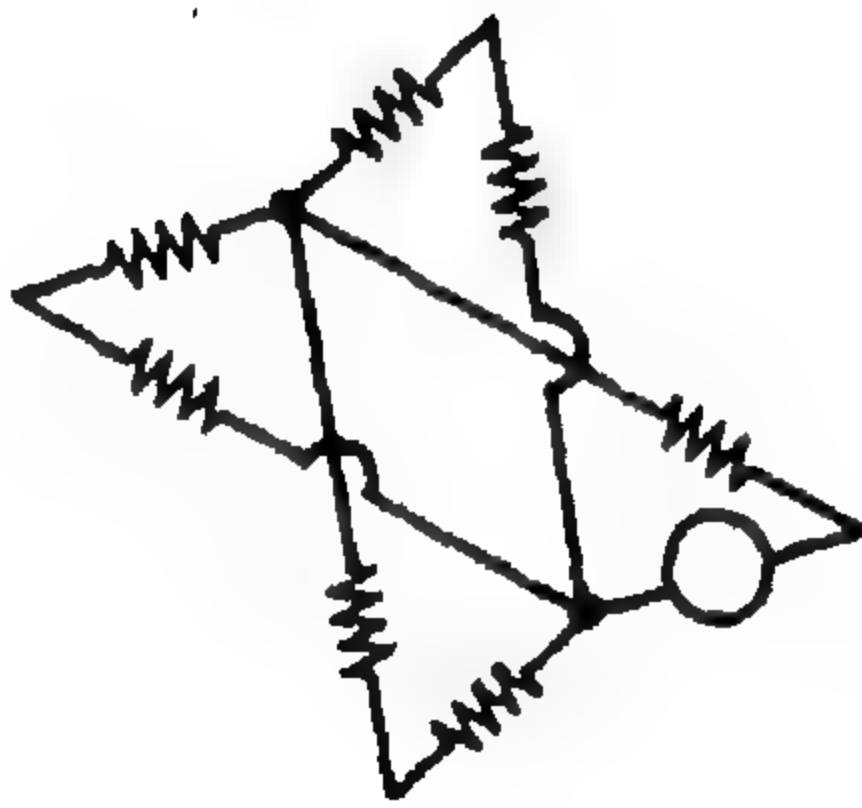
$$V_1 \begin{vmatrix} -j5 & 8 + j8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 20 \angle 0^\circ \begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 8 + j8 \end{vmatrix} = 0$$

$$V_1 (30 \angle -90^\circ) + 20 \angle 0^\circ (25 + j80) = 0$$

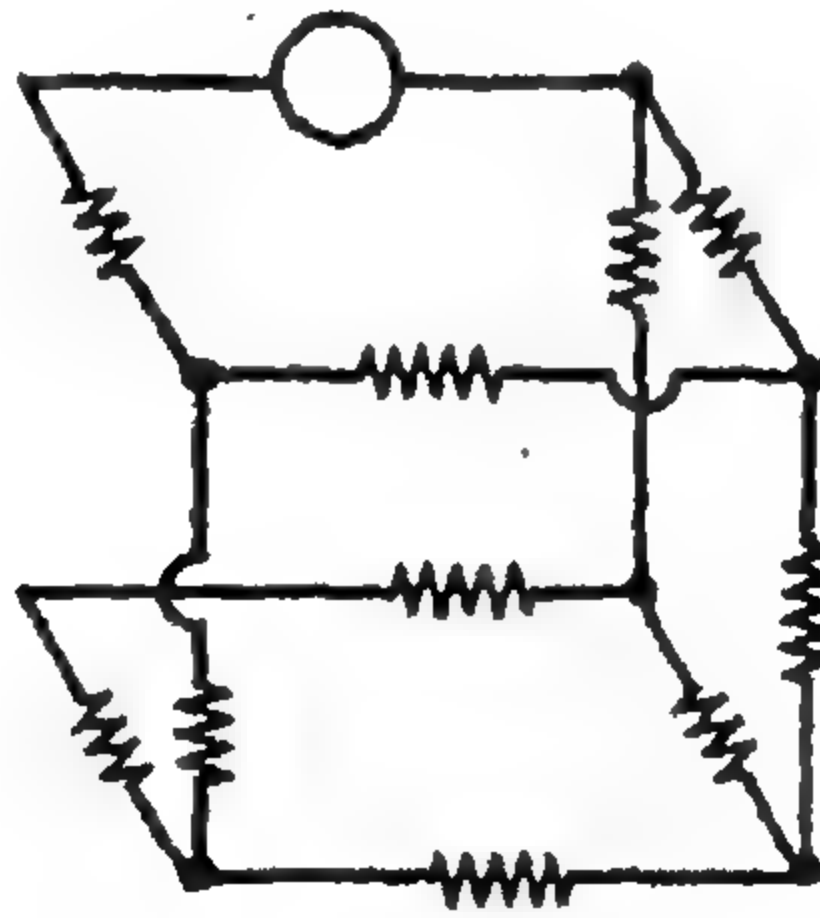
$$V_1 = \frac{-20 \angle 0^\circ (25 + j80)}{30 \angle -90^\circ} = 55.8 \angle -17.4^\circ \text{ V}$$

مسائل إضافية

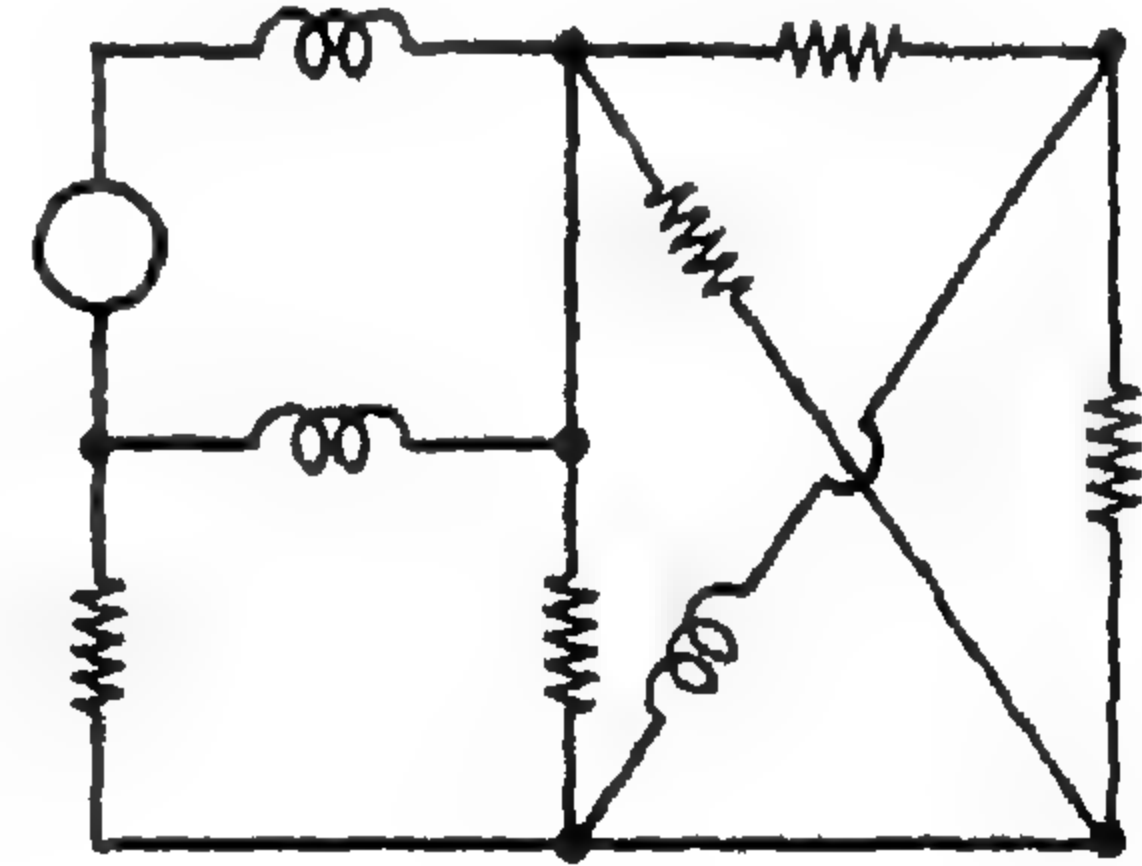
٩ - ٢١ عين عدد تيارات الشبكة اللازمة لحل الشبكات الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ٢٢ (أ - و) وذلك بتطبيق طريقتين مختلفتين .
الجواب : (أ) ٥ ، (ب) ٤ ، (ج) ٣ ، (د) ٤ ، (هـ) ٤ ، (و) ٥



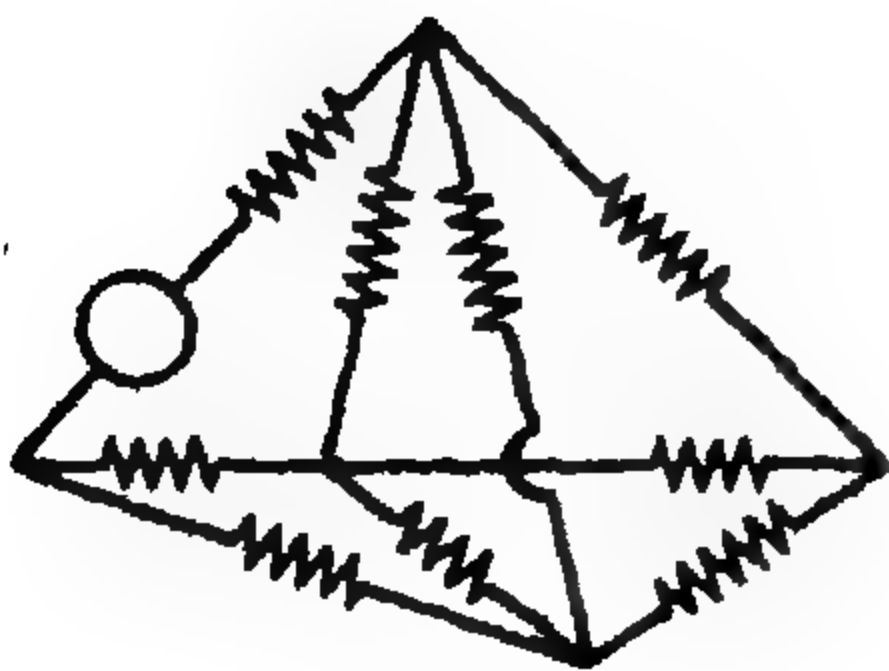
(أ)



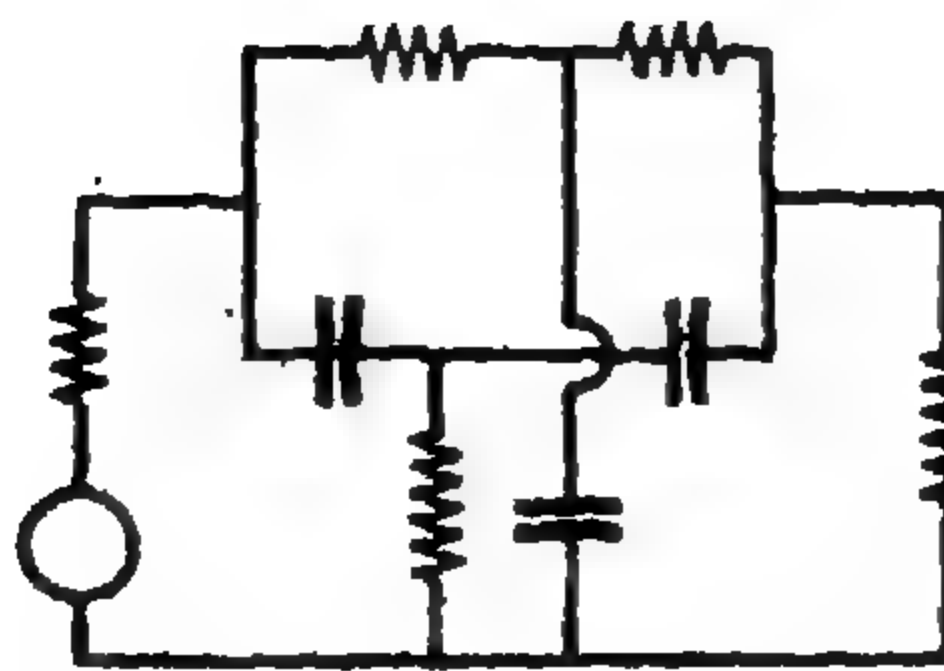
(ب)



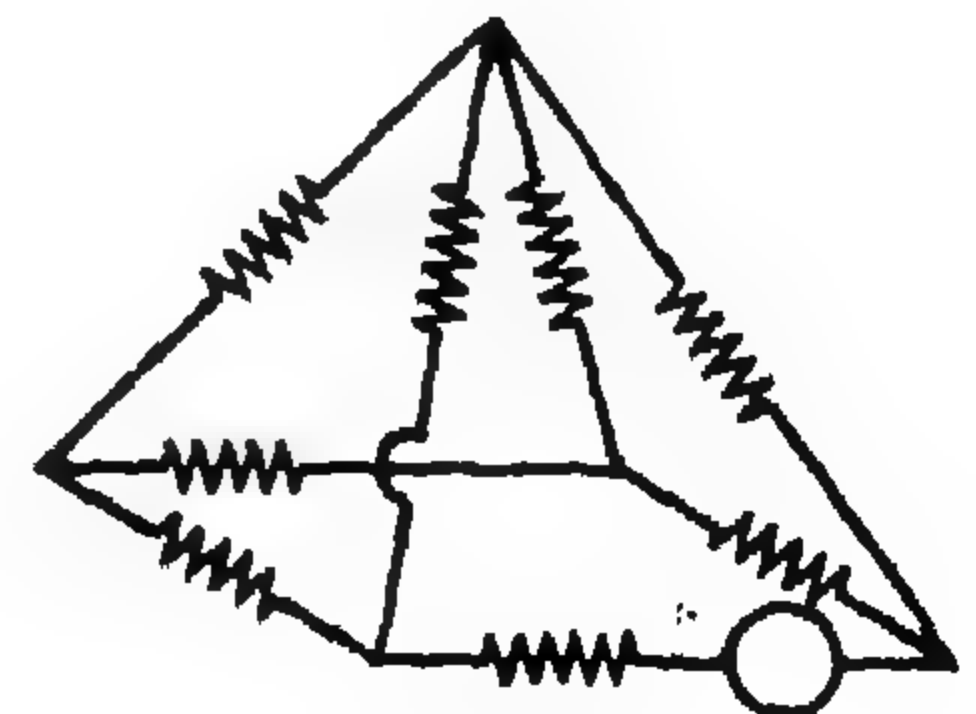
(ج)



(د)

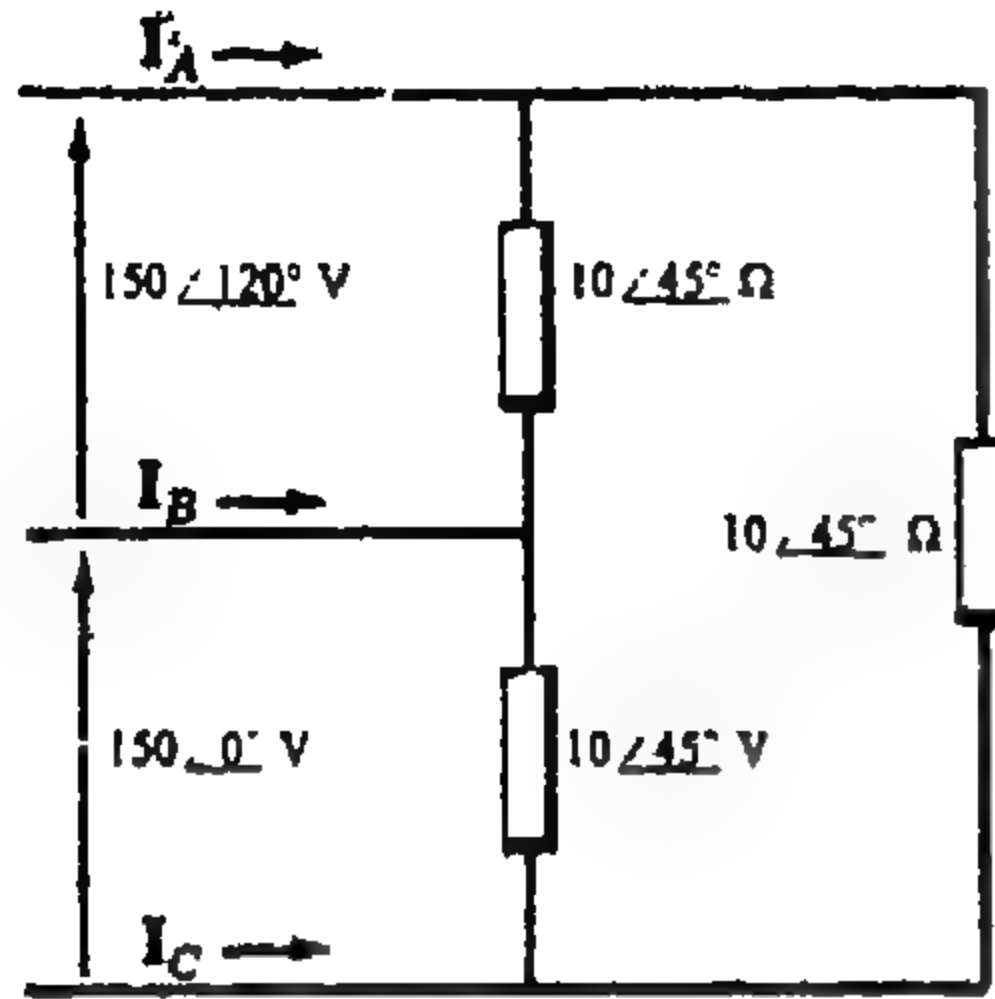


(هـ)

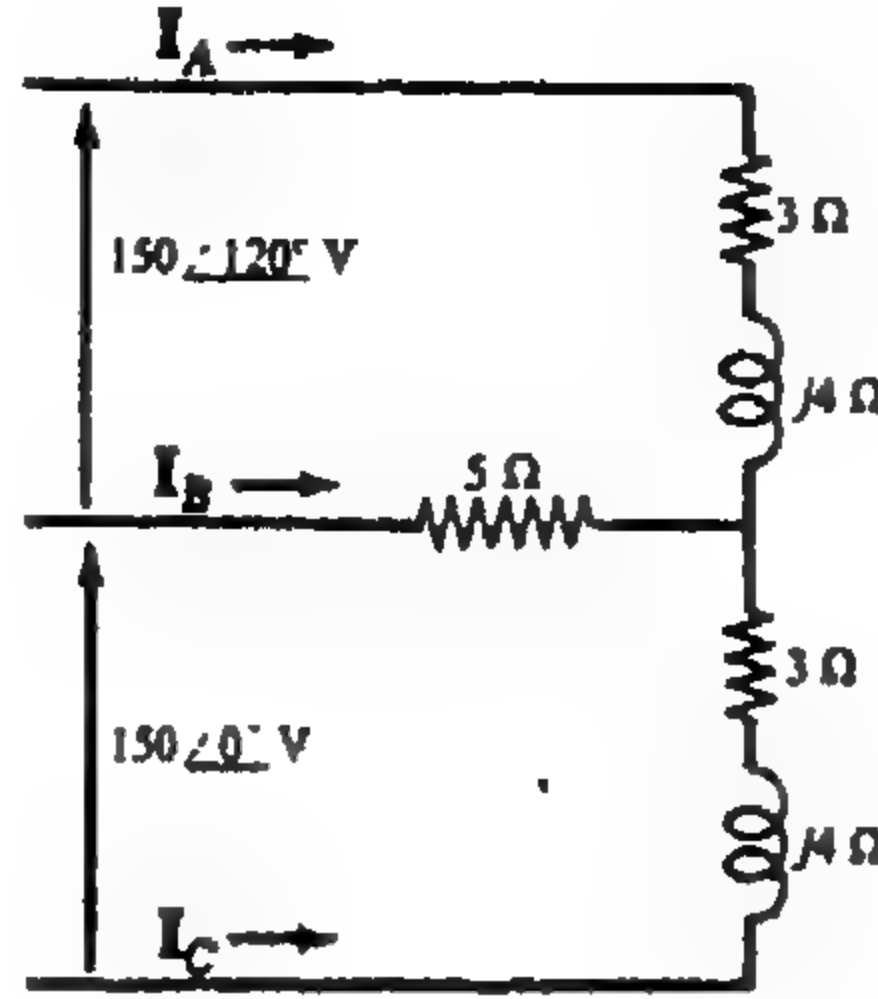


(و)

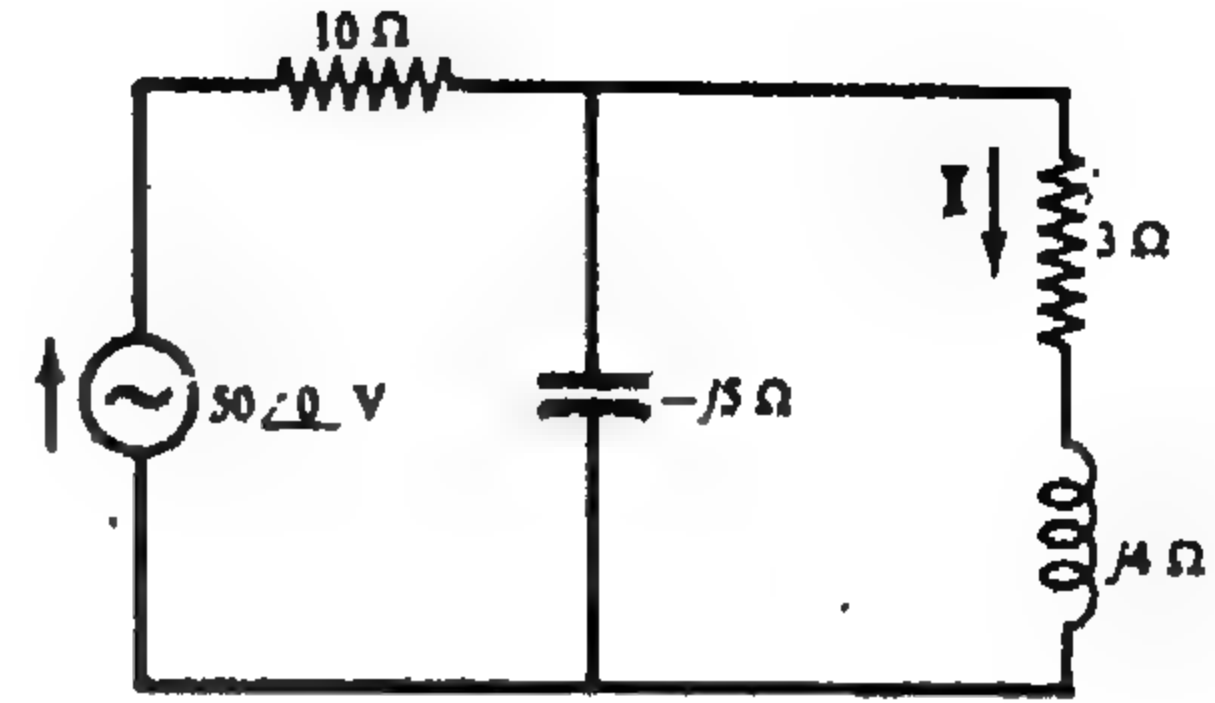
٢٢ - ٩ أوجد التيار المار في المقاومة 3Ω في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٢٣ - ٩ علماً بأن الاتجاه الموجب كما هو موضح في الشكل .
الجواب : $4.47 / -63.4^\circ \text{ A}$



شكل ٢٣ - ٩



شكل ٢٤ - ٩



شكل ٢٥ - ٩

٢٣ - ٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ٢٤ - ٩ أوجد التيارات I_A و I_B و I_C

الجواب : $I_A = 12.1 / 46.4^\circ \text{ A}$, $I_B = 19.1 / -47.1^\circ \text{ A}$, $I_C = 22.1 / 166.4^\circ \text{ A}$

٢٤ - ٩ في الشكل ٢٥ - ٩ أوجد التيارات الثلاث I_A و I_B و I_C

الجواب : $26 / 45^\circ \text{ A}$, $26 / -75^\circ \text{ A}$, $26 / -195^\circ \text{ A}$

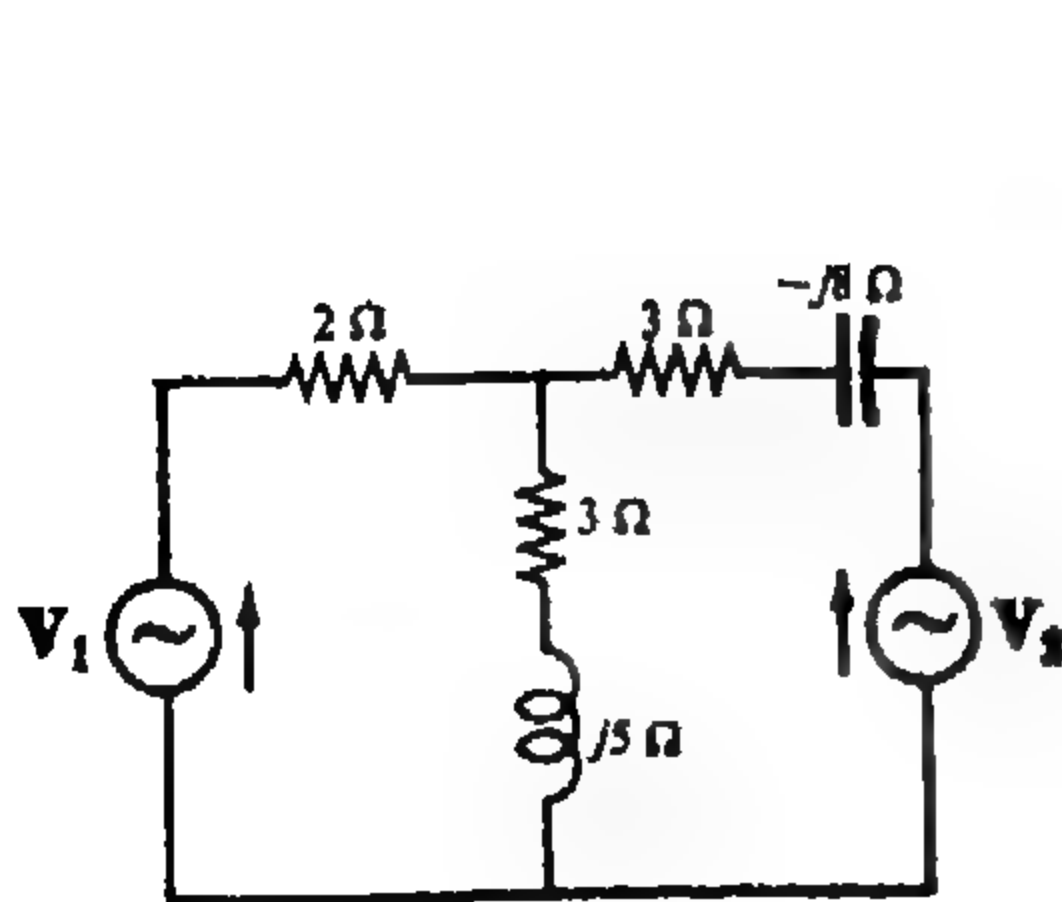
٢٥ - ٩ باستخدام طرق تيار الشبكة - أوجد الجهد V_{AB} في الدائرة الموضحة في الشكل ٢٦ - ٩ .

الجواب : $V_{AB} = 75.4 / 55.2^\circ \text{ V}$

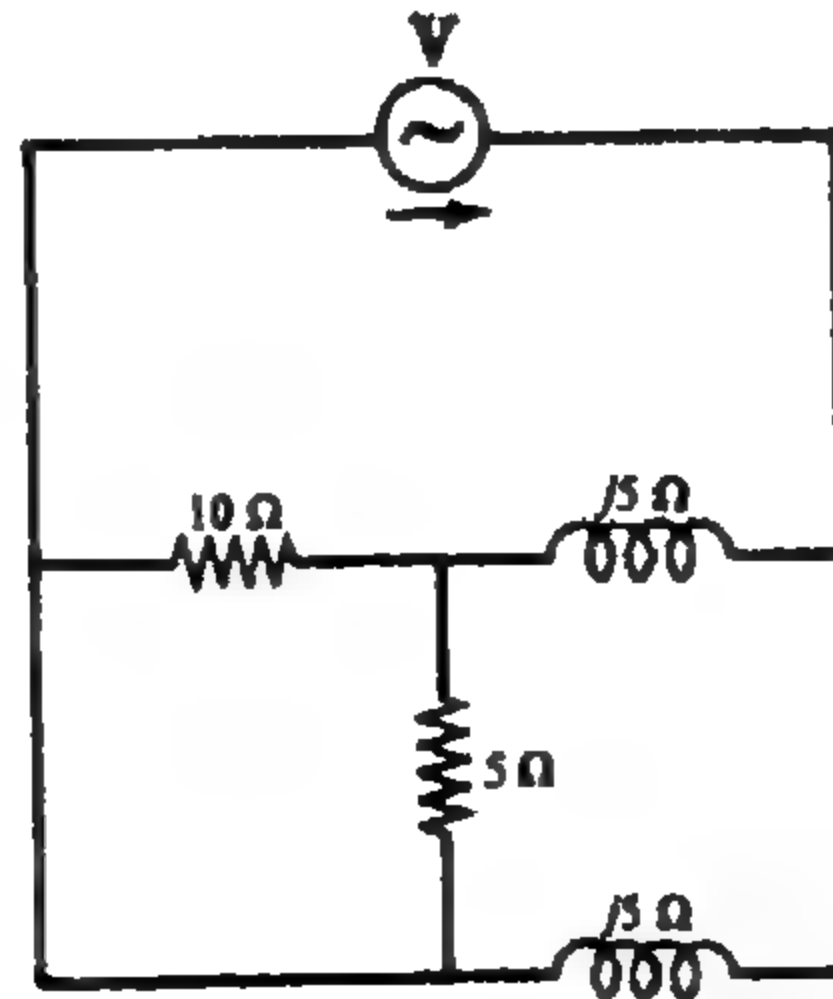
٢٦ - ٩ في الشكل ٢٧ - ٩ - أوجد القيمة الفعالة لمصدر الجهد V الذي يعطي قدرة 100 W في المقاومة 5Ω .

الجواب : 40.3 V

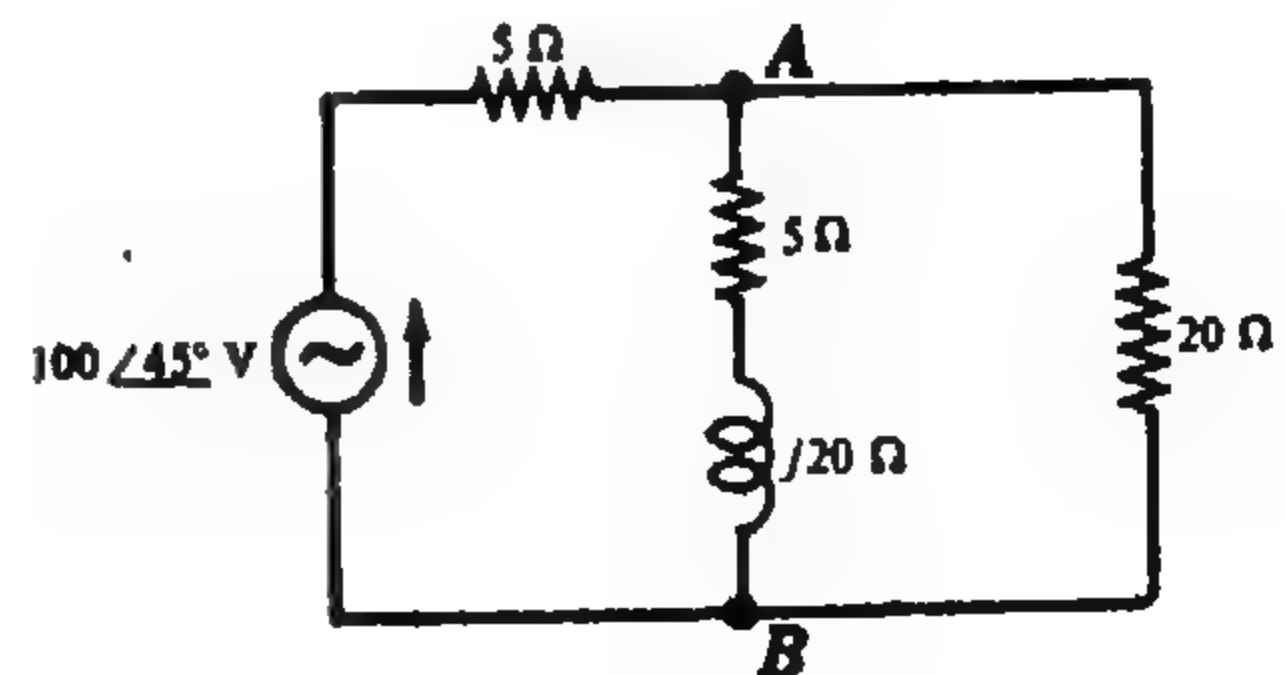
٢٧ - ٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٢٨ - ٩ - احسب Δ_Z وذلك بفرض اختيار مالتيارات الشبكة . اعتبر اختياراً آخر لتيارات الشبكة - ثم احسب مرة أخرى Δ_Z .
الجواب : $61 - j15 \Omega^2$



شكل ٢٨ - ٩



شكل ٢٧ - ٩



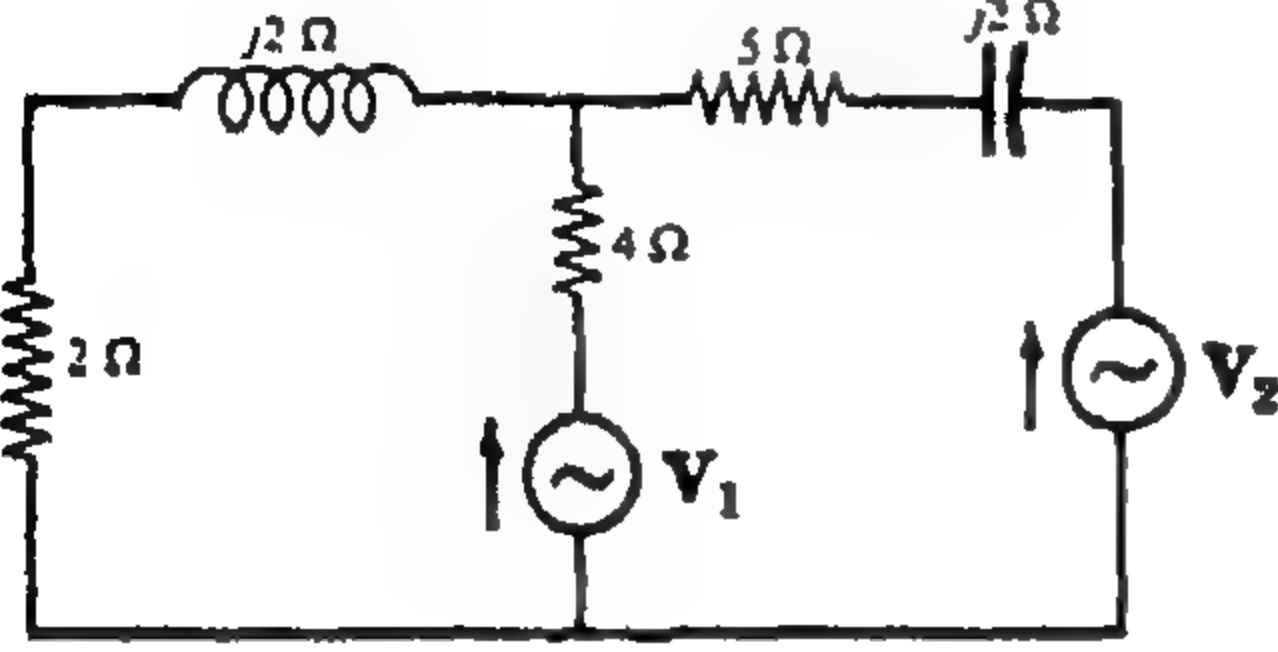
شكل ٢٦ - ٩

٢٨ - ٩ إذا كان كل من V_1 و V_2 في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٢٨ - ٩ يساوي $50/0^\circ V$ ، فما القدرة التي يعطيها كل منها للشبكة ؟ كرر نفس الشيء مع عكس اتجاه مصدر V_2 .

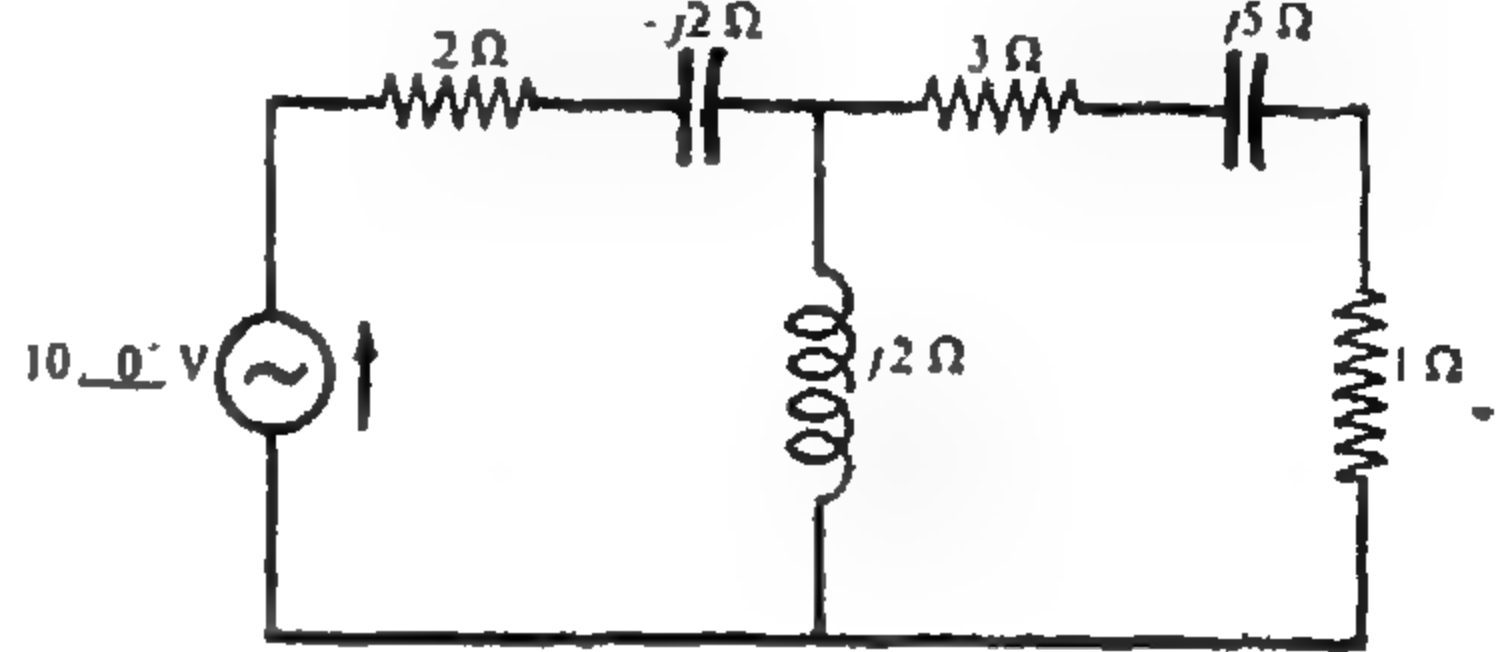
الجواب : $P_1 = 191 W, P_2 = 77.1 W; P_1 = 327 W, P_2 = 214 W$

٢٩ - ٩ في الشبكتين الفرعيتين للشبكة الموضحة في الشكل ٢٩ - ٩ أوجد القدرة التي يعطيها المصدر وكذلك قدرة كل مقاومة في الشبكة .

الجواب : $P = 36.7 W, P_1 = 2.22 W, P_2 = 27.8 W, P_3 = 6.66 W$



شكل ٢٨ - ٩



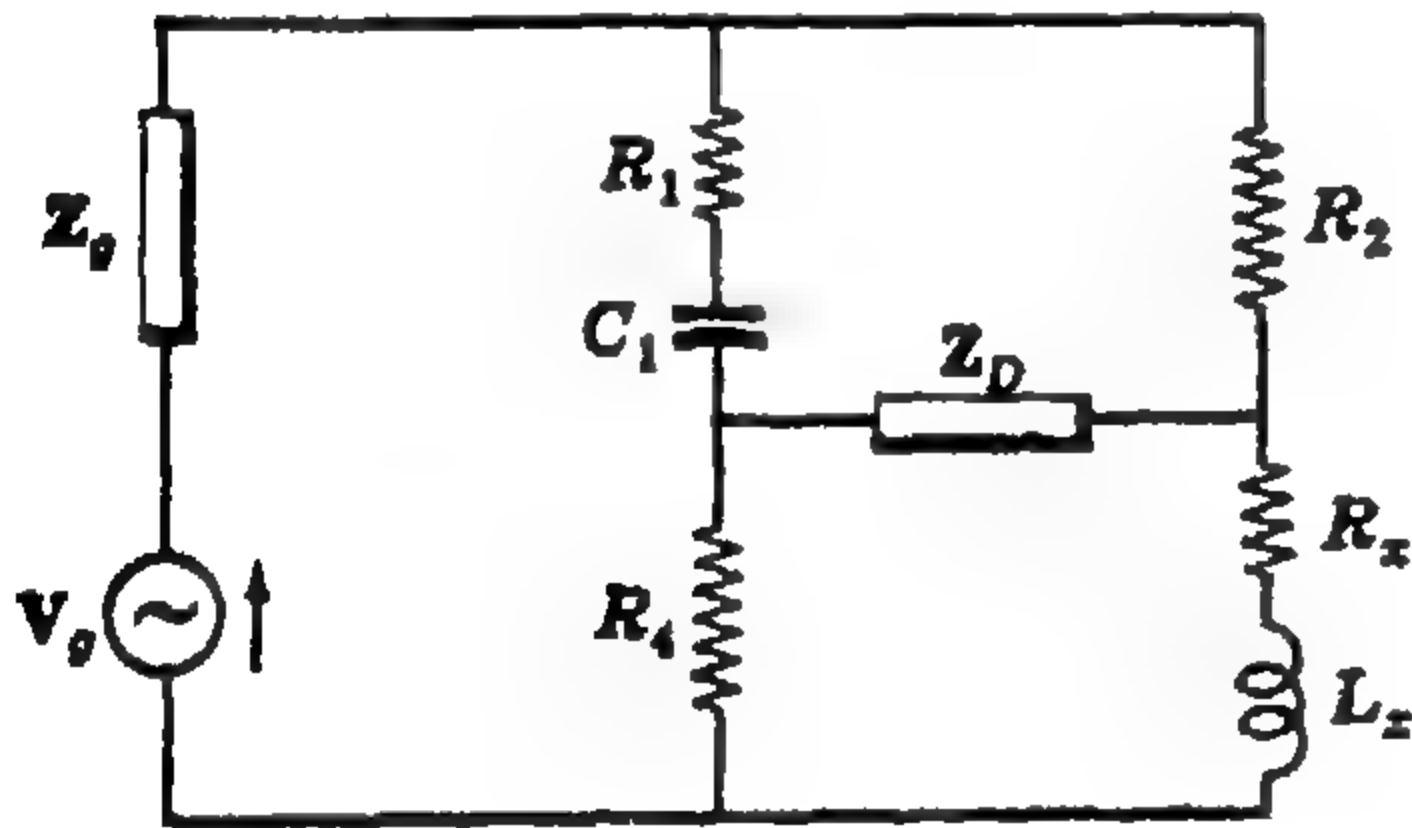
شكل ٢٩ - ٩

٣٠ - ٩ في الشكل ٣٠ - ٩ إذا كان V_1 و V_2 مصدرين متماثلين قيمة كل منهما $10/90^\circ$ volts ، وموجهين كما هو موضح في رسم الدائرة - أوجد القدرة التي يعطيها كل مصدر للدائرة .

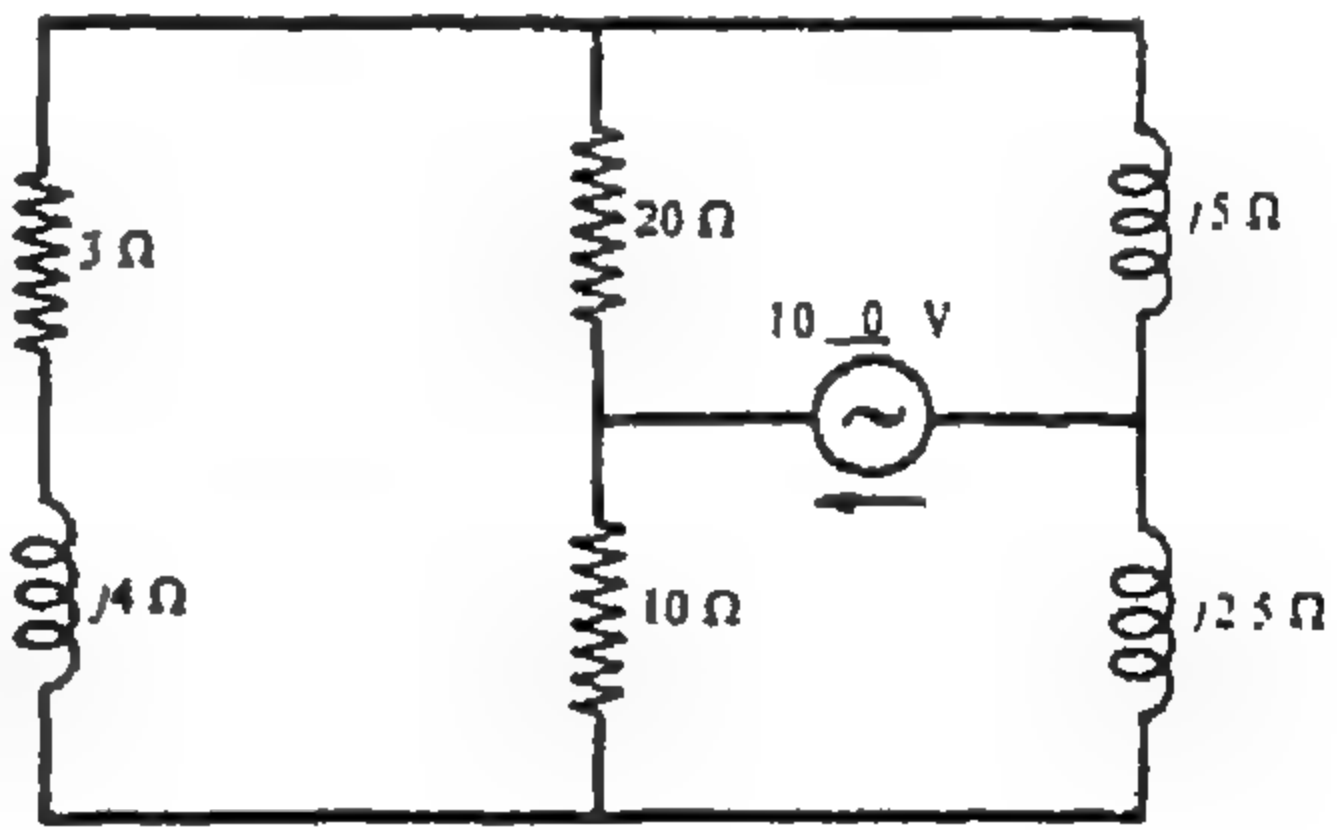
الجواب : $P_1 = 11.0 W, P_2 = 9.34 W$

٣١ - ٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ٣١ - ٩ أوجد التيار المار في المقاومة $3 + j4 \Omega$.

الجواب : صفر



شكل ٣٢ - ٩



شكل ٣١ - ٩

٣٢ - ٩ تسمى الدائرة الموضحة في الشكل ٣٢ - ٩ بقنطرة هـاي - اكتب معادلات تيارات الشبكة في الصيغة المصفوفية بحيث تختار تيارا واحدا فقط يمر في Z_D ، ثم عبر عن التيار المار في Z_D على صيغة محددة وساويها بالصفر .

أوجد R_x و L_x بدلالة الثوابت الأخرى للقنطرة .

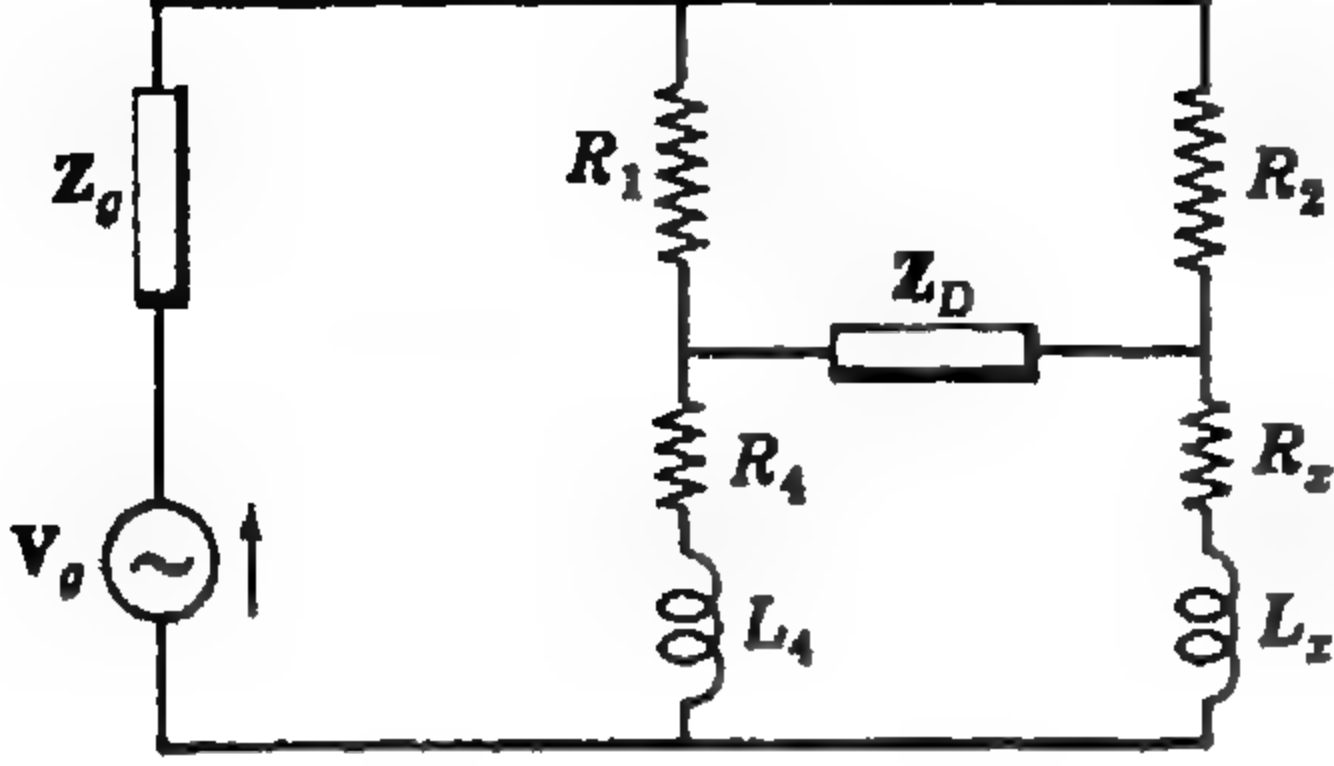
$$R_x = \frac{\omega^2 C_1^2 R_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}, \quad L_x = \frac{C_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} \quad \text{الجواب}$$

٣٣ - ٩ تسمى الدائرة الموضحة في الشكل ٣٣ - ٩ بقنطرة اون . أوجد R_x و L_x بدلالة الثوابت الأخرى للقنطرة ، وذلك عندما يكون التيار في Z_D مساويا للصفر .

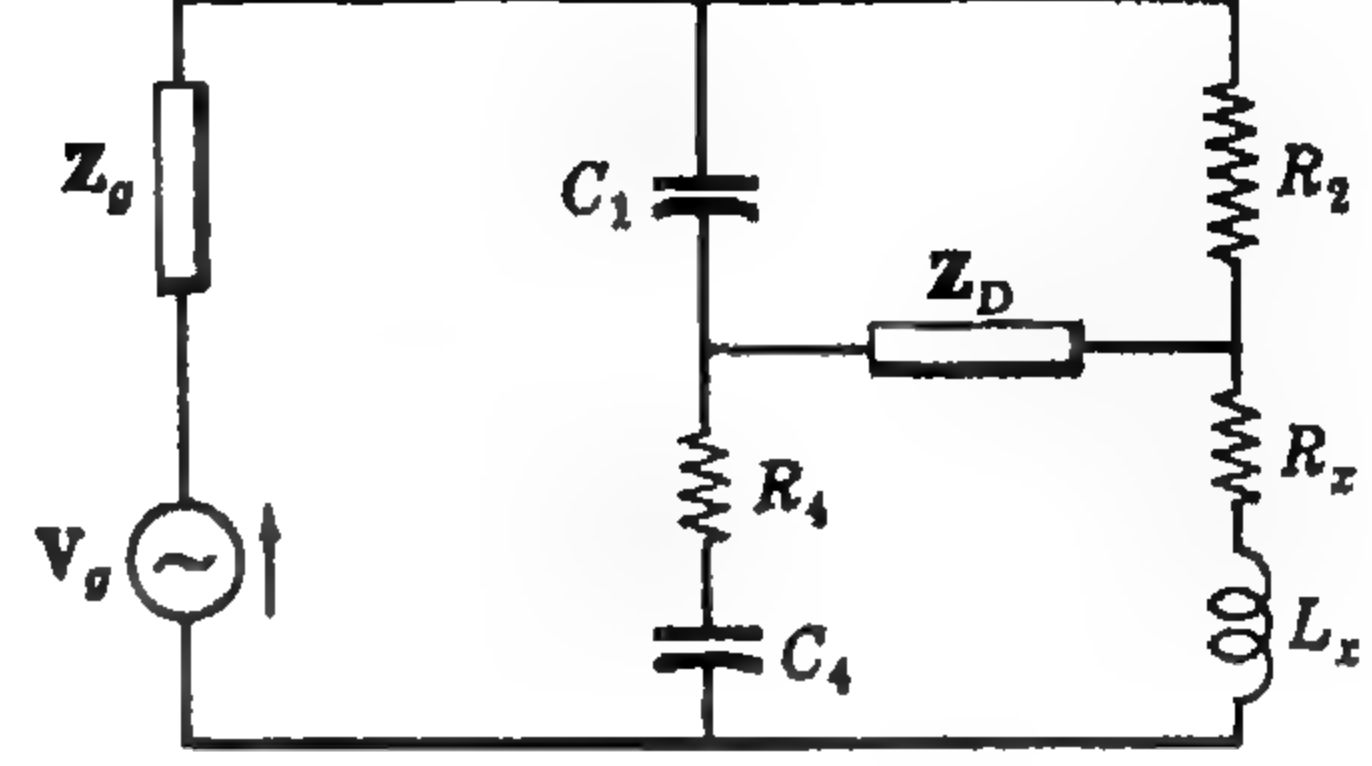
$$R_x = \frac{C_1}{C_4} R_2, \quad L_x = C_1 R_2 R_4 \quad \text{الجواب}$$

٣٤ - ٩ الدائرة الموضحة في الشكل ٣٤-٩ هي قنطرة للمقارنة بين حث الملفات المختلفة . اختر تيارات الشبكة ثم اكتب معادلاتها في الصيغة المصفوفية . أوجد R_x و L_x عندما يكون التيار في Z_D مساوياً للصفر .

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_4, \quad L_x = \frac{R_2}{R_1} L_4 \quad \text{الجواب}$$

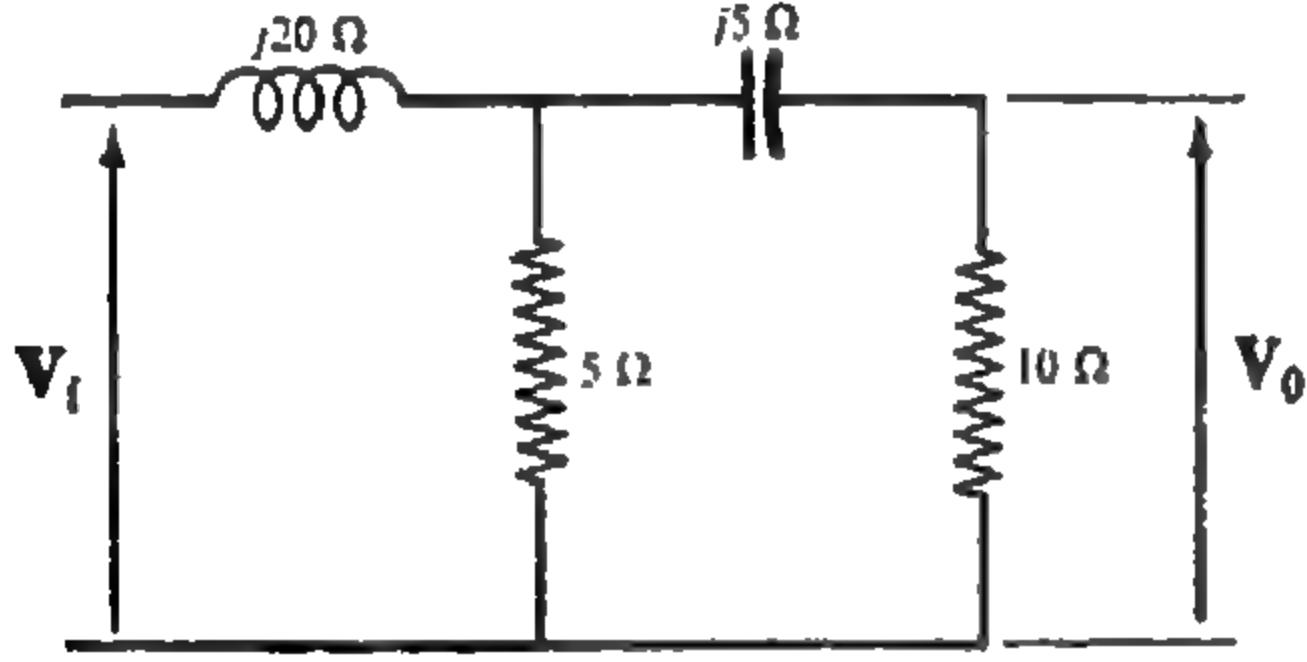


شكل ٩ - ٣٤

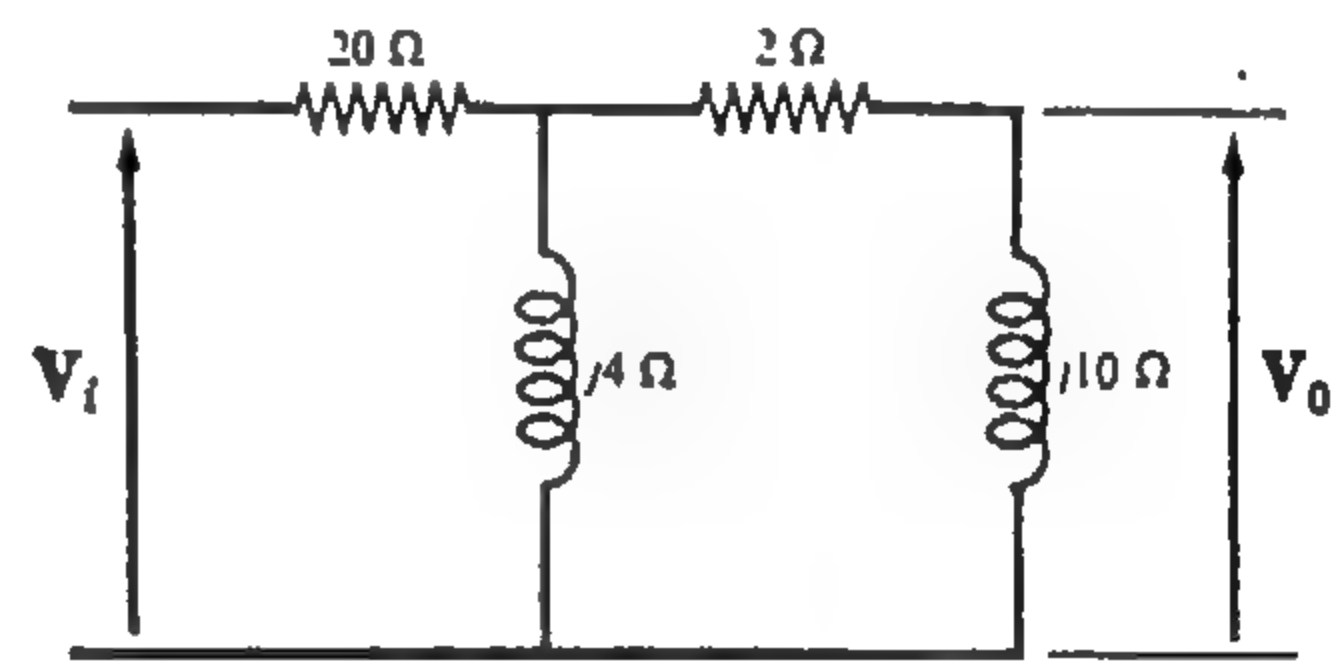


شكل ٩ - ٣٣

٣٥ - ٩ أوجد دالة انتقال الجهد V_0/V_i عبر الشبكة الموضحة في الشكل ٣٥-٩ . الجواب : $0.139/90^\circ$



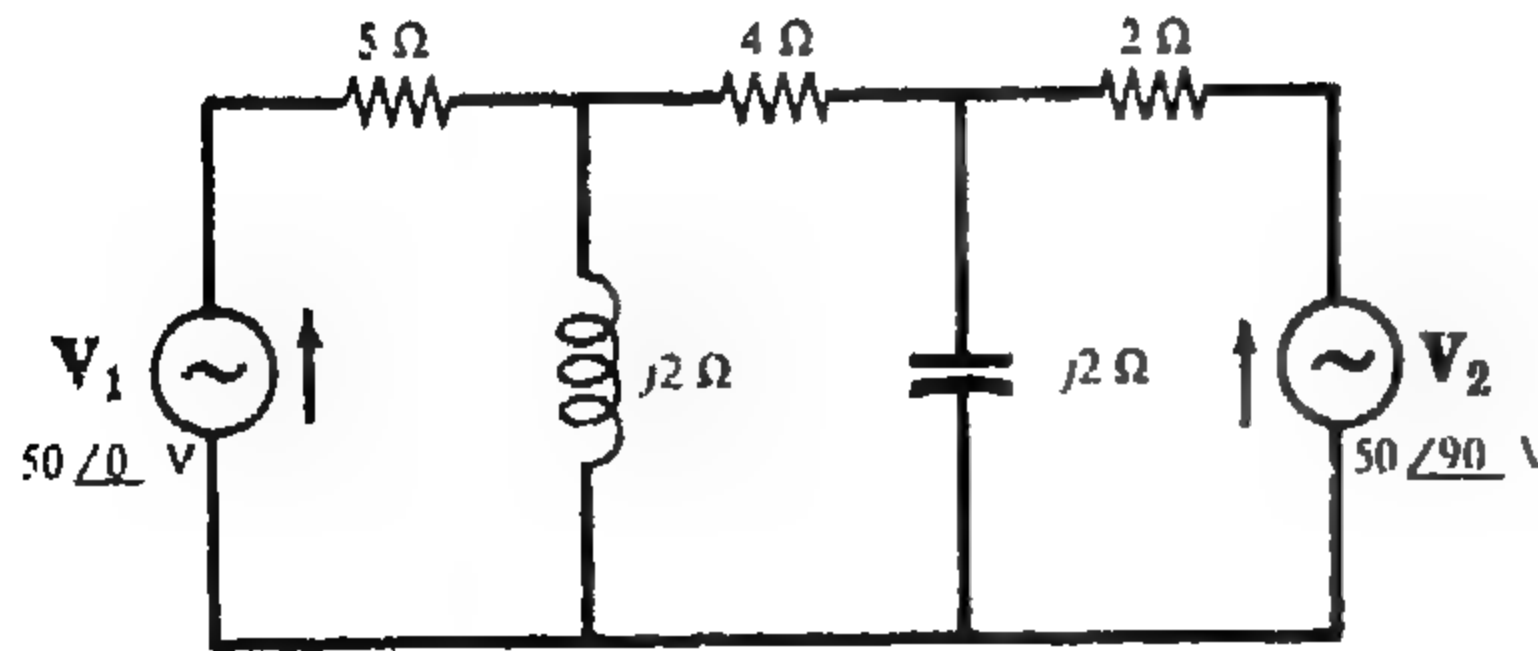
شكل ٩ - ٣٦



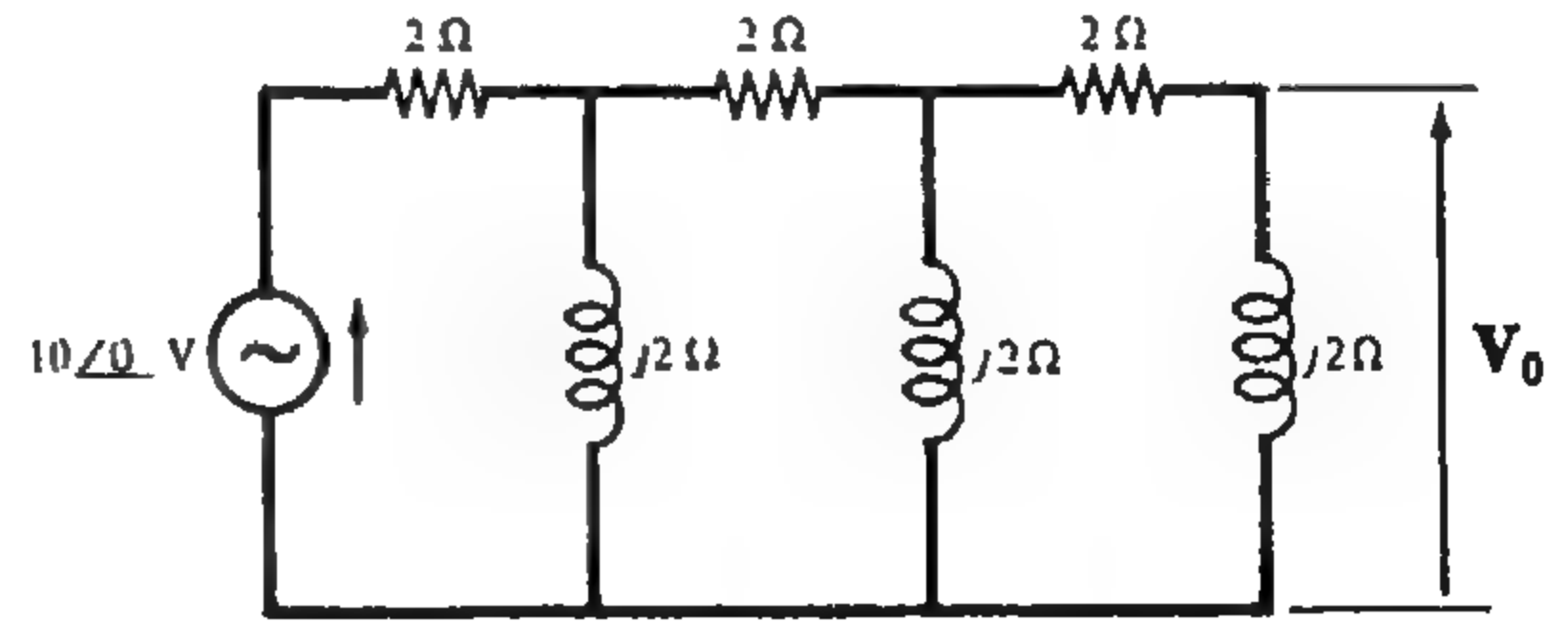
شكل ٩ - ٣٥

٣٦ - ٩ أوجد دالة انتقال الجهد V_0/V_i عبر الشبكة الموضحة في الشكل ٣٦-٩ . الجواب : $0.159/-61.4^\circ$

٣٧ - ٩ في الشبكة الموضحة في الشكل ٣٧-٩ ، أوجد V_0 بالقطبية الموضحة . الجواب : $1.56/128.7^\circ V$



شكل ٩ - ٣٨



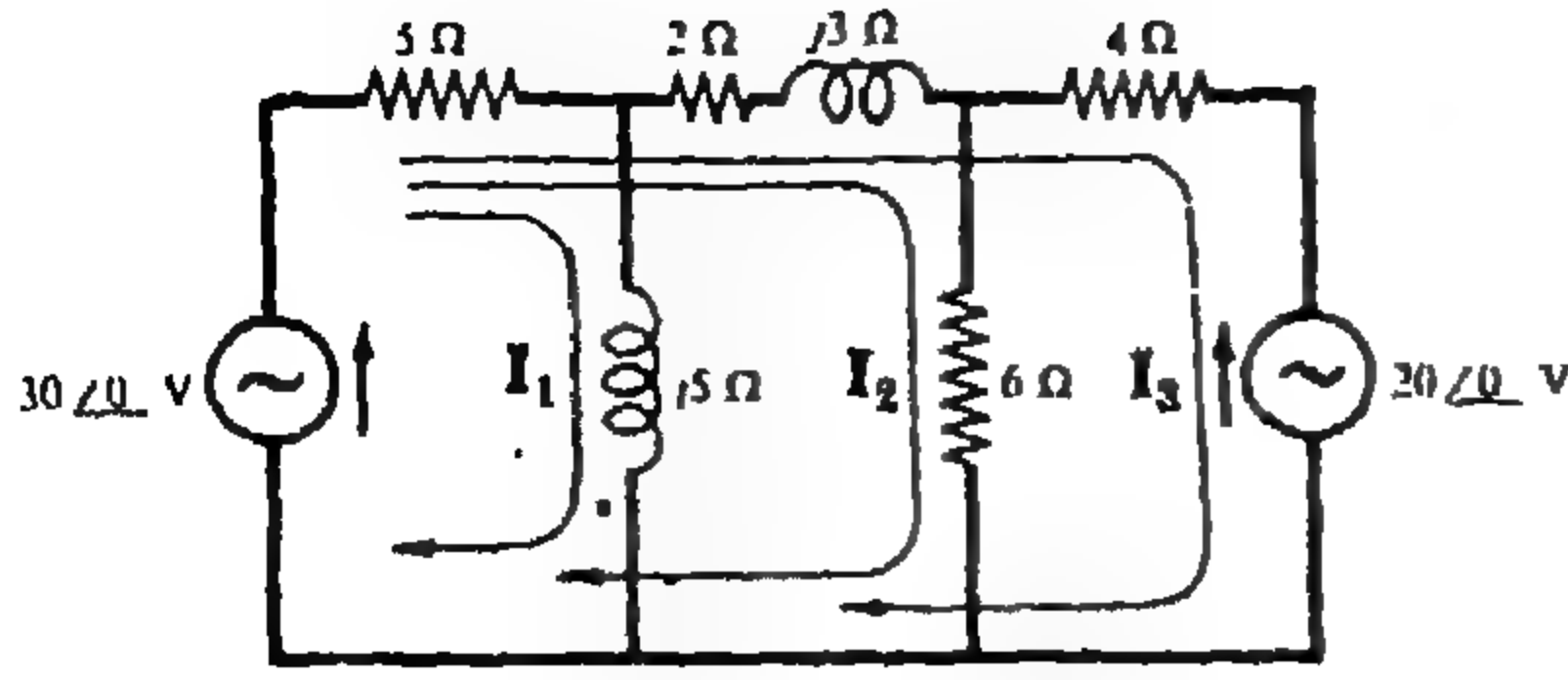
شكل ٩ - ٣٧

٣٨ - ٩ أوجد القدرة في كل من المقاومات الثلاث في الشبكة الموضحة في الشكل ٣٨-٩ .

$$\text{الجواب : } 471 \text{ W, } 47.1 \text{ W, } 471 \text{ W}$$

٣٩-٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٣٨-٩ أوجد القدرة المعطاة بكل مصدر جهد .

الجواب : $P_1 = 422 \text{ W}, P_2 = 565 \text{ W}$



شكل ٣٩-٩

٤٠-٩ في الشبكة الموضحة في الشكل ٣٩-٩ أوجد تيار الشبكة الفرعية I_3 وذلك لاختيار تيارات الشبكة المعطى

الجواب : $1.38 / -209.15^\circ \text{ A}$

الجواب : $11.6 / 113.2^\circ \text{ A}$

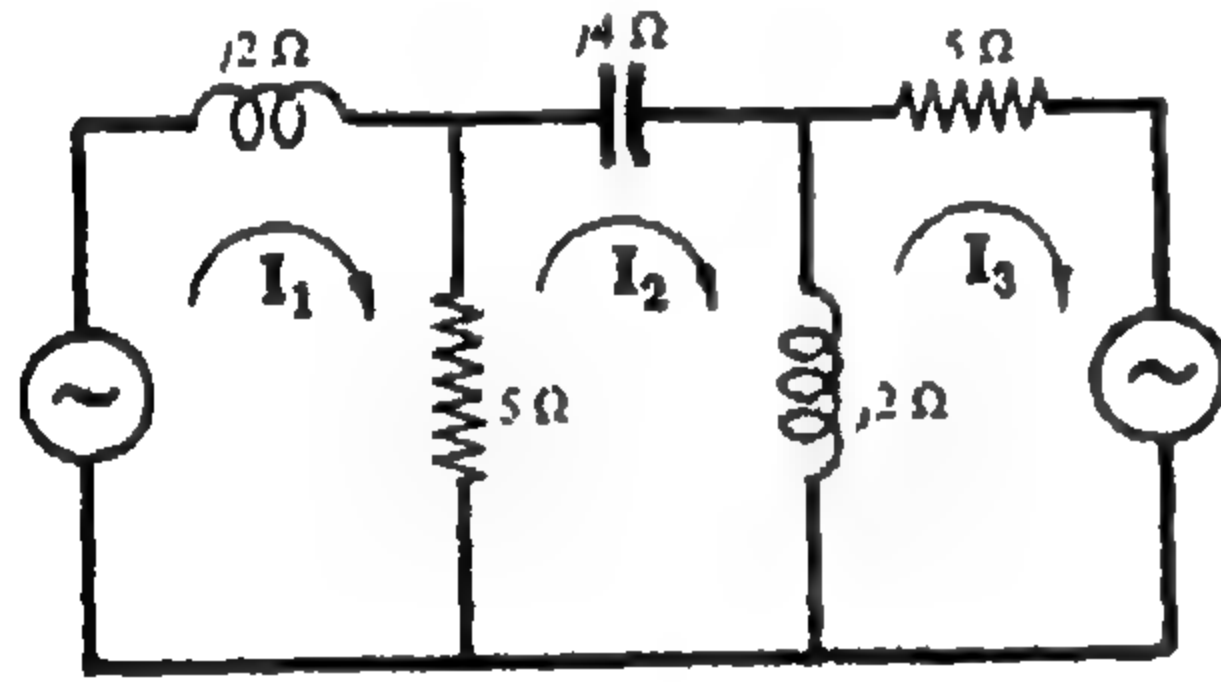
٤١-٩ أوجد التيار I_3 في الشبكة الموضحة في الشكل ٤٠-٩

الجواب : $-j 3.3$

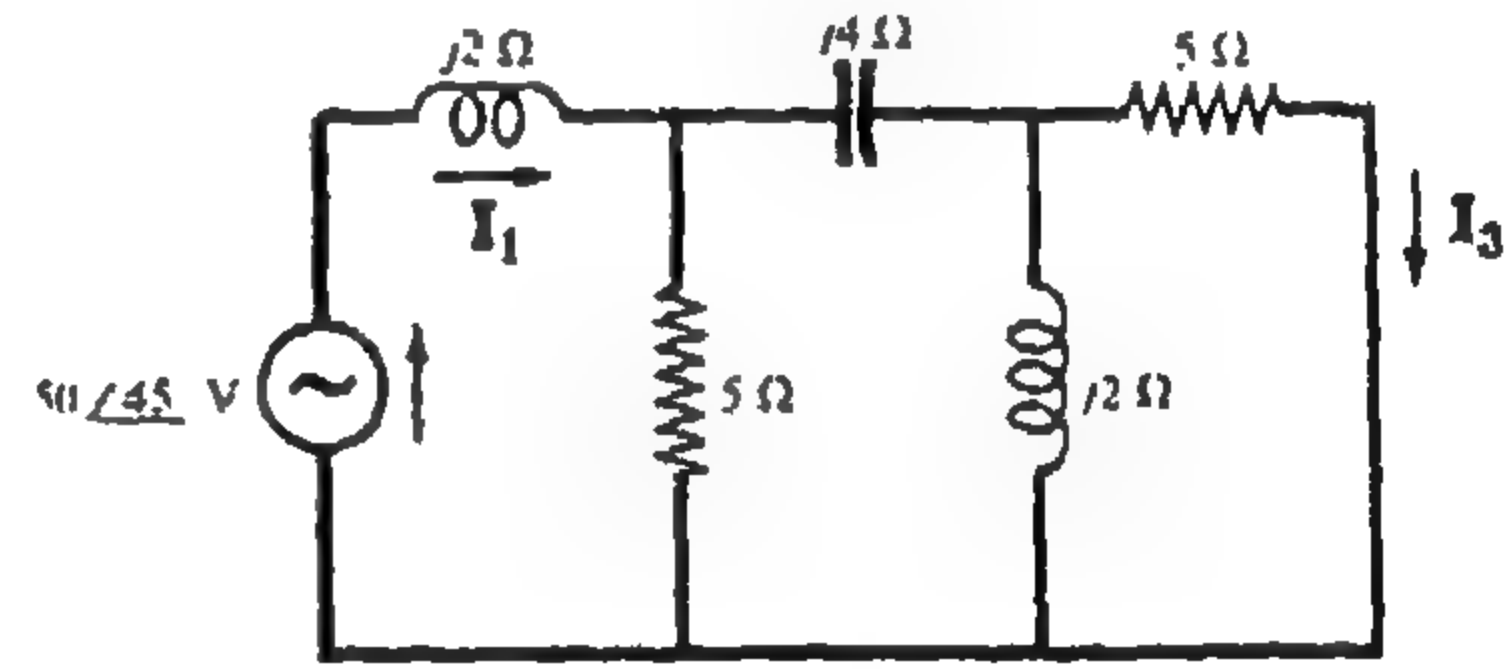
٤٢-٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ٤٠-٩ أوجد نسبة التيار I_1/I_3

٤٣-٩ في الشبكة المعطاة بالشكل ٤١-٩ ، موضح بها تيارات الشبكة الثلاثة في المسارات المغلقة الأولية . احسب معاوقى الانتقال Z_{31} و Z_{13}

الجواب : $4.3 / -68.2^\circ \Omega$



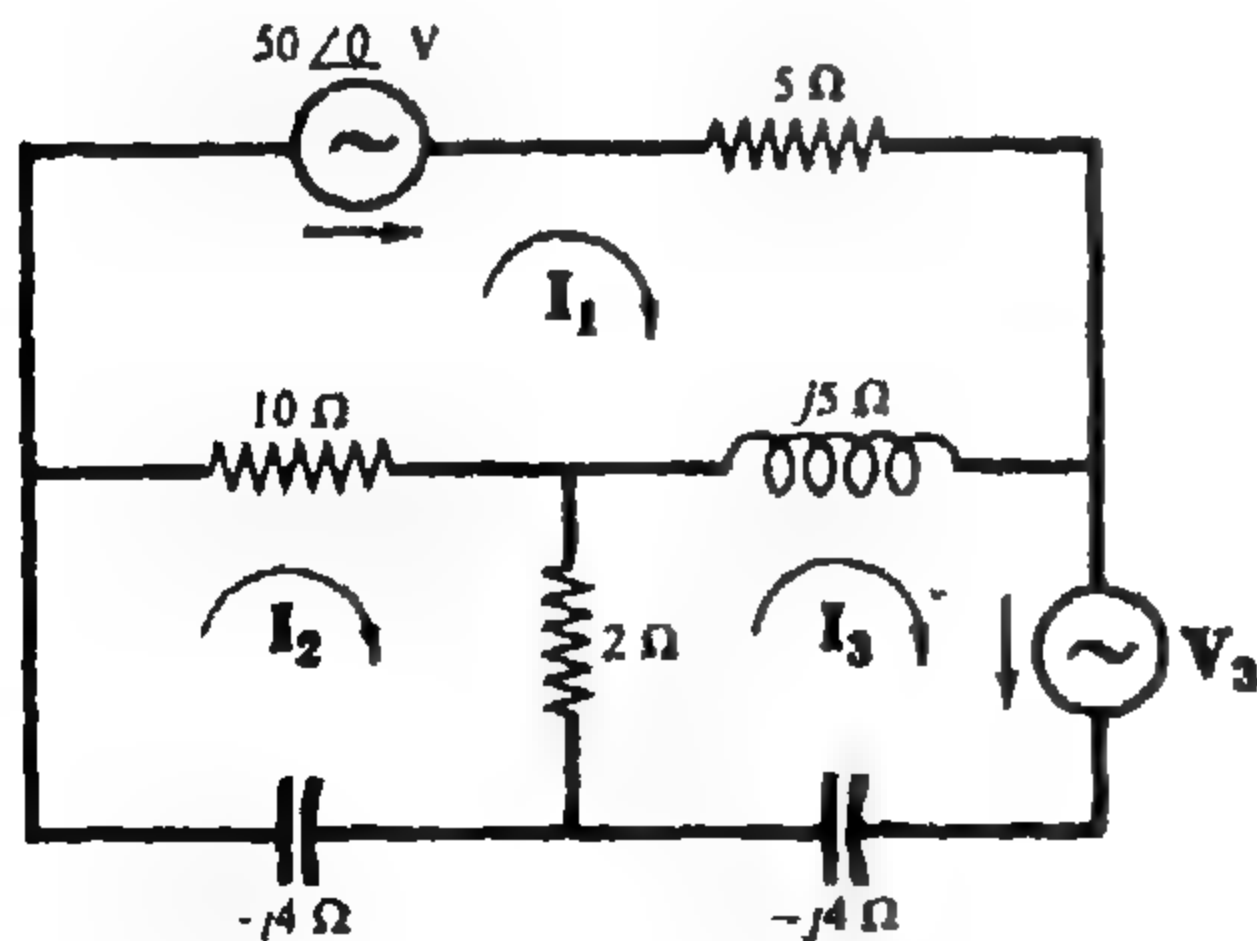
شكل ٤١-٩



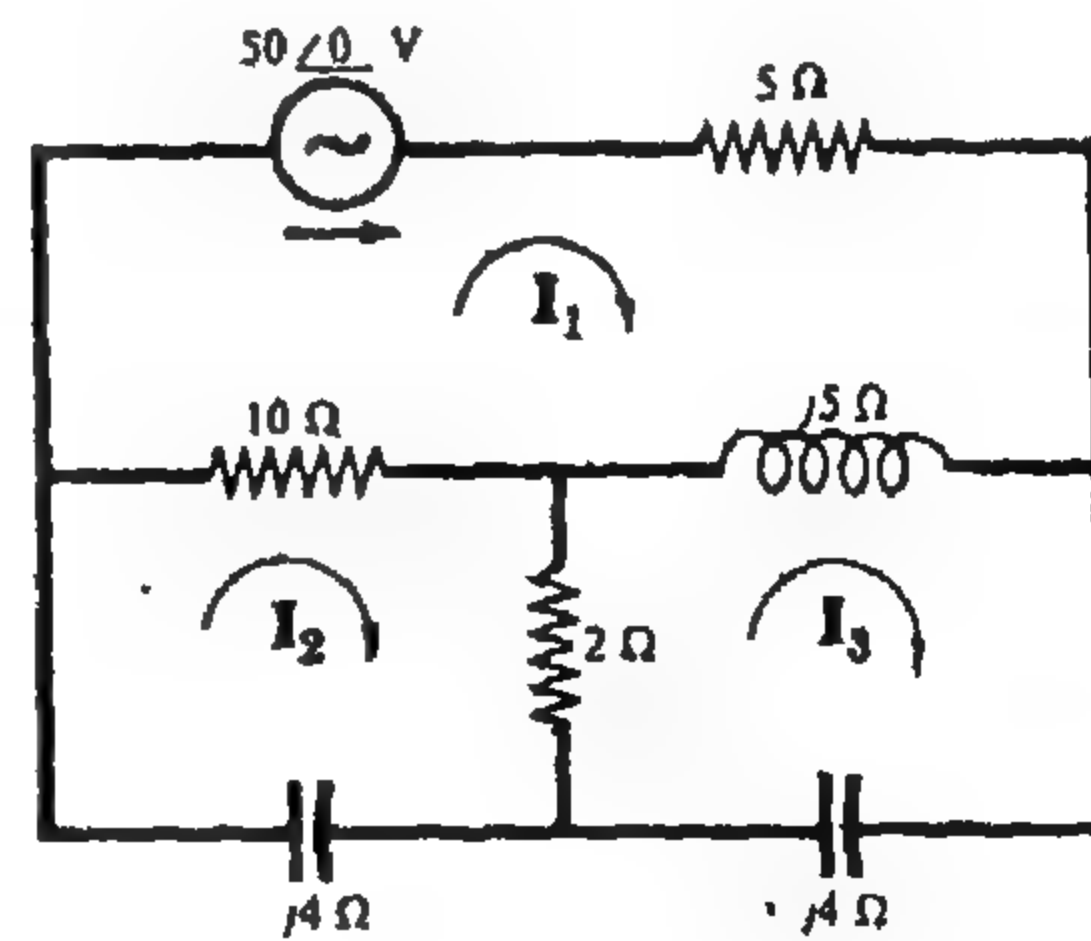
شكل ٤٠-٩

٤٤-٩ لتيارات الشبكات الفرعية الثلاث للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٤٢-٩ أوجد المعاوقات Z_{12} و Z_{13} و Z_{input}

الجواب : $20.2 / 36.1^\circ \Omega, 17.4 / 71.6^\circ \Omega, 6.82 / 82.9^\circ \Omega$



شكل ٤٣-٩

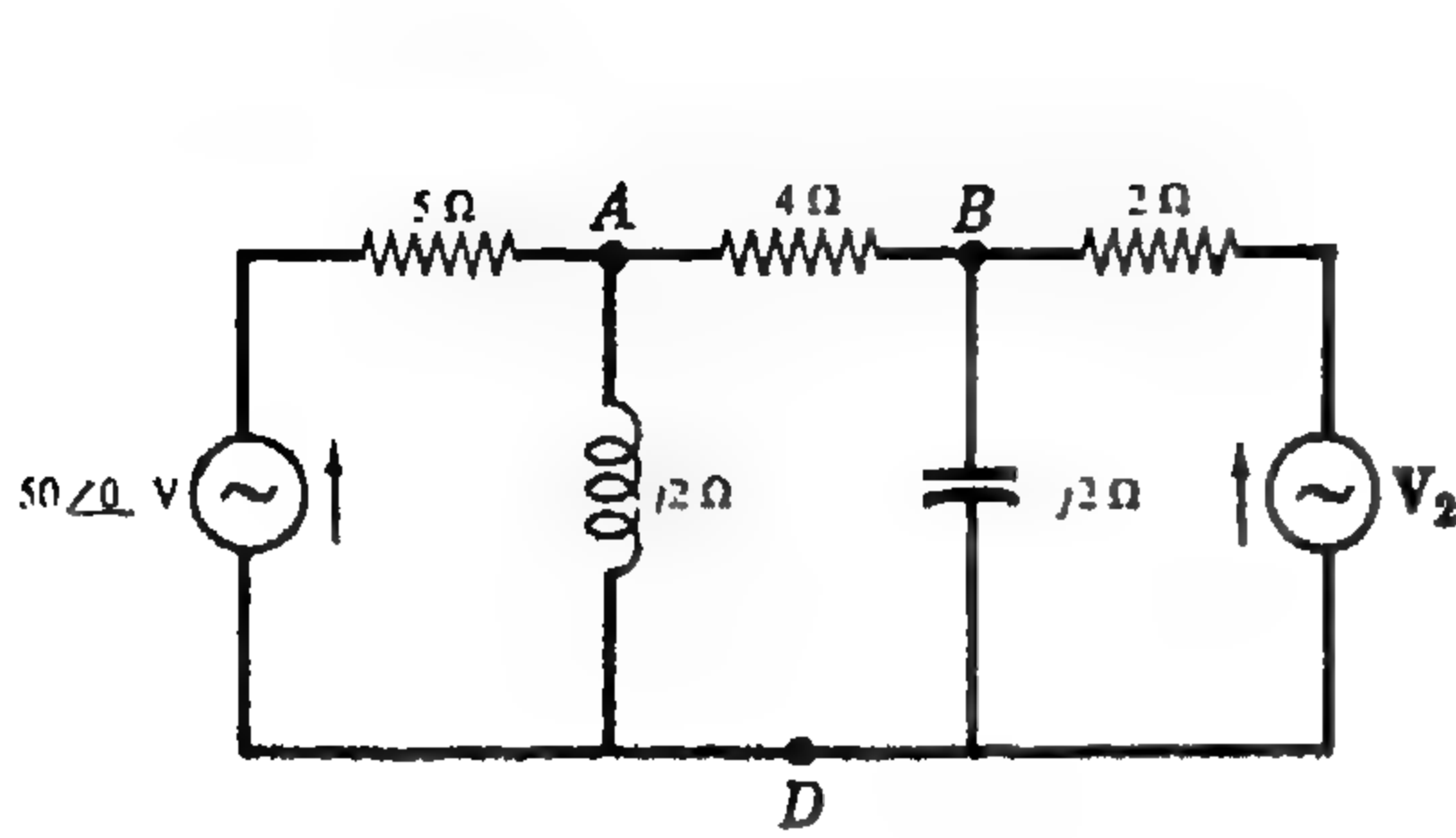


شكل ٤٢-٩

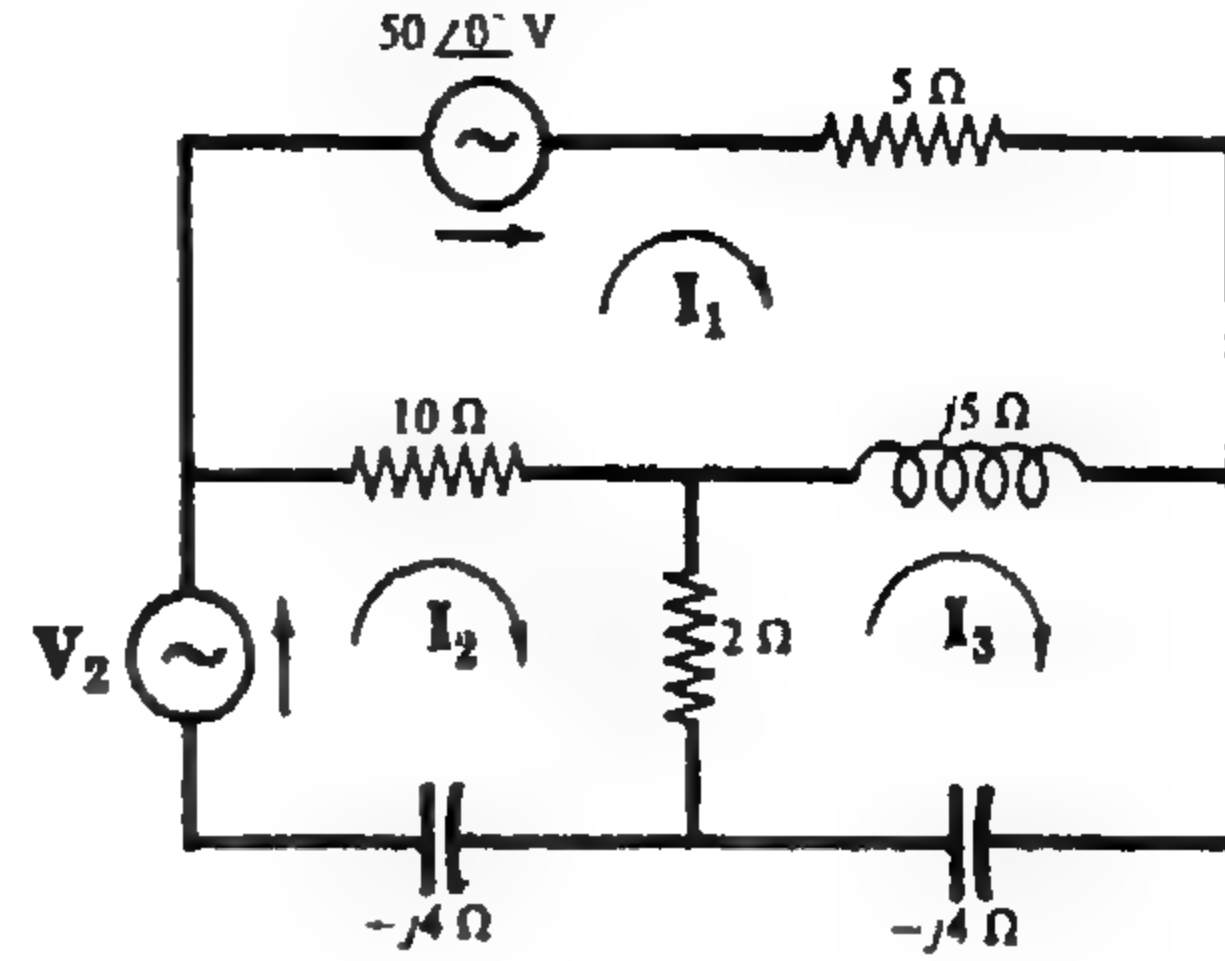
٤٥-٩ الشكل ٤٣-٩ هو الشكل ٤٢-٩ بعد إضافة مصدر الجهد V_3 . أوجد قيمة V_3 التي تجعل التيار I_1 مساويا للصفر.

الجواب : $16.8 / 133.2^\circ \text{ V}$

٩ - ٤٦ : الشكل ٩-٤٤ هو الشكل ٩-٤٢ بعد إضافة مصدر الجهد V_2 . أوجد قيمة V_2 التي تجعل التيار I_1 مساويا للصفر .
الجواب : $42.9/144.5^\circ V$

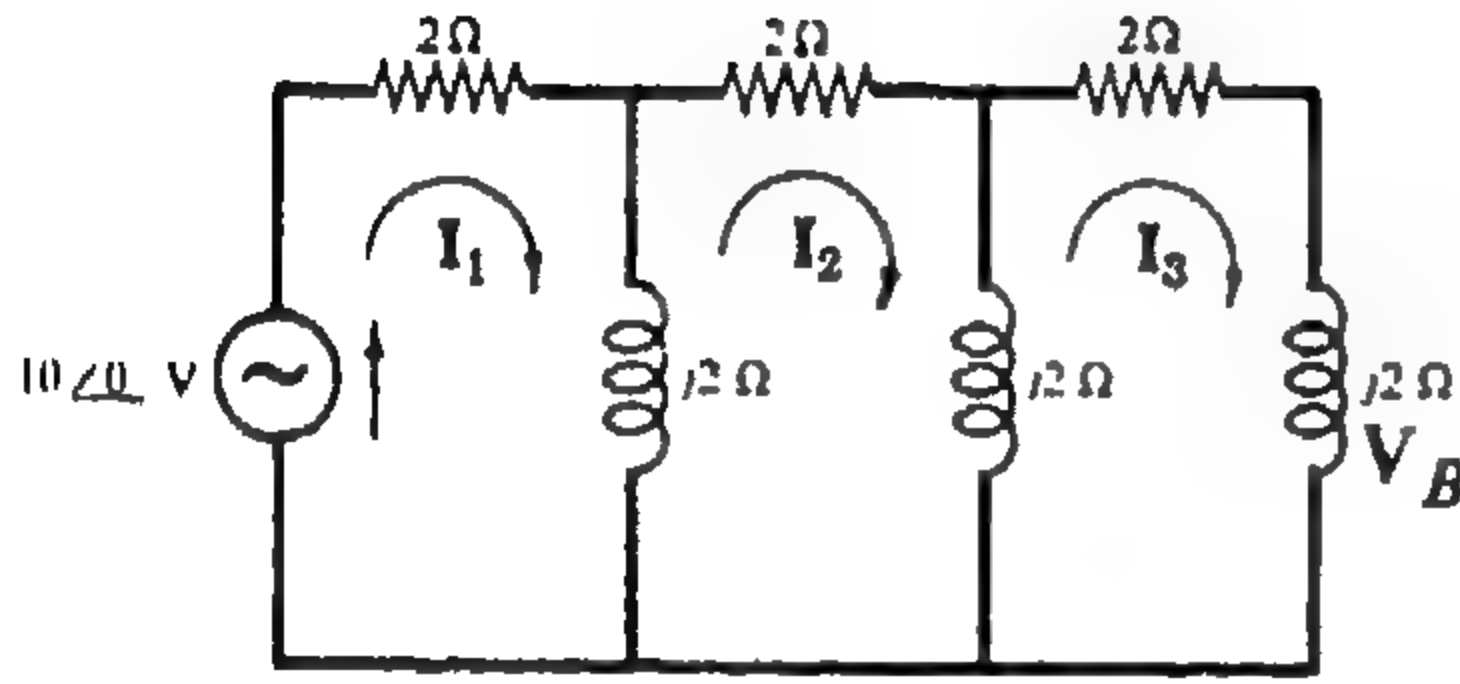


شكل ٩ - ٤٥



شكل ٩ - ٤٤

٩ - ٤٧ : في الشبكة الموضحة في الشكل ٩-٤٥ أوجد قيمة V_2 التي تجعل التيار المار خلال المقاومة 4Ω مساويا للصفر .
الجواب : $26.3/113.2^\circ V$



شكل ٩ - ٤٦

٩ - ٤٨ : في الشبكة الموضحة في الشكل ٩-٤٥ أوجد قيمتي V_{AD} ، V_{BD} عندما تكون قيمة $V_2 = 26.3/113.2^\circ \text{ volts}$.

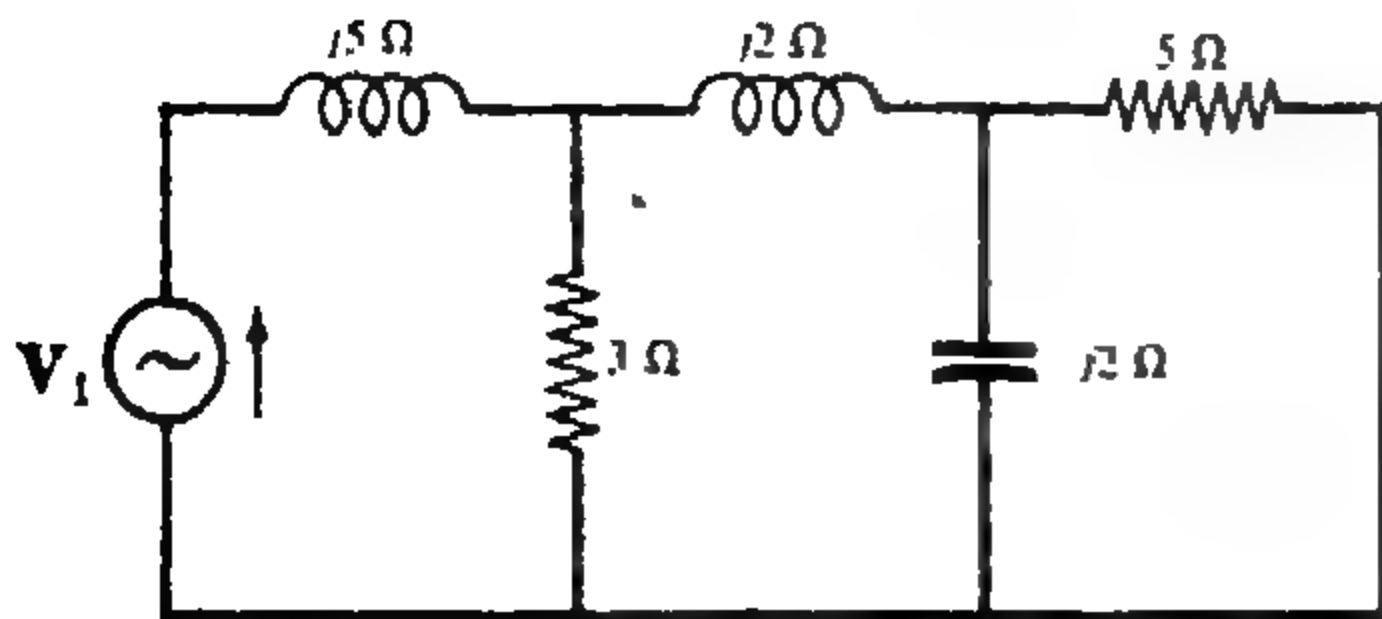
الجواب : $V_{AD} = V_{BD} = 18.5/68.1^\circ V$

٩ - ٤٩ : في الشبكة الموضحة في الشكل ٩-٤٦ ولاختيار تيارات الشبكة الموضح - أوجد معاوقة الانتقال Z_{13} . ثم أوجد I_3 باستخدام معاوقة الانتقال هذه .
الجواب : $12.8/38.7^\circ \Omega, 0.782/38.7^\circ \Omega$

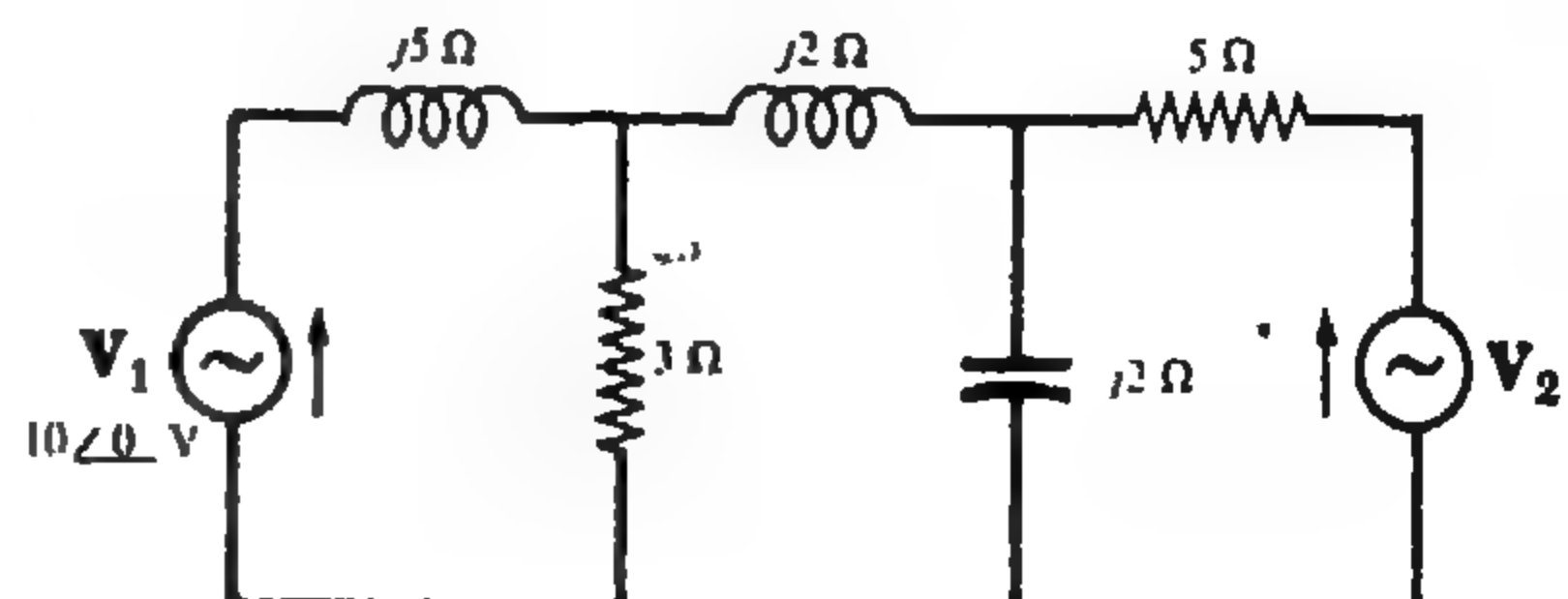
٩ - ٥٠ : في الشبكة الموضحة في الشكل ٩-٤٧ - أوجد قيمة V_2 التي تجعل تيار المصدر V_2 مساويا للصفر .

الجواب : $V_2 = 4/180^\circ V$

٩ - ٥١ : في الشبكة الموضحة في الشكل ٩-٤٨ - أوجد مقدار مصدر الجهد V_1 الذي ينتج عنه قيمة فعالة للجهد عبر المقاومة 5Ω مساوية 20 volts .
الجواب : 69.1 V



شكل ٩ - ٤٨



شكل ٩ - ٤٧

الفصل العاشر

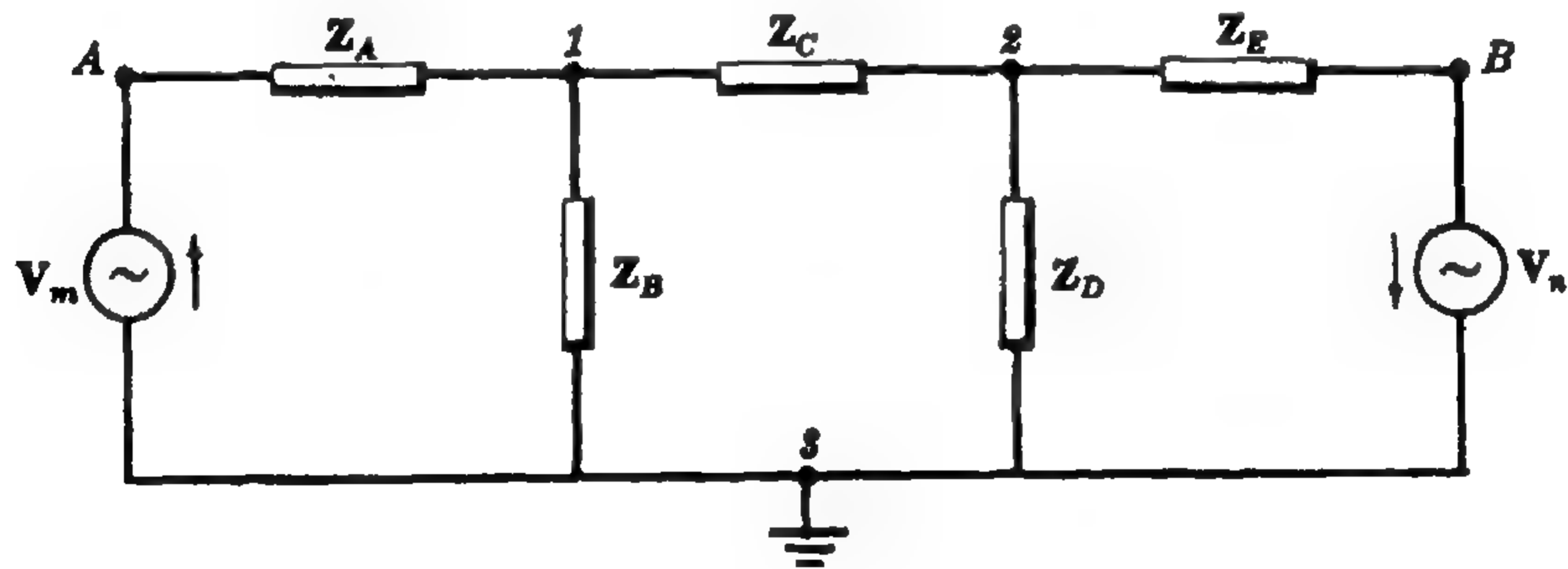
تحليل الشبكات بطريقة جهد العقدة

مقدمة :

استعرضنا في الفصل التاسع طريقة اختيار مسارات التيار المغلقة وتطبيق قانون كيرشوف للجهد ، وذلك لحل الشبكات الكهربائية بطريقة تيارات الشبكات الفرعية . وفي هذا الفصل سنحصل على نفس الحل عن طريقة مجموعة المعادلات الناتجة عن تطبيق قانون كيرشوف للتيار . وتسمى هذه بطريقة جهد العقدة .

جهود العقدة :

العقدة هي نقطة مشتركة في الشبكة الكهربائية لعنصرين أو أكثر من عناصر الدائرة . وإذا اتصل ثلاثة عناصر أو أكثر عند عقدة ما ، فإن هذه العقدة ، تسمى بالعقدة الأساسية أو بنقطة اتصال . ويرمز لكل عقدة في الدائرة بعدد أو بحرف . وفي الشكل ١-١٠ نجد أن 1, 2, 3 و A, B ترمز إلى عقدة ويرمز 1, 2, 3 إلى عقدة أساسية أو نقط اتصال . وجهد العقدة هو جهد مفروضة بالنسبة لعقدة معينة تسمى عقدة الإسناد . وفي الشكل ١-١٠ إذا اخترنا العقدة 3 كعقدة إسناد ، فإن V_{13} يمثل الجهد بين العقدتين 1 و 3 ، V_{23} يمثل الجهد بين العقدتين 2 و 3 . وبما أن جهد العقد يحدد دائماً بالنسبة لعقدة الإسناد فإننا نستخدم الرموز V_1 و V_2 بدلا من V_{13} و V_{23} على الترتيب .

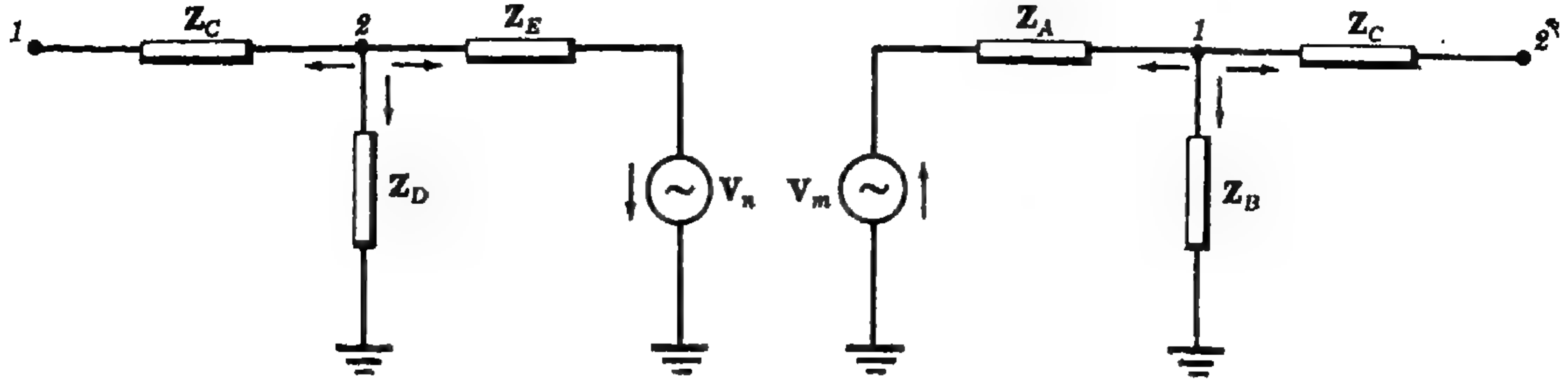


شكل ١-١٠ عقد الشبكة الكهربائية

وتعتمد طريقة جهد العقدة على إيجاد كل جهود العقد الأساسية بالنسبة لعقدة الإسناد . وبتطبيق قانون كيرشوف للتيار على نقطتي الاتصال 1 و 2 فإننا نحصل على معادلتين في المجهولين V_1 و V_2 . وفي الشكل ١-١٠ أعيد رسم العقدة 1 مع توضيح جميع الأفرع المتصلة بها ، ونفرض أن كل تيارات الأفرع خارجة من العقدة ، وبما أن مجموع التيارات الخارجة من نقطة اتصال يساوي صفراً فإن :

$$(1) \quad \frac{V_1 - V_m}{Z_A} + \frac{V_1}{Z_B} + \frac{V_1 - V_2}{Z_C} = 0$$

واتجاه التيارات في المعادلة (١) اتجاه اختياري . أنظر المسألة ١٠ - ١ .



شكل ١٠ - ٣

شكل ١٠ - ٢

وبتكرار نفس الطريقة للعقدة 2 تكون المعادلة الناتجة هي :

$$(٢) \quad \frac{V_2 - V_1}{Z_C} + \frac{V_2}{Z_D} + \frac{V_2 + V_n}{Z_E} = 0$$

وبترتيب الحدود في المعادلتين (١) ، (٢) فإن مجموعة المعادلتين تكون

$$(٣) \quad \begin{aligned} \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} \right) V_1 - \left(\frac{1}{Z_C} \right) V_2 &= \left(\frac{1}{Z_A} \right) V_m \\ - \left(\frac{1}{Z_C} \right) V_1 + \left(\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_D} + \frac{1}{Z_E} \right) V_2 &= - \left(\frac{1}{Z_E} \right) V_n \end{aligned}$$

ربما أن $1/Z = Y$ ، فإن مجموعة المعادلات (٣) يمكن إعادة كتابتها بالنسبة للمسامحات كالآتي :

$$(٤) \quad \begin{aligned} (Y_A + Y_B + Y_C)V_1 - Y_C V_2 &= Y_A V_m \\ -Y_C V_1 + (Y_C + Y_D + Y_E)V_2 &= -Y_E V_n \end{aligned}$$

عدد معادلات جهد العقدة :

باستثناء عقدة الإسناد فإنه يمكننا كتابة المعادلات عند كل عقدة أساسية في الشبكة الكهربائية . « وعلى ذلك فإن عدد المعادلات المطلوبة يكون أقل من عدد العقد الأساسية بواحد » . ويعتمد اختيار الطريقة الأنسب من بين طريقتي تيار الشبكة وجهد العقدة لحل شبكة كهربائية معطاة على تركيب الشبكة نفسها . وإذا كانت الشبكة الكهربائية تحتوي على عدة أفرع متصلة على التوازي فسيكون لها عدد من المسارات المغلقة أكثر من عدد العقد ، ولذلك فهي تحتاج عددا أقل من معادلات العقدة لحلها . أنظر المسألة ٩-٦ في الفصل التاسع والمسألة ١٠-٤ . وفي حالات أخرى يكون عدد المسارات المغلقة مساويا لعدد العقد أو يكون عدد العقد أكبر من عدد المسارات المغلقة وعلى ذلك فإنه يجب حل كل شبكة كهربائية بالطريقة التي تعطينا أقل عدد من المعادلات .

معادلات العقد عن طريق الفحص :

تحتاج الشبكة الكهربائية التي بها أربع عقد أساسية إلى ثلاث معادلات عقد لحلها وهذه المعادلات تكتب عموما بالصيغة :

$$(٥) \quad \begin{aligned} Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + Y_{13} V_3 &= I_1 \\ Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 + Y_{23} V_3 &= I_2 \\ Y_{31} V_1 + Y_{32} V_2 + Y_{33} V_3 &= I_3 \end{aligned}$$

وتسمى Y_{11} بالمساحة الذاتية للعقدة 1 ، وتعطى بمجموع جميع المساحات المتصلة بالعقدة 1. وبالمثل تسمى Y_{22} و Y_{33} بالمساحتين الذاتيتين للعقدتين 2 و 3 ، وتعطيان بمجموع جميع المساحات المتصلة بالعقدة المقابلة لكل منهما .

تسمى Y_{12} بالمساحة التبادلية بين العقدتين 1 و 2 وتعطى بمجموع كل المساحات المتصلة بالعقدتين 1 و 2 . Y_{12} لها إشارة سالبة كما هو واضح من المعادلة الأولى من (٤) . وبالمثل فإن Y_{13} و Y_{23} هما المساحتان التبادليتان للعناصر المتصلة بالعقدتين (2 و 3) ، (1 و 3) على الترتيب . وكل المساحات التبادلية لها إشارات سالبة . لاحظ أن

$$Y_{13} = Y_{31}, Y_{23} = Y_{32}$$

I_1 هو مجموع كل تيارات المصدر عند العقدة 1 . وإشارة التيار الداخلى إلى العقدة موجبة بينما إشارة التيار الخارج من العقدة سالبة . I_2 و I_3 هما مجموعا التيارات عند العقدتين 2 و 3 على الترتيب .

وكما فى الصيغة المصفوفية لمعادلات تيار الشبكة (الفصل التاسع) فإن معادلات العقد الثلاث فى (٥) تكتب بالصيغة المصفوفية .

$$(٦) \quad \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

وتعطى جهود العقد V_1 و V_2 و V_3 بالمعادلات :

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & I_1 \\ Y_{21} & Y_{22} & I_2 \\ Y_{31} & Y_{32} & I_3 \end{vmatrix}}{\Delta_Y}, \quad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & I_1 & Y_{13} \\ Y_{21} & I_2 & Y_{23} \\ Y_{31} & I_3 & Y_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Y}, \quad V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & Y_{12} & Y_{13} \\ I_2 & Y_{22} & Y_{23} \\ I_3 & Y_{32} & Y_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Y}$$

وعند فك محددة كل بسط بالنسبة لعناصر العمود المحتوى على التيار فإننا نحصل على معادلات جهود العقد الآتية :

$$(٧) \quad V_1 = I_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y} \right) + I_2 \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y} \right) + I_3 \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y} \right)$$

$$(٨) \quad V_2 = I_1 \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_Y} \right) + I_2 \left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_Y} \right) + I_3 \left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_Y} \right)$$

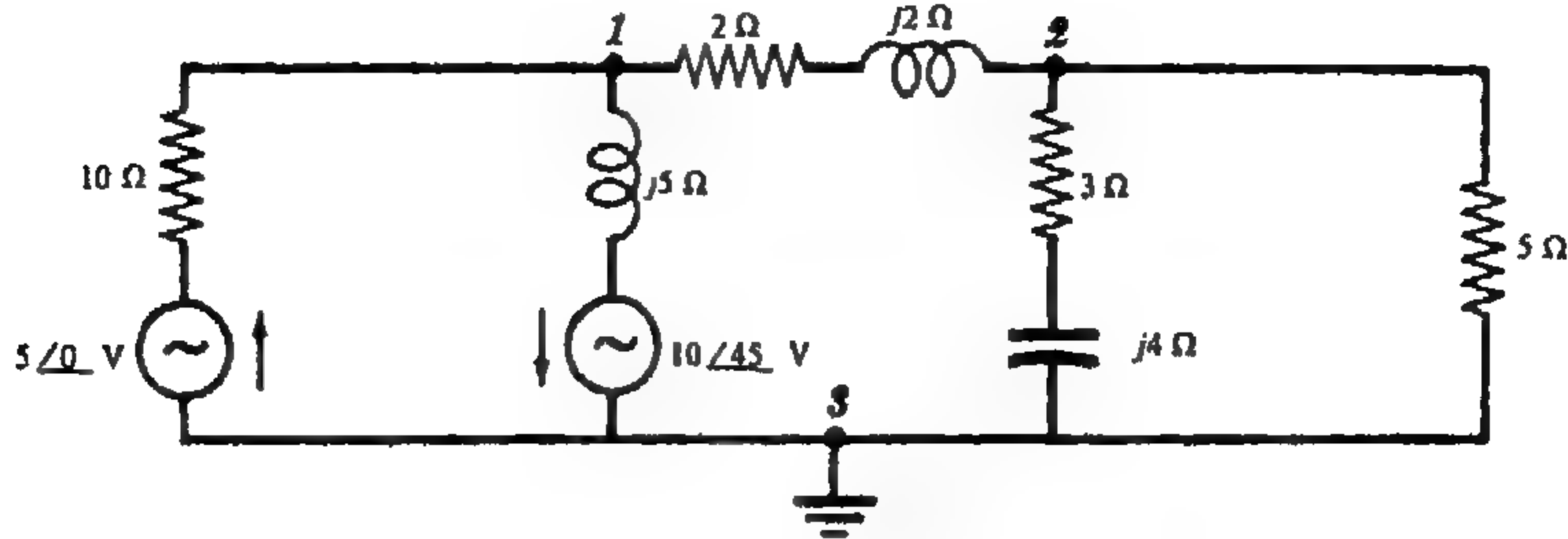
$$(٩) \quad V_3 = I_1 \left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_Y} \right) + I_2 \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_Y} \right) + I_3 \left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_Y} \right)$$

وحدود الأطراف اليمنى فى المعادلات (٧) ، (٨) ، (٩) هى المركبات المطاوعة الناتجة من التيارات المختلفة .

وعلى ذلك فى المعادلة (٧) نجد أن V_1 هو مجموع $I_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)$ الناتج عن التيار I_1 و $I_2(\Delta_{21}/\Delta_Y)$ الناتج عن التيار I_2 و $I_3(\Delta_{31}/\Delta_Y)$ الناتج عن التيار I_3

مثال :

اكتب معادلات جهد العقدة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٤ ثم عر عنها بالصيغة المصفوفية .



شكل ١٠ - ٤

نختار العقدة 3 عقدة اسناد والعقدتين 1 و 2 كما هو موضح في شكل الدائرة ونفرض أن تيارات كل الأفرع خارجة من العقدتين 1 و 2 . وبتطبيق كيرشوف للتيار عند كل عقدة نحصل على :

$$(١٠) \quad \text{عند العقدة 1 :} \quad \frac{V_1 - 5/0^\circ}{10} + \frac{V_1 + 10/45^\circ}{j5} + \frac{V_1 - V_2}{2 + j2} = 0$$

$$(١١) \quad \text{عند العقدة 2 :} \quad \frac{V_2 - V_1}{2 + j2} + \frac{V_2}{3 - j4} + \frac{V_2}{5} = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد أن

$$(١٢) \quad \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2 + j2} \right) V_1 - \left(\frac{1}{2 + j2} \right) V_2 = \frac{5/0^\circ}{10} - \frac{10/45^\circ}{j5}$$

$$(١٣) \quad -\left(\frac{1}{2 + j2} \right) V_1 + \left(\frac{1}{2 + j2} + \frac{1}{3 - j4} + \frac{1}{5} \right) V_2 = 0$$

بمقارنة المصفوفة المربعة التي تحتوي على المساحة Y_{11} بالمعادلة (١٢) نجد أن $Y_{11} = 1/10 + 1/j5 + 1/(2 + j2)$ siemens وهذا يؤكد تعريف Y_{11} كساحة ذاتية للعقدة . ونجد أيضاً أن $Y_{12} = Y_{21} = -1/(2 + j2)$ siemens . تتفق مع تعريف المساحة التبادلية .

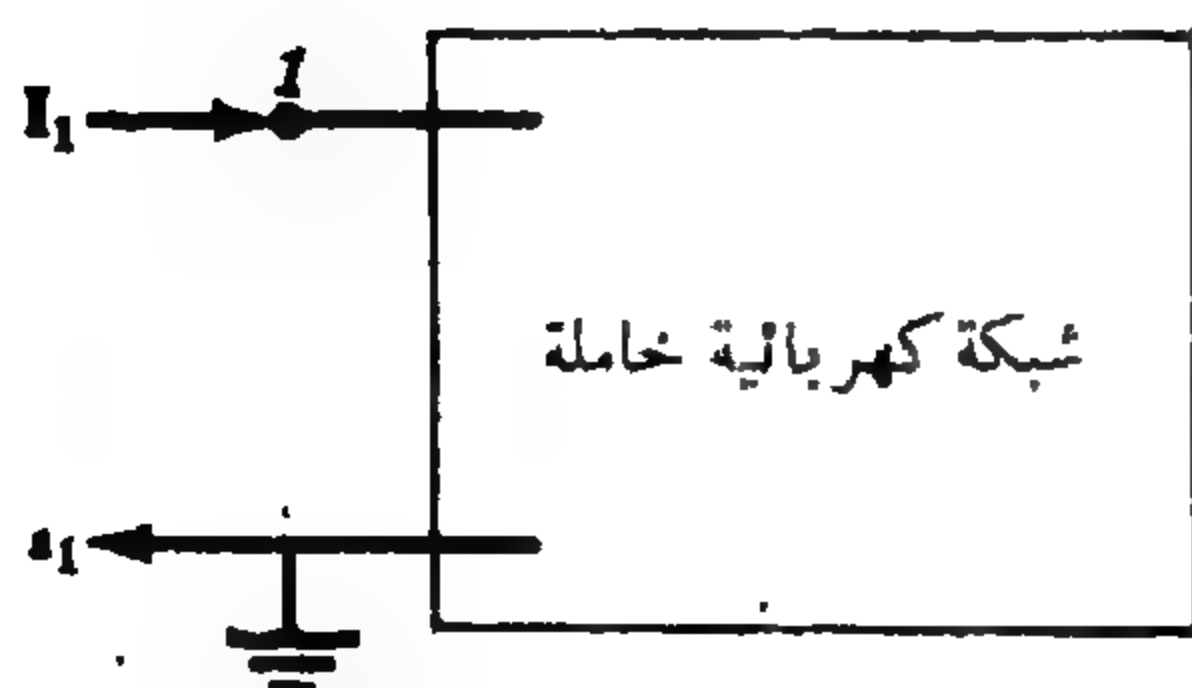
يعرف I_1 عموماً بأنه مجموع جميع التيارات عند العقدة 1 . وعلى حسب اختيار الإشارات فإن التيار الناتج عن مصدر الفرع الأيسر يتجه إلى العقدة 1 وعلى ذلك فإشارته موجبة ، بينما يخرج التيار الناتج عن مصدر الفرع الثاني من العقدة 1 وعلى ذلك فإشارته سالبة . إذن $I_1 = (5\angle 0^\circ)/10 - (10\angle 45^\circ)/j5$ amperes والتيار I_2 عند العقدة 2 يساوى صفر لعدم وجود أى مصدر في الأفرع المتصلة بالعقد 2

المساحة المحركة :

أعتبر الشبكة الكهربائية الحاملة ذات النهايتين الخارجيتين والموضحة في الشكل ١٠-٥ . افرض أن تيار المصدر يتجه إلى العقدة 1 وأن أى مساحه متصلة بالمصدر هي داخل الشبكة الكهربائية .

بما أنه لا يوجد أى مصدر آخر للتيار داخل الشبكة الكهربائية فإن

$$(١٤) \quad V_1 = I_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y} \right) \quad \text{معادلة } V_1 \text{ هي :}$$



شكل ١٠ - ٥

وتعرف المساحة المحركة أو Y_{input} بأنها النسبة بين التيار الخارج من مصدر التيار الوحيد الموجود بين عقدتين والمهبوط في الجهد الناتج بين العقدتين . إذن من المعادلة (١٤) نجد أن

$$Y_{input 1} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\Delta Y}{\Delta_{11}}$$

وتعرف مساحة الدخول لشبكة كهربائية حية بأنها المساحة التي تعطيها لنا الشبكة الكهربائية من خلال نهايتين محددتين وذلك مع وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر ، إذن :

$$V_1 = I_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta Y} \right) + (0) \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta Y} \right) + (0) \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta Y} \right) + \dots = I_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta Y} \right)$$

$$Y_{input 1} = I_1 / V_1 = \Delta Y / \Delta_{11} \quad \text{أو}$$

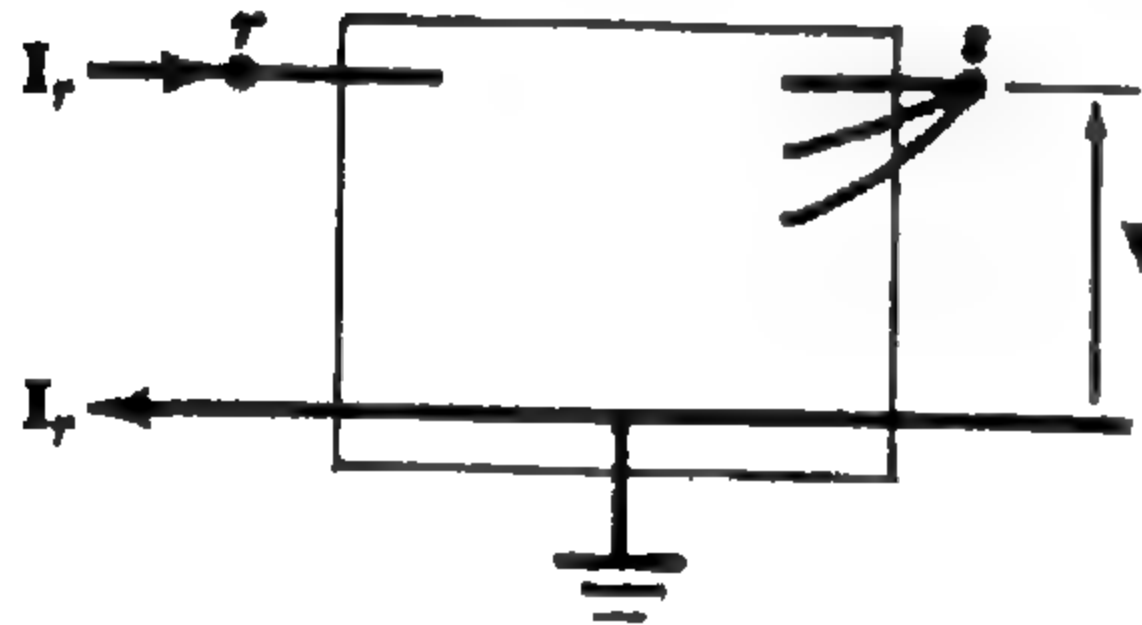
وعلى ذلك فإن تعريف Y_{input} يطبق للشبكات الكهربائية النشطة والخاملة .

مساحة الانتقال :

تنتج عن التيار المسار عند عقدة ما في الشبكة الكهربائية جهود عند كل العقدة بالنسبة لعقدة الإسناد . وعلى ذلك فإن مساحة الانتقال هي النسبة بين التيار المسار عند عقدة ما والجهد الناتج عند عقدة أخرى مع فرض أن جميع المصادر الأخرى مساوية للصفر .

في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٦ ، يعطى التيار I_r عند

العقدة r والجهد الناتج عند العقدة s بالمعادلة .



$$V_s = (0) \left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta Y} \right) + \dots + I_r \left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta Y} \right) + \dots + (0) \left(\frac{\Delta_{ss}}{\Delta Y} \right)$$

$$= I_r \left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta Y} \right)$$

$$Y_{transfer rs} = I_r / V_s = \Delta Y / \Delta_{rs} \quad \text{إذن}$$

شكل ١٠ - ٦

لاحظ أننا اخترنا نقطة رجوع التيار كمعقدة إسناد . وهذا الاختيار ضروري وإلا فإن التيار سيظهر في أكثر من حد في معادلة V_s وبذلك يكون تعريف $Y_{transfer}$ غير صحيح .

باستخدام المساحة المحركة ومساحة الانتقال نحصل على مجموعة المعادلات الآتية للجهود V_1 و V_2 و V_3 لشبكة كهربائية ذات أربع نقاط اتصال .

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{input 1}} + \frac{I_2}{Y_{transfer 21}} + \frac{I_3}{Y_{transfer 31}}$$

$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{transfer 12}} + \frac{I_2}{Y_{input 2}} + \frac{I_3}{Y_{transfer 32}}$$

$$V_3 = \frac{I_1}{Y_{transfer 13}} + \frac{I_2}{Y_{transfer 23}} + \frac{I_3}{Y_{input 3}}$$

ويظهر بوضوح تعاريف المساحة الداخلة ومساحة الانتقال عندما يؤثر مصدر واحد للتيار في الشبكة الكهربائية مع وضع المصادر الأخرى مساوية للصفر .

مسائل محلولة

١٠-١ اكتب معادلة العقدة للعقدة 2 الموضحة في الشكلين ١٠-١ (أ) ، ١٠-١ (ب) .
بما أن كل التيارات في الشكل ١٠-١ (أ) خارجة من العقدة 2 ، فبمساواة مجموع التيارات الخارجة من العقدة بالصفر نجد أن

$$(V_2 - V_1)/j2 + V_2/10 + (V_2 + 10\angle 0^\circ)/j5 = 0$$

$$-(1/j2)V_1 + (1/j2 + 1/10 + 1/j5)V_2 = -10\angle 0^\circ/j5$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد

في الشكل ١٠-١ (ب) نجد أن تيار فرع واحد فقط يدخل إلى العقدة 2 بينما يخرج منها تياران وبوضع التيار الداخل إلى العقدة مساويا لمجموع التيارين الخارجين منها نجد أن :

$$(V_1 - V_2)/j2 = V_2/10 + (V_2 + 10\angle 0^\circ)/j5$$

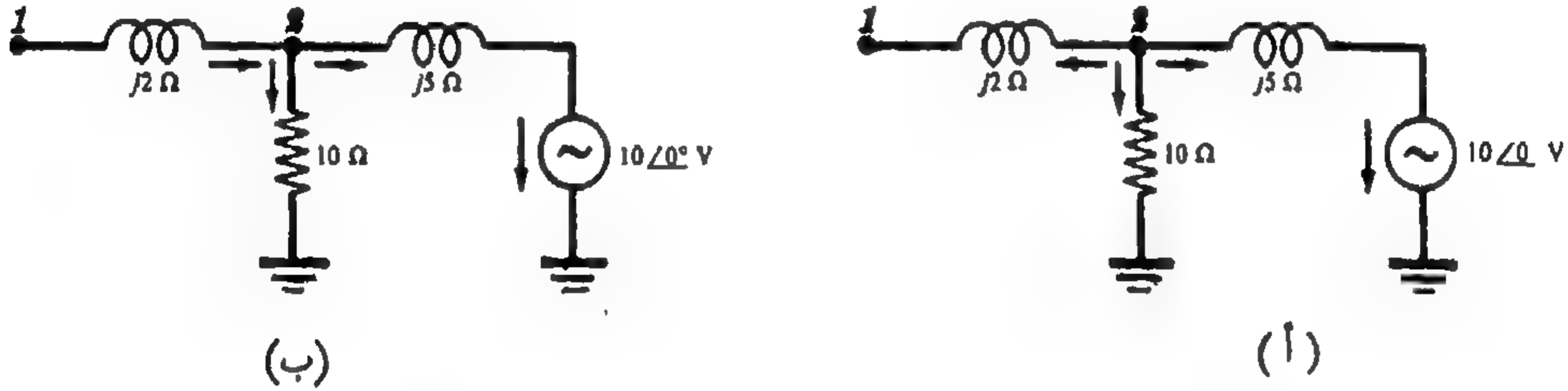
$$V_2/10 + (V_2 + 10\angle 0^\circ)/j5 + (V_2 - V_1)/j2 = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد

$$-(1/j2)V_1 + (1/j2 + 1/10 + 1/j5)V_2 = -10\angle 0^\circ/j5$$

أو

وعلى ذلك فإنه يمكننا اختيار أى اتجاه لتيارات الأفرع عند كتابة معادلات العقدة . وفي كل حالة ستكون المعادلات الناتجة متطابقة .



شكل ١٠ - ٧

١٠-٢ اكتب معادلات العقدة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٨ . ثم عبر عنها بالصيغة المصفوفية .

لدينا ثلاث عقد مرققة وكذلك عقدة الإسناد كما هو موضح في الشكل . بفرض أن تيارات جميع الأفرع خارجة من العقد فإنه يمكننا كتابة المعادلات التالية عند العقد 1 و 2 و 3 .

$$(V_1 - V_2)/(-j8) + V_1/5 + (V_1 - V_3 + 10\angle 0^\circ)/(3 + j4) = 0$$

$$(V_2 - V_1)/(-j8) + V_2/10 + (V_2 - V_3 - 5\angle 0^\circ)/(j4) = 0$$

$$V_3/8 + (V_3 - V_1 - 10\angle 0^\circ)/(3 + j4) + (V_3 - V_2 + 5\angle 0^\circ)/(j4) = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على

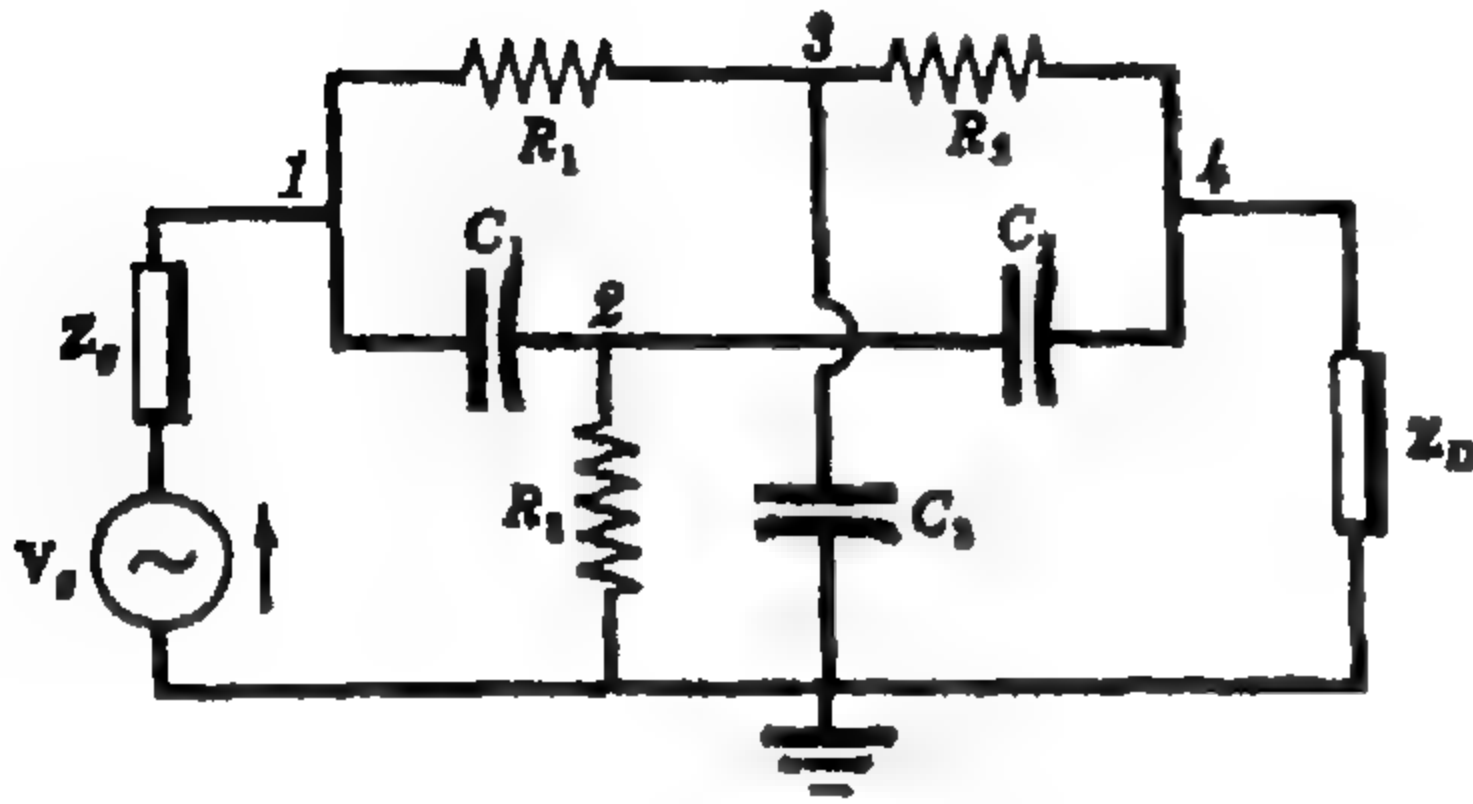
$$\left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3 + j4}\right)V_1 - \left(\frac{1}{-j8}\right)V_2 - \left(\frac{1}{3 + j4}\right)V_3 = (-10\angle 0^\circ)/(3 + j4)$$

$$-\left(\frac{1}{-j8}\right)V_1 + \left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{j4}\right)V_2 - \left(\frac{1}{j4}\right)V_3 = (5\angle 0^\circ)/(j4)$$

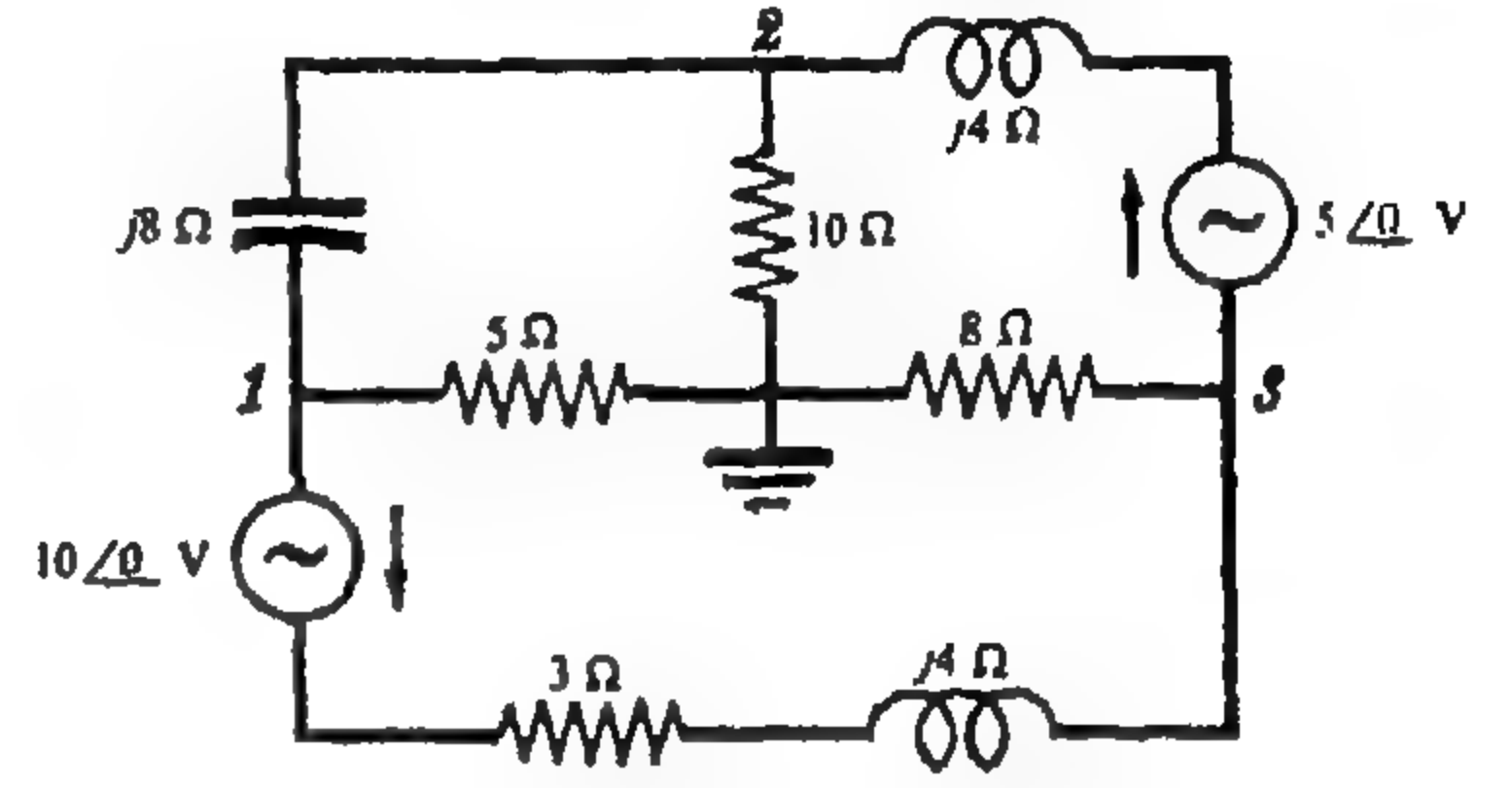
$$-\left(\frac{1}{3 + j4}\right)V_1 - \left(\frac{1}{j4}\right)V_2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{j4} + \frac{1}{3 + j4}\right)V_3 = \left(\frac{10\angle 0^\circ}{3 + j4}\right) - \left(\frac{5\angle 0^\circ}{j4}\right)$$

ومعادلات العقد في الصيغة المصفوفية هي

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3+j4} \right) & -\left(\frac{1}{-j8} \right) & -\left(\frac{1}{3+j4} \right) \\ -\left(\frac{1}{-j8} \right) & \left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{j4} \right) & -\left(\frac{1}{j4} \right) \\ -\left(\frac{1}{3+j4} \right) & -\left(\frac{1}{j4} \right) & \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{j4} + \frac{1}{3+j4} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{10/0^\circ}{3+j4} \right) \\ \left(\frac{5/0^\circ}{j4} \right) \\ \left(\frac{10/0^\circ}{3+j4} - \frac{5/0^\circ}{j4} \right) \end{bmatrix}$$



شكل ١٠ - ٩



شكل ١٠ - ٨

١٠-٣ أكتب عن طريق الفحص معادلات العقد بالصيغة المصفوفية للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٩ .

نختار العقد كما هو موضح في الشكل . في $[Y]$ نجد أن Y_{11} هي مجموع جميع المساحات المتصلة بالعقد 1. أي $(1/Z_g + 1/R_1 + j\omega C_1)$. Y_{12} و Y_{13} هما سالب مجموع المساحات بالعقدتين (1 و 2) و (1 و 3)، أي أن $Y_{12} = -(j\omega C_1)$ و $Y_{13} = -(1/R_1)$ على الترتيب . ويمكن تحديد الحدود الأخرى في $[Y]$ بطريقة ماثلة .

هناك تيار واحد فقط مار في الشبكة الكهربائية ومتجه ناحية العقدة 1 وعلى ذلك فإشارته موجبة . أي أن $I_1 = V_g/Z_g$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_g} + \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right) & -(j\omega C_1) & -\left(\frac{1}{R_1} \right) & 0 \\ -(j\omega C_1) & \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_3} + j\omega C_2 \right) & 0 & -(j\omega C_2) \\ -\left(\frac{1}{R_1} \right) & 0 & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_3 \right) & -\left(\frac{1}{R_2} \right) \\ 0 & -(j\omega C_2) & -\left(\frac{1}{R_2} \right) & \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2 + \frac{1}{Z_D} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g/Z_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

١٠-٤ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١٠ وضعت قيم المكثفين المتساويين في السعة C farad وقيمة المقاومة R بحيث كان التيار المار في المعاوقة Z_D مساويا للصفر . تحت هذا الشرط عين قيم R_x و L_x بدلالة الثوابت الأخرى للدائرة .

نختار العقد كما هو موضح في الشكل . وباختيار عقدة الإسناد في طرف ما للمعاوقة Z_D فإن جهد العقدة V_3 يساوى صفرا وبذلك يكون التيار المار في المعاوقة Z_D مساويا للصفر . وبكتابة معادلات العقد في الصيغة المصفوفية عن طريق الفحص نجد أن :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_g} + j\omega C + \frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & -\left(\frac{1}{R}\right) \\ -(j\omega C) & \left(j2\omega C + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{j\omega L_x}\right) & -(j\omega C) \\ -\left(\frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & \left(j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_D}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g/Z_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و بالتعبير عن V_3 بصيغة محددة ومساوئها بالصفر :

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{Z_g} + j\omega C + \frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & V_g/Z_g \\ -(j\omega C) & \left(j2\omega C + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{j\omega L_x}\right) & 0 \\ -\left(\frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = 0$$

إذن محدد البسط يساوى صفراً وبفكّه بالنسبة لعناصر العمود الثالث نحصل على :

$$(V_g/Z_g) \begin{vmatrix} -j\omega C & (j2\omega C + 1/R_x + 1/j\omega L_x) \\ -1/R & -j\omega C \end{vmatrix} = 0$$

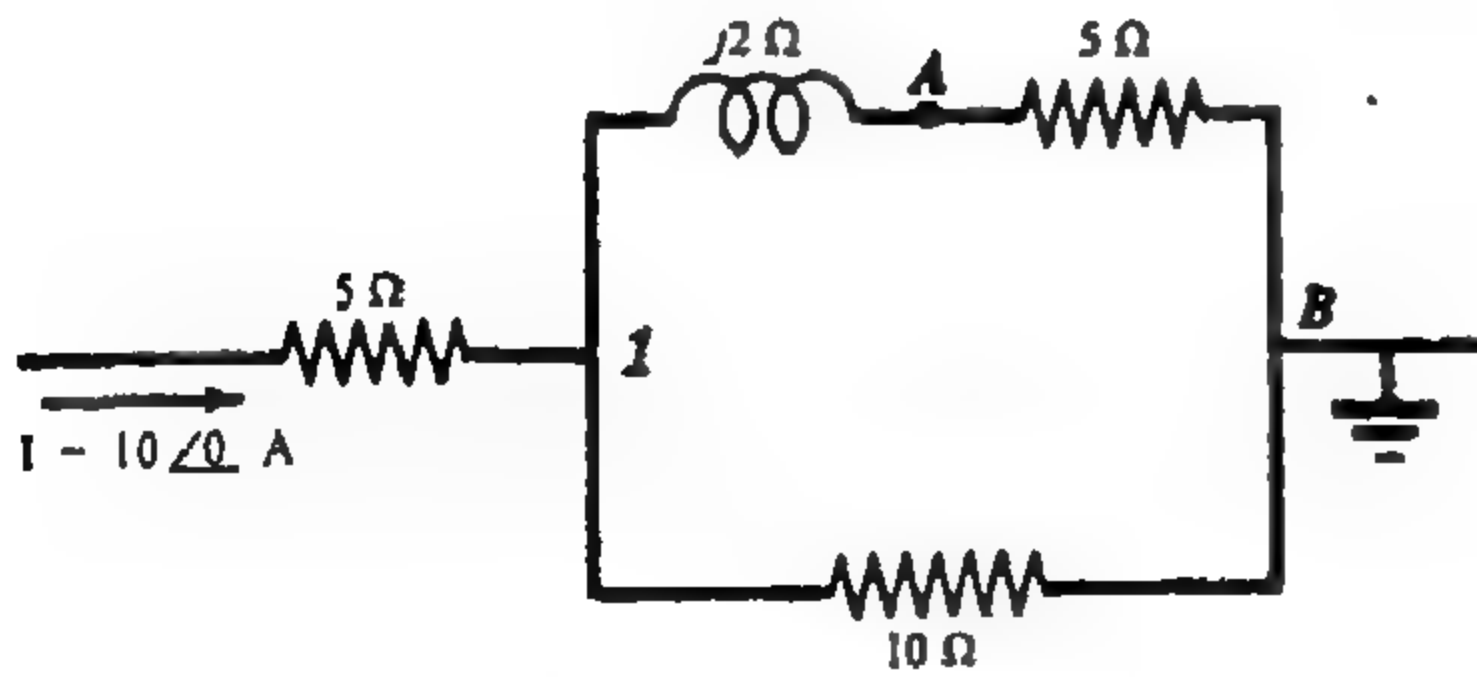
$$-\omega^2 C^2 + j2\omega C/R + 1/(RR_x) + 1/(j\omega L_x R) = 0$$

إذن

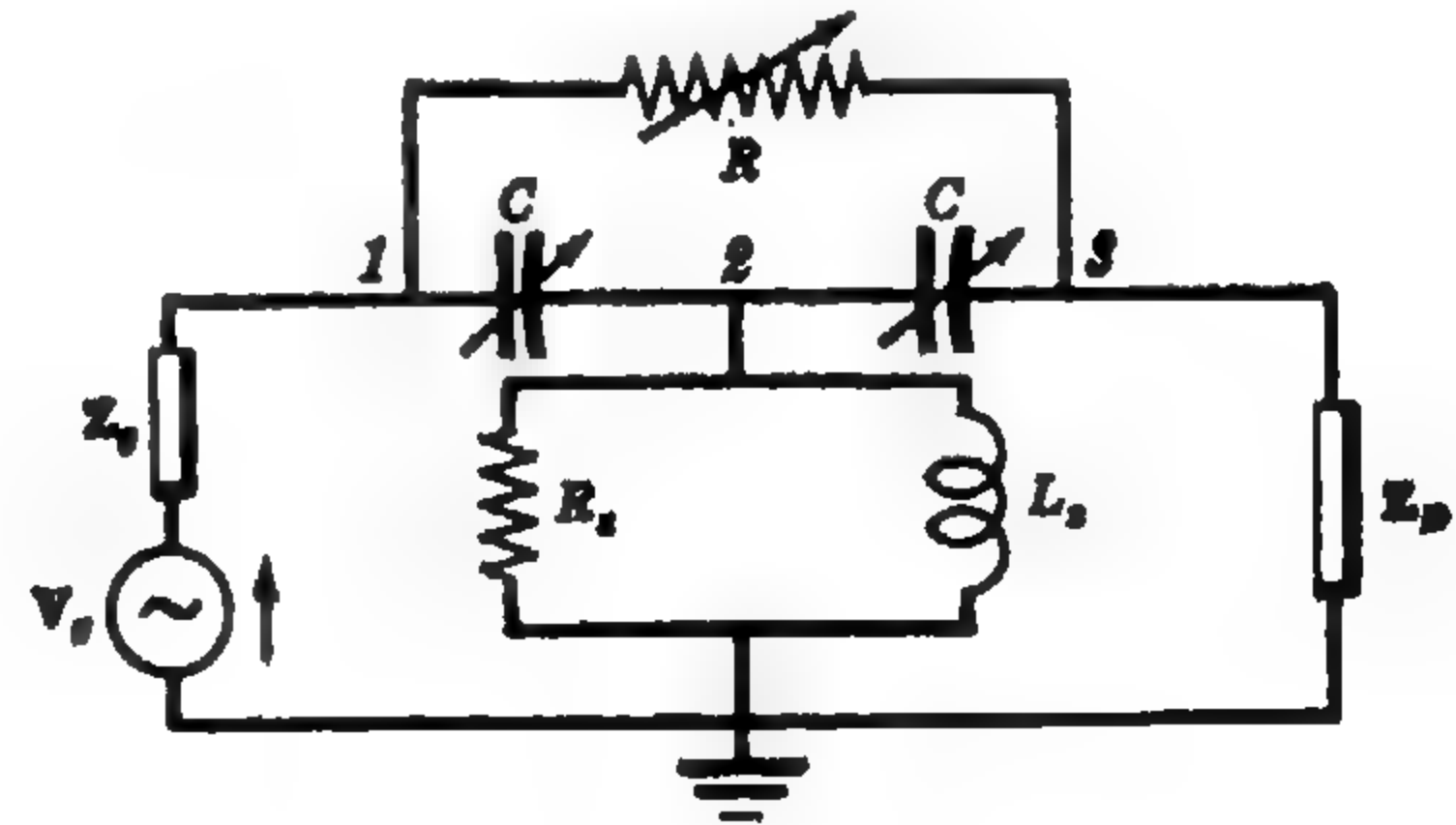
$$L_x = 1/(2\omega^2 C) \quad ; \quad R_x = 1/(\omega^2 C^2 R)$$

ومنها نجد أن

وهذه هي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام طريقة تيار الشبكة في المسألة ٩-٦ . لاحظ أن عدد المعادلات اللازمة للحل قد اختصر من أربع إلى ثلاث باستخدام طريقة جهد العقدة .



شكل ١٠ - ١١



شكل ١٠ - ١٠

١٠-٥ باستخدام طريقة العقدة عين الجهد V_{AB} في الشبكة الكهربائية في الشكل ١٠ - ١١ .

في وجود عقدتين أساسيتين أو نقطتي اتصال فإننا نحتاج إلى معادلة عقدة واحدة فقط . نختار B كمعقدة إسناد ونكتب المعادلة عند العقدة ١ . وبتطبيق قانون كيرشوف للتيار نجد أن التيار $10\angle 0^\circ A$ يساوى التيارات الخارجة . إذن .

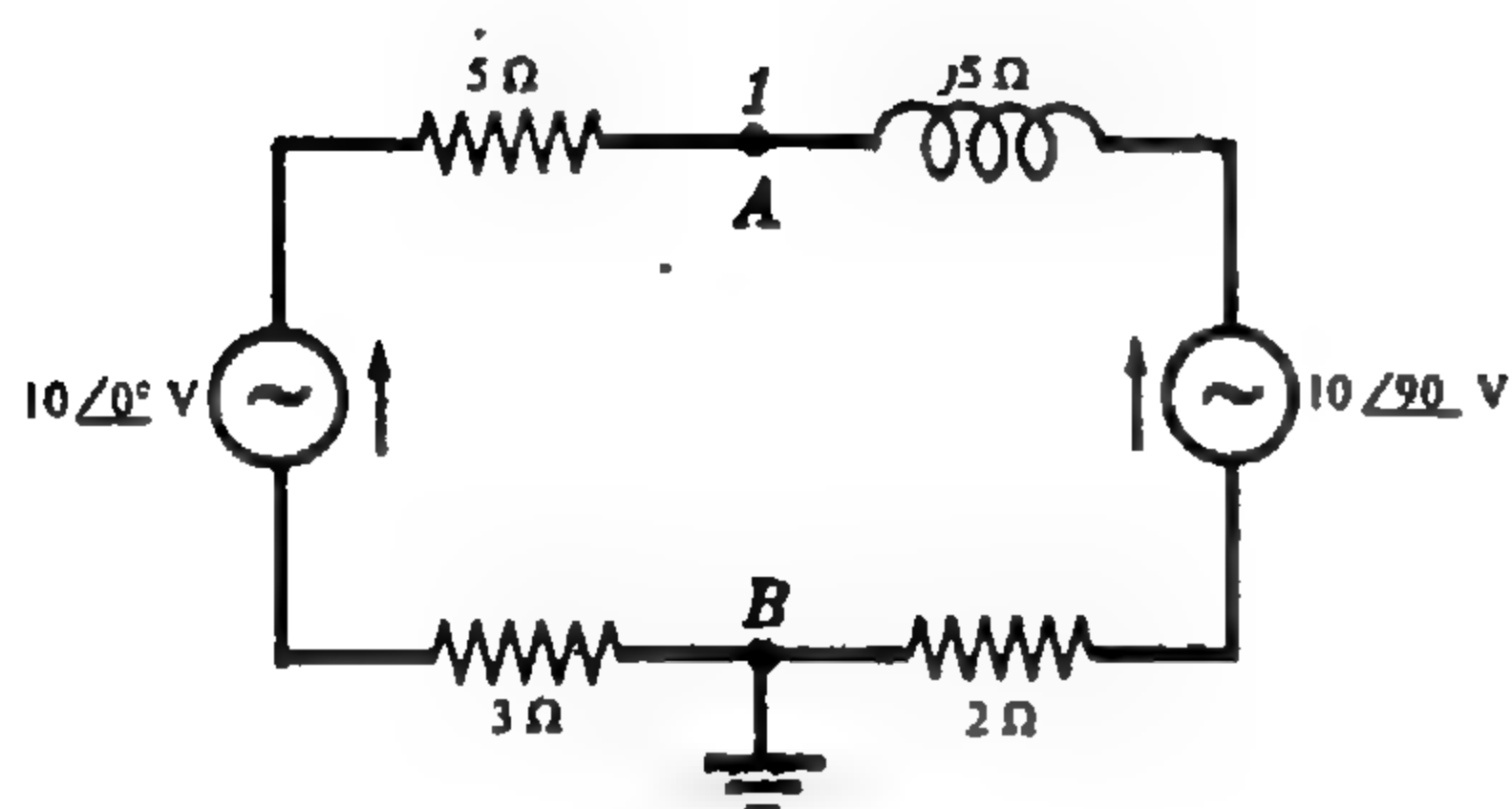
$$V_1 = 10\angle 0^\circ / (0.281\angle -14.2^\circ) = 35.6\angle 14.2^\circ V \quad \text{و} \quad 10\angle 0^\circ = V_1/10 + V_1/(5 + j2)$$

بما أن التيار المار في الفرع $5 + j2 \Omega$ هو $I = V_1 / (5 + j2) \text{ A}$. فإن الهبوط في الجهد المطلوب عبر المقاومة 5Ω هو :

$$V_{AB} = I(5) = \frac{V_1}{(5 + j2)}(5) = \frac{35.6 \angle 14.2^\circ}{(5 + j2)}(5) = 33 \angle -7.6^\circ \text{ V}$$

١٠-٦ عين الجهد V_{AB} في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١٢ .

بما أنه لا يوجد في الدائرة عقدة أساسية ، فإنه إذا اخترنا B كمقدمة إسناد والنقطة A كمقدمة ١ . فإنه يمكننا كتابة معادلة ذلك بفرض أن التيار خارج من A في كلا الفرعين .



$$\frac{V_1 - 10\angle 0^\circ}{(5 + 3)} + \frac{V_1 - 10\angle 90^\circ}{(2 + j5)} = 0$$

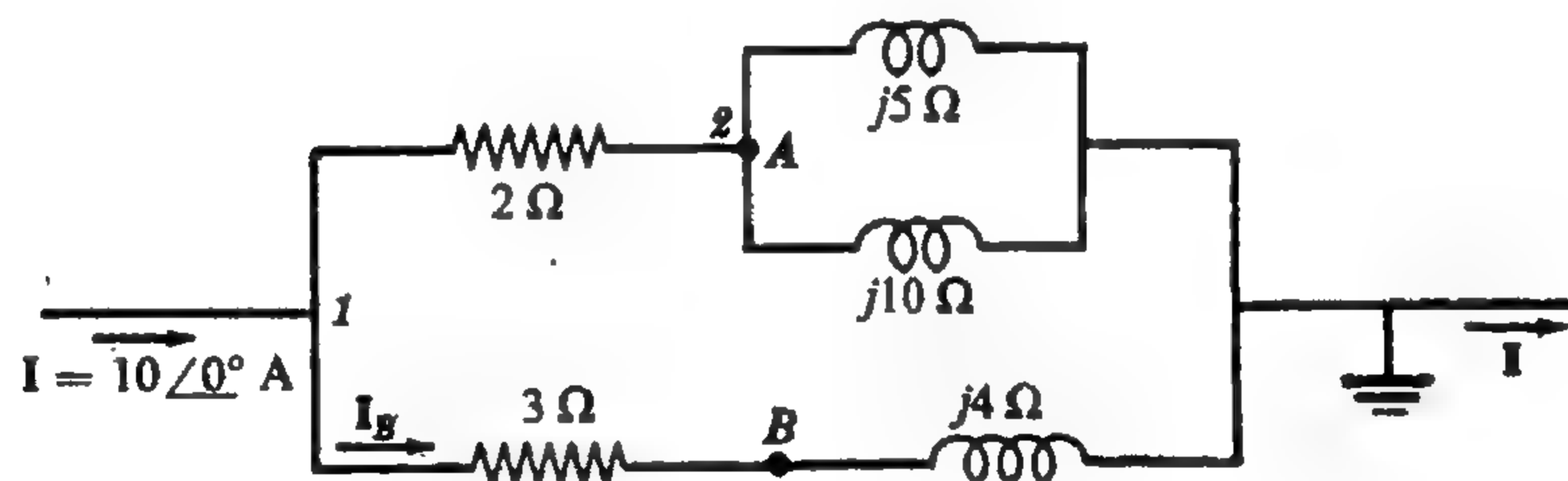
ترتيب الحدود نحصل على

$$V_1 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2 + j5} \right) = \left(\frac{10\angle 0^\circ}{8} + \frac{10\angle 90^\circ}{2 + j5} \right)$$

ومنها نجد أن $V_{AB} = V_1 = 11.8 \angle 55.05^\circ \text{ V}$.

شكل ١٠ - ١٢

١٠-٧ أوجد الجهد V_{AB} في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١٣ .



شكل ١٠ - ١٣

إن معادلات العقد هي :

$$10\angle 0^\circ = (V_1 - V_2)/2 + V_1/(3 + j4) \quad \text{عند العقدة 1}$$

$$(V_2 - V_1)/2 + V_2/j5 + V_2/j10 = 0 \quad \text{عند العقدة 2}$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد أن

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 + j4} \right) V_1 - \frac{1}{2} V_2 = 10\angle 0^\circ$$

$$-\frac{1}{2} V_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{j10} \right) V_2 = 0$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 \angle 0 & -0.5 \\ 0 & (0.5 - j0.3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.62 - j0.16) & -0.5 \\ -0.5 & (0.5 - j0.3) \end{vmatrix}} = \frac{5.83 \angle 31}{0.267 \angle 87.42} = 21.8 \angle 56.42 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.62 - j0.16) & 10 \angle 0 \\ 0.5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{5 \angle 0}{0.267 \angle 87.42} = 18.7 \angle 87.42 \text{ V}$$

جهد العقدة V_2 هو جهد A بالنسبة لعقدة الإسناد . وبما أن $I_B = V_1/(3 + j4)$ ، فإن الجهد V_B بالنسبة لعقدة الإسناد هو

$$V_B = \frac{V_1}{(3 + j4)(j4)} = \frac{21.8 \angle 56.42}{(3 + j4)(j4)} = 17.45 \angle 93.32^\circ \text{ V}$$

إذن الجهد المطلوب V_{AB} هو

$$V_{AB} = V_A - V_B = (18.7 \angle 87.42^\circ) - (17.45 \angle 93.32^\circ) = 2.23 \angle 34.1^\circ \text{ V}$$

١٠ - ٨ أوجد في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١٤ تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C

نختار العقدة ١ ونقطة الإسناد كما هو موضح في الشكل . نحل معادلة العقدة .

$$\frac{V_1 - 100 \angle 120}{20} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - 100 \angle 0}{10} = 0$$

لنحصل على

$$V_1 = \frac{200 \angle 0 - 100 \angle 120}{5} = 50 - j17.32 = 53 \angle -19.1^\circ \text{ V}$$

إذن تيارات الأفرع المختلفة هي

$$I_A = (V_1 + 100 \angle 120)/20 = (50 - j17.32 - 50 + j86.6)/20 = 3.46 \angle 90^\circ \text{ A}$$

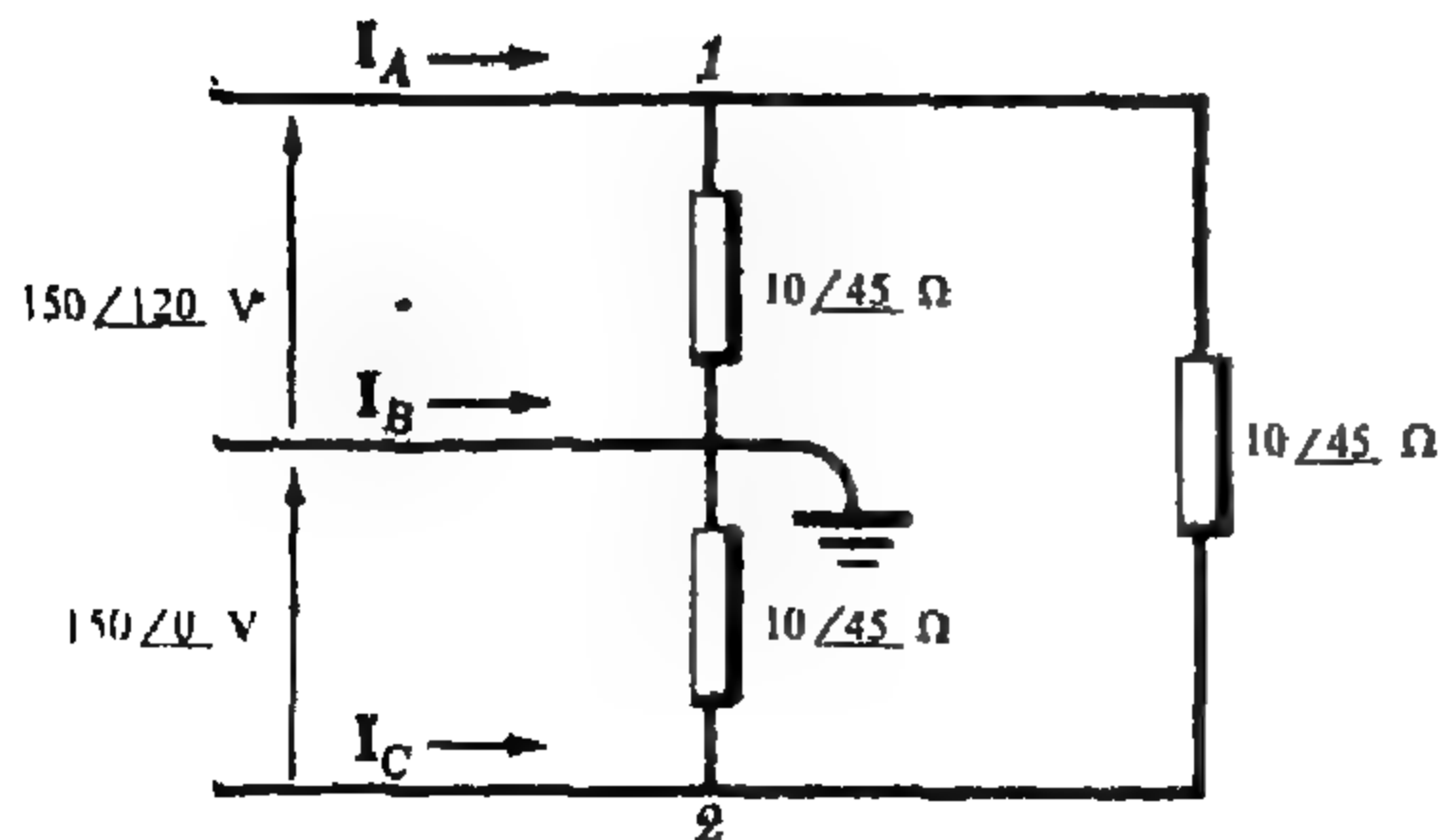
$$I_B = V_1/10 = 5.3 \angle -19.1^\circ \text{ A}$$

$$I_C = (V_1 - 100 \angle 0)/10 = (50 - j17.32 - 100)/10 = 5.3 \angle -160.9^\circ \text{ A}$$

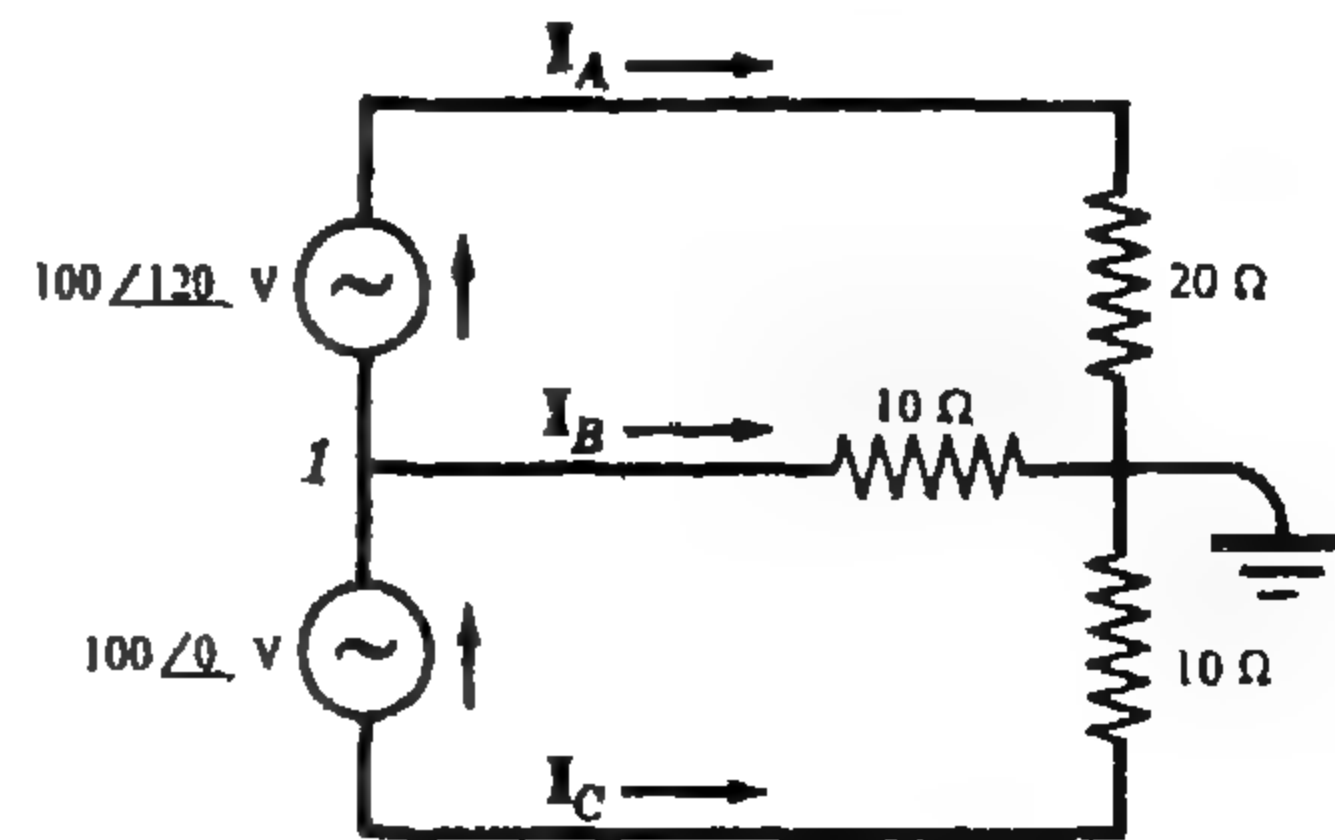
لاحظ أن مجموع التيارات الثلاثة الداخلة إلى عقدة الإسناد يساوى صفراً .

$$I_A + I_B + I_C = 3.46 \angle 90^\circ + 5.3 \angle -19.1^\circ + 5.3 \angle -160.9^\circ$$

$$= j3.46 + 5.0 - j1.732 - 5 - j1.732 = 0$$



شكل ١٠ - ١٥



شكل ١٠ - ١٤

١٠ - ٩ أوجد للدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ١٥ تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C .

المقدتان 1 و 2 وعقدة الإسناد جميعها موضحة في الشكل ١٠ - ١٥ . إن جهدي العقدة V_1 و V_2 التي يمكن قراءتهما من الرسم مباشرة مساويان للجهدين الثابتين المعطيين . إذن

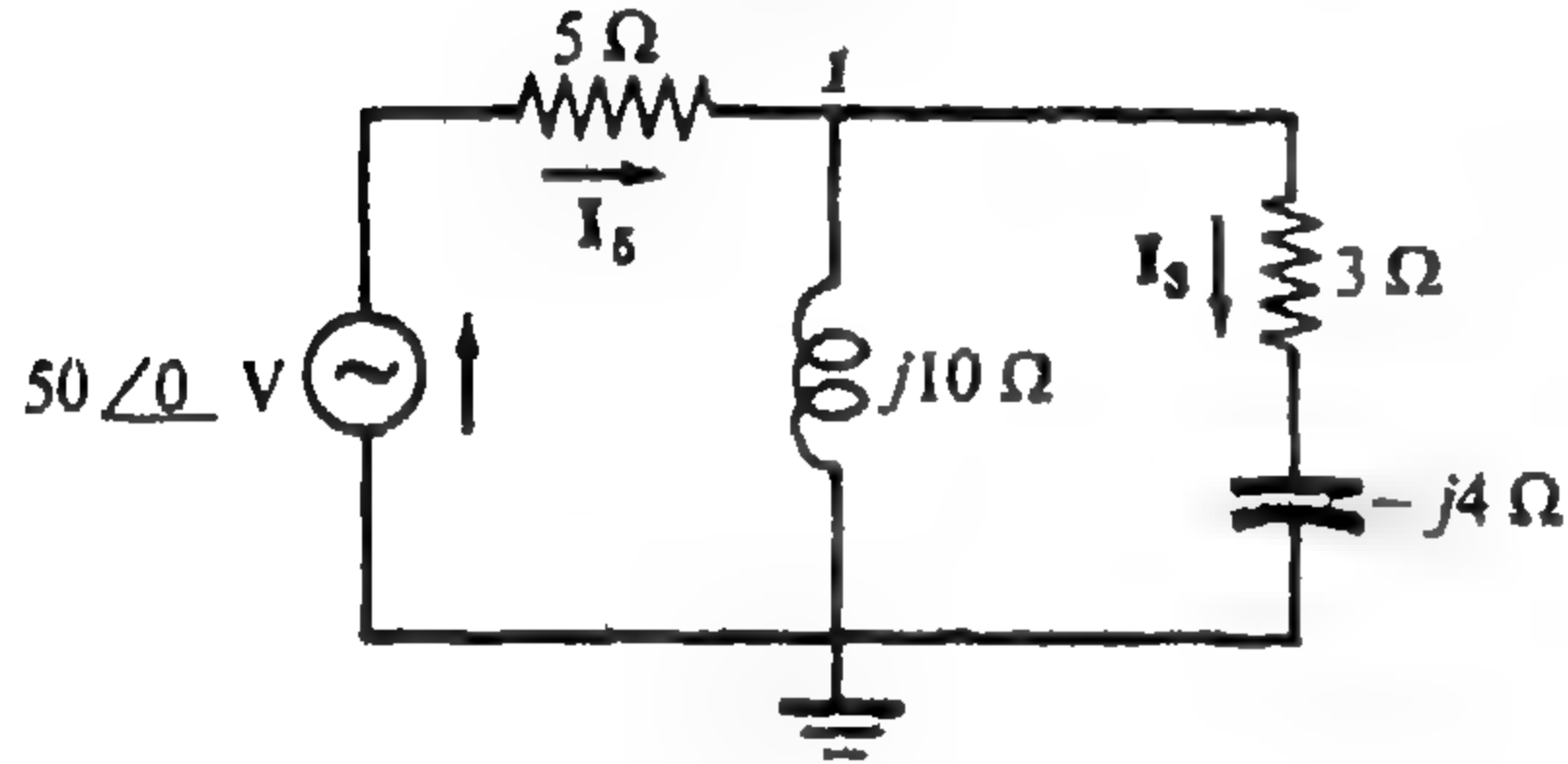
$$V_2 = -150 \angle 0^\circ = 150 \angle 180^\circ \text{ V} \quad \text{و} \quad V_1 = 150 \angle 120^\circ \text{ V}$$

وبتطبيق قانون كيرشوف للتيار عند كل عقدة من العقد الثلاث يمكننا حساب التيارات المطلوبة .

$$I_A = \frac{V_1}{10 \angle 45^\circ} + \frac{V_1 - V_2}{10 \angle 45^\circ} = \frac{300 \angle 120^\circ - 150 \angle 180^\circ}{10 \angle 45^\circ} = 26 \angle 45^\circ \text{ A} \quad \text{عند العقدة 1 :}$$

$$I_B = \frac{-V_1}{10 \angle 45^\circ} - \frac{V_2}{10 \angle 45^\circ} = \frac{150 \angle -60^\circ + 150 \angle 0^\circ}{10 \angle 45^\circ} = 26 \angle -75^\circ \text{ A} \quad \text{عند عقدة الإسناد :}$$

$$I_C = \frac{V_2}{10 \angle 45^\circ} + \frac{V_2 - V_1}{10 \angle 45^\circ} = \frac{300 \angle 180^\circ - 150 \angle 120^\circ}{10 \angle 45^\circ} = 26 \angle -195^\circ \text{ A} \quad \text{عند العقدة 2 :}$$



١٠ - ١٥ عين للدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ١٦ القدرة الخارجة من المصدر والقدرة في كل مقاومة في الشبكة الكهربائية .

نختار عقدة الإسناد والعقدة 1 كما هو موضح

في الشكل : إذن معادلة العقدة هي

شكل ١٠ - ١٦

$$(V_1 - 50 \angle 0^\circ)/5 + V_1/j10 + V_1/(3 - j4) = 0$$

ومن هنا نجد أن

$$V_1 = (10 \angle 0^\circ)/(0.326 \angle 10.6^\circ) = 30.7 \angle -10.6^\circ \text{ V}$$

وبالحل للحصول على تيارات الأفرع التالية بفرض أن اتجاهها كما هو موضح في الشكل نحصل على :

$$I_5 = (50 \angle 0^\circ - V_1)/5 = (50 \angle 0^\circ - 30.7 \angle -10.6^\circ)/5 = 4.12 \angle 15.9^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = V_1/(3 - j4) = (30.7 \angle -10.6^\circ)/(5 \angle -53.1^\circ) = 6.14 \angle 42.5^\circ \text{ A}$$

والقدرة الخارجة من المصدر .

$$P = VI_5 \cos \theta = (50)(4.12) \cos 15.9^\circ = 198 \text{ W}$$

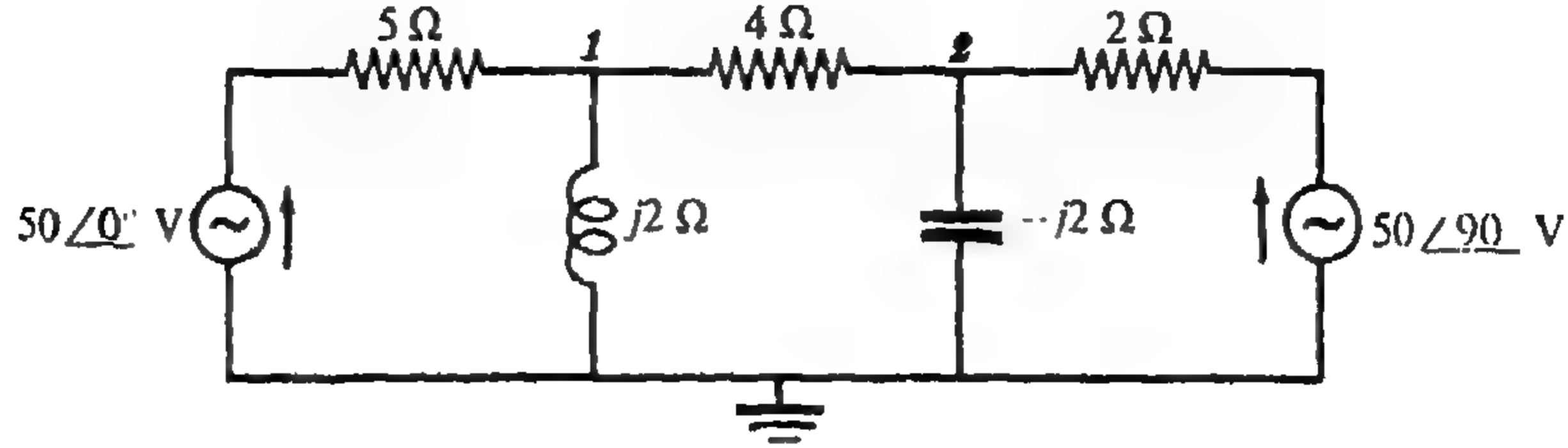
من العلاقة $P = I^2 R$ يمكننا حساب القدرة المستنفذة في كل مقاومة .

$$P_3 = (I_3)^2 3 = (6.14)^2 3 = 113 \text{ W} \quad \text{و} \quad P_5 = (I_5)^2 5 = (4.12)^2 5 = 85 \text{ W}$$

لاحظ أن القدرة الكلية المعطاة من المصدر تساوي مجموع القدرات المستنفذة بمقاومتي الدائرة ، أي

$$P_T = 85 + 113 = 198 \text{ W}.$$

١٠-١١ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-١٧ عين جهدي العقدين ١ و ٢ . بالنسبة لنقطة الإسناد المختارة .



شكل ١٠ - ١٧

بالفحص يمكننا كتابة معادلتى العقدة في الصيغة المصفوفية :

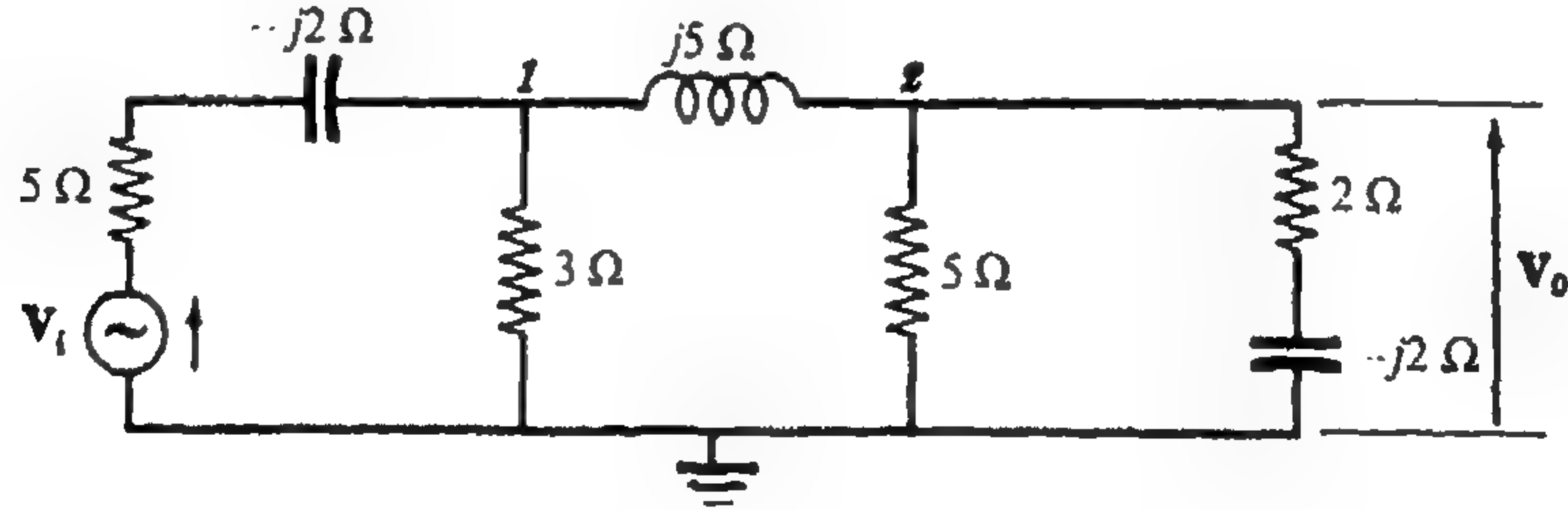
$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{4}\right) & -\left(\frac{1}{4}\right) \\ -\left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{50\angle 0^\circ}{5}\right) \\ \left(\frac{50\angle 90^\circ}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0.25 \\ j25 & (0.75 + j0.5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.45 - j0.5) & -0.25 \\ -0.25 & (0.75 + j0.5) \end{vmatrix}} = \frac{13.5\angle 56.3^\circ}{0.546\angle -15.95^\circ} = 24.7\angle 72.25^\circ \text{ V}$$

ومنها نجد أن :

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.45 - j0.5) & 10 \\ -0.25 & j25 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{18.35\angle 37.8^\circ}{0.546\angle -15.95^\circ} = 33.6\angle 53.75^\circ \text{ V}$$

١٠-١٢ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١٨ أوجد النسبة V_0/V_1 وذلك بفرض أن V_0 هو الهبوط في الجهد على المقاومة $2 - j2 \Omega$ الناتج عن المصدر V_1 .



شكل ١٠ - ١٨

نختار العقدين ١ و ٢ وعقدة الإسناد كما هو موضح في رسم الدائرة . بهذا الاختيار يتكون V_0 هو جهد العقدة ١ بالنسبة لعقدة الإسناد .

نكتب معادلات العقدة عن طريق الفحص في الصيغة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5-j2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j5}\right) & -\left(\frac{1}{j5}\right) \\ -\left(\frac{1}{j5}\right) & \left(\frac{1}{j5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2-j2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{5-j2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

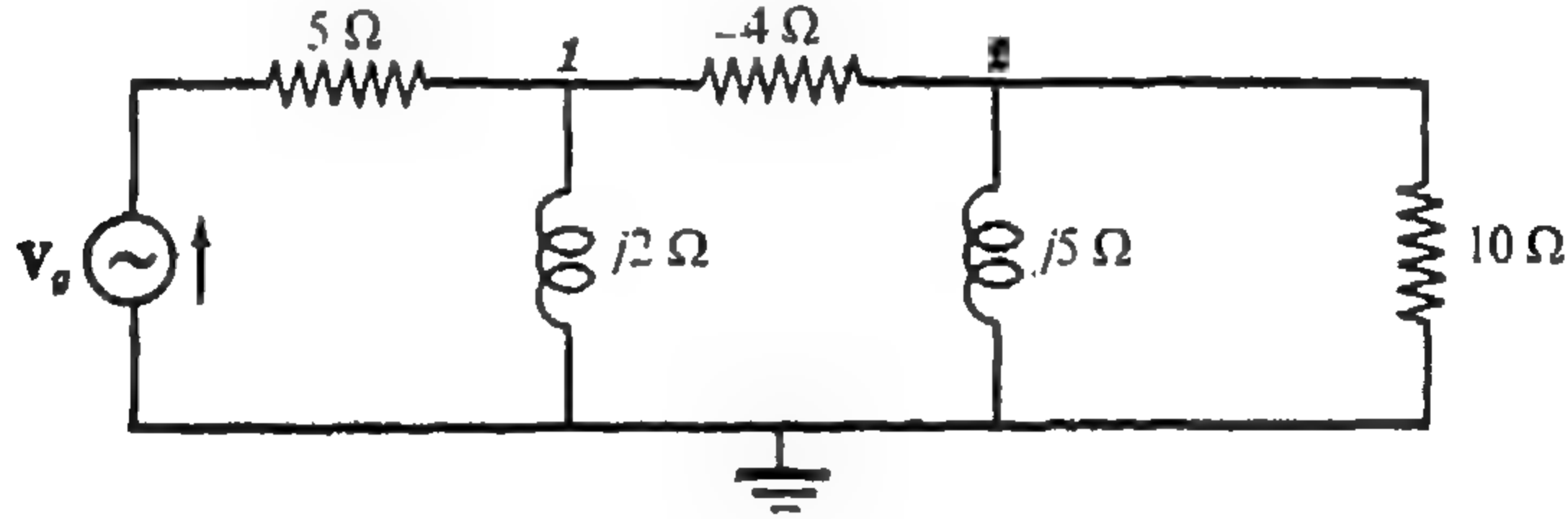
وبالحل للحصول على V_0 نجد :

$$V_0 = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.506 - j0.131) & V_1/(5 - j2) \\ j0.2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.506 - j0.131) & j0.2 \\ j0.2 & (0.45 - j0.05) \end{vmatrix}} = \frac{(0.2 \angle -90^\circ) V_1 (5 - j2)}{(0.276 \angle -7^\circ)}$$

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{0.2 \angle -90^\circ}{(5 - j2)(0.276 \angle -7^\circ)} = 0.1345 \angle -61.2^\circ \quad \text{إذن :}$$

تسمى هذه النتيجة بدالة انتقال الجهد وهي يمكننا من حساب الجهد الخارج للفرع المعطى وذلك لأى جهد داخل مباشرة . أى أن $V_0 = V_1 (0.1345 \angle -61.2^\circ)$

١٠ - ١٣ إذا أعطيت العتدتان ١ و ٢ فى الشبكة الكهربائية ١٠ - ١٩ . فأوجد النسبة V_1/V_2 .



شكل ١٠ - ١٩

بكتابة معادلات العقدة فى الصيغة المصفوفية عن طريق الفحص نجد أن :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{4}\right) & -\left(\frac{1}{4}\right) \\ -\left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V_g/5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} (V_g/5) & -0.25 \\ 0 & (0.35 - j0.2) \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{(V_g/5)(0.403 \angle -29.8^\circ)}{\Delta_Y} \quad \text{ومنها نجد أن :}$$

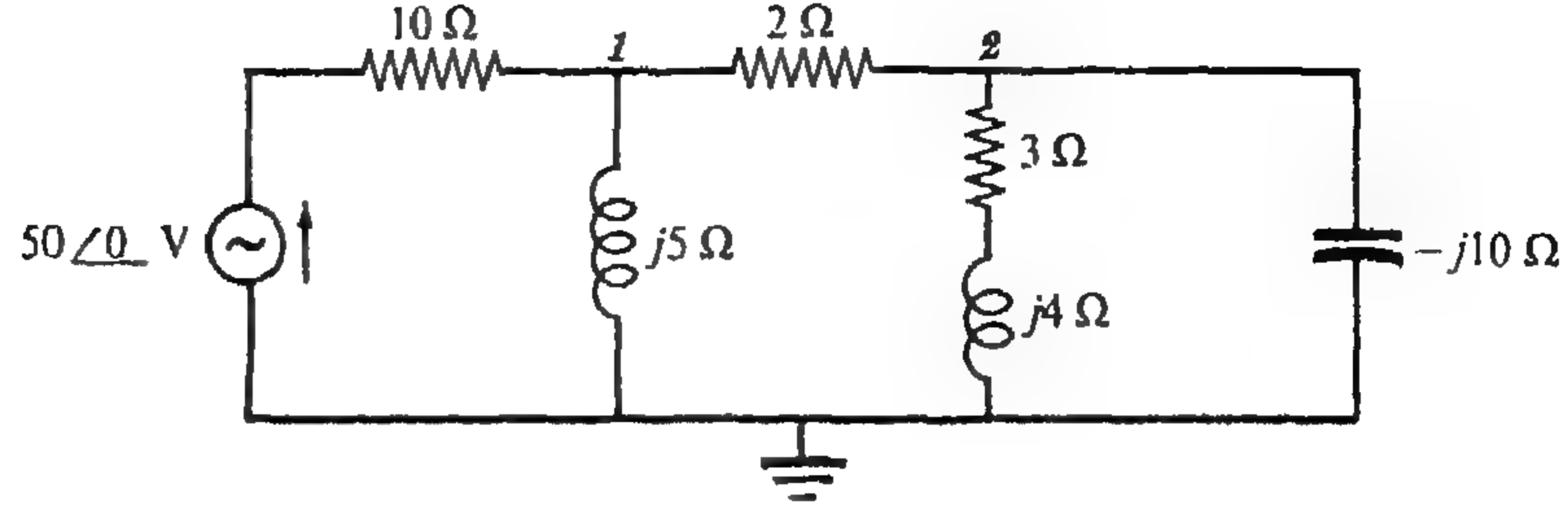
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.45 - j0.5) & (V_g/5) \\ -0.25 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{(V_g/5)(0.25)}{\Delta_Y}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(V_g/5)(0.403 \angle -29.8^\circ)/\Delta_Y}{(V_g/5)(0.25)/\Delta_Y} = 1.61 \angle -29.8^\circ \quad \text{و}$$

حل آخر : بالتعبير عن جهد كل عقدة بدلالة العوامل المشتركة . وبما أنه يوجد مصدر واحد بتيار I_1 يؤثر فى الدائرة فإن $V_1 = I_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)$ و $V_2 = I_1(\Delta_{12}/\Delta_Y)$. إذن

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)}{I_1(\Delta_{12}/\Delta_Y)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = \frac{0.35 \angle -j0.2}{0.25} = 1.61 \angle -29.8^\circ$$

١٠-١٤ عين جهدي العقدتين ١ و ٢ لشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٠ باستخدام المساحة الداخلة ومساحة الانتقال .



شكل ١٠ - ٢٠

تعطى مصفوفة المساحة $[Y]$ عن طريق الفحص بالصورة

$$[Y] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2}\right) & -\left(\frac{1}{2}\right) \\ -\left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{-j10}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.6 - j0.2) & -0.5 \\ -0.5 & (0.62 - j0.06) \end{bmatrix}$$

إذن :

$$Y_{\text{input 1}} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} (0.6 - j0.2) & -0.5 \\ -0.5 & (0.62 - j0.06) \end{vmatrix}}{(0.62 - j0.06)} = \frac{0.194 \angle -55.5^\circ}{0.62 \angle -5.56^\circ} = 0.313 \angle -49.94^\circ \text{ S}$$

$$Y_{\text{transfer 21}} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{12}} = \frac{0.194 \angle -55.5^\circ}{(-1)(-0.5)} = 0.388 \angle -55.5^\circ \text{ S}$$

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{\text{input 1}}} + \frac{I_2}{Y_{\text{transfer 21}}}$$

عند العقدة 1 :

بما أنه لا يوجد تيار عند العقدة 2 ، أي أن $I_2 = 0$ فإننا نحصل على

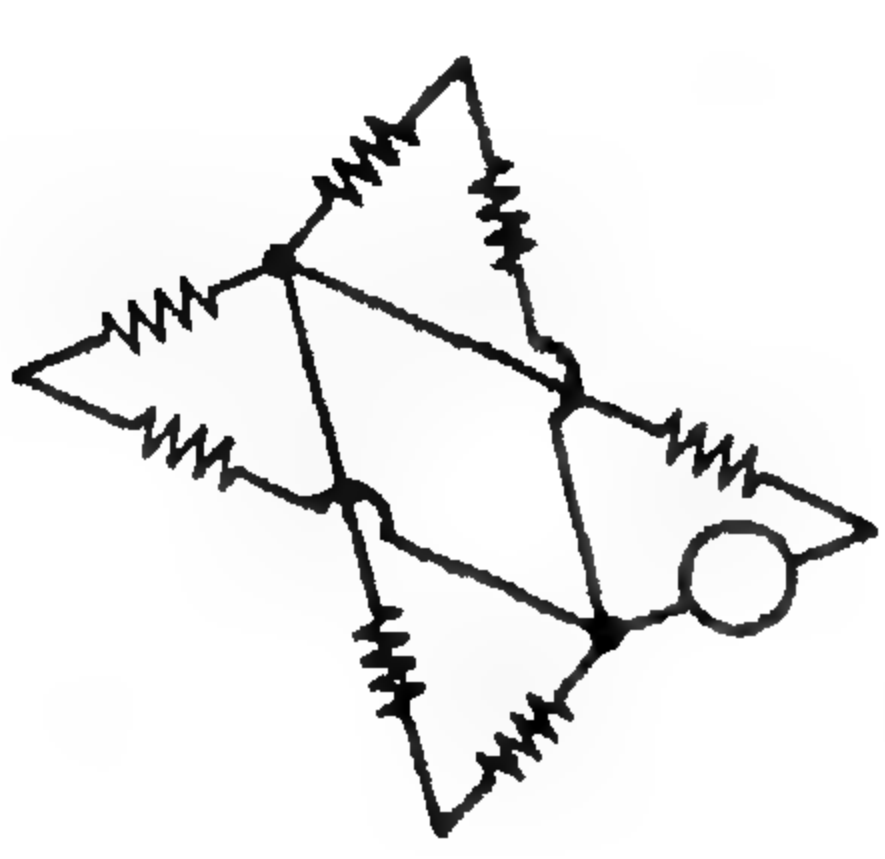
$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{\text{input 1}}} = \frac{(50 \angle 0^\circ)/10}{0.313 \angle -49.94^\circ} = 15.95 \angle 49.94^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{\text{transfer 12}}} + \frac{I_2}{Y_{\text{input 2}}} = \frac{(50 \angle 0^\circ)/10}{0.388 \angle -55.5^\circ} = 12.9 \angle 55.5^\circ \text{ V}$$

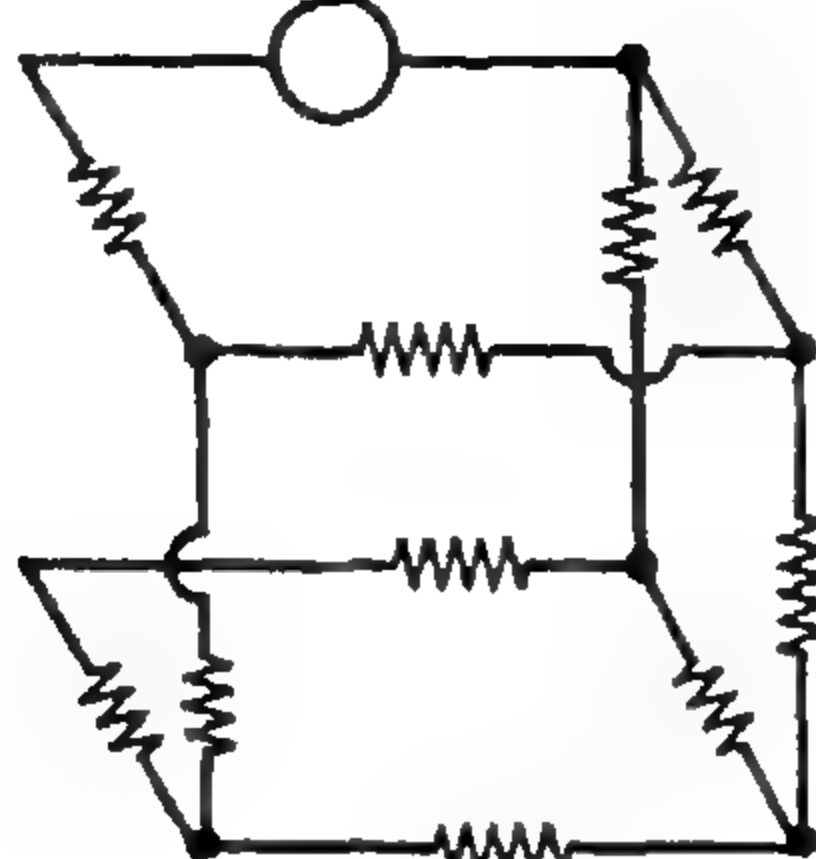
وبالمثل :

مسائل إضافية

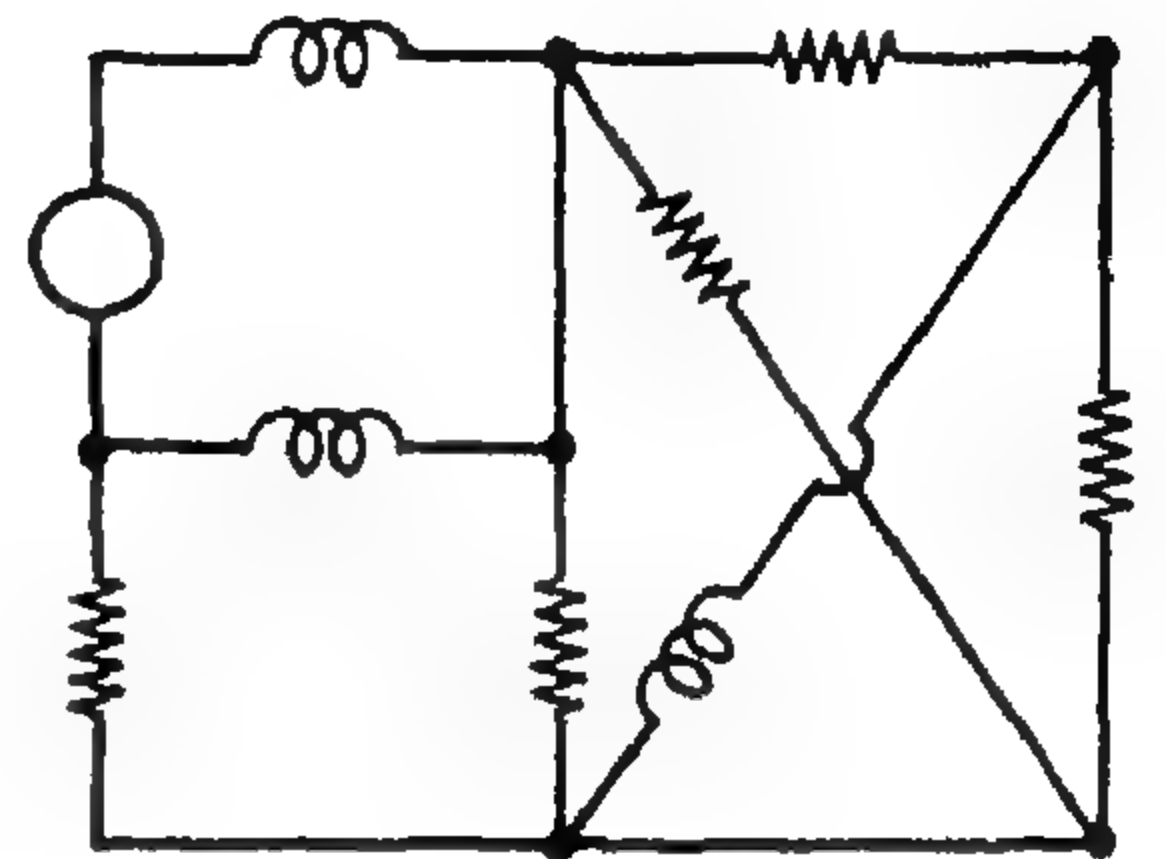
١٥ - ١٠ عين عدد معادلات جهد العقدة اللازمة لحل كل شبكة من الشبكات الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠ - ٢١ (١-و) .



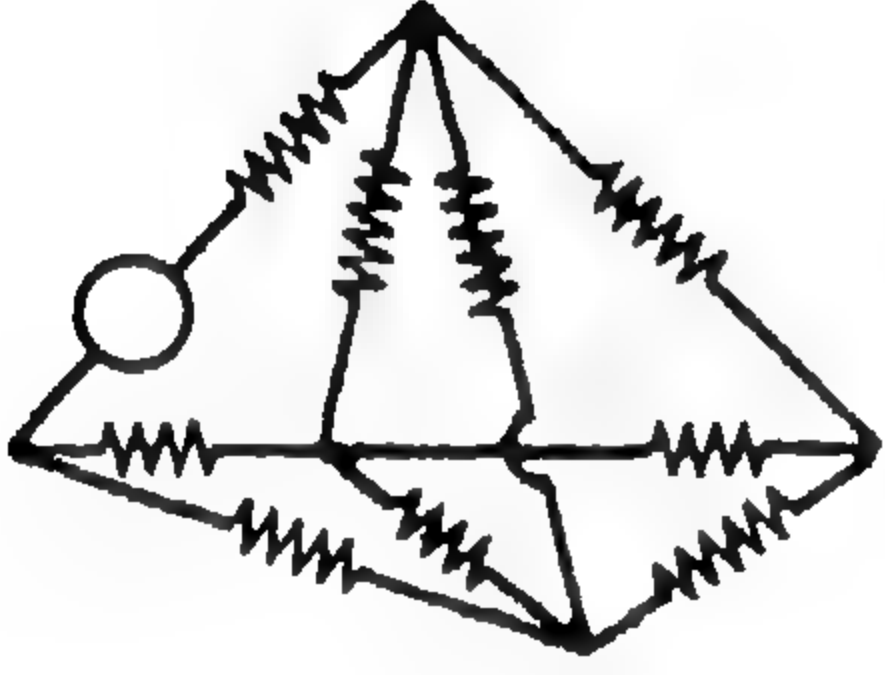
(أ)



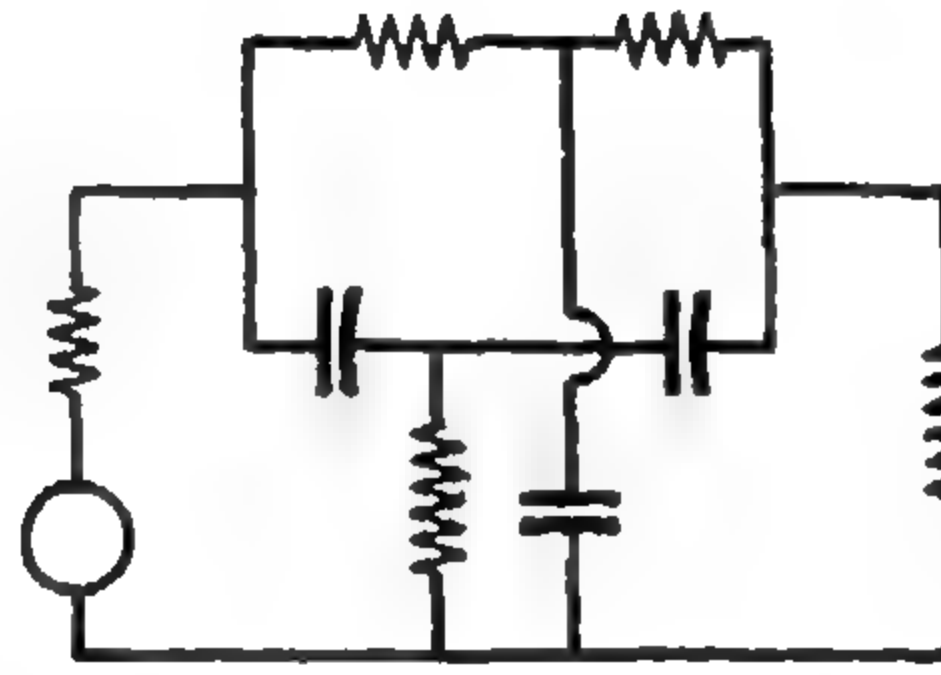
(ب)



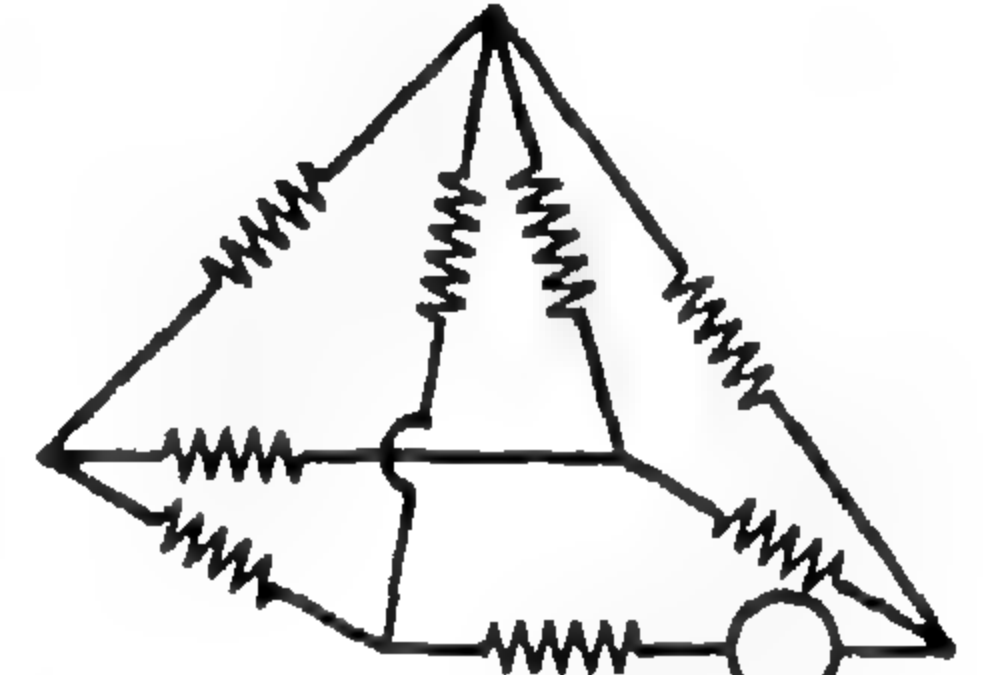
(ج)



(د)



(هـ)

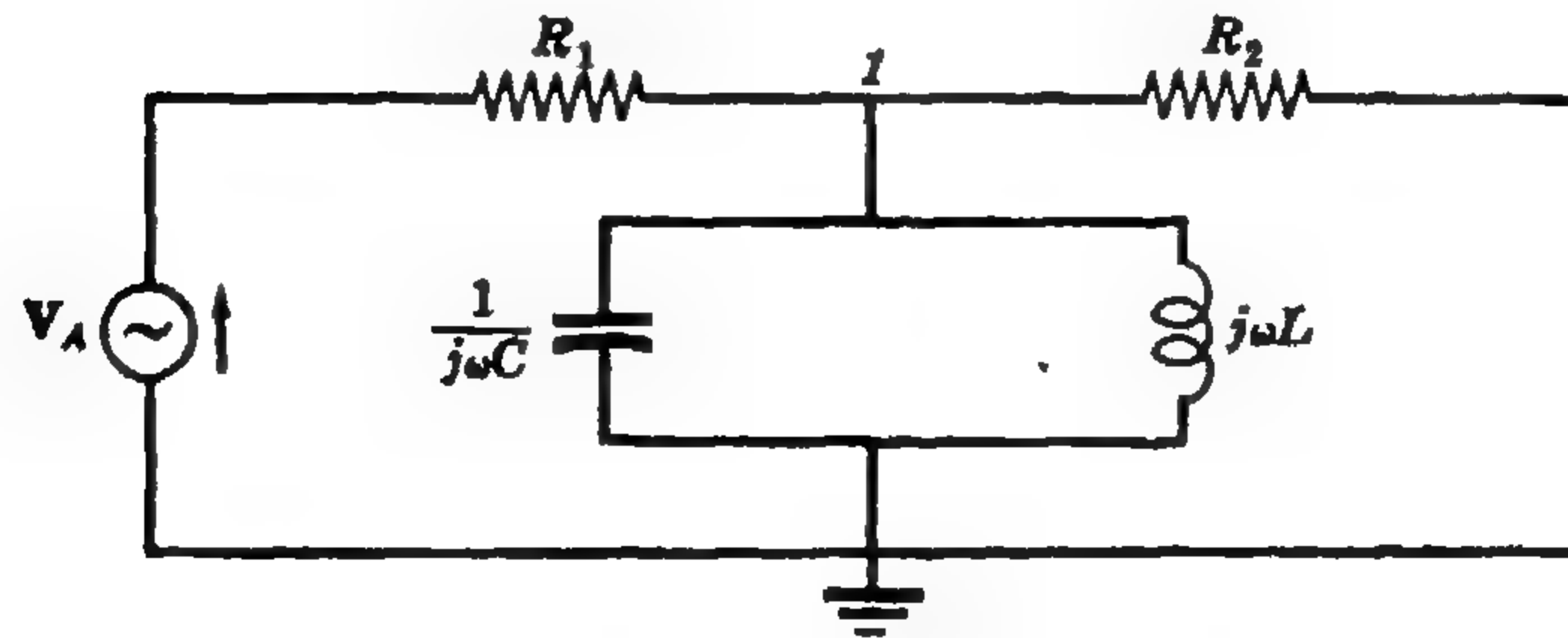


(و)

شكل ١٠ - ٢١

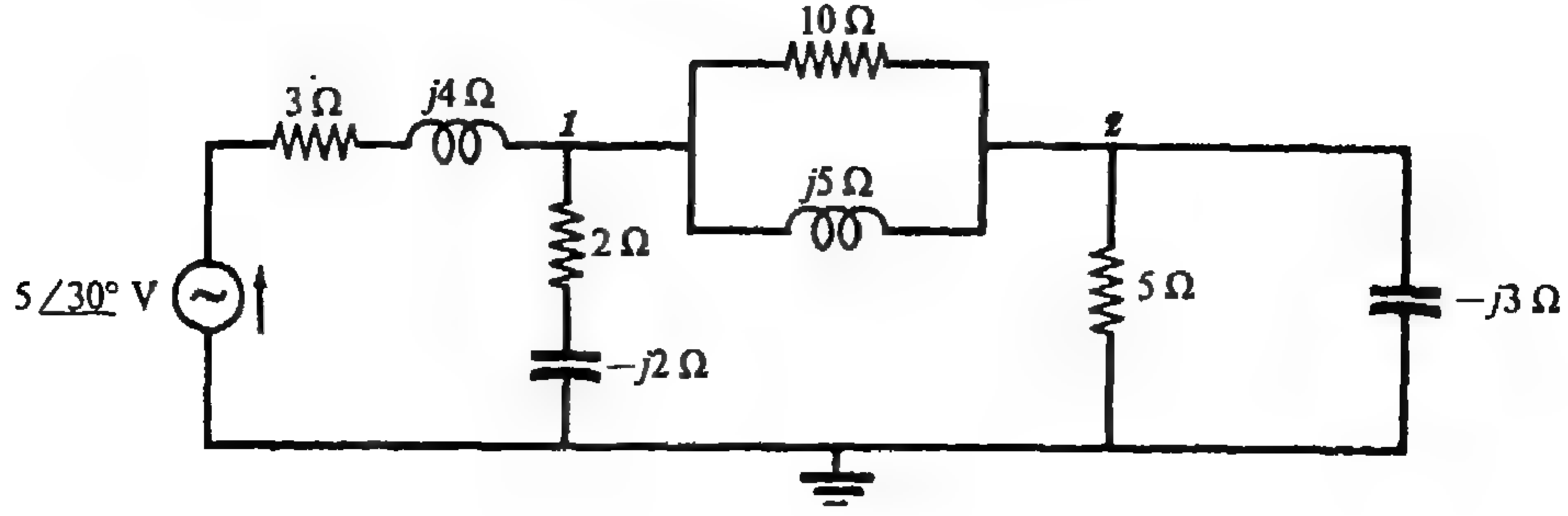
الجواب : (أ) 3 ، (ب) 5 ، (ج) 1 ، (د) 4 ، (هـ) 4 ، (و) 4

١٦ - ١٠ أكتب معادلة العقدة للعقدة المعطاة في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٢ .



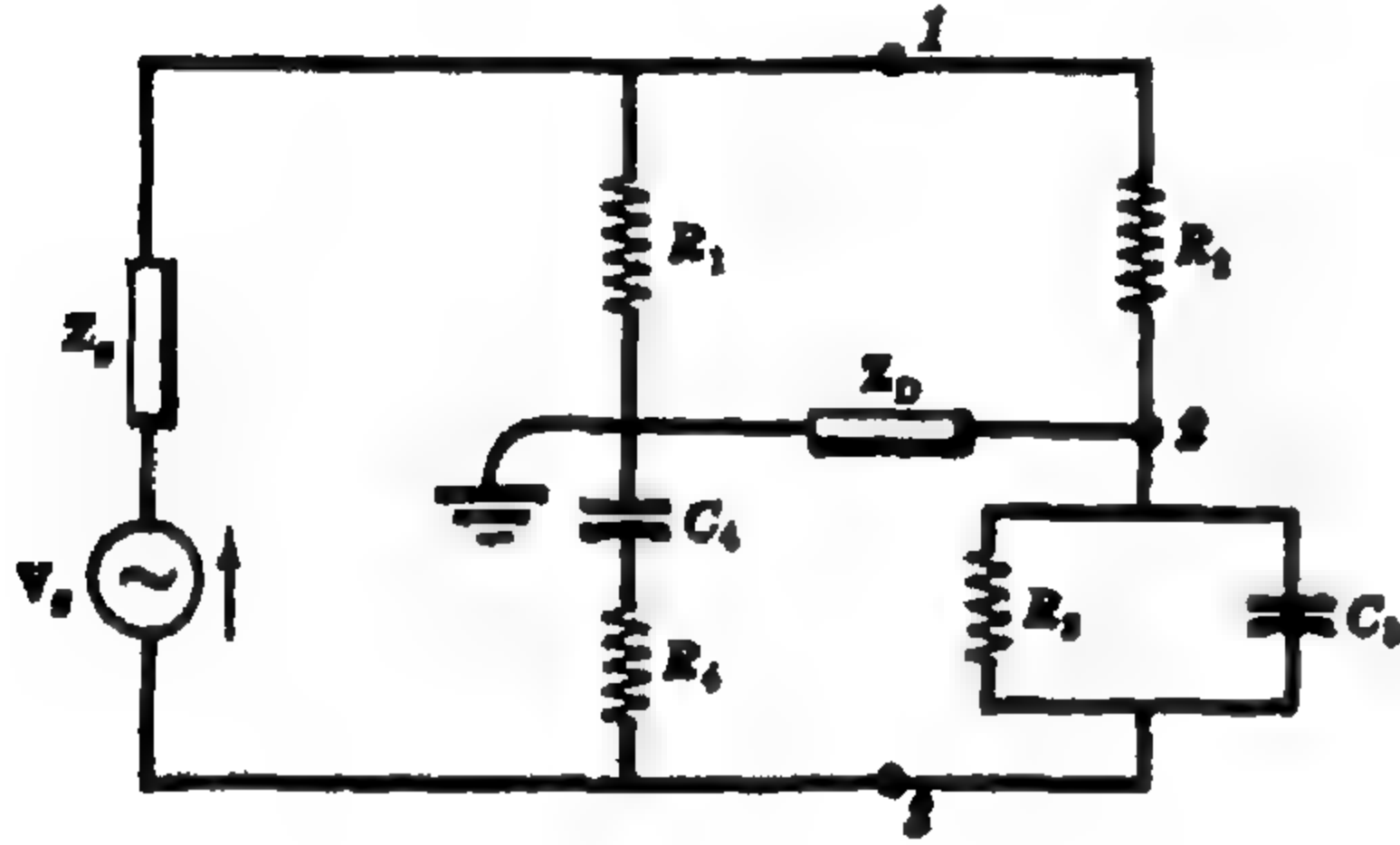
شكل ١٠ - ٢٢

١٧ - ١٠ أكتب معادلات العقدة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٣ ثم عبر عنها بالصيغة المصفوفية . ثم أكتب $[Y]$ بطريقة الفحص وقارنها بتلك التي تحصل عليها من المعادلات .

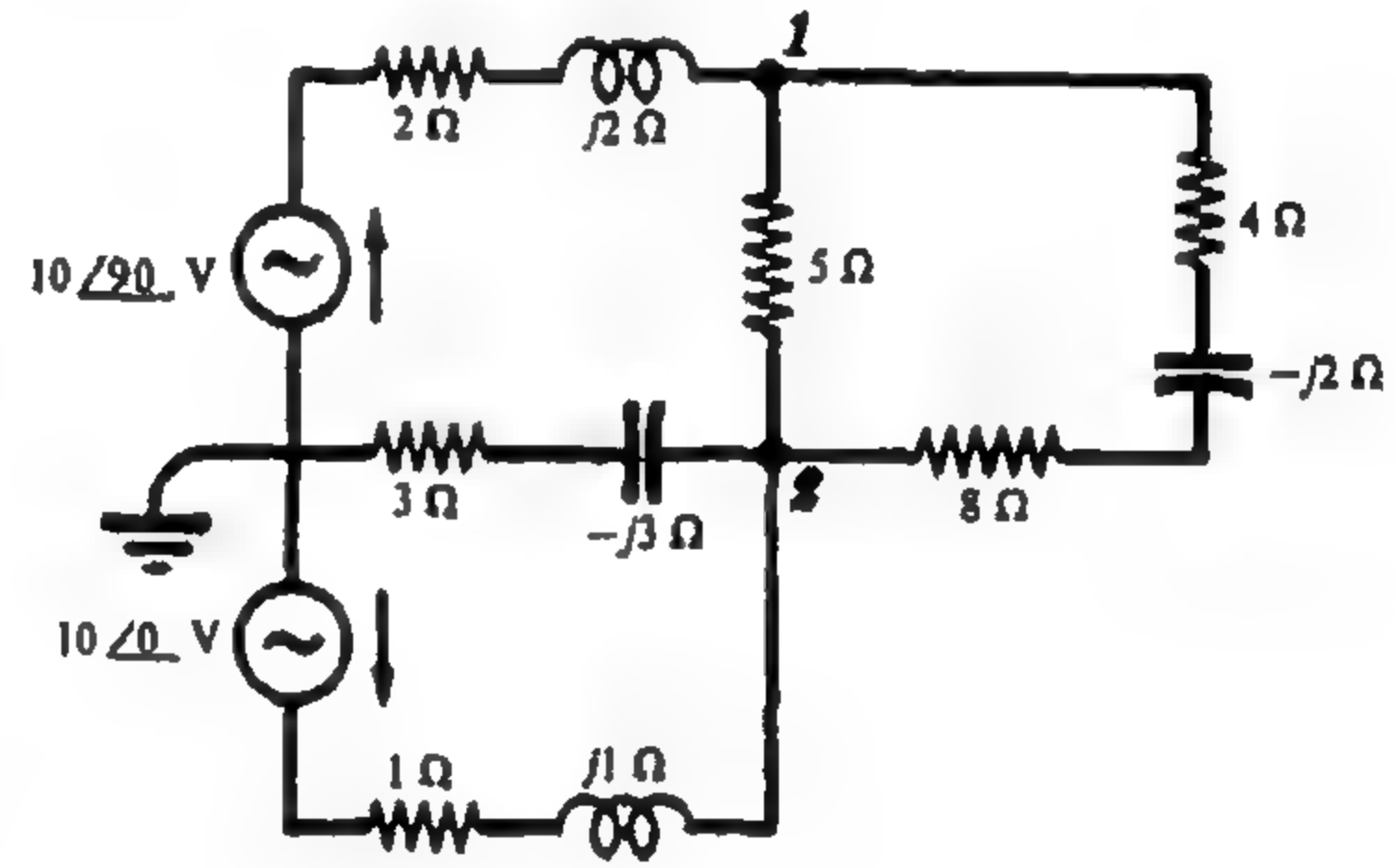


شكل ١٠ - ٢٣

١٠ - ١٨ أكتب معادلات العقدة للعقدة المعطاة في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٤ ثم عبر عنها بالصيغة المصفوفية . ثم أكتب [Y] بطريقة الفحص وقارنها بتلك التي تحصل عليها من المعادلات .

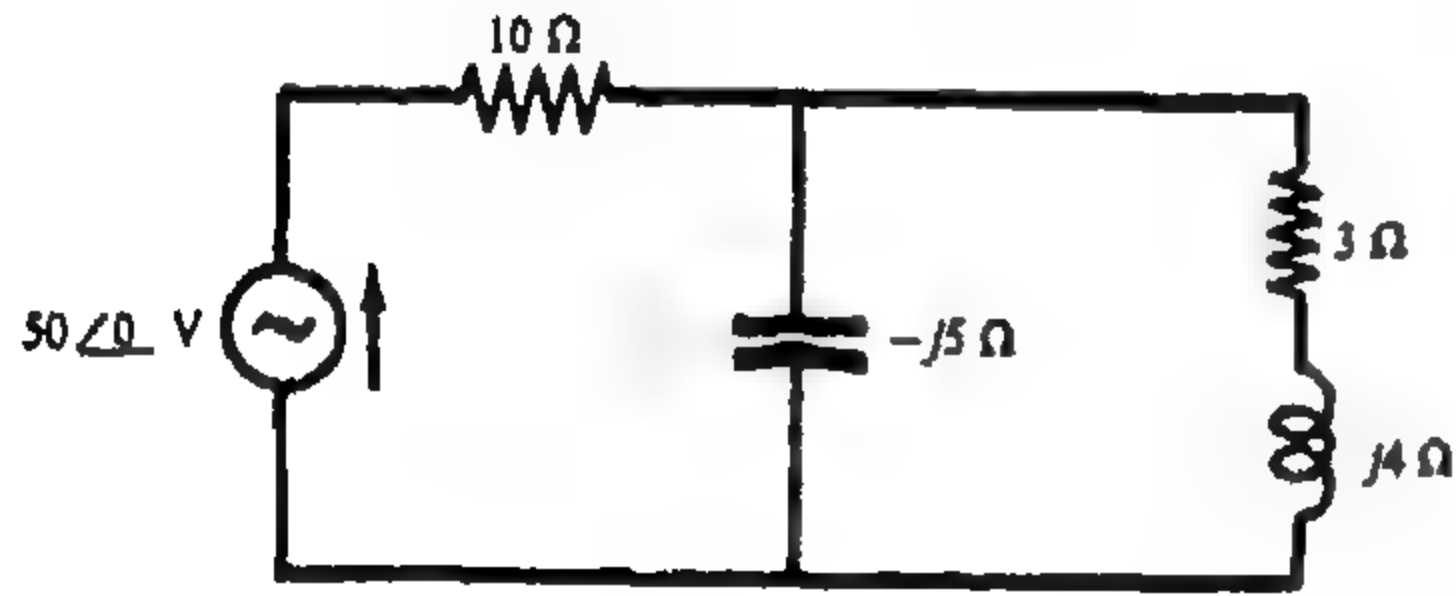


شكل ١٠ - ٢٥



شكل ١٠ - ٢٤

١٠ - ١٩ الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٥ فنظر في أكتب معادلات العقدة الثلاثة لهذه الدائرة ثم ضمها في الصيغة المصفوفية ، ثم أكتب [Y] بطريقة الفحص وقارنها بتلك التي نحصل عليها من المعادلات .



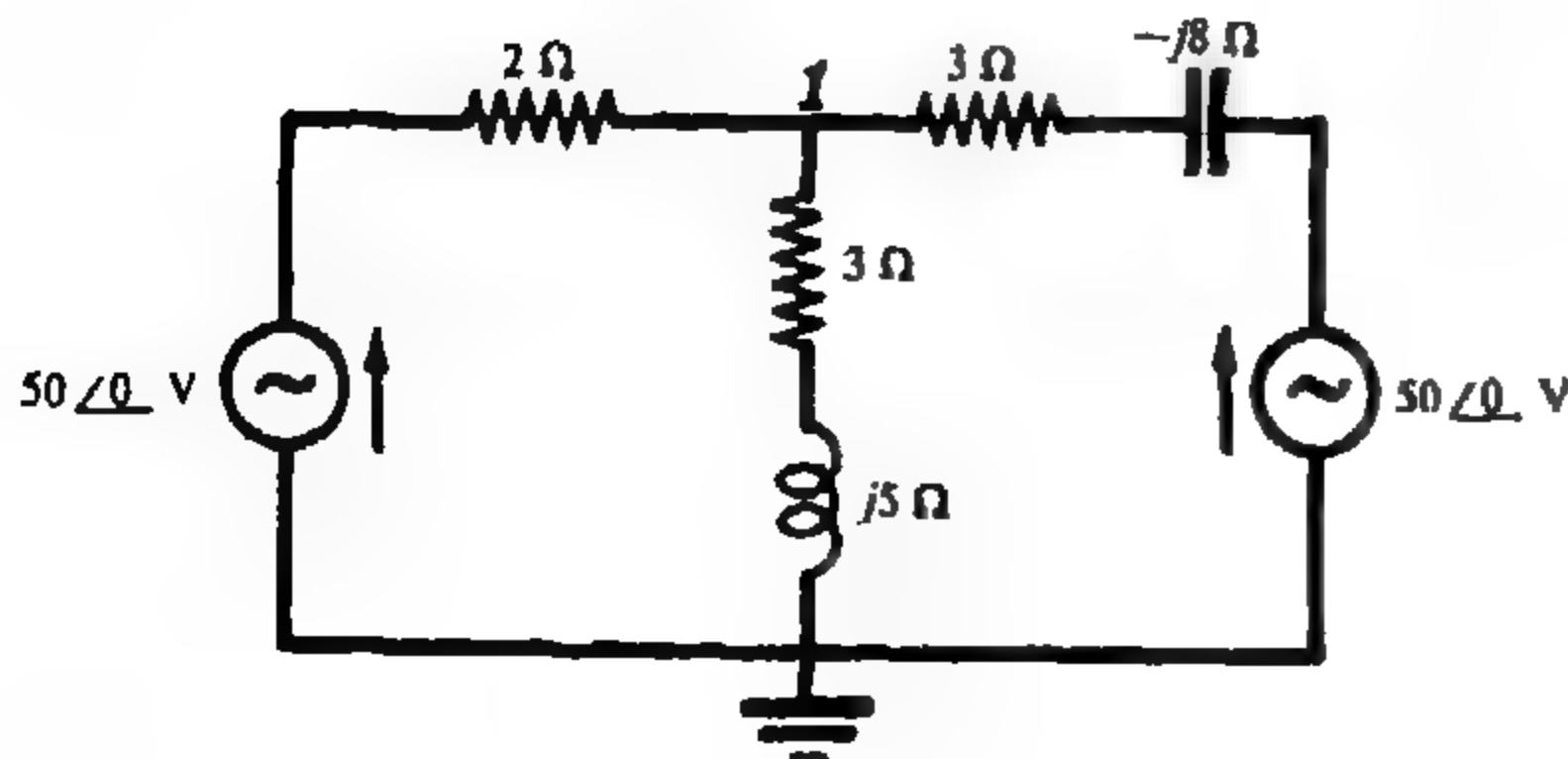
شكل ١٠ - ٢٦

١٠ - ٢٠ استخدم طريقة العقدة في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٦ لتحصل على القدرة المعطاة بالمصدر 50 volt والقدرة في المقاومتين .

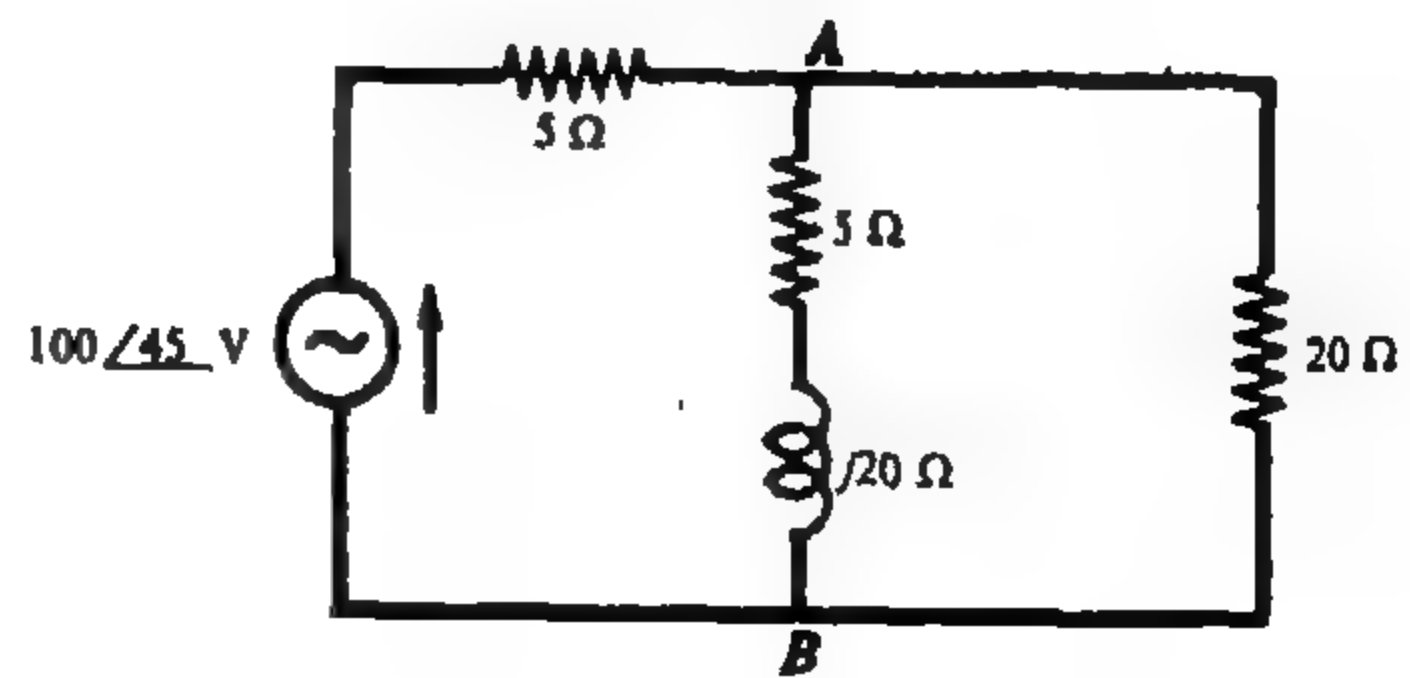
الجواب : 140 W, 80 W, 60 W

١٠ - ٢١ باستخدام طريقة العقدة . أوجد الجهد V_{AB} في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٧ .

الجواب : $75.4 \angle 55.2^\circ V$



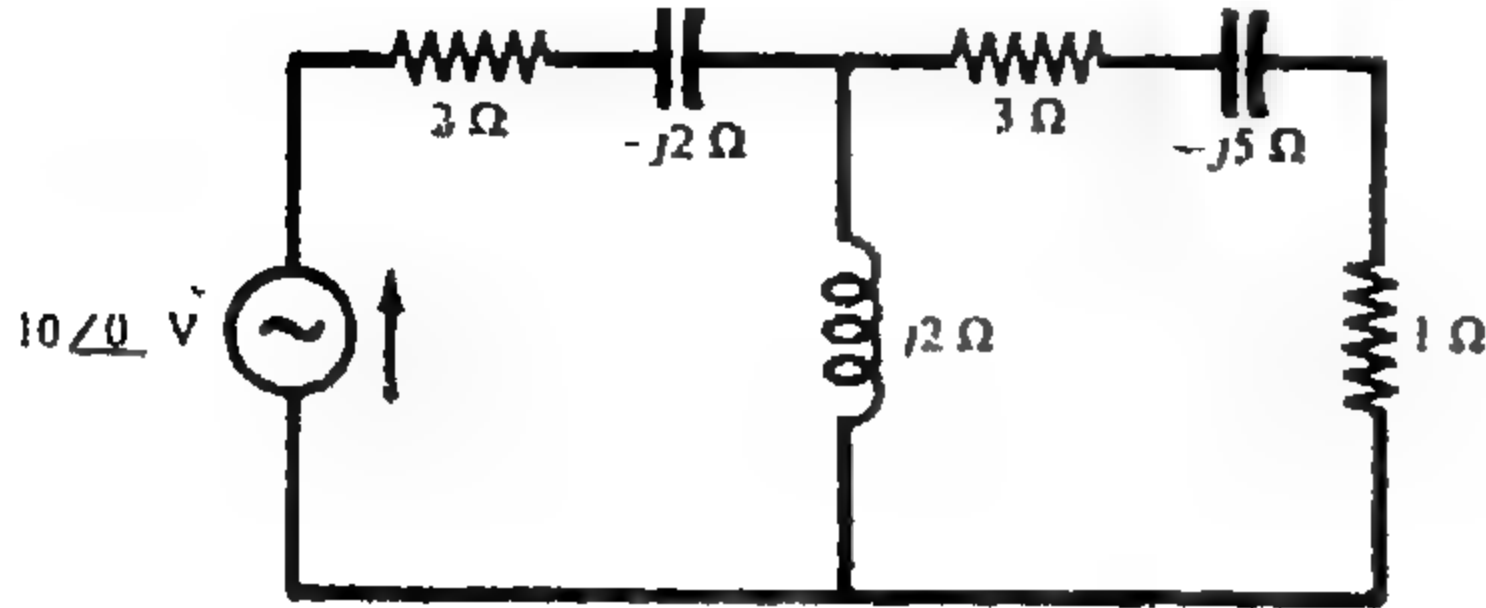
شكل ١٠ - ٢٨



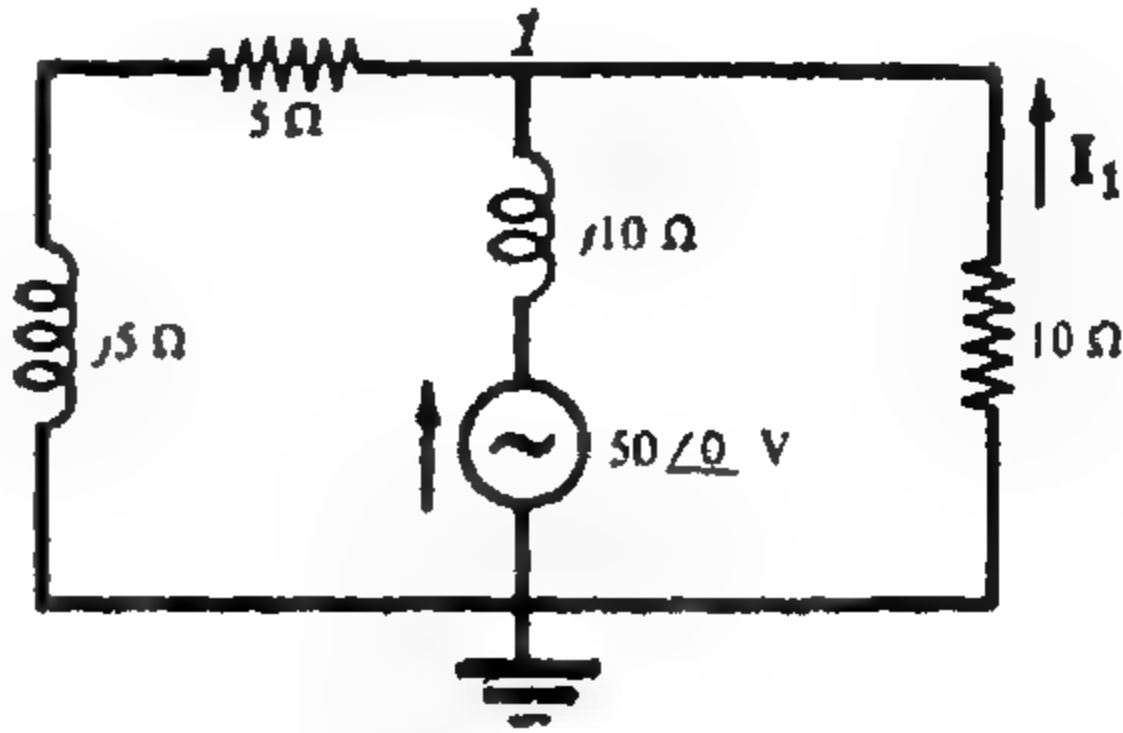
شكل ١٠ - ٢٧

١٠ - ٢٢ أوجد جهد العقدة V_1 في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٨ . الجواب $43.9 \angle 14.9^\circ V$

١٠ - ٢٣ أوجد الجهد عند العقدة ١ والتيار I_1 للدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٩ وذلك بفرض اتجاه I_1 كما هو موضح في الرسم . الجواب $17.7 \angle -45^\circ V, 1.77 \angle 135^\circ A$



شكل ١٠ - ٣٠

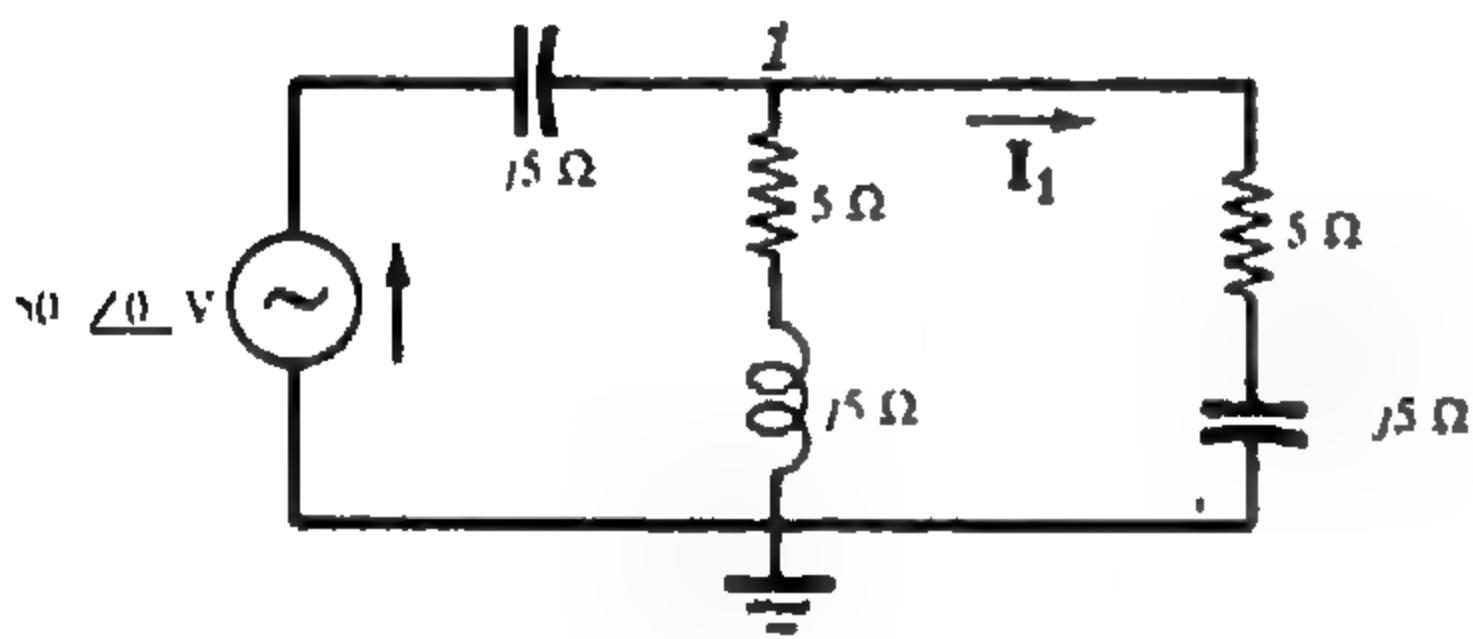


شكل ١٠ - ٢٩

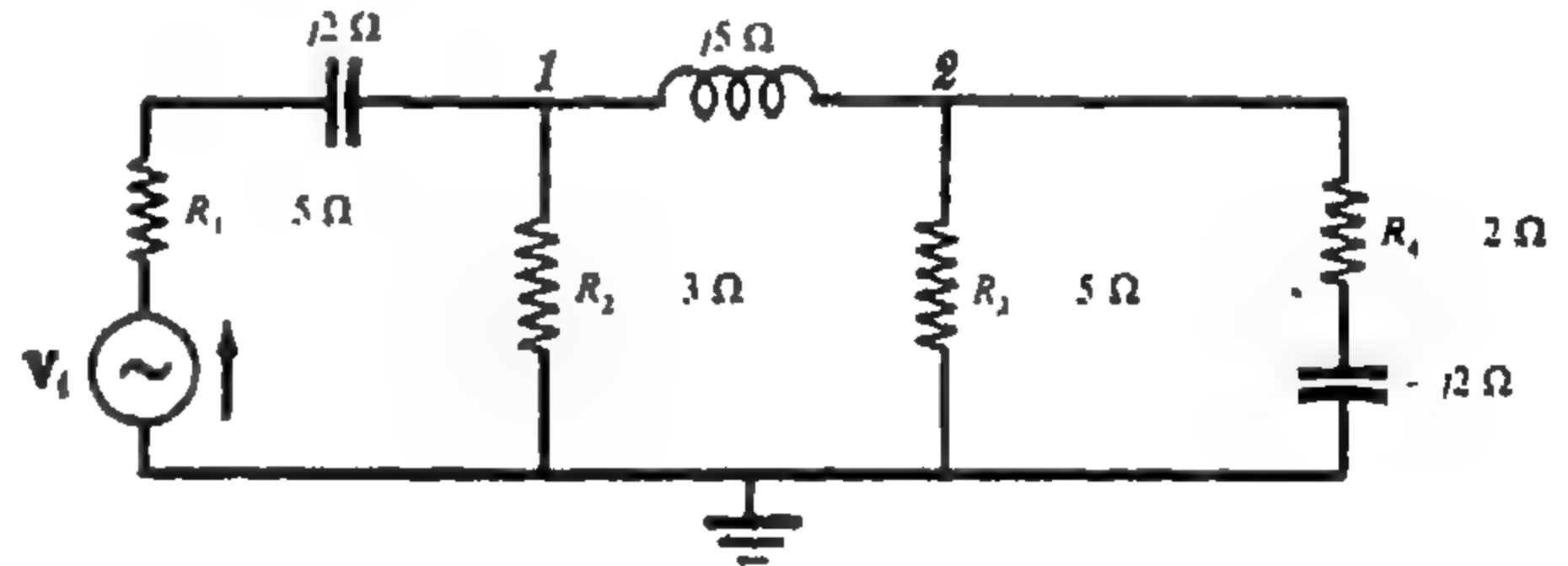
١٠ - ٢٤ باستخدام طريقة العقدة أوجد القدرة المعطاة بالمصدر 10 volts وكذلك القدرة في كل مقاومة في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٣٠ . الجواب : $2.22 W$ و $6.66 W$ و $27.8 W$ و $36.7 W$

١٠ - ٢٥ أوجد القدرة المعطاة للدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٣١ بالمصدر $V_1 = 50 \angle 0^\circ V$. عين أيضا القدرة المستنفذة في كل مقاومة في الدائرة .

الجواب : $P = 354 W, P_1 = 256 W, P_2 = 77.1 W, P_3 = 9.12 W, P_4 = 11.3 W$



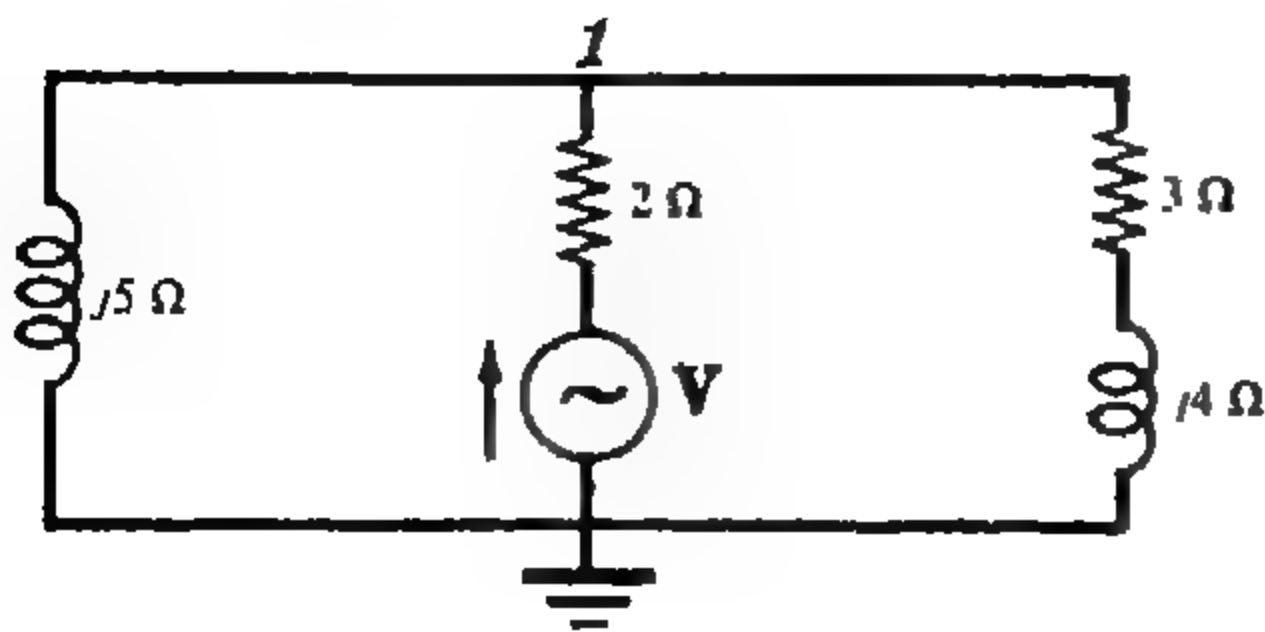
شكل ١٠ - ٣٢



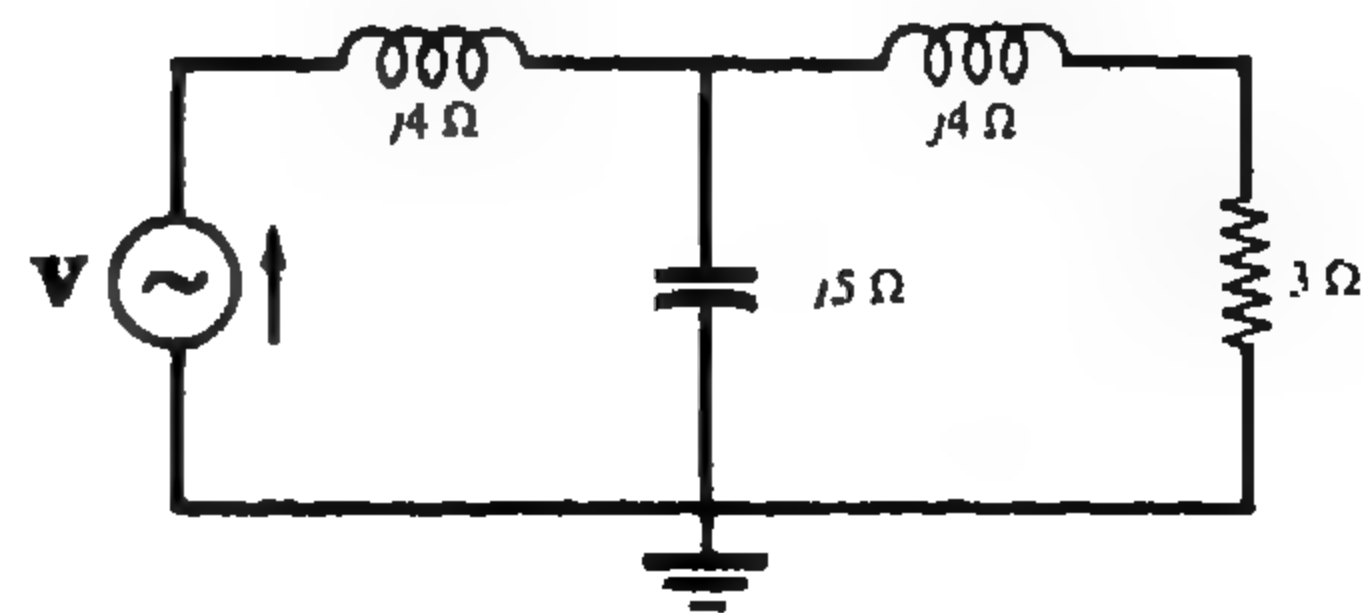
شكل ١٠ - ٣١

١٠ - ٢٦ باستخدام طريقة العقدة - أوجد I_1 في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٣٢ . الجواب : $5 \angle 90^\circ A$

١٠ - ٢٧ أوجد في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٣٣ القيمة الفعالة لجهد المصدر V التي ينتج عنها قدرة 75 W في المقاومة 3Ω . الجواب : $24.2 V$



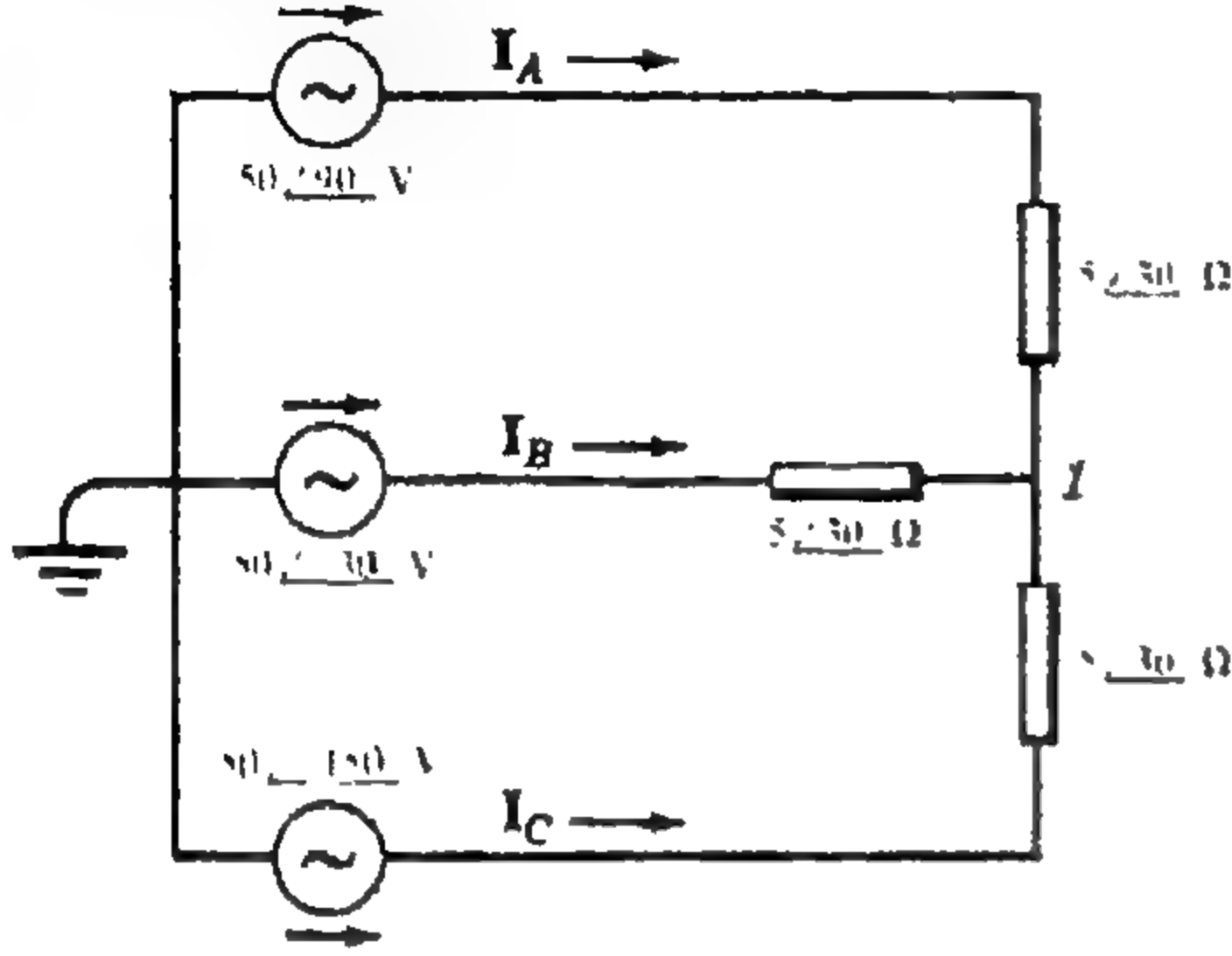
شكل ١٠ - ٣٤



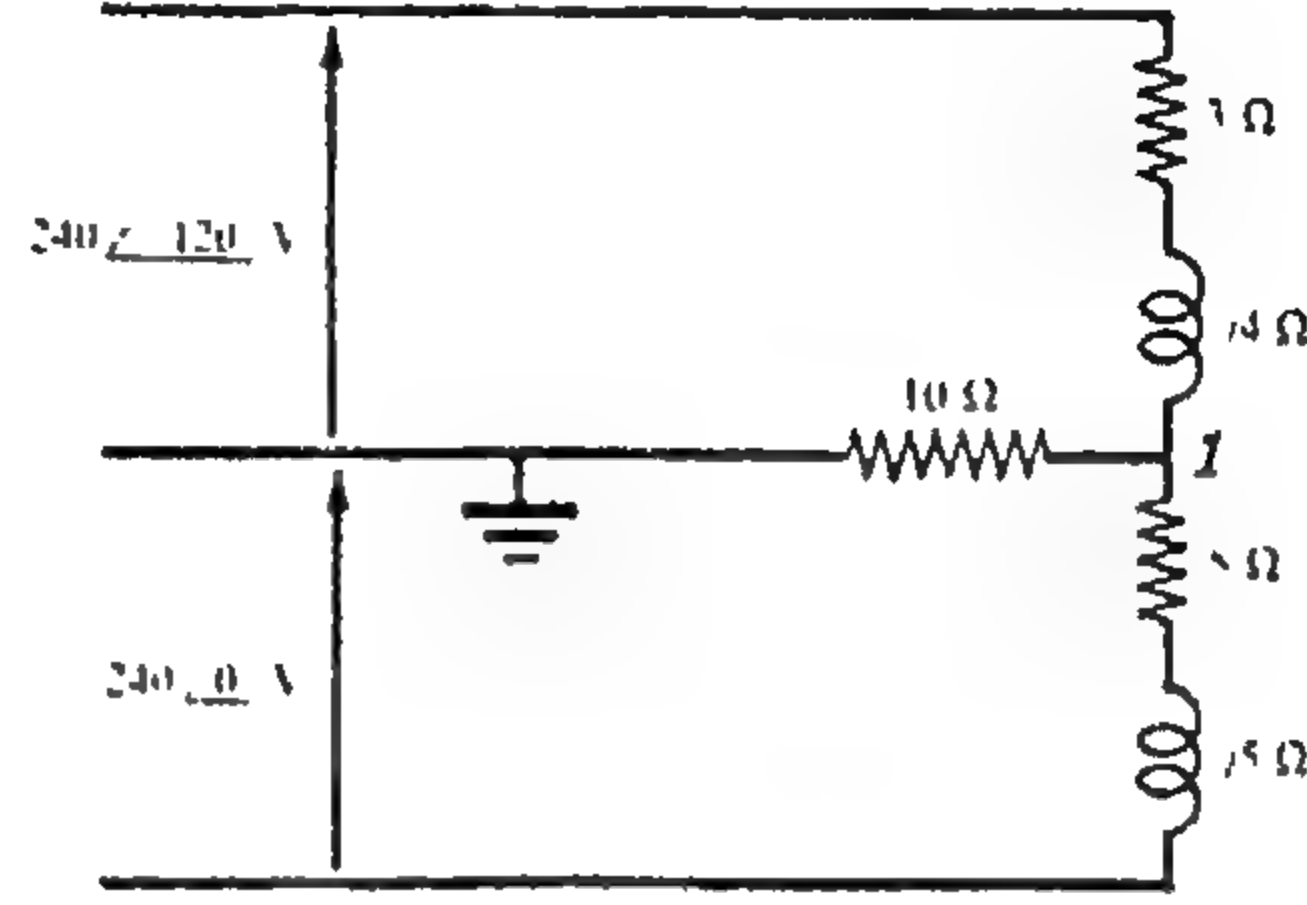
شكل ١٠ - ٣٣

١٠ - ٢٨ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٤ أوجد جهد المصدر V الذي ينتج جهداً عند العقدة ١ مساوياً $50 \angle 0^\circ V$
الجواب : $71.6 \angle 30.2^\circ V$

٢٠ - ٢٩ أوجد الجهد عند العقدة ١ للدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٥ . الجواب : $179 \angle 204.8^\circ V$



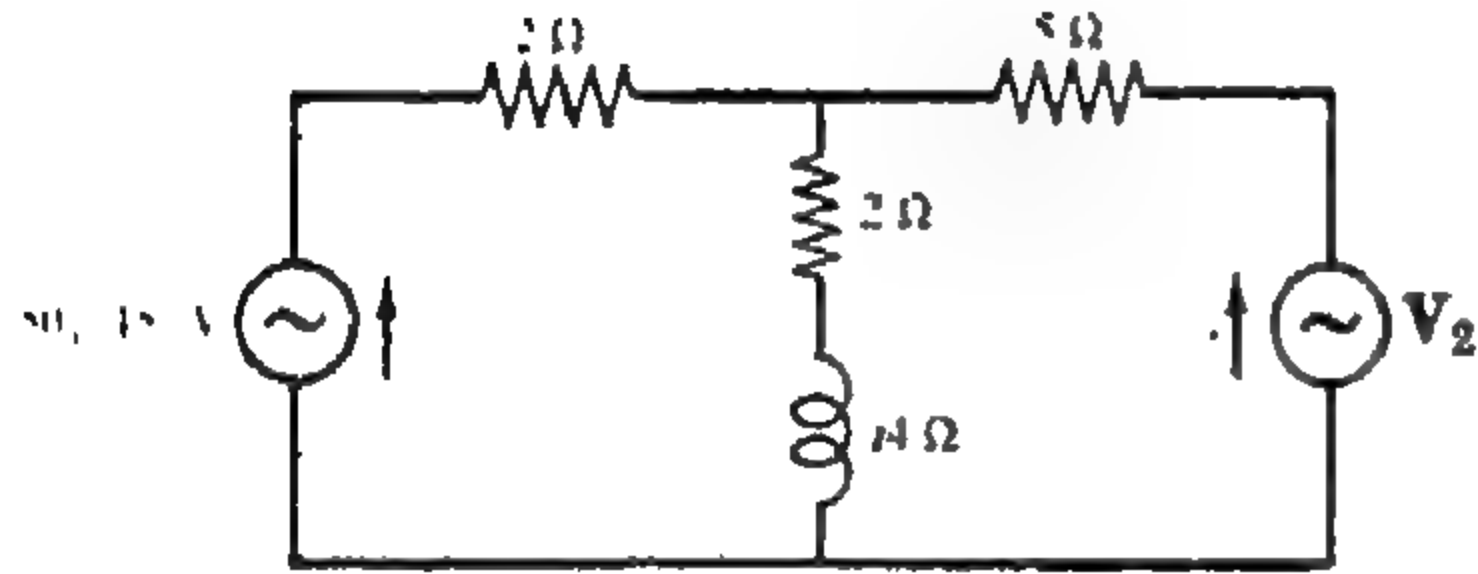
شكل ١٠ - ٣٦



شكل ١٠ - ٣٥

١٠ - ٣٠ أوجد تيارات الأفرع الثلاثة I_A و I_B و I_C وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٦ .
الجواب : $10 \angle 180^\circ A$ و $10 \angle -60^\circ A$ و $10 \angle 60^\circ A$

٢٠ - ٣١ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٧ أوجد
جهد المصدر V_2 الذي ينتج عند تيار مساو للصفر في
المعاوقة $2 + j4 \Omega$.
الجواب : $125 \angle -135^\circ V$

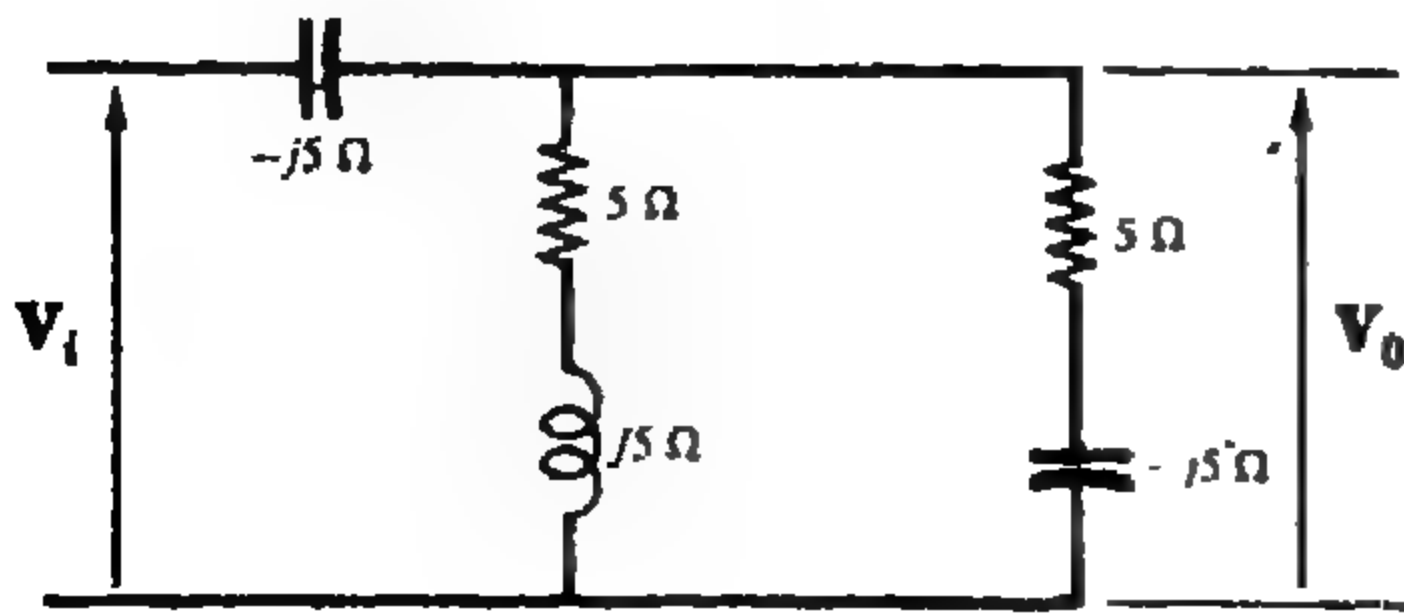


شكل ١٠ - ٣٧

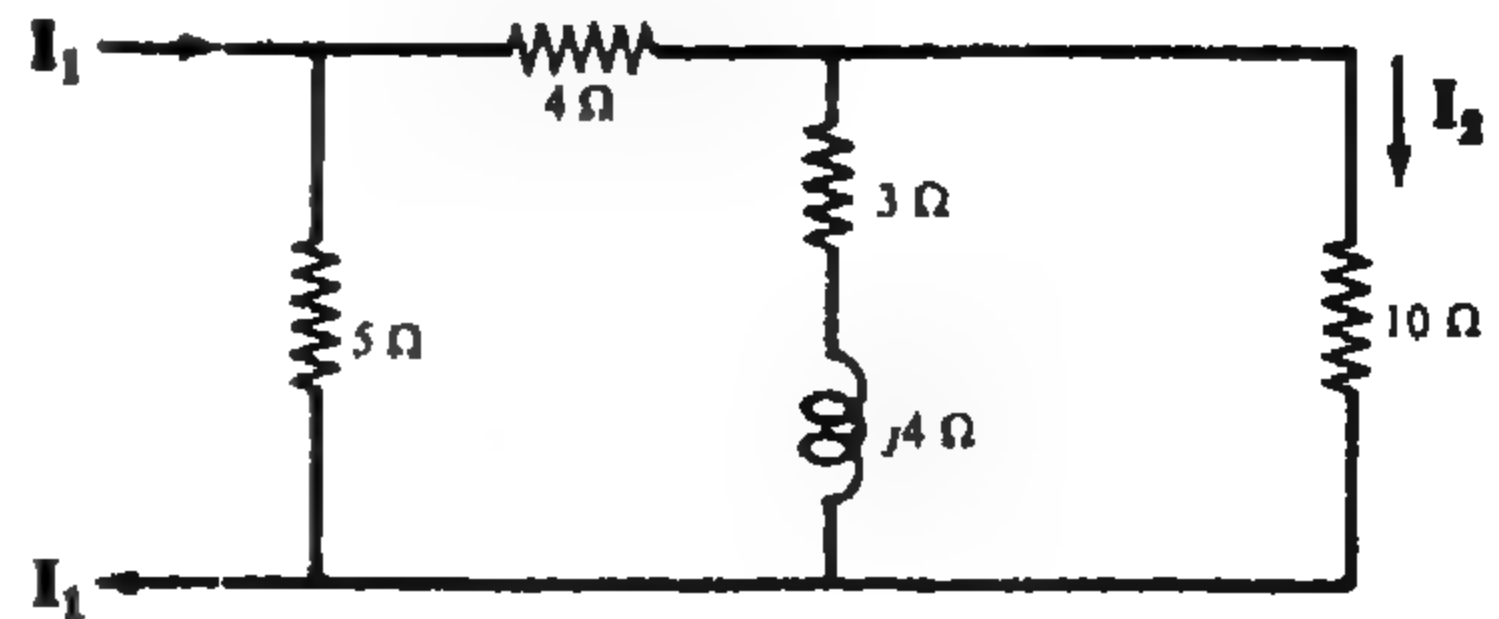
١٠ - ٣٢ بالإشارة إلى الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٧ إذا
كان المصدر V_2 هو $100 \angle 30^\circ V$ فأوجد التيار
في المعاوقة $2 + j4 \Omega$.
الجواب : $12.1 \angle -11^\circ A$

١٠ - ٣٣ في المسألة ١٠-٣٢ أوجد القدرة المعطاة للشبكة الكهربائية بكل مصدر .
الجواب $P_1 = -90.6 W, P_2 = 1000 W$

١٠ - ٣٤ أوجد النسبة I_2/I_1 للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٣٨ والتي لها تيار I_1 . علماً بأن التيار المسار
في المقاومة 10Ω هو I_2 . الجواب : $0.151 \angle 25.8^\circ$



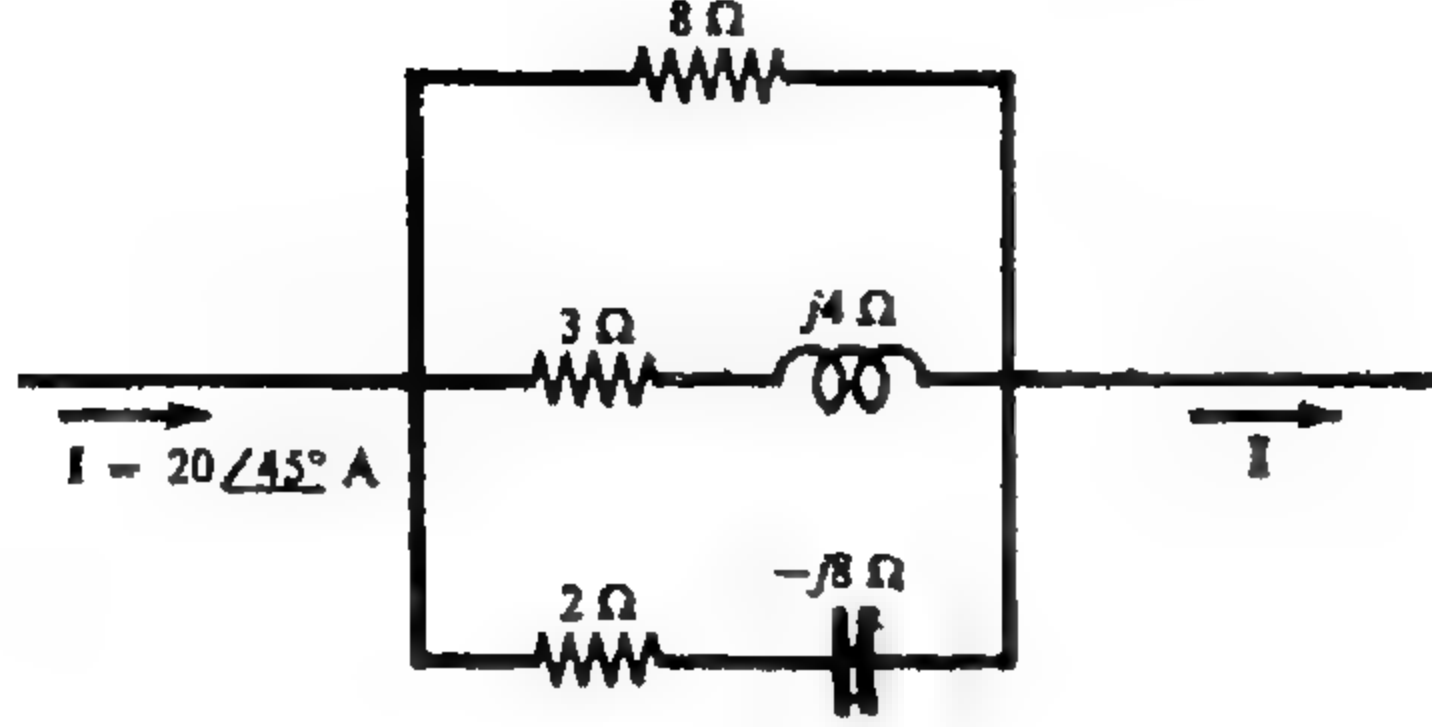
شكل ١٠ - ٣٩



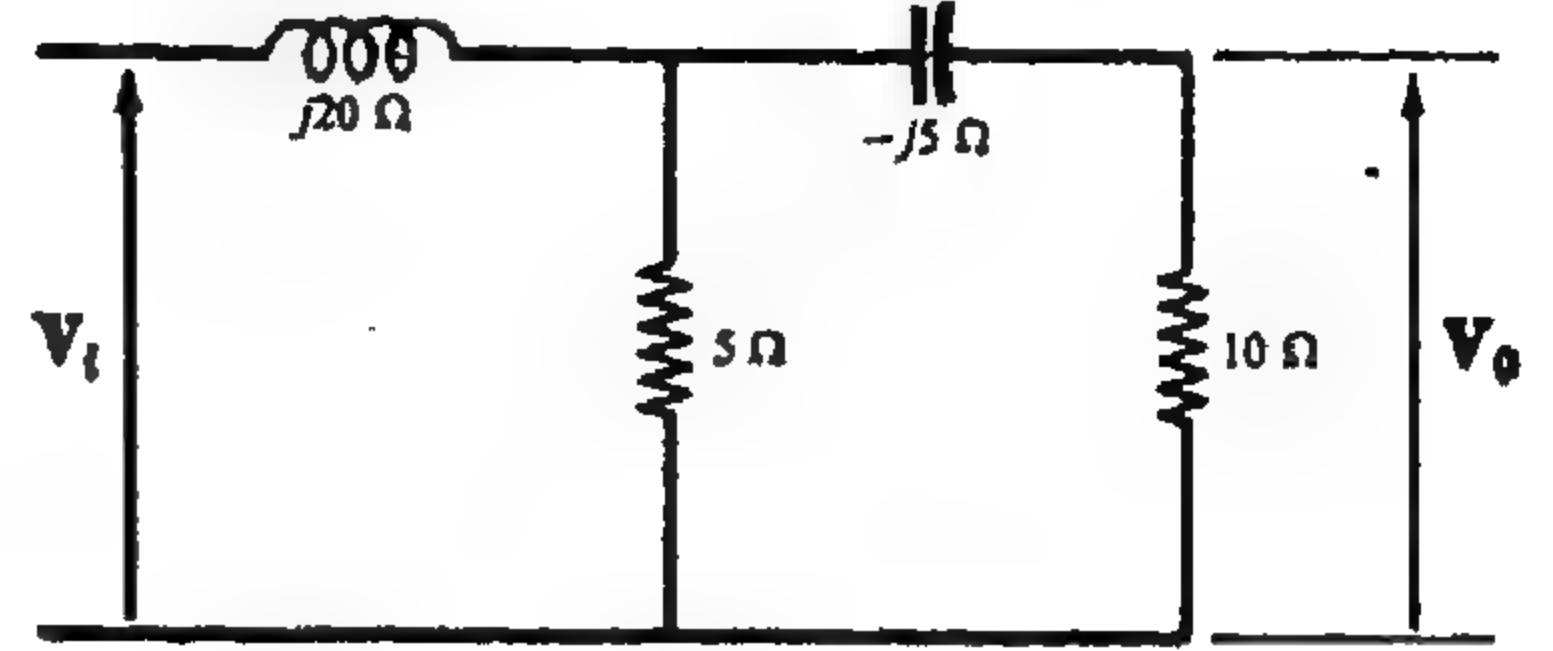
شكل ١٠ - ٣٨

٣٥ - ١٠ باستخدام طريقة العقدة أوجد دالة انتقال الجهد V_o/V_i وذلك للدائرة الموضحة في الشكل ٣٩-١٠ .
الجواب : $0.707 \angle 45^\circ$

٣٦ - ١٠ أوجد دالة انتقال الجهد V_o/V_i للدائرة الموضحة في الشكل ٤٠-١٠ .
الجواب : $0.159 \angle -61.4^\circ$



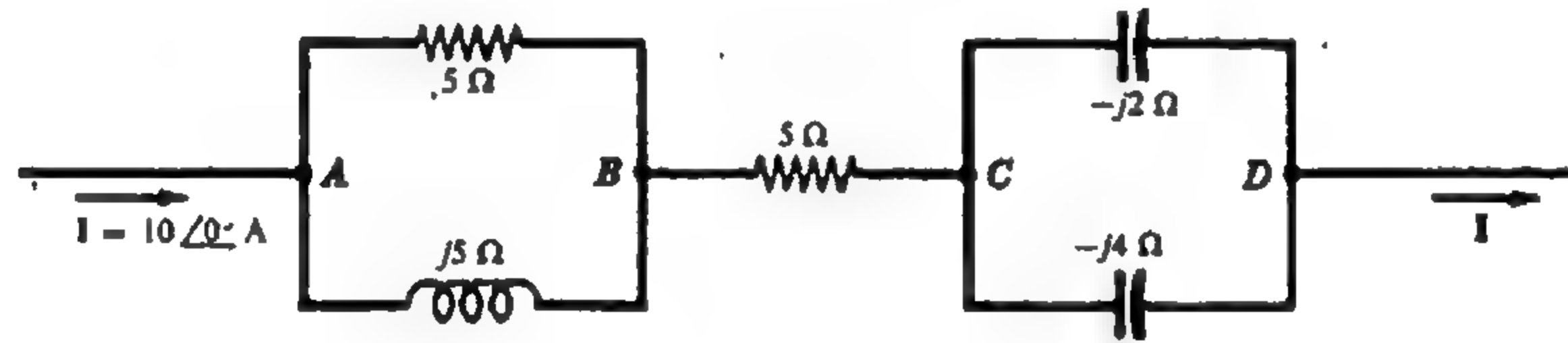
شكل ١٠ - ٤١



شكل ١٠ - ٤٠

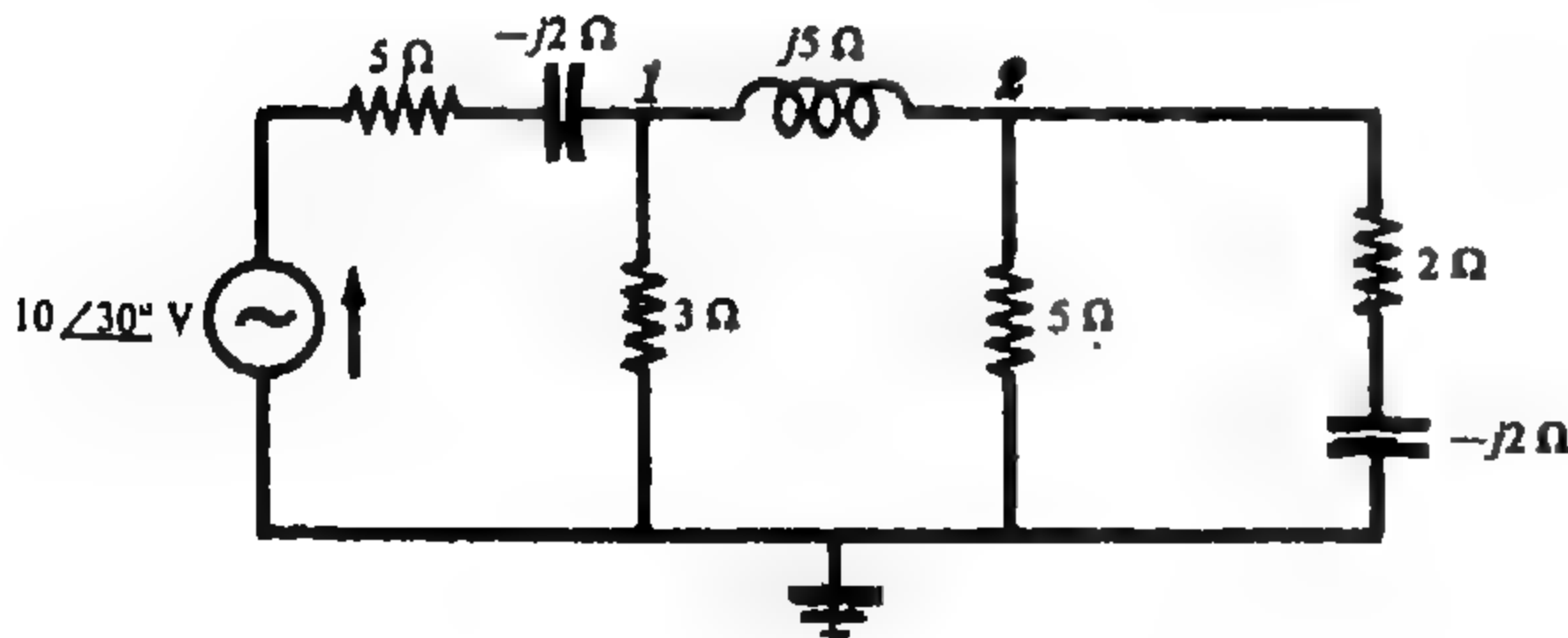
٣٧ - ١٠ استخدم طريقة العقدة للحصول على الجهد عبر الدائرة المتصلة على التوازي والموضحة في الشكل ٤١-١٠ .
الجواب : $72.2 \angle 53.8^\circ V$

٣٨ - ١٠ باستخدام طريقة العقدة أوجد الجهود V_{AB} و V_{BC} و V_{CD} وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ٤٢-١٠ .
الجواب : $35.4 \angle 45^\circ V, 50 \angle 0^\circ V, 13.3 \angle -90^\circ V$

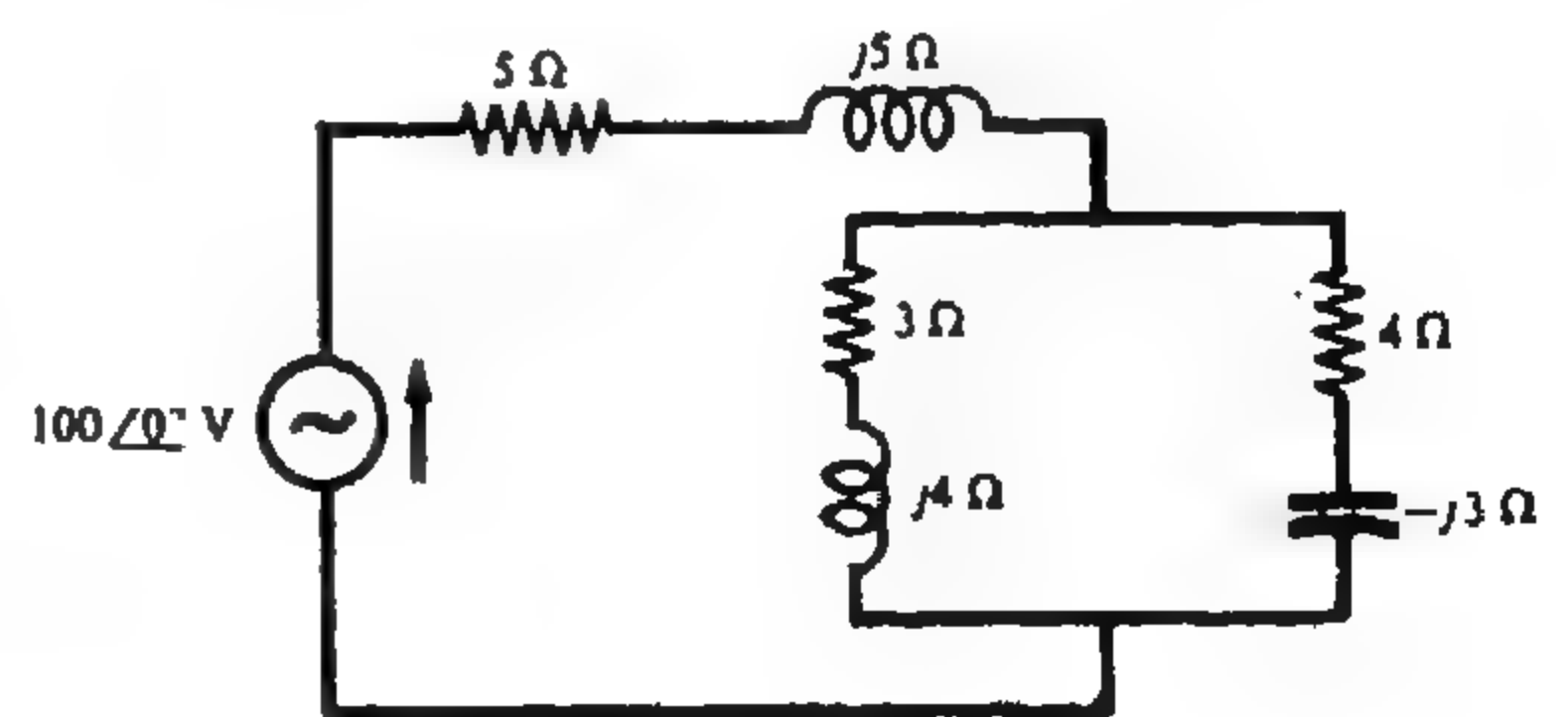


شكل ١٠ - ٤٢

٣٩ - ١٠ باستخدام طريقة العقدة . أوجد الجهد عبر المقاومات المتصلة على التوازي وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ٤٣-١٠ .
الجواب : $35 \angle -24.8^\circ V$



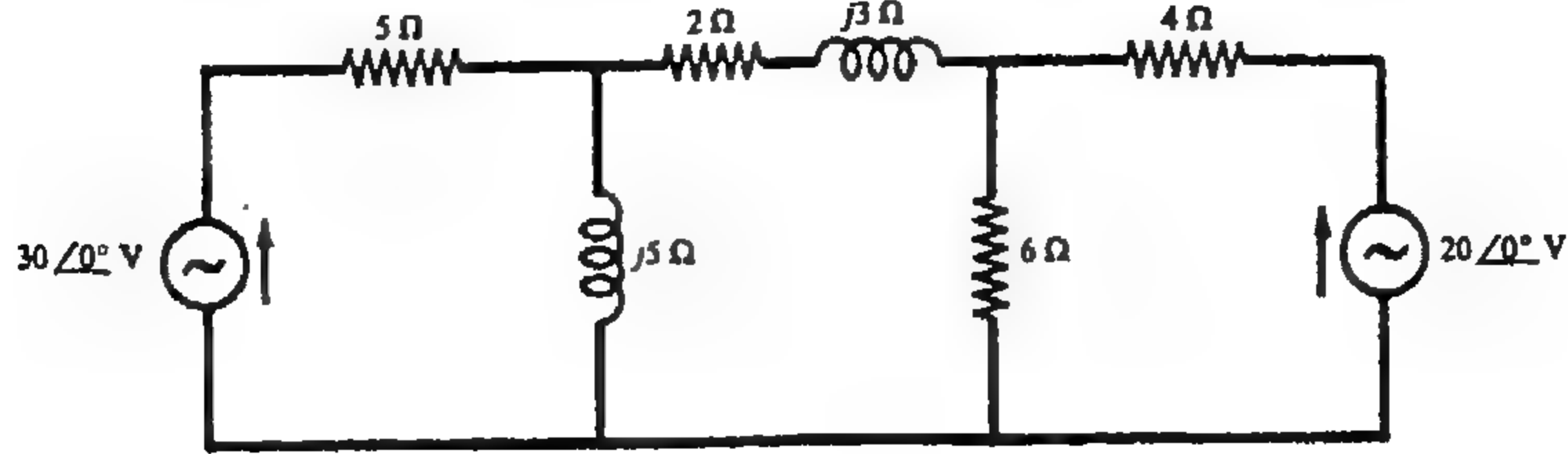
شكل ١٠ - ٤٤



شكل ١٠ - ٤٣

٤٠ - ١٠ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٤٤-١٠ ، أوجد جهدي العقدة V_1 و V_2 وكذلك تيار المصدر $10 \angle 30^\circ V$
الجواب : $3.02 \angle 65.2^\circ V, 1.34 \angle -31.3^\circ V, 1.44 \angle 38.8^\circ A$

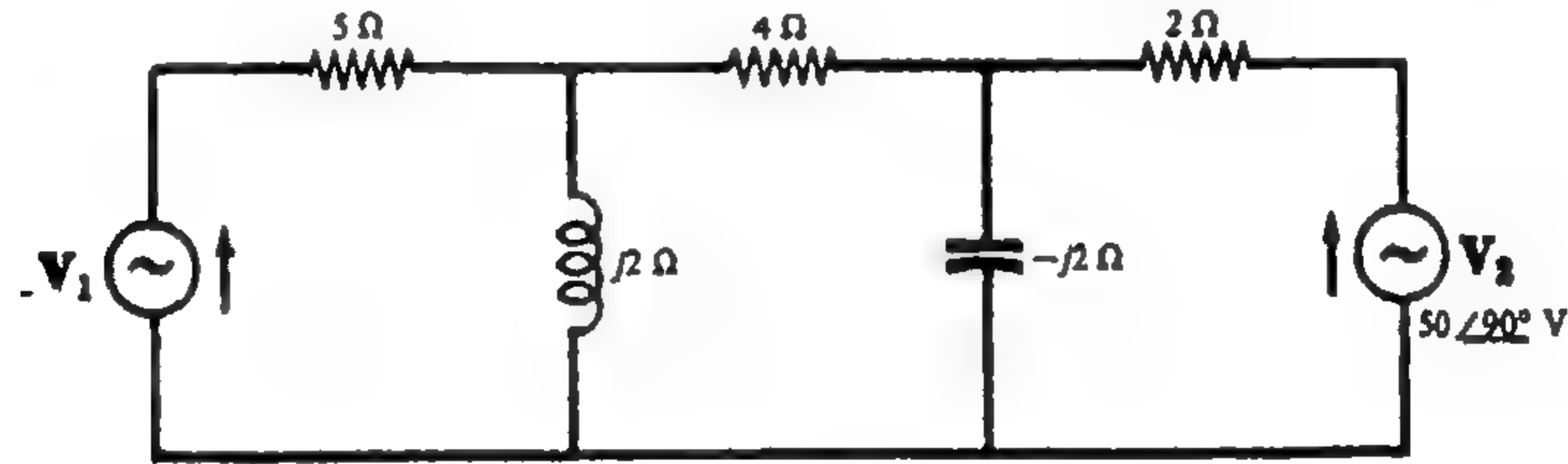
١٠-٤١ باستخدام طريقة العقدة أوجد القدرة في المقاومة $6\ \Omega$ وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٤٥ .
الجواب : $39.6\ W$



شكل ١٠ - ٤٥

١٠-٤٢ بالإشارة إلى الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٤٥ ، أوجد التيار المار في المعاوقة $2 + j3\ \Omega$ وذلك مع اعتبار الاتجاه إلى اليمين موجبا .
الجواب : $1.73 \angle 40^\circ\ A$

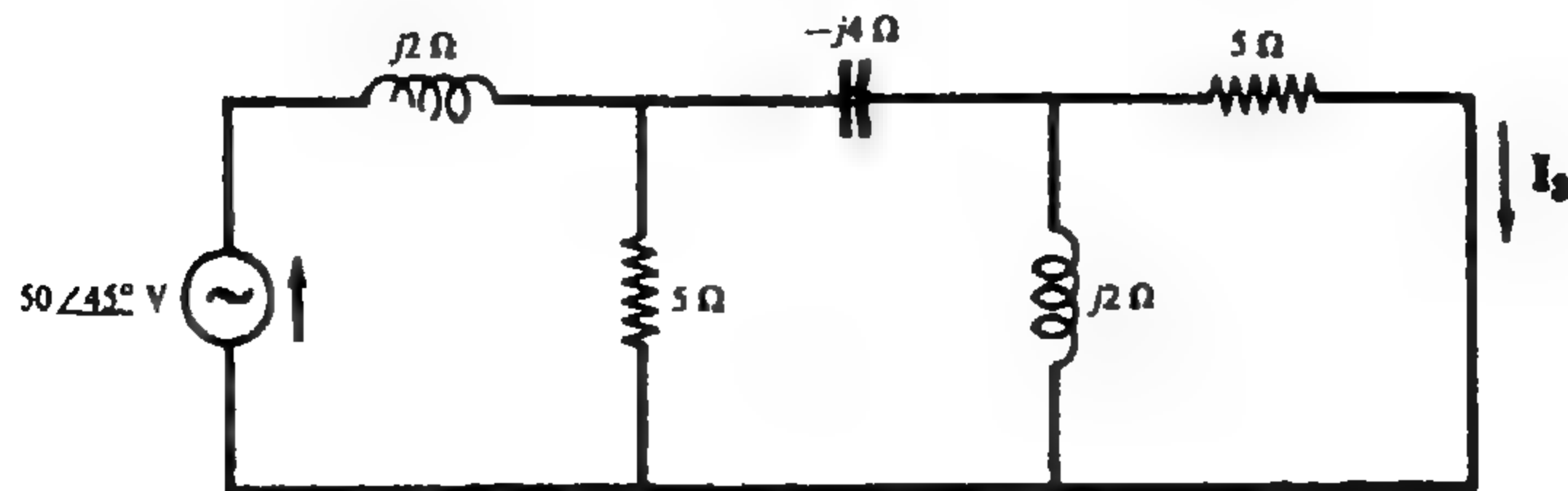
١٠-٤٣ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٤٦ ، أوجد الجهد V_1 الذي يجعل التيار المار في المقاومة $4\ \Omega$ مساويا للصفر . اختر إحدى نهايتي المقاومة كمعقدة اسناد .
الجواب : $95.4 \angle -23.2^\circ\ V$



شكل ١٠ - ٤٦

١٠-٤٤ بالإشارة إلى الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٤٦ إذا كان المصدر $V_1 = 50 \angle 0^\circ\ V$ و V_2 غير معلوم ، فأوجد V_2 بحيث يكون التيار المار في المقاومة $4\ \Omega$ مساويا للصفر .
الجواب : $26.2 \angle 113.2^\circ\ V$

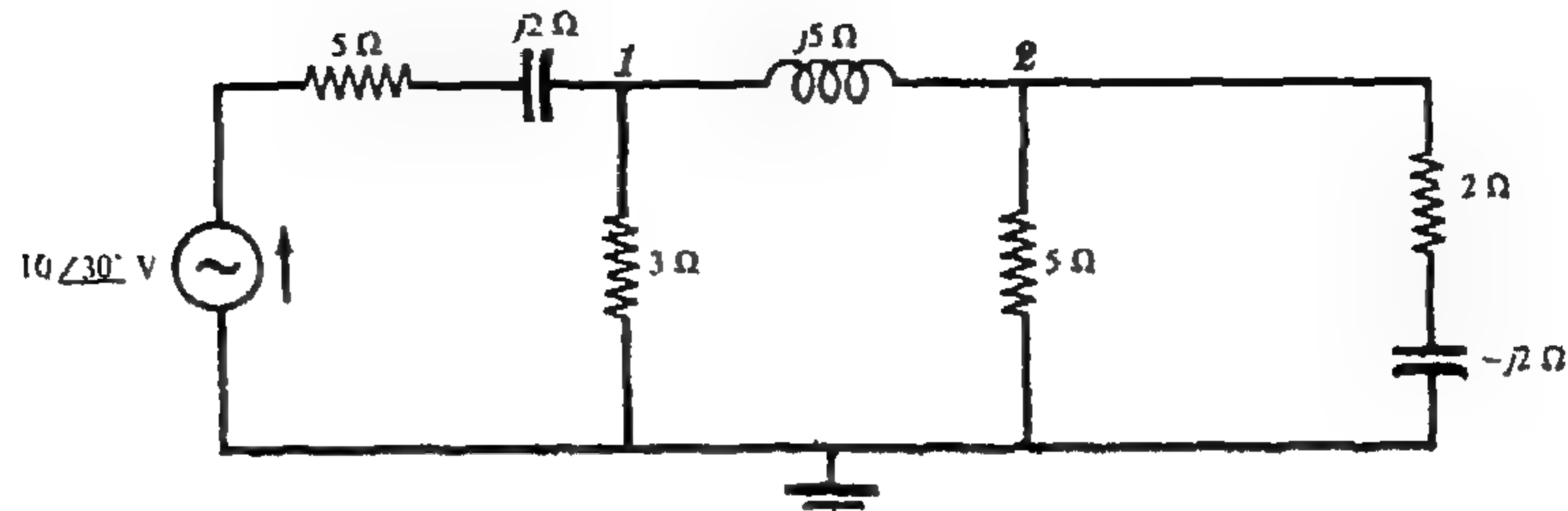
١٠-٤٥ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٤٧ ، أوجد التيار I_3 وذلك مع اعتبار الاتجاه الموضح في الشكل .
الجواب : $11.7 \angle 112.9^\circ\ A$



شكل ١٠ - ٤٧

١٠ - ٤٦ : في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠ - ٤٨ أوجد النسبة بين جهدي العقدين V_1/V_2 .

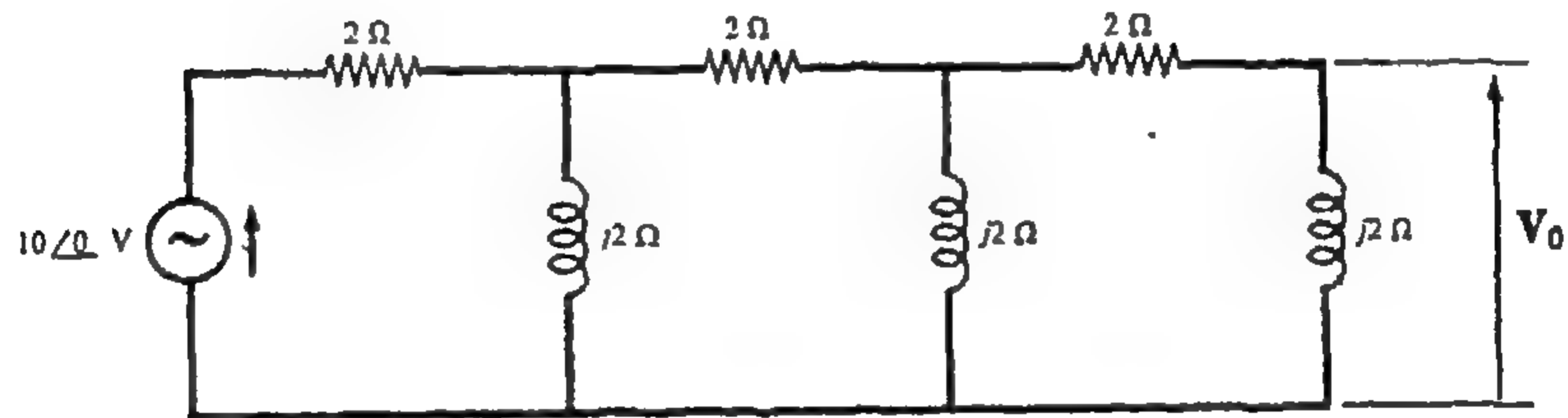
الجواب : $2.26 / 96.35^\circ$



شكل ١٠ - ٤٨

١٠ - ٤٧ : باستخدام طريقة العقدة أوجد الجهد V_0 وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٤٩.

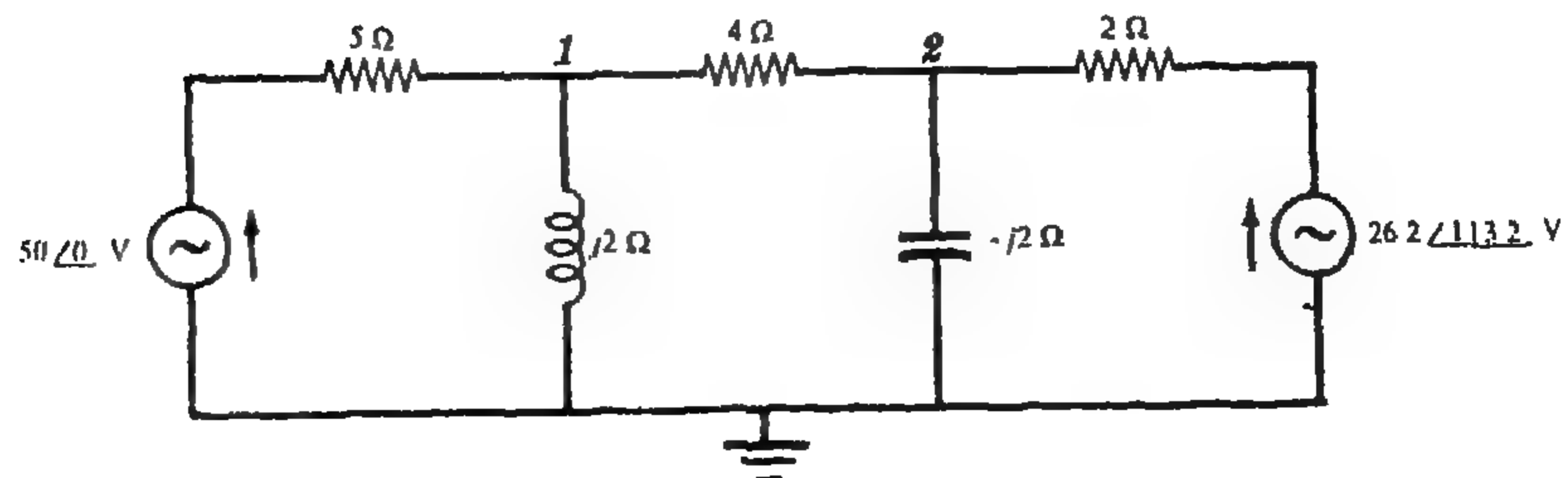
الجواب : $1.56 / 128.7^\circ V$



شكل ١٠ - ٤٩

١٠ - ٤٨ : أوجد جهدي العقدين V_1 و V_2 وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٥٠.

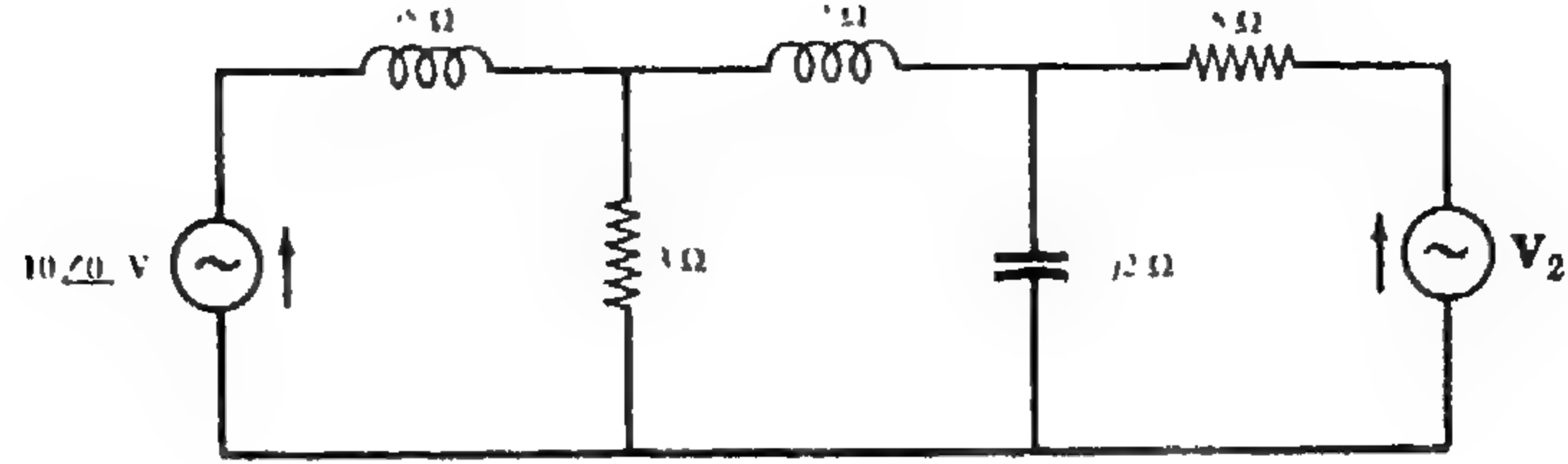
الجواب : $18.6 / 68.2^\circ V$



شكل ١٠ - ٥٠

١٠ - ٤٩ في الدائرة الموضحة و الشكل ١٠ - ٥١ أوجد مصدر الجهد V_2 بحيث يكون تياره مساويا للصفر .

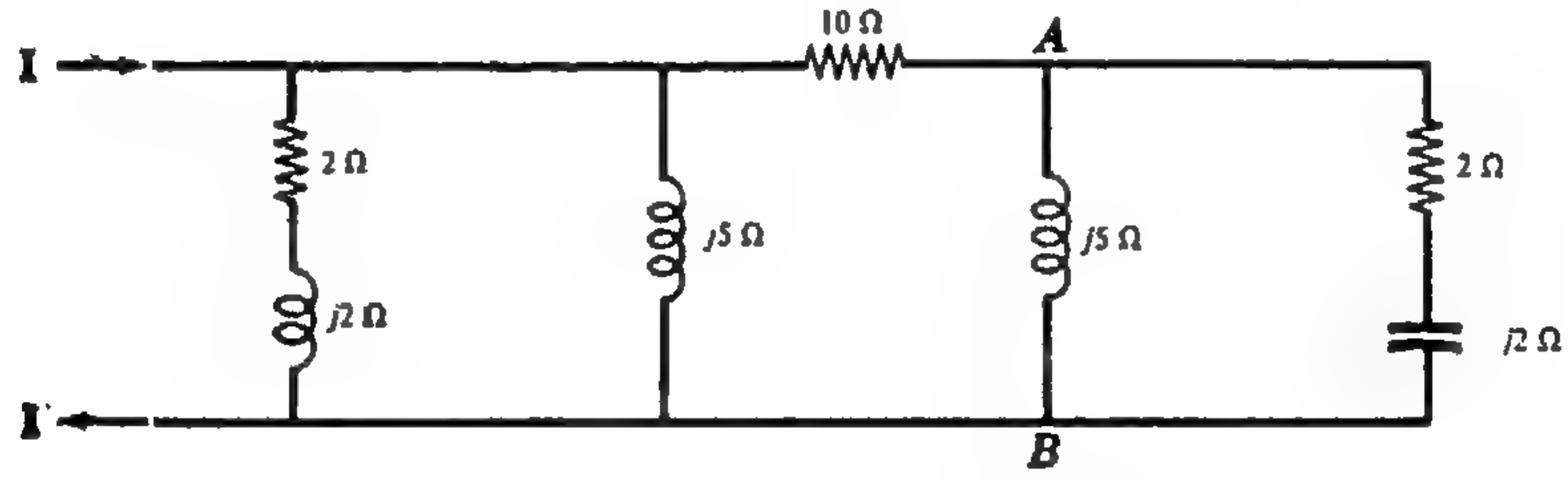
الجواب $4 \angle 180^\circ V$



شكل ١٠ - ٥١

١٠ - ٥٠ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٥٢ - أوجد التيار المار I الذي ينتج عنه جهد V_{AB} مساويا $5 \angle 30^\circ V$

الجواب $9.72 \angle -16^\circ A$



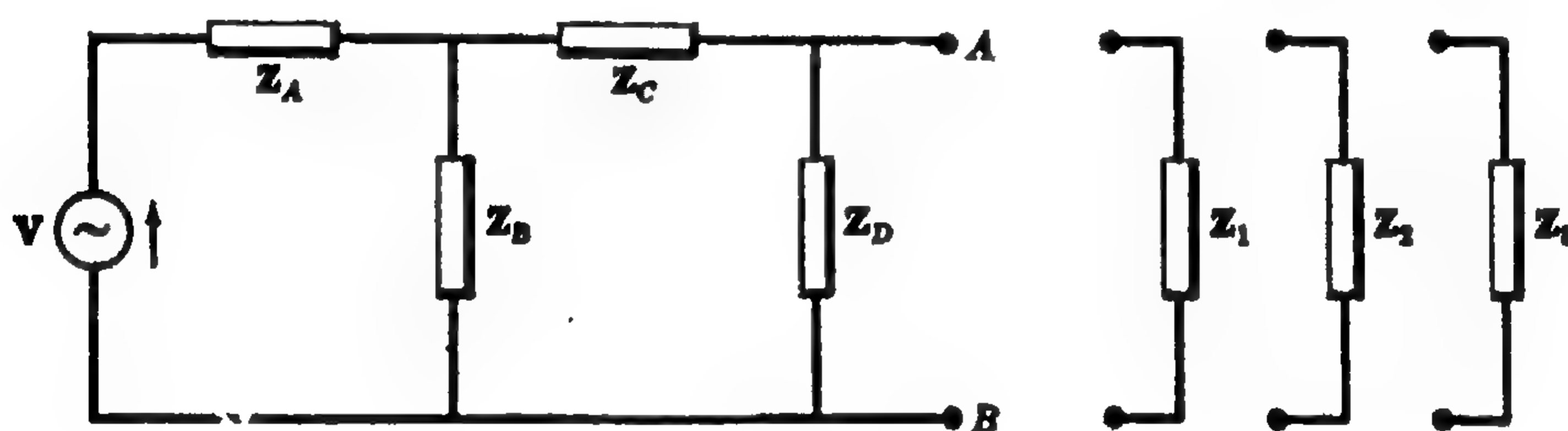
شكل ١٠ - ٥٢

الفصل الحادي عشر

نظريتا ثنين ونورتن

مقدمة :

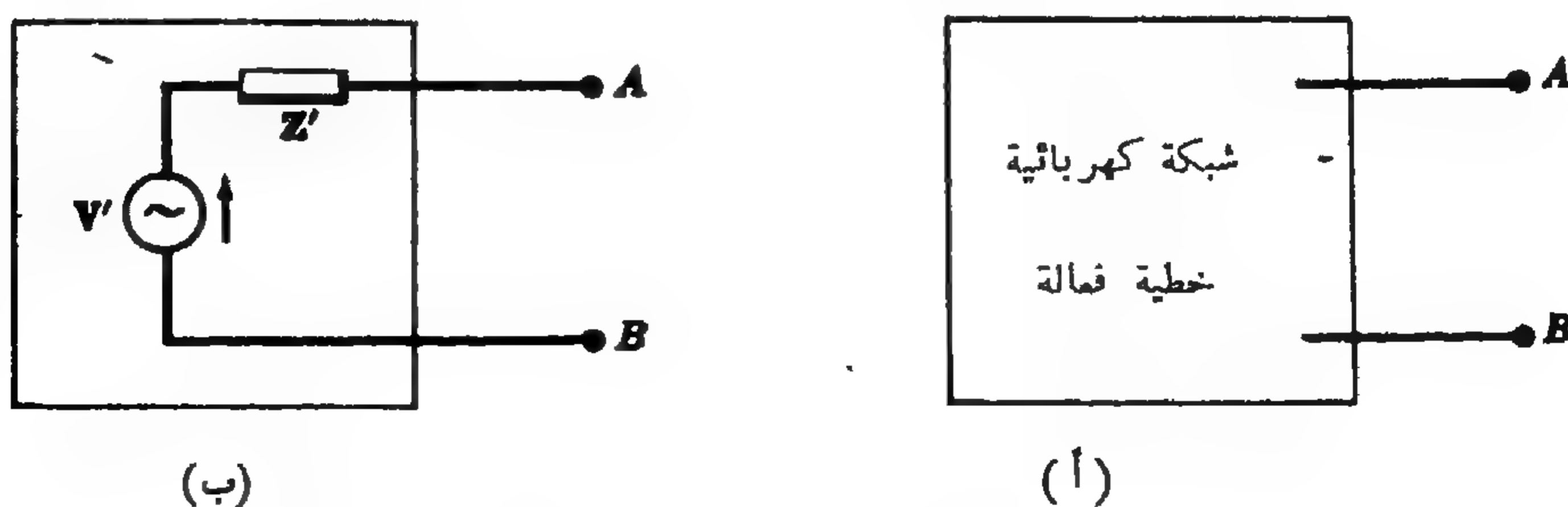
يمكن حل الشبكات الكهربائية التي فيها جميع المعاوقات ثابتة باستخدام إما طريقة تيار الشبكة أو طريقة جهد العقدة. لنعتبر الآن الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١-١١ وإذا أردنا توصيل المعاوقات Z_1 ، Z_2 ، Z_3 على التتابع في الدائرة ، فإنه بإدخال كل معاوقة في الدائرة ينتج لدينا مصفوفة مختلفة لـ Z أو Y حسب الطريقة المستخدمة ، وبالتالي فإننا نحتاج إلى ثلاثة حلول مختلفة . ويمكن التخلص من هذا العمل الشاق إذا استطعنا إبدال الشبكة الكهربائية الفعالة بدائرة بسيطة مكافئة وهذا هو هدف نظريتي ثنين ونورتن .



شكل ١ - ١١

نظرية ثنين :

تنص نظرية ثنين على أن أي شبكة كهربائية خطية فعالة (active) لها نهايتان خارجيتان AB مثل تلك الموضحة في الشكل ١-١٢ (١) يمكن إبدالها بمصدر واحد للجهد V' متصل معه على التوالي معاوقة Z' كما هو موضح في الشكل ١-١٢ (ب)



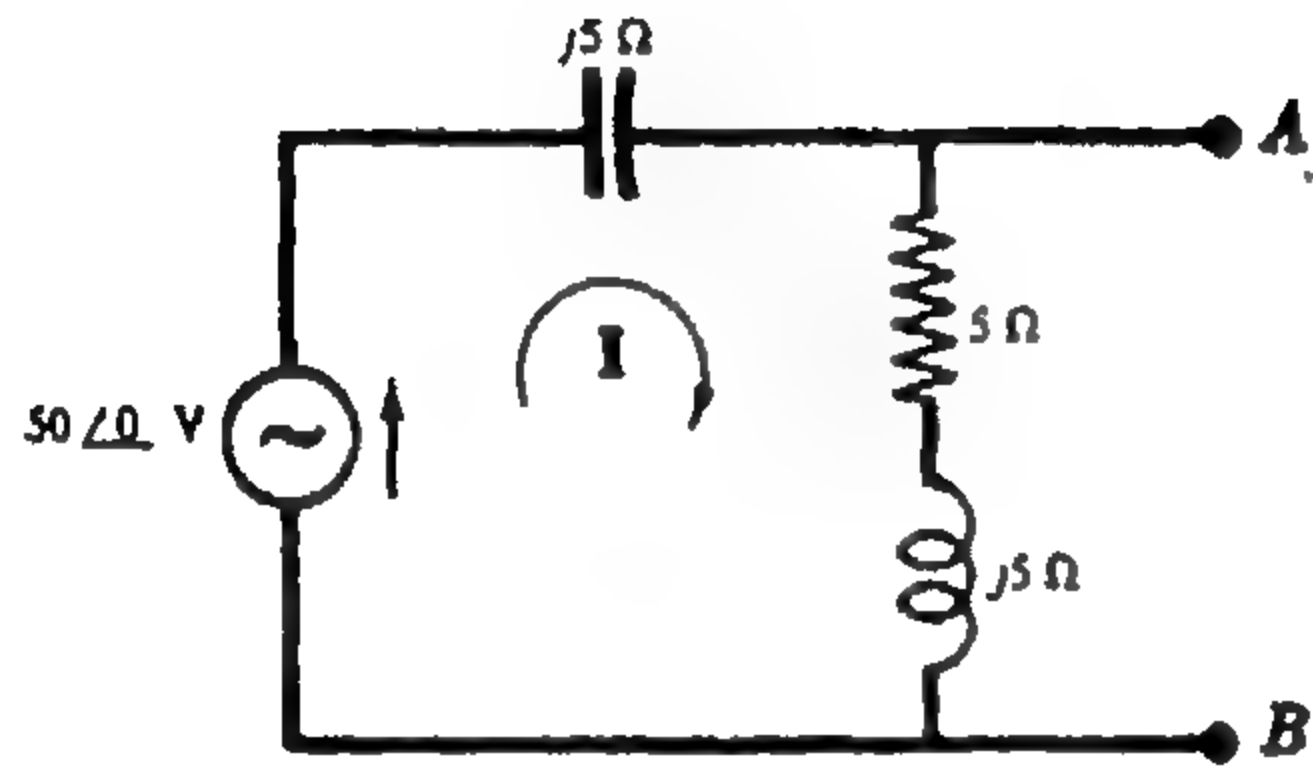
شكل ١ - ١٢ دائرة ثنين المكافئة

ومصدر ثنئين المكافئ V' هو جهد الدائرة المفتوحة المقاس بين الطرفين AB . والمعاوقة المكافئة هي المعاوقة المحركة للشبكة الكهربائية بين الطرفين AB وذلك مع وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر .

أما جهد ثنئين المكافئ V' فيجب أن يختار بحيث يكون التيار المسار في المعاوقة الموصلة له نفس اتجاه التيار الذى ينتج عند توصيل هذه المعاوقة في الشبكة الأصلية الفعالة .

مثال ١ :

إذا أعطيت الدائرة الموضحة في الشكل ١١ - ٣ ، عين دائرة ثنئين المكافئة بالنسبة للطرفين AB . استخدم النتيجة التى تحصل عليها في إيجاد التيارين المسارين في المعاوقتين $Z_1 = 5 - j5 \Omega$ ، $Z_2 = 10 \angle 0^\circ \Omega$ وذلك عند توصيلهما على التوالي بالطرفين AB ثم عين القدرة المعطاة لهما .



شكل ١١ - ٣

بالإشارة إلى الشكل ١١ - ٣ ، فإن التيار هو

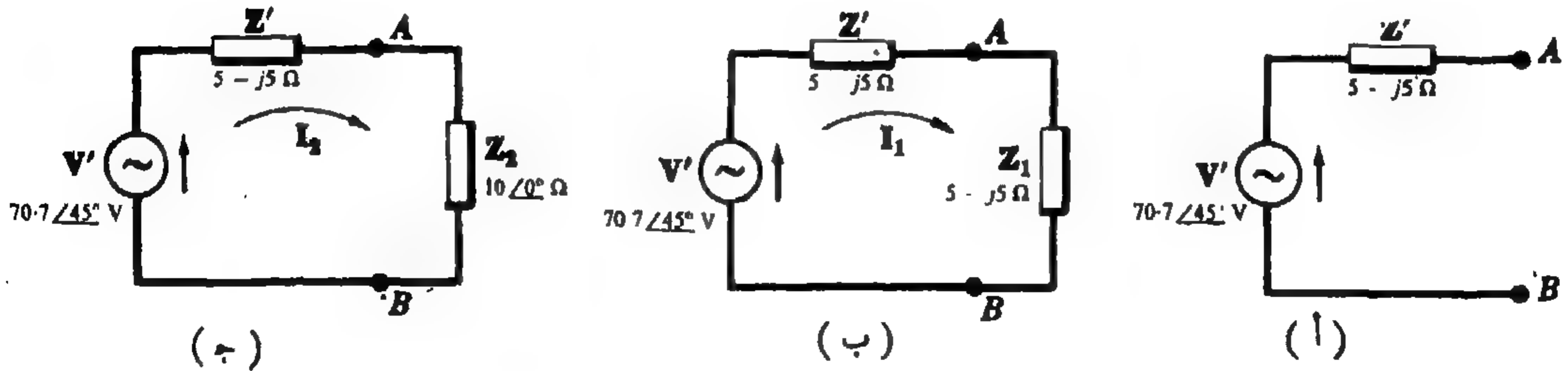
$$I = 50 \angle 0^\circ / (5 + j5 - j5) = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

إذن جهد ثنئين المكافئ V' هو المهبوط في الجهد على المعاوقة $5 + j5 \Omega$. إذن

$$V' = V_{AB} = I(5 + j5) = 70.7 \angle 45^\circ \text{ V}$$

والمعاوقة المحركة عند الطرفين AB هي : $Z' = \frac{(5 + j5)(-j5)}{5 + j5 - j5} = 5 - j5 \Omega$

ويوضح الشكل ١١ - ٤ (أ) دائرة ثنئين المكافئة. ونلاحظ أن المصدر V' متجه إلى الطرف A .



شكل ١١ - ٤

وبتوصيل المعاوقة Z_1 بين طرفى دائرة ثنئين المكافئة كما هو في الشكل ١١ - ٤ (ب) ، فإننا نجد في هذه الدائرة أن :

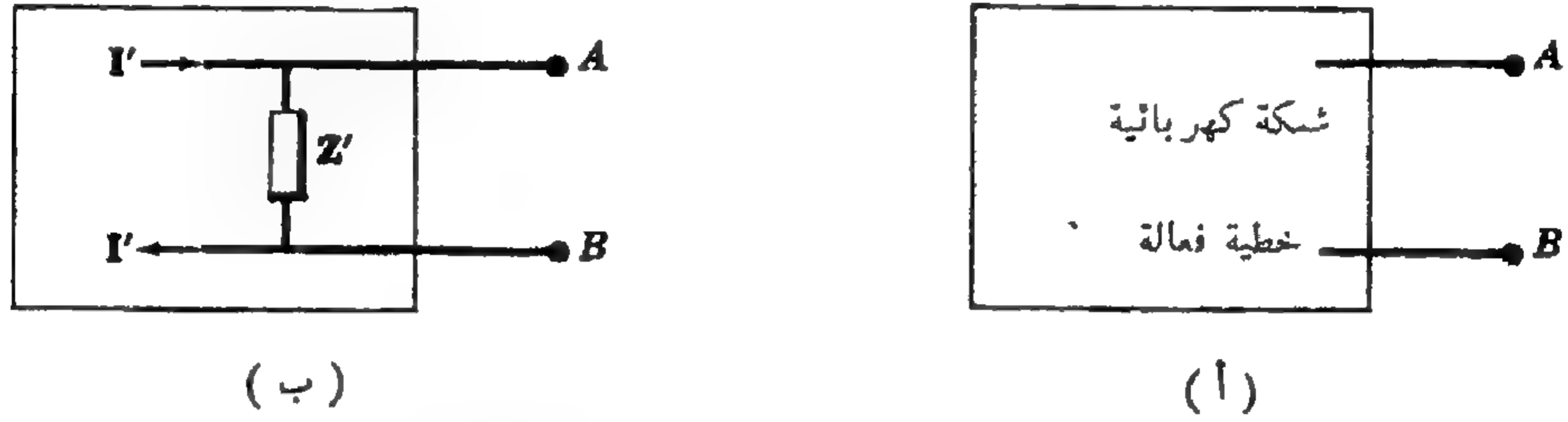
$$P_1 = (I_1)^2 5 = 125 \text{ W} \quad \text{و} \quad I_1 = (70.7 \angle 45^\circ) / (5 - j5 + 5 - j5) = 5 \angle 90^\circ \text{ A}$$

وعند توصيل المعاوة Z_2 بين الطرفين AB كما فى الشكل ١١ - ٤ (ج) ، فإننا نحصل على :

$$P_2 = (I_2)^2 10 = 200 \text{ W} \quad , \quad I_2 = (70.7 \angle 45^\circ) / (5 - j5 + 10) = 4.47 \angle 63.43^\circ \text{ A}$$

نظرية نورتن

تنص نظرية نورتن على أن أى شبكة كهربائية خطية فعالة لها طرفان AB كما الموضحة فى الشكل ١١ - ٥ (أ) يمكن إبدالها بمصدر واحد للتيار I' متصل معه على التوازي معاوة واحدة كما فى الشكل ١١ - ٥ (ب)



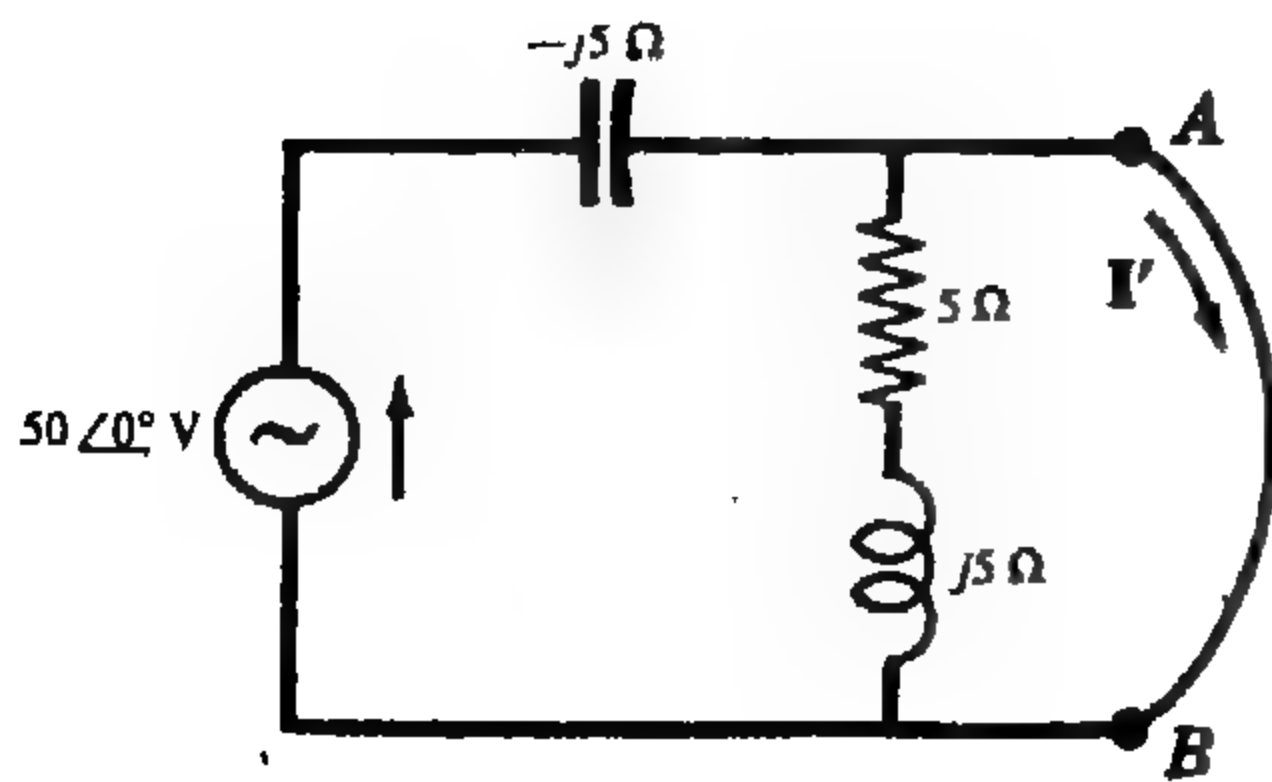
شكل ١١ - ٥ دائرة نورتن المكافئة

ومصدر نورتن المكافئ هو تيار الدائرة المغلقة بين طرفى الشبكة الفعالة . والمعاوة Z' المتصلة بمصدر التيار هى المعاوة المحركة للشبكة الكهربائية بين الطرفين AB وذلك عند وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر . وعلى ذلك فإن المعاوتين Z' لدائرتى نورتن وثقتين المكافئتين متساويتان وذلك لأى شبكة خطية فعالة .

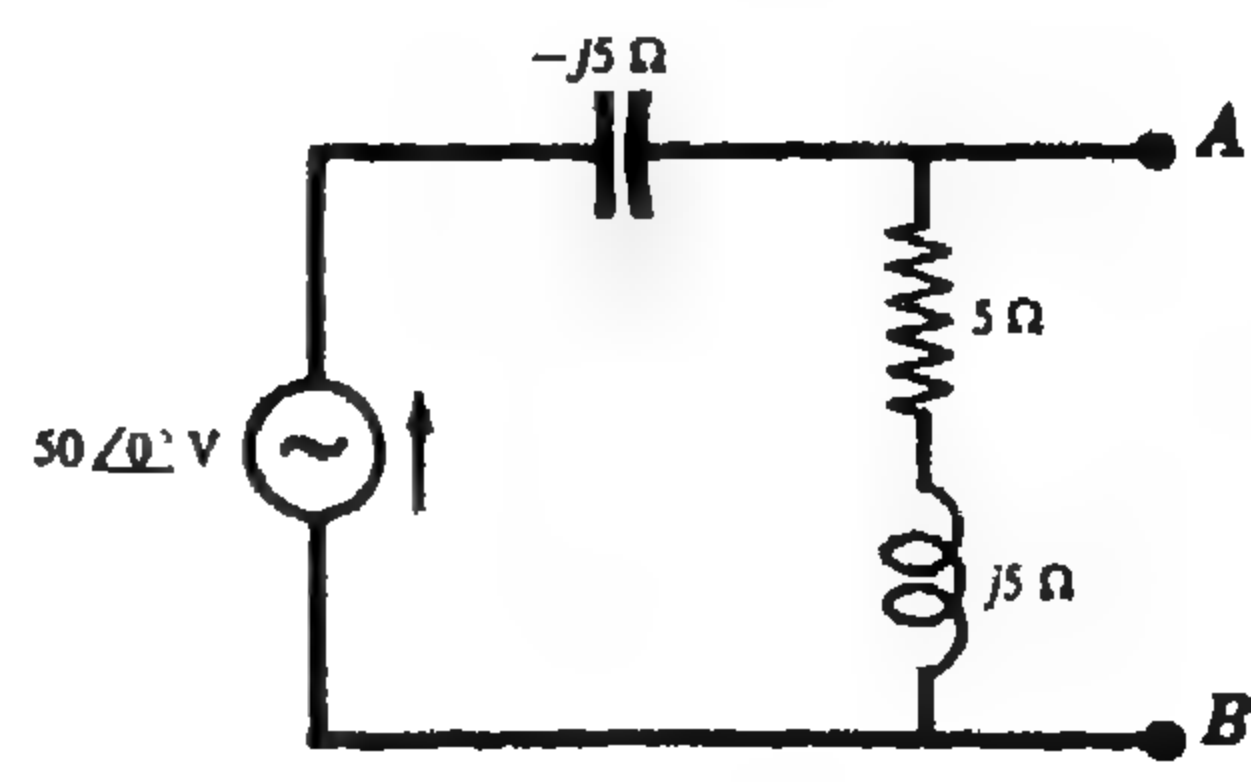
واتجاه التيار المار فى المعاوة المتصلة بين طرفى دائرة نورتن المكافئة يجب أن يكون هو نفس اتجاه التيار المار فى نفس المعاوة عند توصيلها بالشبكة الفعالة الأصلية .

مثال ٢ :

إذا أعطيت الدائرة الموضحة فى الشكل ١١ - ٦ ، فمىن دائرة نورتن المكافئة بالنسبة للطرفين AB . ثم استخدم النتيجة التى تحصل عليها فى إيجاد التيار المار فى المعاوتين $Z_1 = 5 - j5 \Omega$ ، $Z_2 = 10 \angle 0^\circ \Omega$ وذلك عند توصيلهما بالترتيب بين الطرفين AB ، وعين كذلك القدرة المعطاة لهما .



شكل ١١ - ٧

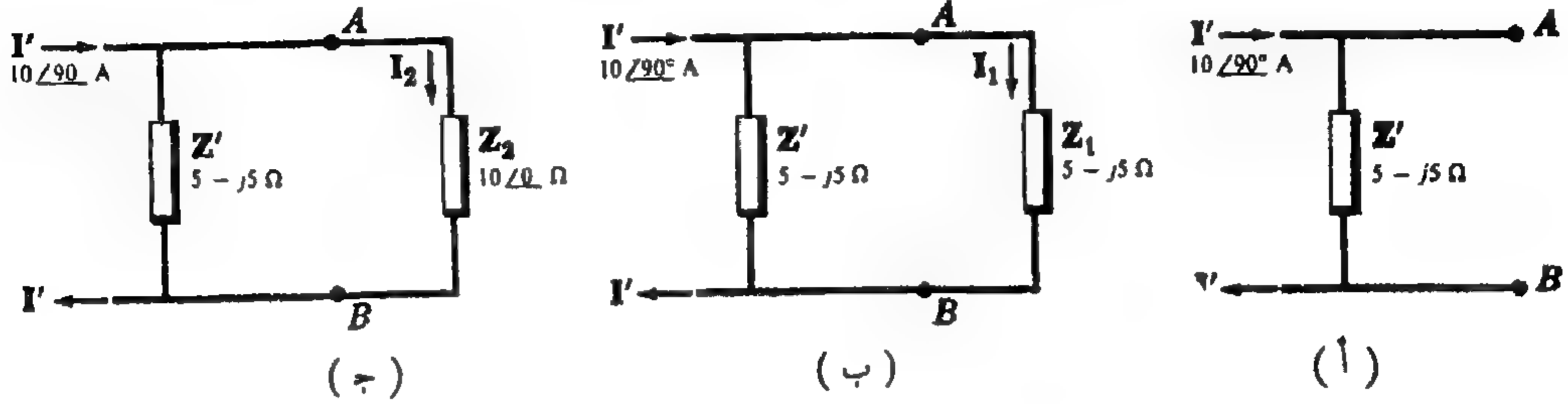


شكل ١١ - ٦

بالإشارة إلى الشكل ١١-٧ ، عند عمل دائرة مغلقة بين الطرفين AB ، فإن $I' = 50 \angle 0^\circ (-j5) = 10 \angle 90^\circ \text{ A}$

وعند وضع المصدر مساويا للصفر فإن $Z' = \frac{-j5(5+j5)}{5+j5-j5} = 5-j5 \Omega$

ويوضح الشكل ١١-٨ (أ) دائرة نورتن المكافئة . لاحظ أن التيار . نتجه ناحية الطرف A .



شكل ١١ - ٨

وعند توصيل المعاوقة Z_1 بين طرفى دائرة نورتن المكافئة كما فى الشكل ١١-٨ (ب) ، فإن التيار المار فى Z_1 يكون

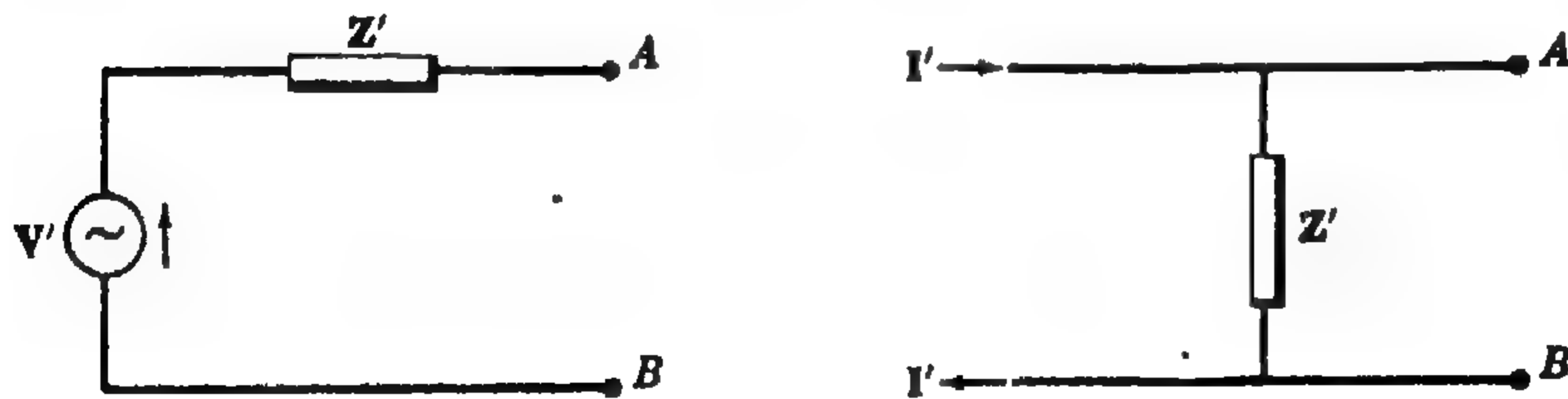
$$P_1 = (I_1)^2 5 = 125 \text{ W} \quad \text{والقدرة المعطاة لـ } Z_1 \text{ هى} \quad I_1 = I' \left(\frac{Z'}{Z' + Z_1} \right) = 10 \angle 90^\circ \left(\frac{5-j5}{10-j10} \right) = 5 \angle 90^\circ \text{ A}$$

وعند توصيل المعاوقة Z_2 بين الطرفين AB كما فى الشكل ١١-٨ (ج) ، فإننا نحصل على :

$$P_2 = (I_2)^2 10 = 200 \text{ W} \quad \text{و} \quad I_2 = I'(5-j5)/(15-j5) = 4.47 \angle 63.43^\circ \text{ A}$$

دائرة ثفنين ونورتن المكافئتان :

لقد طبقنا نظرية ثفنين ونورتن على دائرتين مماثلتين فى المثالين (١) ، (٢) على الترتيب وحصلنا على نتائج متطابقة . ومن هذا ينتج أن دائرتى ثفنين ونورتن يكافئ كل منهما الآخر .



شكل ١١ - ٩ دائرتى ثفنين ونورتن

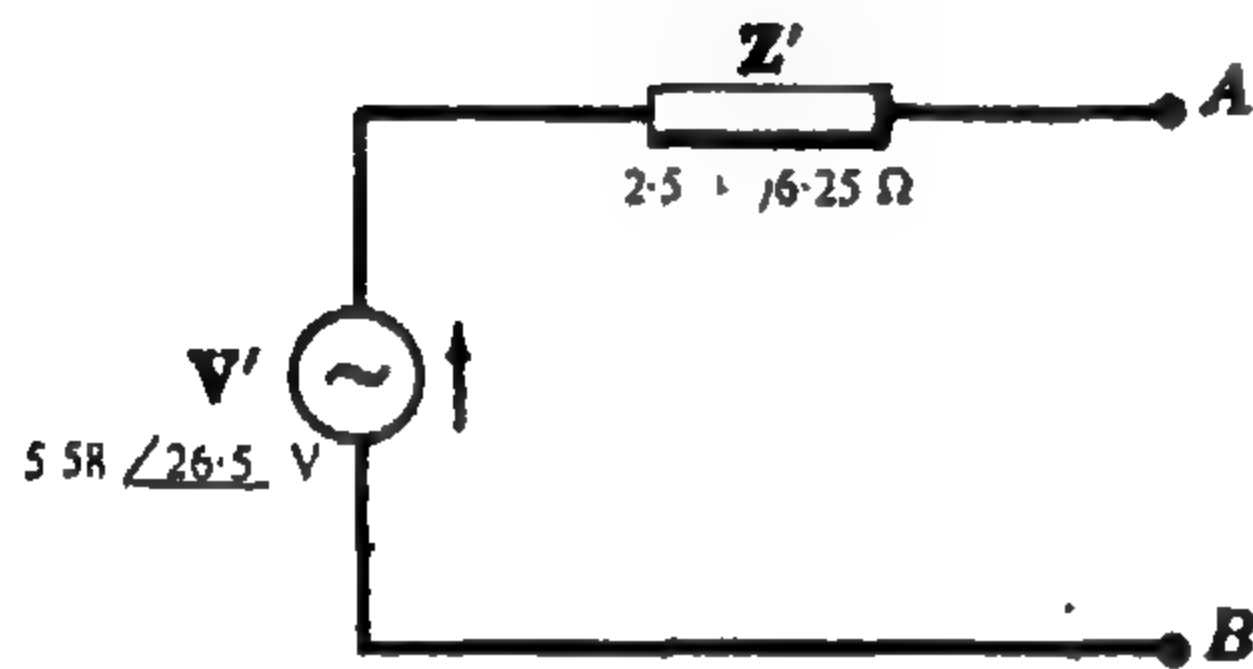
فى الشكل ١١-٩ نجد أن نفس المعاوقة Z' متصلة على يسار الهاتين AB . فى كلا الدائرتين . وعند غلق الدائرتين فإن التيار المار فى دائرة ثفنين المغلقة يعطى بالعلاقة V'/Z' ، بينما يعطى التيار المار فى دائرة نورتن المغلقة بـ I' . وبما أن التيارين متساويان إذن هناك علاقة بين تيار نورتن المكافئ وجهد ثفنين المكافئ* ، أى أن $I' = V'/Z'$.

نفس النتيجة السابقة يمكن الحصول عليها إذا اعتبرنا جهد الدائرة المفتوحة في كلتا الدائرتين . في دائرة ثنيتين نجد أن الجهد هو V' أما في دائرة نورتن فإن هذا الجهد هو $I'Z'$. وبمساواة الجهدين $V' = I'Z'$ أو $I' = V'/Z'$ وهى نفس النتيجة السابقة .

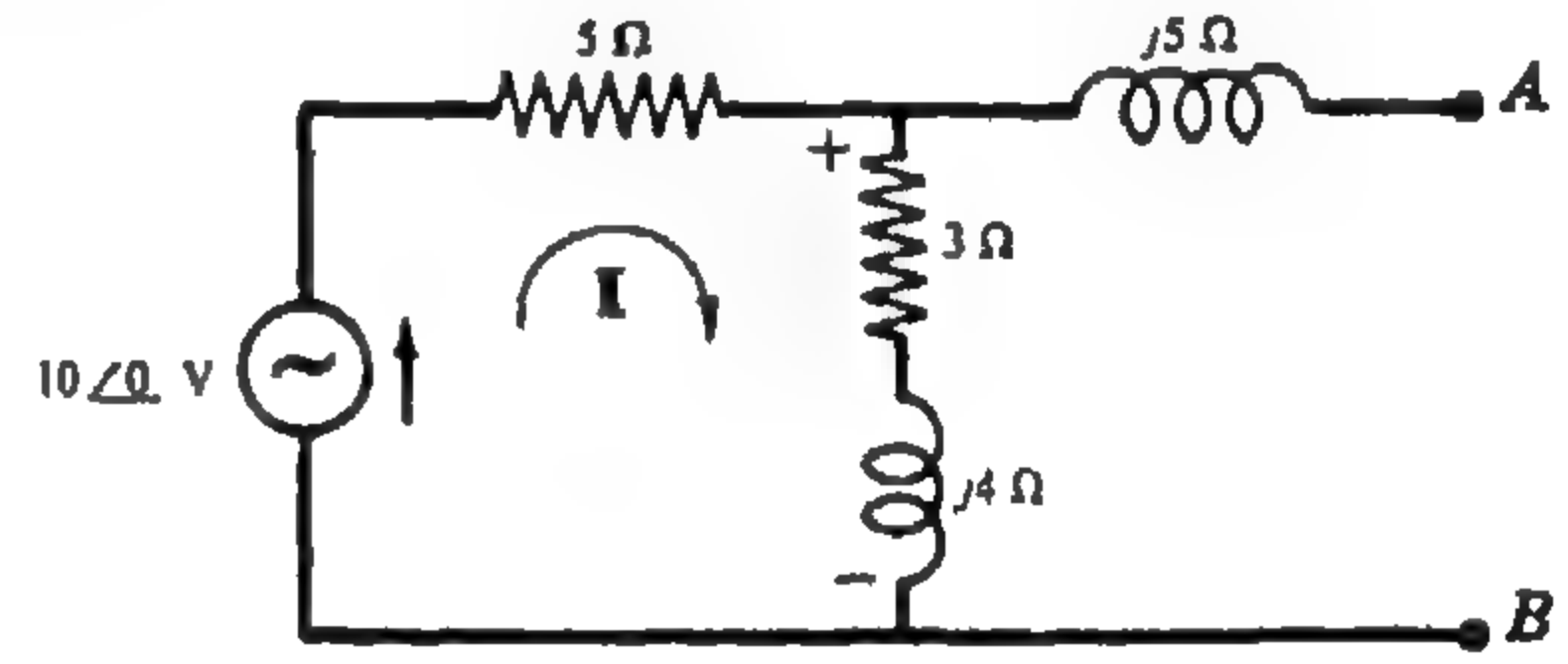
إن دائرتي ثنيتين ونورتن متكافئتان عند ذبذبة واحدة فقط . وينتج هذا من أن المعاوقات المركبة للشبكة الكهربائية الفعالة استبدلت بالمعاوقة المكافئة Z' وأن الجهد المكافئ V' والتيار المكافئ I' قد حصل عليها باستخدام المعاوقات المركبة للشبكة الكهربائية الفعالة ، وبما أن كل ممانعة في الشبكة الكهربائية الفعالة تعتمد على الذبذبة ، فينتج من ذلك أن دائرتي ثنيتين ونورتن متكافئتان فقط عند الذبذبة التي حسبو عندها .

مسائل محلولة

١-١١ أوجد دائرة ثنيتين المكافئة للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة في الشكل ١١ - ١٠ .



شكل ١١ - ١١



شكل ١١ - ١٠

نحسب المعاوقة المكافئة للدائرة بوضع المصدر مساوياً للصفر . إذن

$$Z' = j5 + \frac{5(3 + j4)}{5 + 3 + j4} = 2.5 + j6.25 \Omega$$

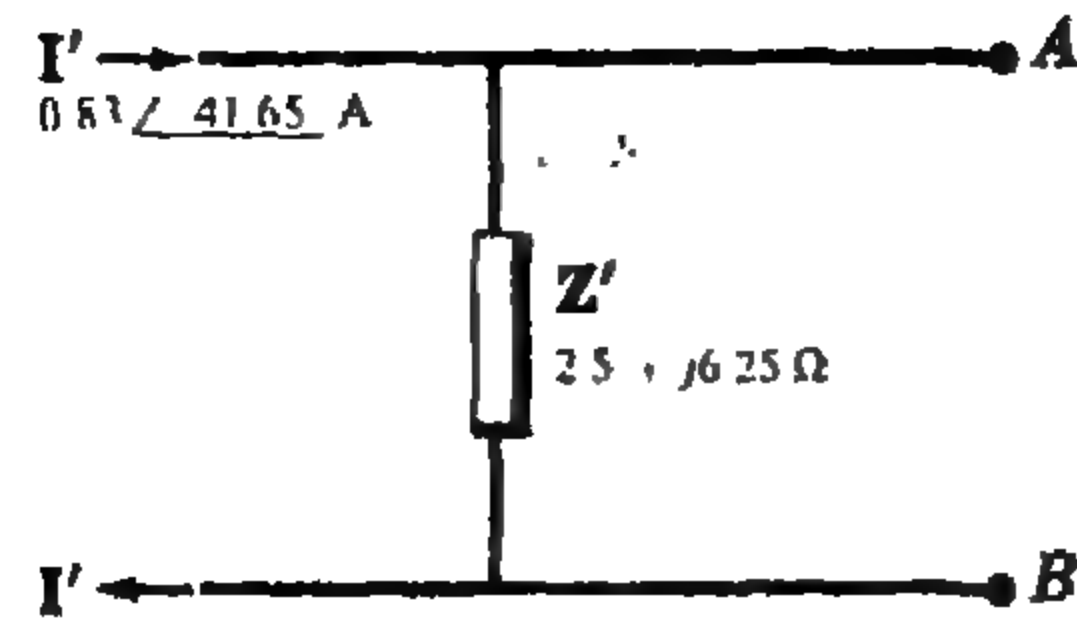
أن تيار الدائرة المفتوحة I الموضحة في الشكل ١١ - ١٠ هو $I = (10 \angle 0^\circ) / (5 + 3 + j4) = 1.117 \angle -26.6^\circ \text{ A}$. إذن جهد الدائرة المفتوحة هو المهبوط في الجهد على المعاوقة $3 + j4 \Omega$.

$$V' = I(3 + j4) = (1.117 \angle -26.6^\circ)(5 \angle 53.1^\circ) = 5.58 \angle 26.5^\circ \text{ V}$$

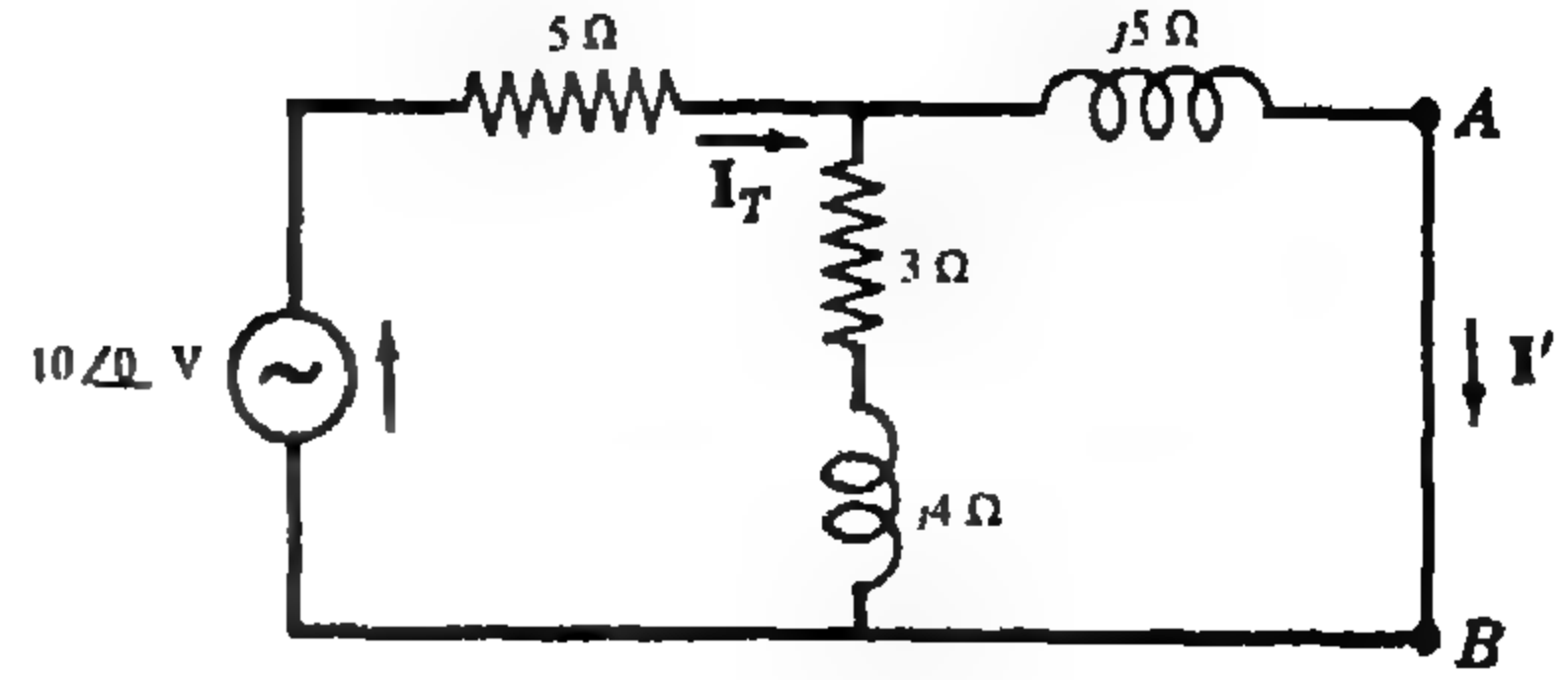
وتعطى قطبية V' باتجاه التيار الداخلى إلى المعاوقة $3 + j4 \Omega$. وعلى ذلك فإن اتجاه استجابة V' تكون في اتجاه الطرف A في الدائرة المكافئة الموضحة في الشكل ١١ - ١١ .

٢-١١ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ١٠ .

كما في المسألة ١ - ١١ ، فإن المعاوقة المكافئة هي : $Z' = 2.5 + j6.25 \Omega$



شكل ١١ - ١٣



شكل ١١ - ١٢

نعمل دائرة مغلقة بين الطرفين AB كما هو موضح فى الشكل ١١-١٢ ، ثم نعين المعاوقة الكلية المتصلة بالمصدر $10 \angle 0^\circ V$

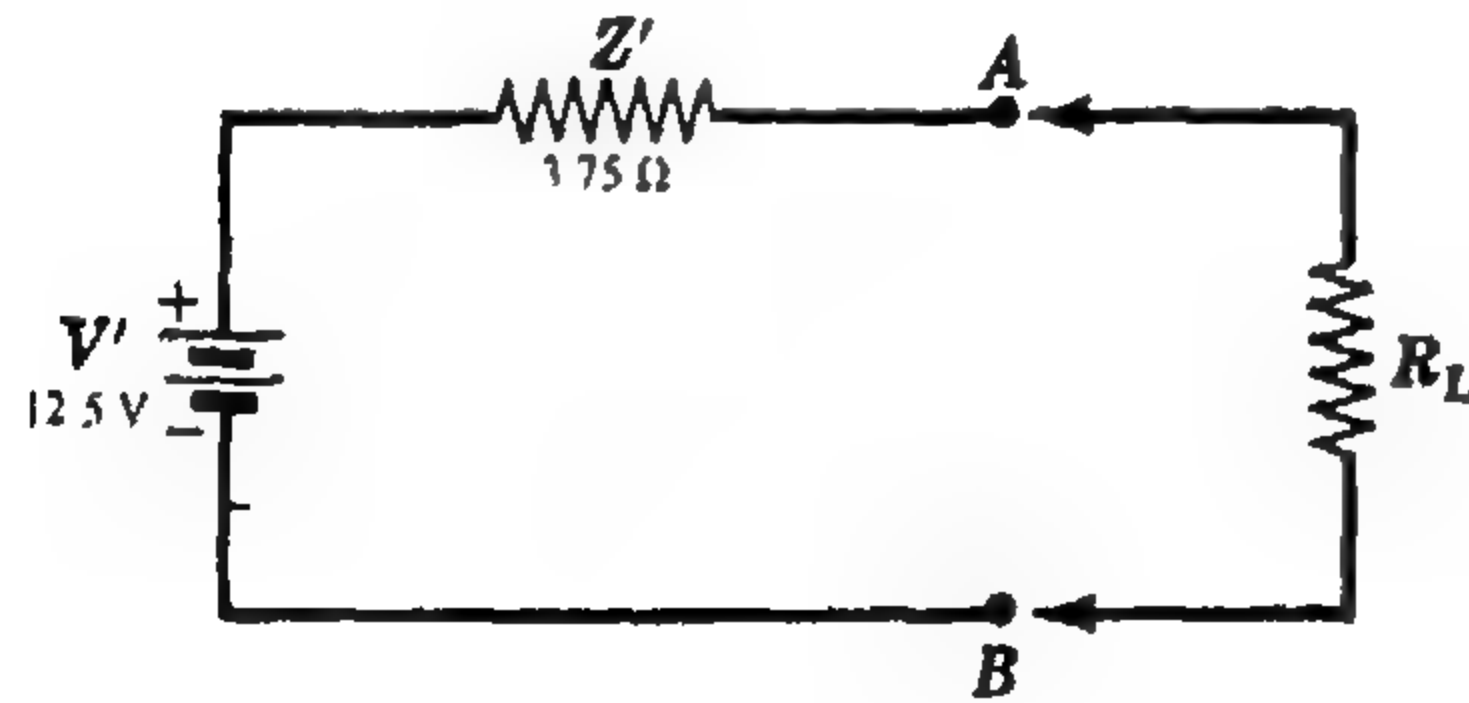
$$Z_T = 5 + \frac{(3 + j4)j5}{(3 + j4) + j5} = 5.83 + j2.5 = 6.35 \angle 23.2^\circ \Omega$$

$$I_T = 10 \angle 0^\circ / Z_T = (10 \angle 0^\circ) / (6.35 \angle 23.2^\circ) = 1.575 \angle -23.2^\circ A.$$

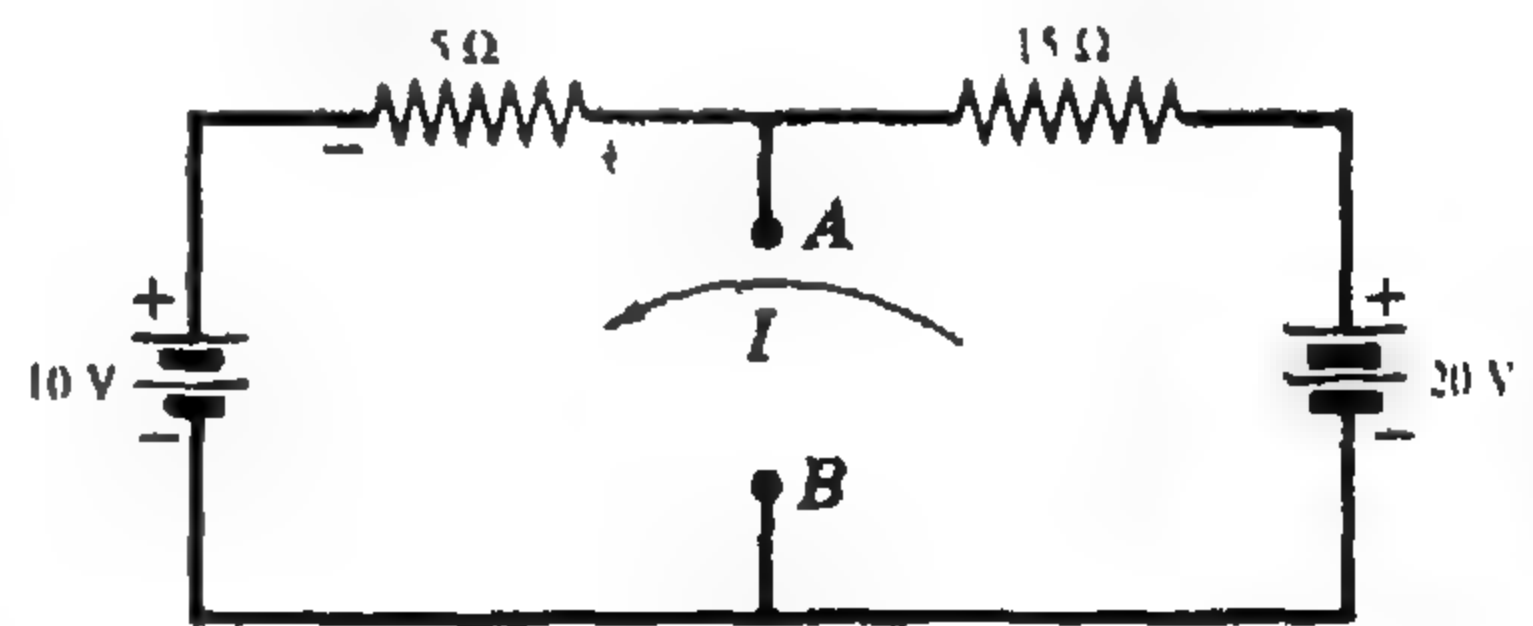
$$I' = I_T \left(\frac{3}{3 + j4 + j5} \right) = 1.575 \angle -23.2^\circ \left(\frac{5 \angle -53.1^\circ}{3 - j9} \right) = 0.83 \angle -41.65^\circ A$$

ويوضح الشكل ١١-١٣ دائرة نورتن المكافئة . لاحظ أن التيار I' يتجه ناحية A وذلك لأن تيار الدائرة المغلقة يدخل الدائرة المغلقة عند الطرف A .

٣-١ فى دائرة التيار المستمر الموضحة فى الشكل ١١-١٤ ، وصل ثلاث مقاومات $R_1 = 1 \Omega$ و $R_2 = 5 \Omega$ و $R_3 = 10 \Omega$ تباعا بين الطرفين AB . عين القدرة الممتصة لكل مقاومة .



شكل ١١ - ١٥



شكل ١١ - ١٤

نحصل أولا على دائرة ثقتين المكافئة . فى الشكل ١١-١٤ نجد أن التيار هو $I = (20 - 10) / (5 + 15) = 0.5 A$ إذن الجهد فى الجهد على المقاومة 5Ω هو : $V_5 = I(5) = 2.5 \text{ volts}$ وذلك بالقطبية الموضحة .

نعرعن جهد A بالنسبة للنقطة B بالمعادلة

$$V_{AB} = V' = 10 + V_5 = 12.5 V$$

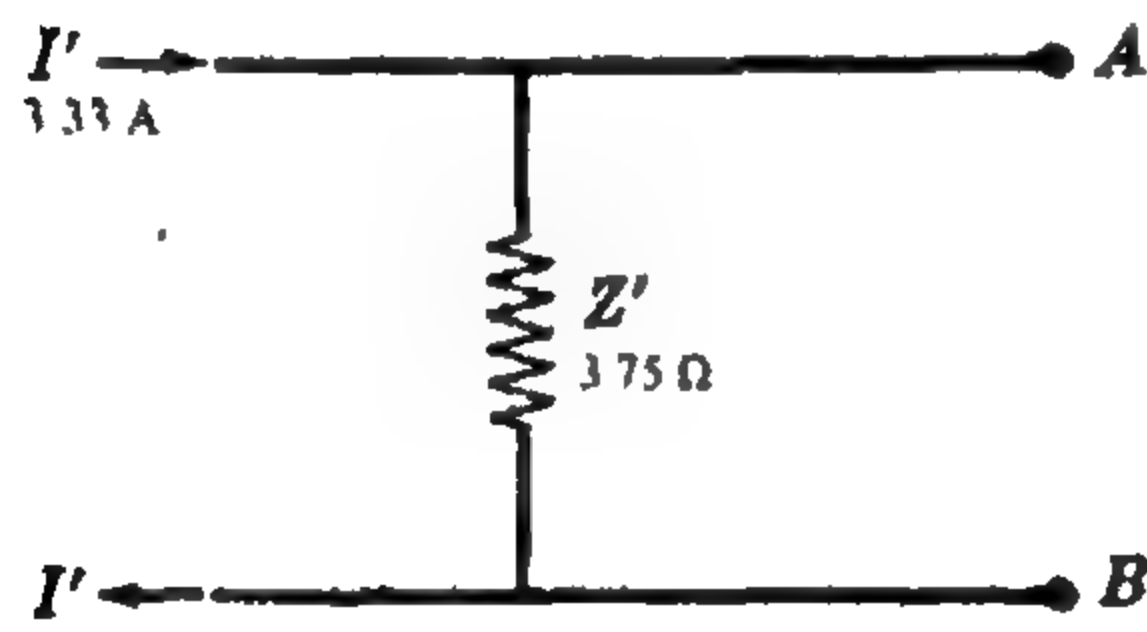
عند وضع مصدر التيار المستمر مساويا للصفر ، فإن المعاوقة Z' تصبح محصلة المقاومتين 5Ω و 15Ω المتصلتين على التوازي ، أى أن :

$$Z' = \frac{5(15)}{20} = 3.75 \Omega$$

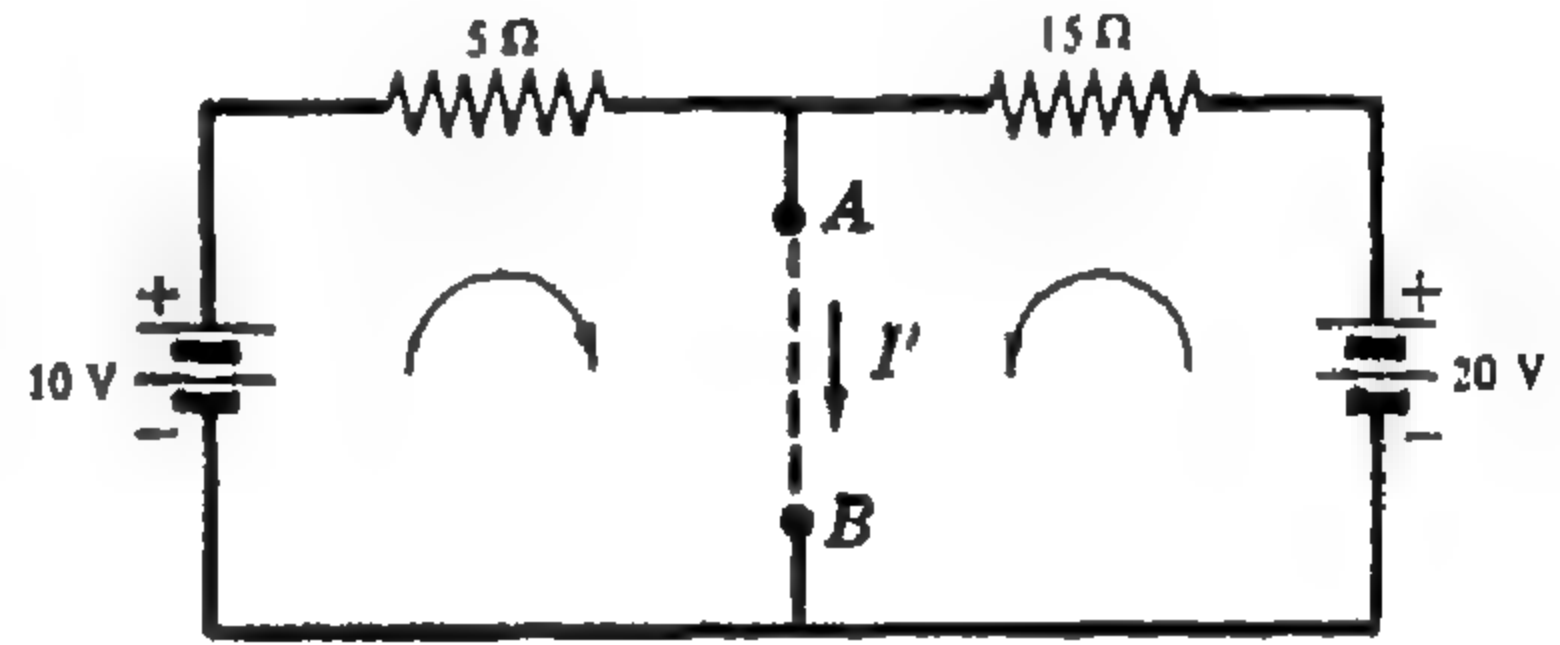
يوضح الشكل ١١-١٥ دائرة ثقتين المكافئة . والآن بتوصيل كل من المقاومات الثلاث بالطرفين AB فإنه يمكن حساب القدرة الممتصة لكل منهما :

$$\begin{aligned} P_1 &= (I_1)^2(1) = (2.63)^2(1) = 6.91 \text{ W} & I_1 &= 12.5/(3.75 + 1) = 2.63 \text{ A} & R_1 &= 1 \Omega & \text{للمقاومة} \\ P_2 &= (I_2)^2(5) = (1.43)^2(5) = 10.2 \text{ W} & I_2 &= 12.5/(3.75 + 5) = 1.43 \text{ A} & R_2 &= 5 \Omega & \text{للمقاومة} \\ P_3 &= (I_3)^2(10) = (0.91)^2(10) = 8.28 \text{ W} & I_3 &= 12.5/(3.75 + 10) = 0.91 \text{ A} & R_3 &= 10 \Omega & \text{للمقاومة} \end{aligned}$$

١١-٤ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-١٦ وذلك بالنسبة للطرفين AB .



شكل ١١ - ١٧



شكل ١١ - ١٦

نصل دائرة مغلقة بين الطرفين AB كما هو موضح ، ثم نحسب التيار I' .

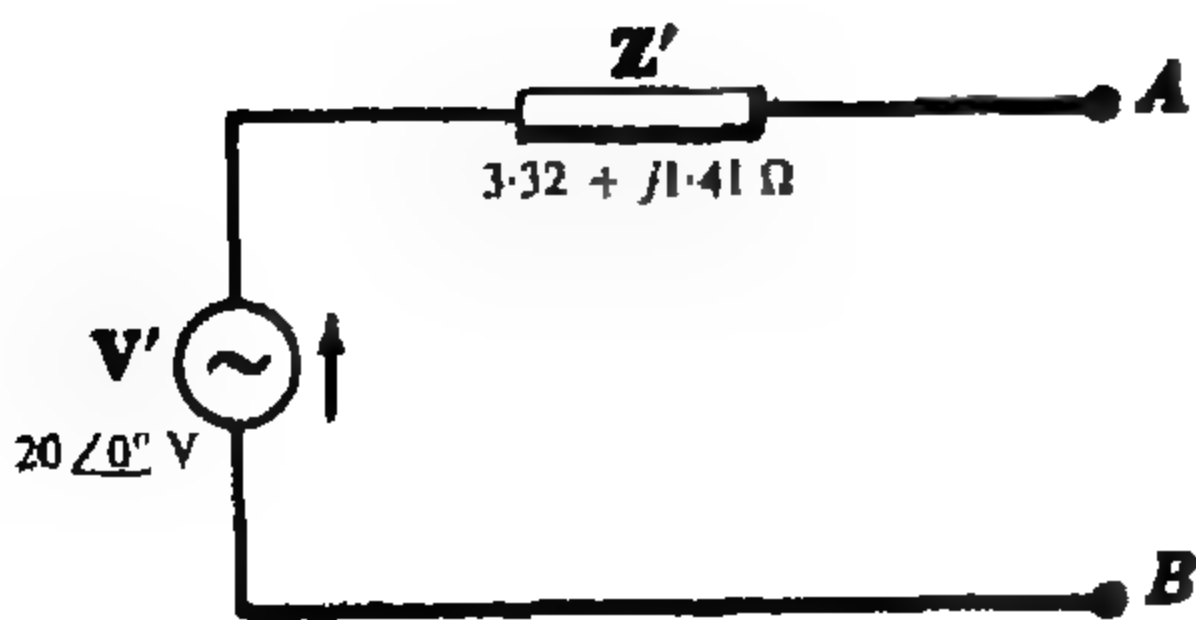
$$I' = 10/5 + 20/15 = 3.33 \text{ A}$$

المعاوقة المكافئة بين الطرفين AB مع وضع المصدر مساويا للصفر هي :

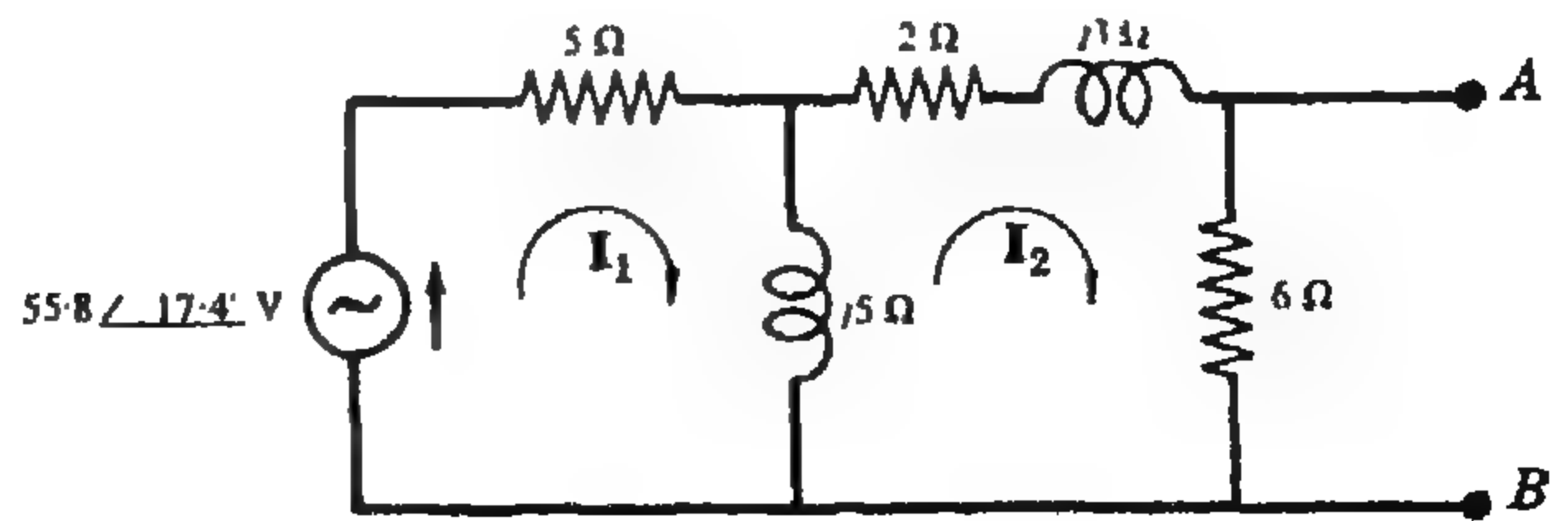
$$Z' = 5(15)/(5 + 15) = 3.75 \Omega$$

ويوضح الشكل ١١-١٧ دائرة نورتن المكافئة .

١١-٥ أوجد دائرة ثقتين المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-١٨ .



شكل ١١ - ١٩



شكل ١١ - ١٨

عند فتح الدائرة فإنه يوجد تياران للشبكتين الفرعيتين كما هو موضح ويعطى تيار الشبكة الفرعية بالمعادلة .

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 55.8 \angle -17.4^\circ \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 8 + j8 \end{vmatrix}} = \frac{279 \angle 72.6^\circ}{83.7 \angle 72.6^\circ} = 3.33 \angle 0^\circ \text{ A}$$

إذن جهد الدائرة المفتوحة هو $V_{AB} = I_2(6) = 3.33 \angle 0^\circ (6) = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$ والمعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية هي

$$Z' = \frac{6 \left[\frac{5(j5)}{5 + j5} + (2 + j3) \right]}{6 + \left[\frac{5(j5)}{5 + j5} + (2 + j3) \right]} = 3.32 + j1.41 \Omega$$

ويوضح الشكل ١١-١٩ دائرة ثنئين المكافئة واتجاه V' إلى الطرف A .

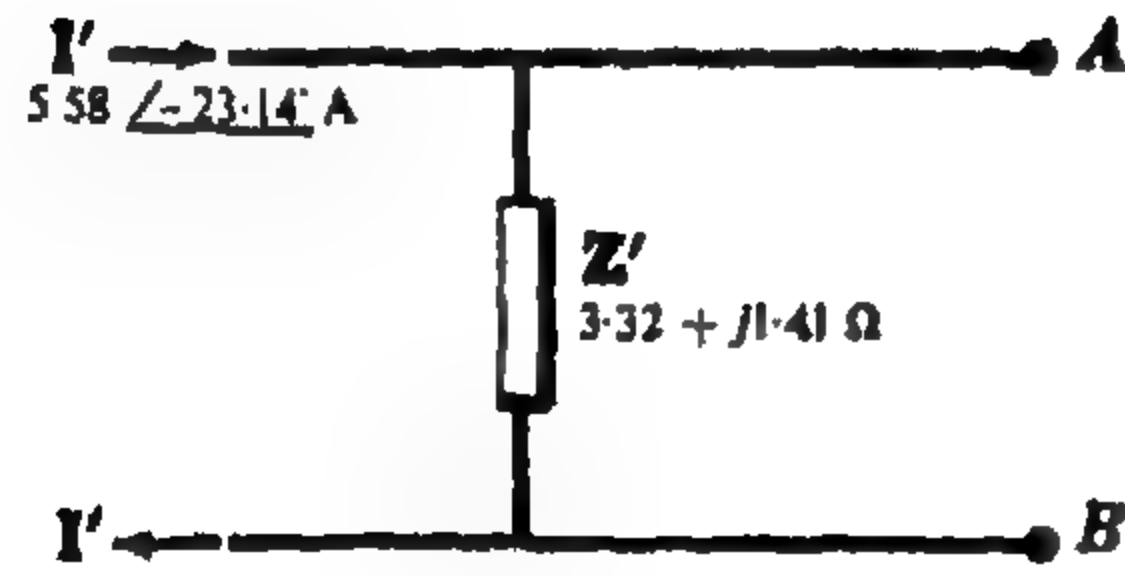
١١-٢٠ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-١٨ .

بمعل دائرة مغلقة بين الطرفين AB ، يكون التيار I_2 المار في الدائرة المغلقة هو

$$I_2 = I' = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 55.8 \angle -17.4^\circ \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 2 + j8 \end{vmatrix}} = \frac{279 \angle 72.6^\circ}{(-5 + j50)} = 5.58 \angle -23.14^\circ \text{ A}$$

وكما في المسألة ١١-٥ فإن المعاوقة هي

$$Z' = 3.32 + j1.41 \Omega$$

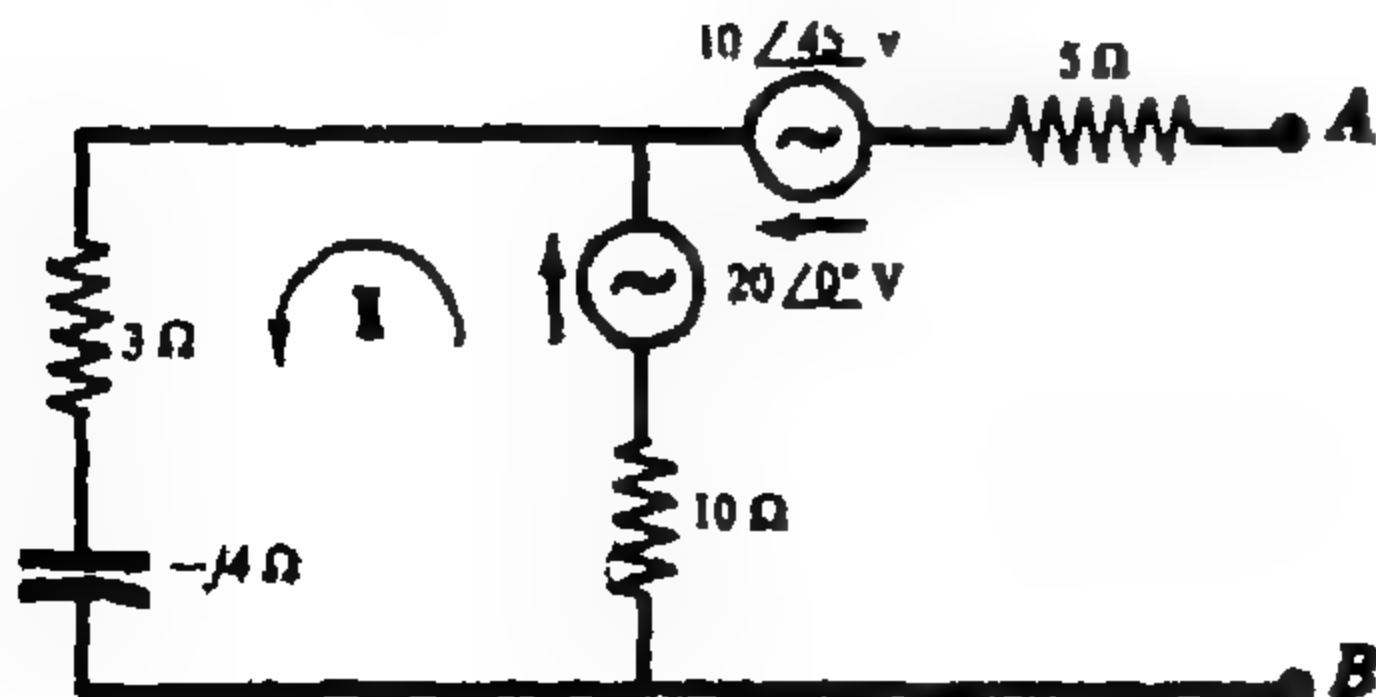


شكل ١١-٢٠

وللتحقيق فإنه يمكن مقارنة جهد الدائرة المفتوحة في دائرة نورتن المكافئة الموضحة في الشكل ١١-٢٠ بجهد ثنئين V' في المسألة ١١-٥ .

$$V_{oc} = I'Z' = 5.58 \angle -23.14^\circ (3.32 + j1.41) = 20.1 \angle -0.14^\circ \text{ V}$$

وفي المسألة ١١-٥ $V' = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$



شكل ١١-٢١

١١-٢١ أوجد الشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة في الشكل ١١-٢١ بدائرة ثنئين المكافئة وذلك عند الطرفين AB

عند فتح الدائرة يكون التيار هو :

$$I = 20 \angle 0^\circ / (10 + 3 - j4) = 1.47 \angle 17.1^\circ \text{ A}$$

إذن الهبوط في الجهد على المقاومة 10Ω هو :

$$V_{10} = I(10) = 14.7 \angle 17.1^\circ \text{ V.}$$

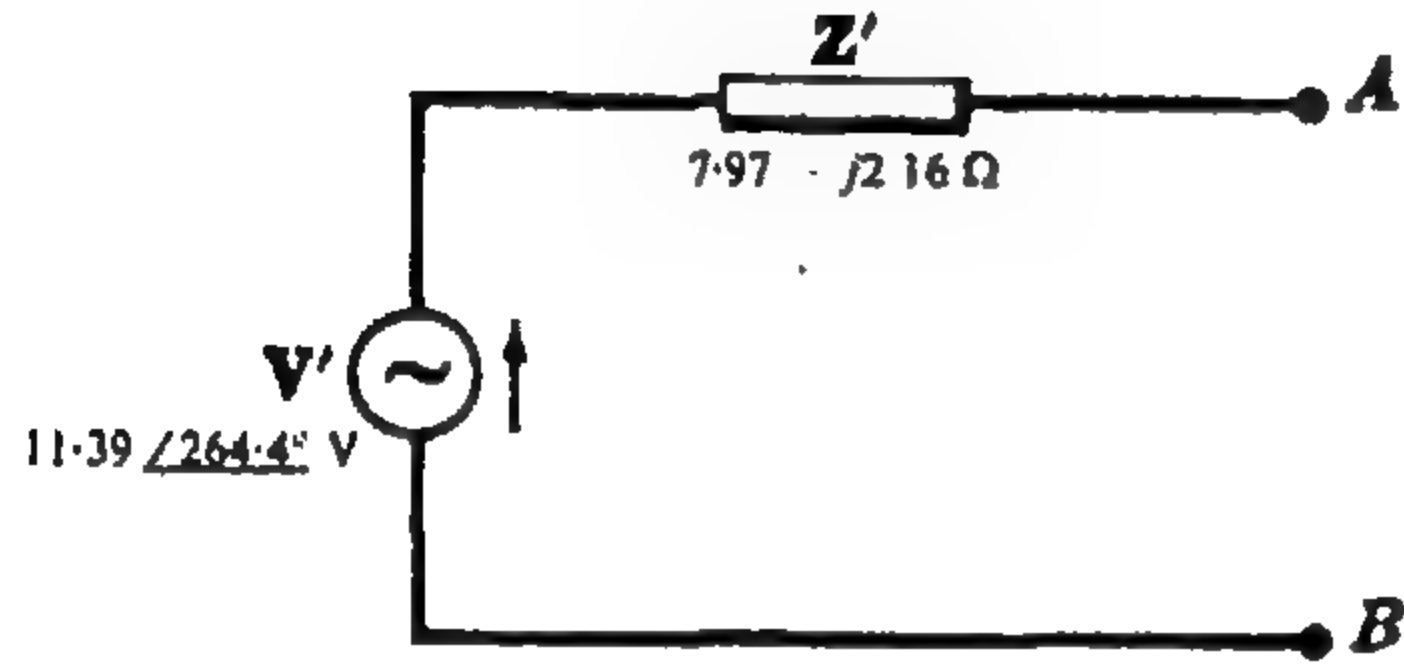
والآن نجد أن الجهد V_{AB} هو مجموع جهدى المصدرين والهبوط فى الجهد على المقاومة 10Ω ، وذلك بالقطبية الموضحة فى الشكل ١١-٢٢ . إذن

$$V' = V_{AB} = 20 \angle 0^\circ - 10 \angle 45^\circ - 14.7 \angle 17.1^\circ = 11.39 \angle 264.4^\circ \text{ V}$$

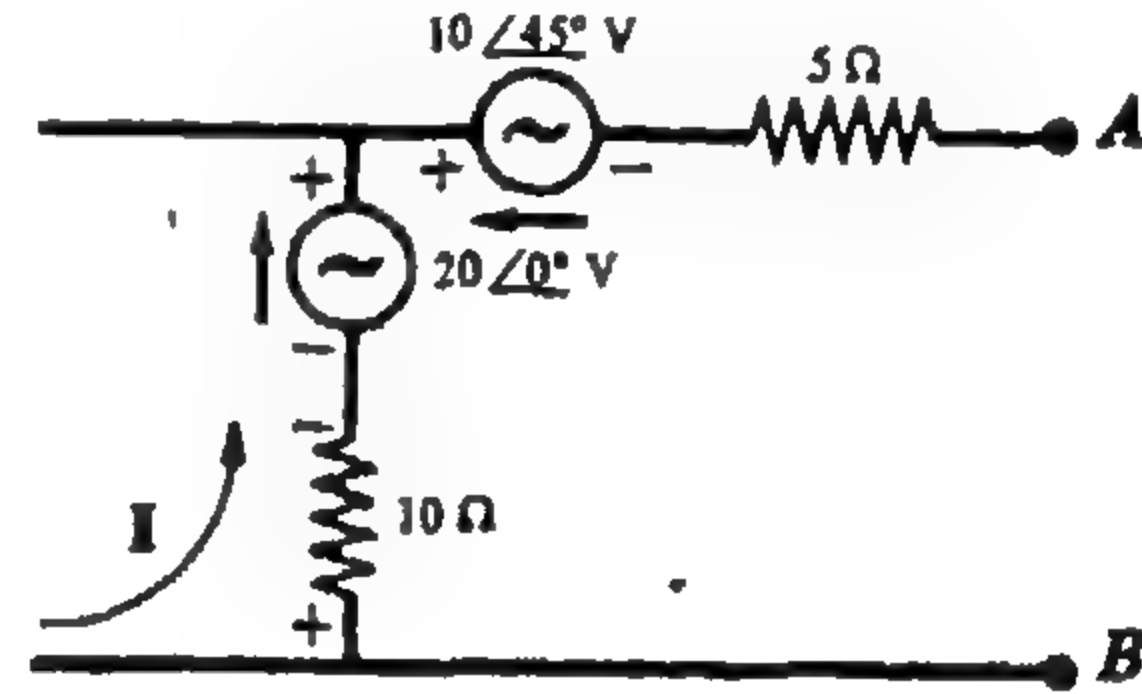
$$Z' = 5 + \frac{10(3 - j4)}{10 + 3 - j4} = 7.97 - j2.16 \Omega.$$

والمعاوقة هى :

ويوضح الشكل ١١-٢٢ دائرة ثفنين المكافئة .



شكل ١١ - ٢٣



شكل ١١ - ٢٢

١١-٨ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية المعطاة فى الشكل ١١-٢١ .

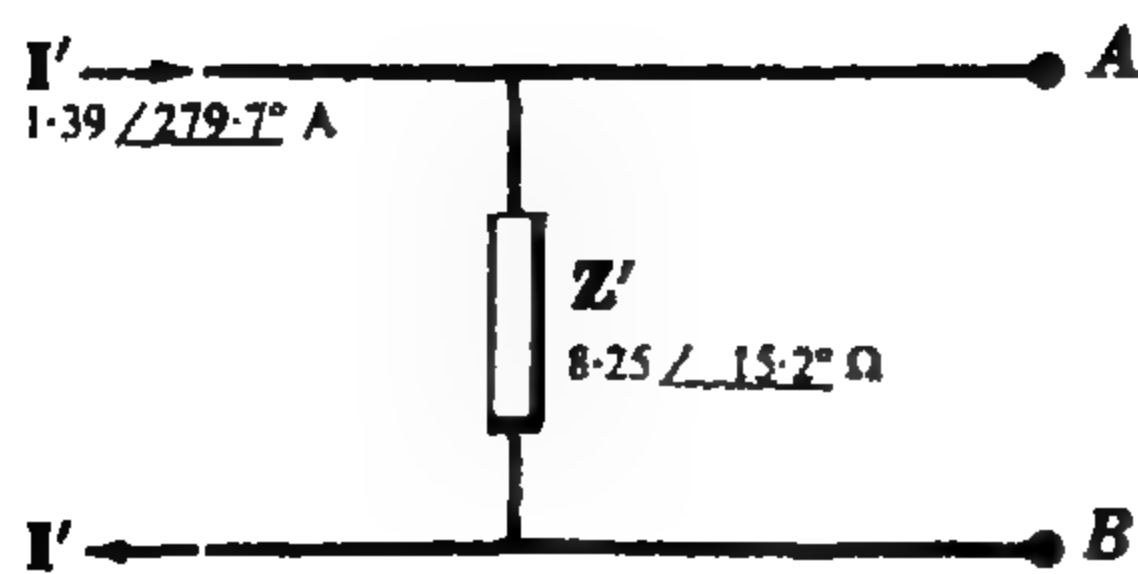
كافى المسألة ١١-٧ فإن المعاوقة : $Z' = 7.97 - j2.16 \Omega$

وبعمل دائرة مغلقة بين الطرفين AB واختيار اتجاه عقارب الساعة لتيارات الشبكة فى المسارات المغلقة الأولى ، نجد أن

$$I' = I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 13 - j4 & -20 \\ -10 & (20 - 10 \angle 45^\circ) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 - j4 & -10 \\ -10 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{156 \angle 247.4^\circ}{112.3 \angle -32.3^\circ} = 1.39 \angle 279.7^\circ \text{ A}$$

ويشبه تيار مصدر نورتن I' إلى الطرف A كما هو موضح

فى الشكل ١١ - ٢٤ .



شكل ١١ - ٢٤

بمقارنة جهد الدائرة المفتوحة V_{oc} لهذه الدائرة بجهد

مصدر ثفنين المكافئ فى المسألة ١١ - ٧ ، نجد أن :

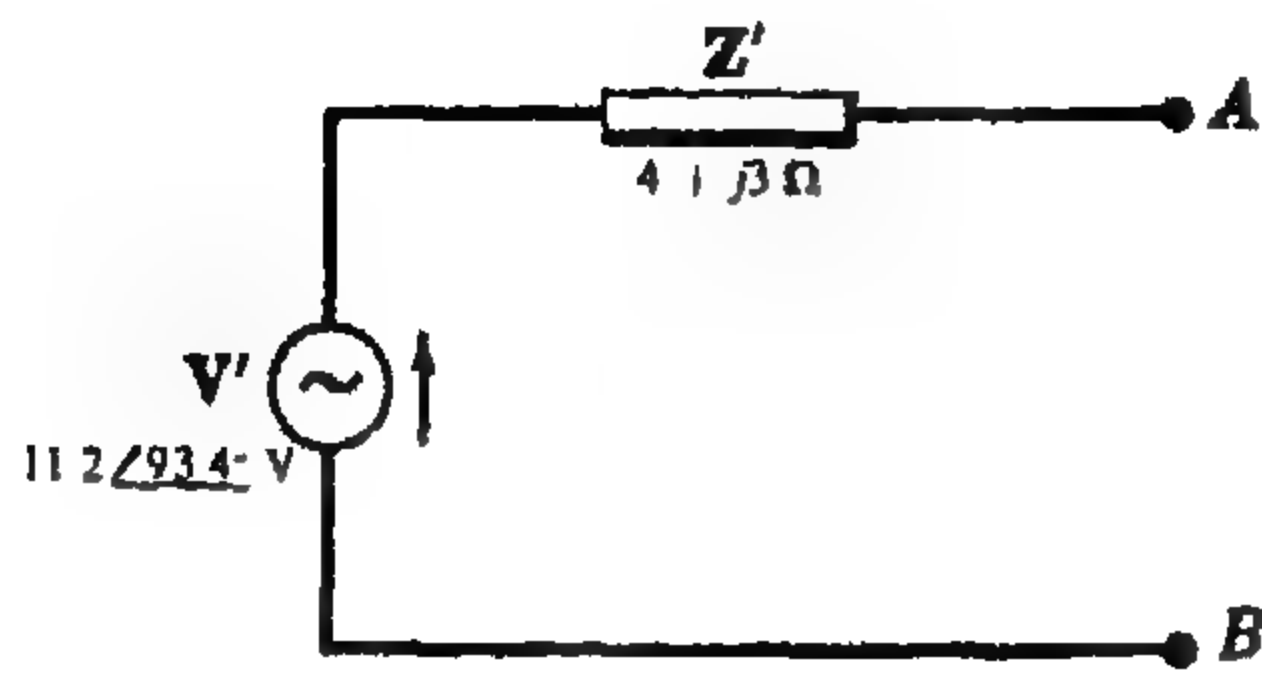
$$V_{oc} = I'Z' = (1.39 \angle 279.7^\circ)(8.25 \angle -15.2^\circ) = 11.45 \angle 264.5^\circ \text{ V}$$

$$V' = 11.39 \angle 264.4^\circ \text{ V}$$

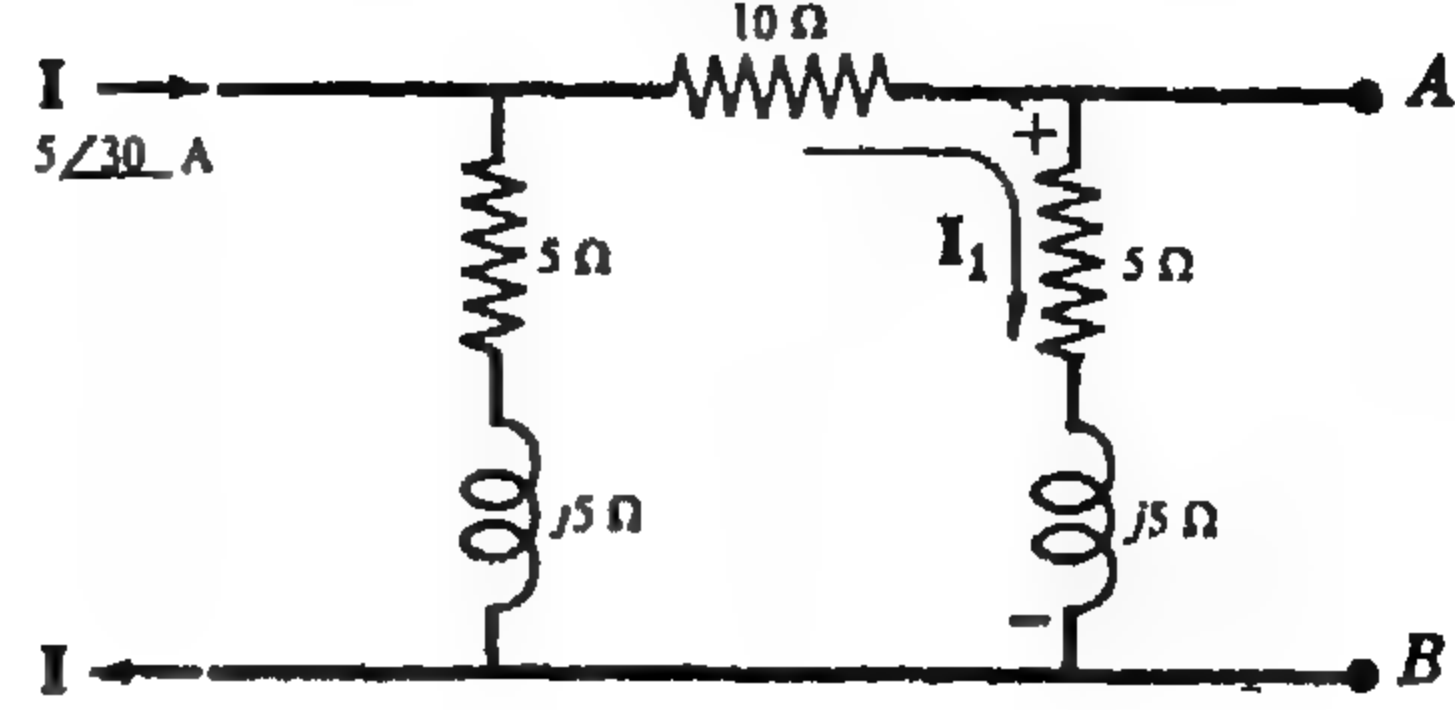
و

١١ - ٩ أوجد دائرة ثقتين المكافئة بين الطرفين AB وذلك للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٢٥ والتي تحتوى على

مصدر التيار $I = 5 \angle 30^\circ \text{ A}$.



شكل ١١ - ٢٦



شكل ١١ - ٢٥

تتكون المعاوقة المكافئة Z' بين الطرفين AB مع وضع المصدر مساوياً للصفر من فرعين متصلين على التوازي . إذن

$$Z' = \frac{(5 + j5)(15 + j5)}{(5 + j5) + (15 + j5)} = 4 + j3 \Omega$$

وبفتح الدائرة ينقسم التيار I بين الفرعين . وبالحل للحصول على I_1 الموضح بالرسم ، نجد أن

$$I_1 = 5 \angle 30^\circ \left(\frac{5 + j5}{20 + j10} \right) = 1.585 \angle 48.4^\circ \text{ A}$$

وبما أن الجهد $V_{AB} = V$ هو المبوط في الجهد على المعاوقة $5 + j5$ ، إذن

$$V' = I_1(5 + j5) = (1.585 \angle 48.4^\circ)(7.07 \angle 45^\circ) = 11.2 \angle 93.4^\circ \text{ V}$$

ويوضح الشكل ١١ - ٢٦ دائرة ثقتين المكافئة .

١١ - ١٠ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة في الشكل ١١ - ٢٥ .

المعاوقة المكافئة للشبكة والمحسوبة في المسألة ١١ - ٩ هي $Z' = 4 + j3 = 5 \angle 36.9^\circ \Omega$ بعمل دائرة مغلقة بين

الطرفين AB في الشكل ١١ - ٢٥ ، يكون التيار المار في الدائرة المغلقة هو

$$I' = 5 \angle 30^\circ \left(\frac{5 + j5}{5 + j5 + 10} \right) = 2.24 \angle 56.6^\circ \text{ A}$$

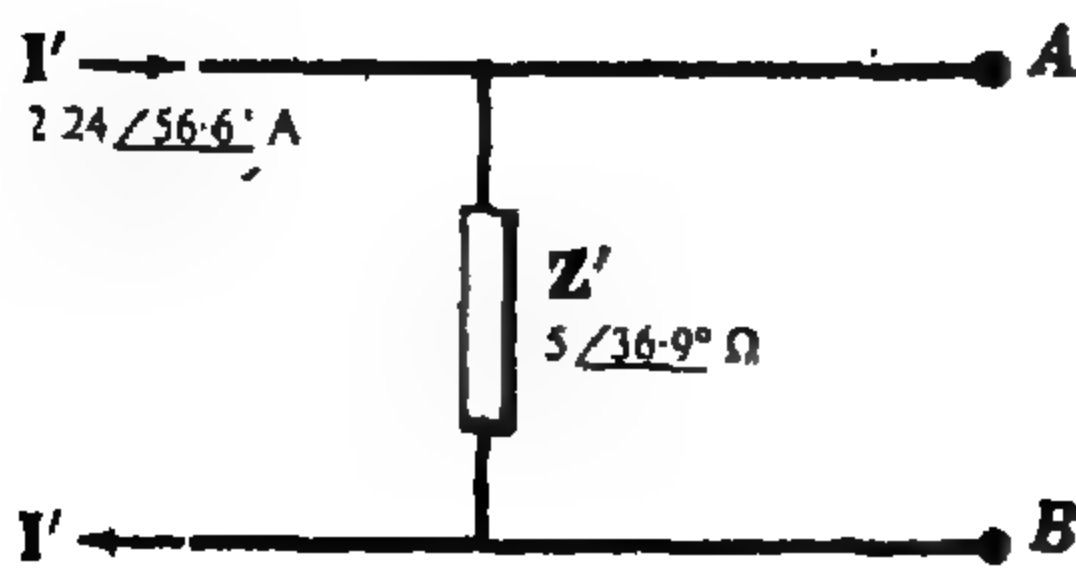
ويوضح الشكل ١١ - ٢٧ دائرة نورتن المكافئة . عند عمل

دائرة مفتوحة فإن جهد دائرة نورتن المكافئة يكون

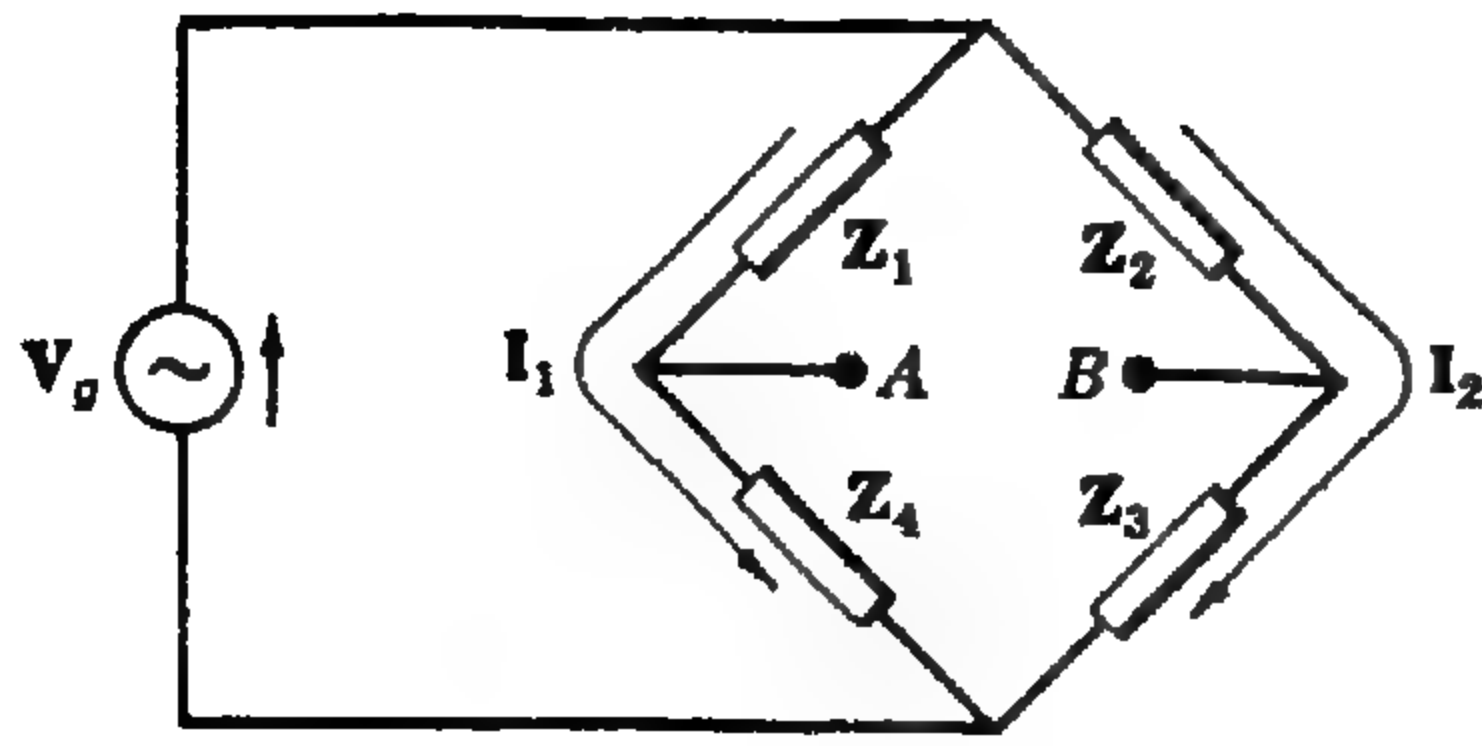
$$V_{oc} = (2.24 \angle 56.6^\circ)(5 \angle 36.9^\circ) = 11.2 \angle 93.5^\circ \text{ V}$$

وفي المسألة ١١ - ٩ نجد أن جهد ثقتين المكافئ هو

$$V' = 11.2 \angle 93.4^\circ \text{ V}$$



شكل ١١ - ٢٧



شكل ١١ - ٢٨

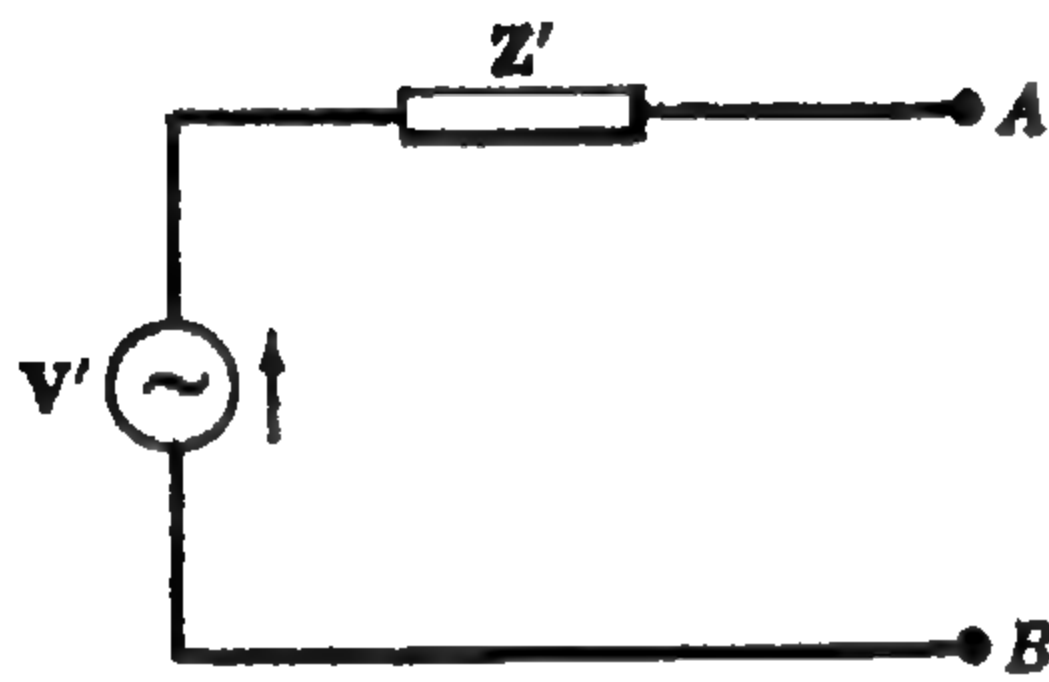
١١-١١ أوجد دائرة ثنيتين المكافئة لدائرة القنطرة المعطاة بالشكل ١١ - ٢٨ . تحت أى شرط يصبح جهد الدائرة المفتوحة بين الطرفين AB مساوياً للصفر ؟

عند وضع المصدر مساوياً للصفر ، فإن المعاوقة المكافئة بين الطرفين AB تتكون من مجموعة التوازي Z_1 و Z_4 المتصلة على التوالي مع مجموعة التوازي Z_2 و Z_3 . إذن

$$Z' = \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

عند فتح الدائرة فإنه ينتج عن المصدر V_g التيارين I_1 و I_2 كما فى الرسم

$$I_1 = V_g / (Z_1 + Z_4) \quad \text{و} \quad I_2 = V_g / (Z_2 + Z_3)$$



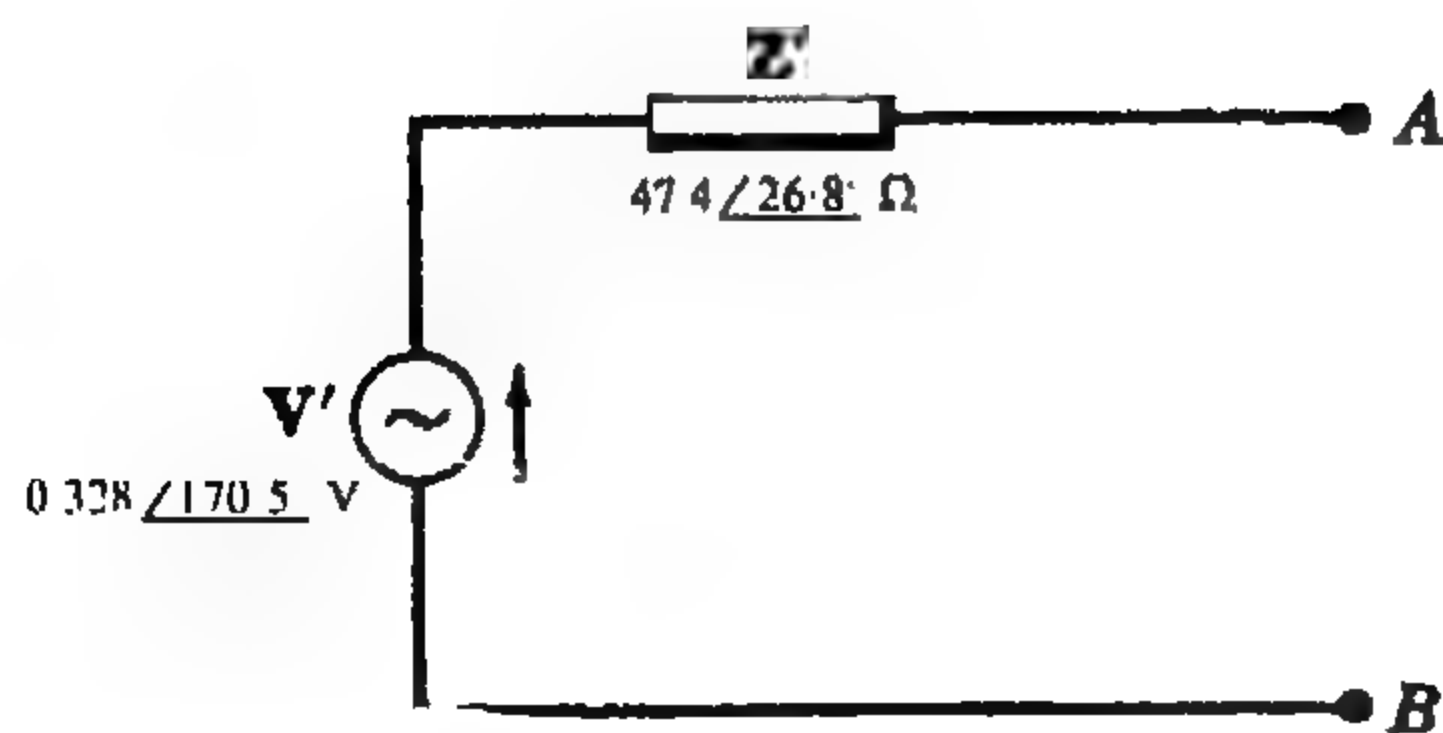
شكل ١١ - ٢٩

وبفرض أن جهد A أعلى من جهد B ، فإننا نحصل على

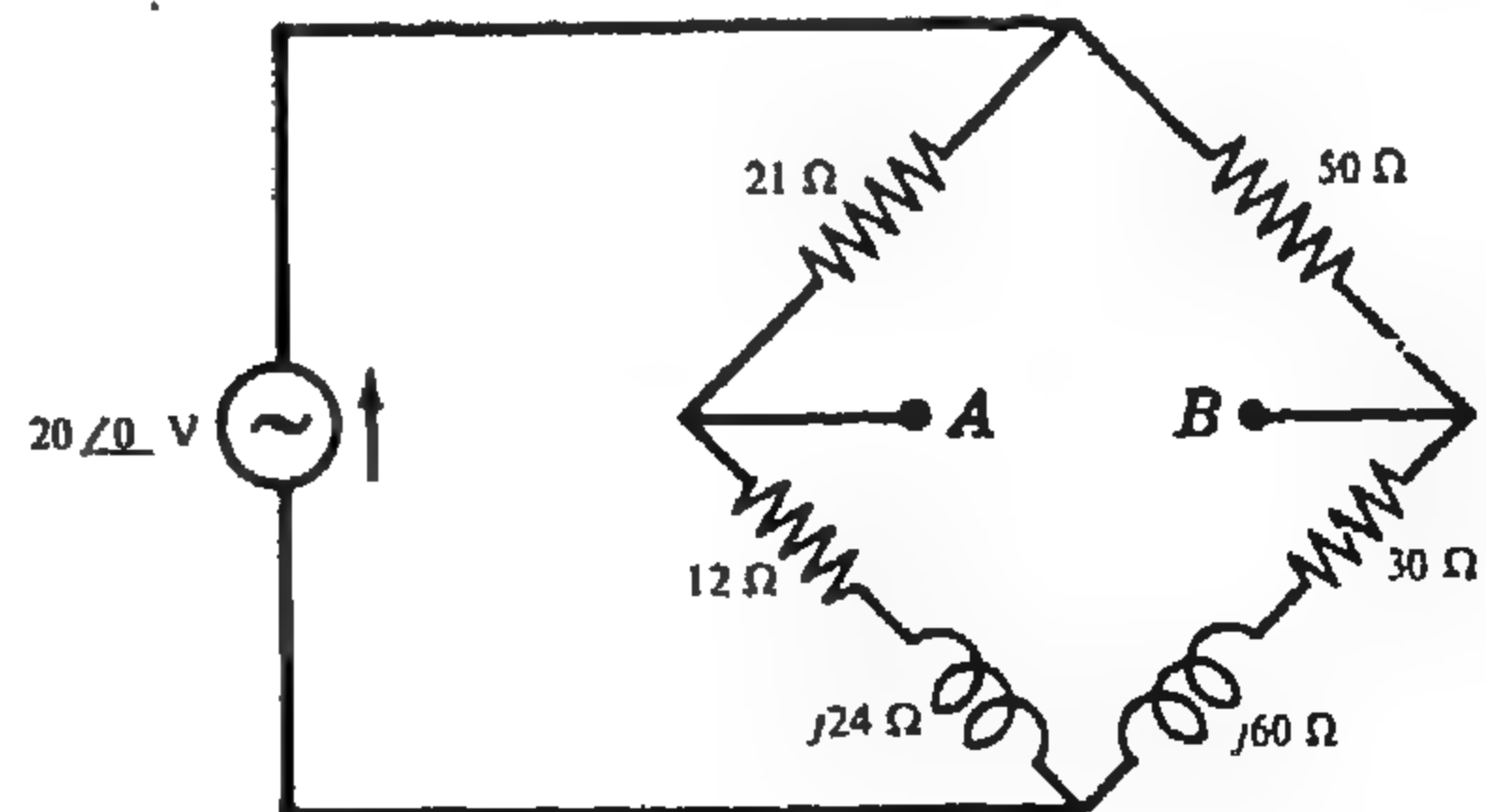
$$\begin{aligned} V' = V_{AB} &= I_1 Z_4 - I_2 Z_3 \\ &= \frac{V_g Z_4}{Z_1 + Z_4} - \frac{V_g Z_3}{Z_2 + Z_3} \\ &= V_g \left[\frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} \right] \end{aligned}$$

كما سبق يتضح أن جهد ثنيتين المكافئ يتناسب مع الفرق $Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3$. وعندما $Z_2 Z_4 = Z_1 Z_3$ فإن الجهد $V' = 0$.

١١ - ١٢ أوجد دائرة ثنيتين المكافئة لدائرة القنطرة الموضحة فى الشكل ١١ - ٣٠ .



شكل ١١ - ٣١



شكل ١١ - ٣٠

عند وضع المصدر مساوياً للصفر فإن المعاوقة المكافئة بين الطرفين AB تصبح

$$Z' = \frac{21(12 + j24)}{33 + j24} + \frac{50(30 + j60)}{80 + j60} = 47.4 \angle 26.8^\circ \Omega$$

وعند فتح الدائرة فإن التيار المار فى الجهة اليسرى فى القنطرة يكون $I_1 = (20 \angle 0^\circ) / (33 + j24) \text{ A}$ والتيار المار

فى الجهة اليمنى يكون $I_2 = (20 \angle 0^\circ) / (80 + j60) \text{ A}$

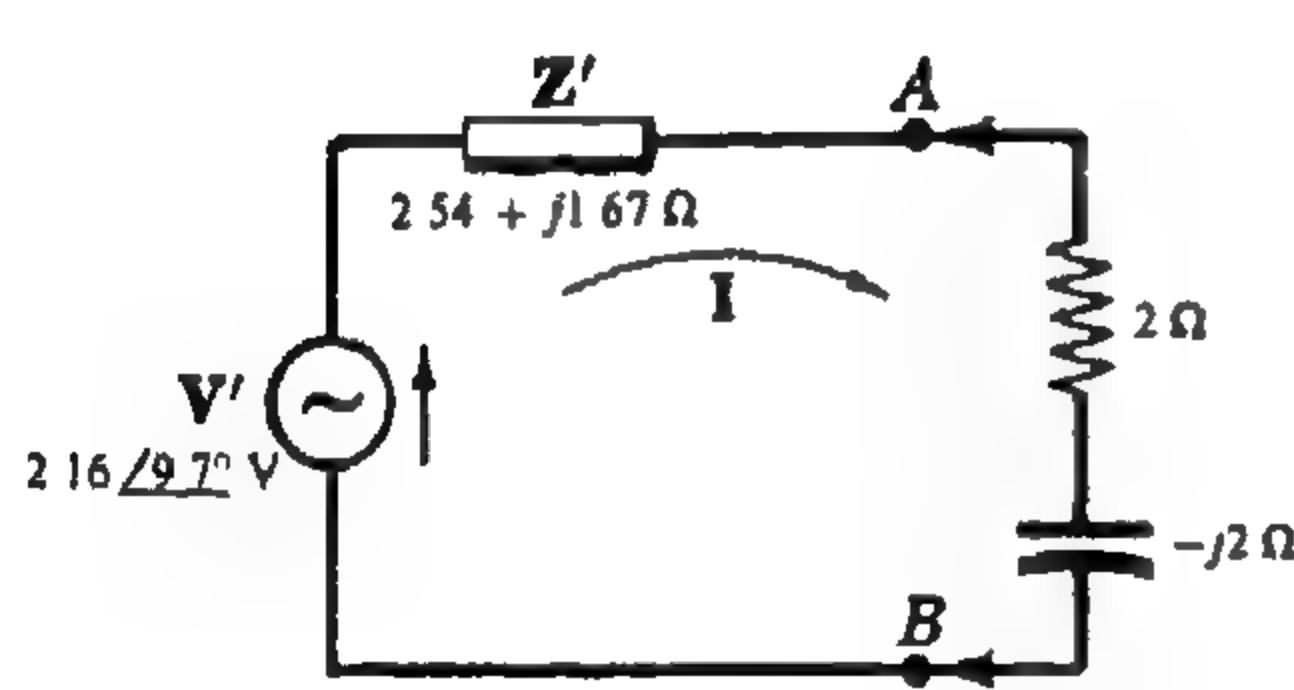
نفرض أن جهد النقطة A أعلى من جهد النقطة B ، نحصل على

$$\begin{aligned} V' = V_{AB} &= \frac{(20 \angle 0^\circ)(12 + j24)}{33 + j24} - \frac{(20 \angle 0^\circ)(30 + j60)}{80 + j60} \\ &= (20 \angle 0^\circ)(1 + j2) \left[\frac{12}{33 + j24} - \frac{30}{80 + j60} \right] = 0.328 \angle 170.5^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

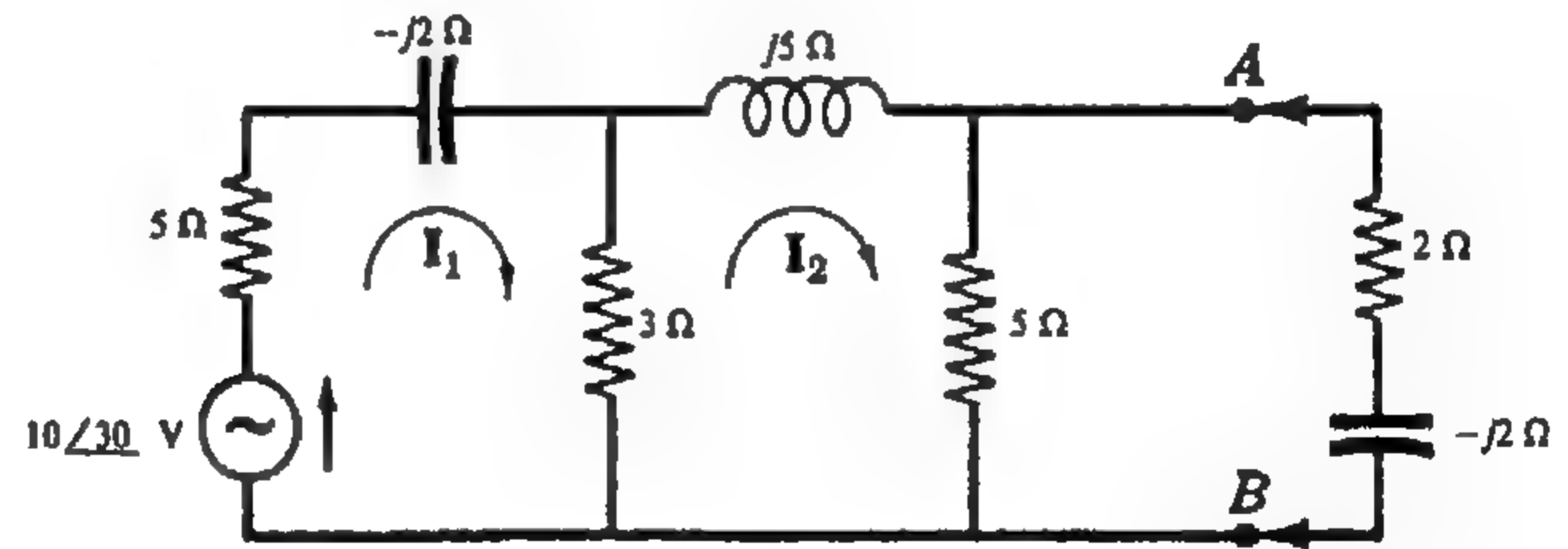
١١-١٣ أبدال الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ - ٣٢ والتى على يسار الطرفين AB بدائرة ثقتين المكافئة . ثم عين التيار المار فى المعاوقة $2 - j2 \Omega$ عند توصيلها بالدائرة المكافئة .

باختصار الشبكة الكهربائية يمكن إيجاد المعاوقة المكافئة Z' . ونلاحظ أن المعاوقة $5 - j2 \Omega$ متصلة على التوازي مع المقاومة 3Ω . إذن المعاوقة المكافئة لها هى

$$Z_1 = \frac{(5 - j2)3}{8 - j2} = 1.94 - j0.265 \Omega$$



شكل ١١ - ٣٣



شكل ١١ - ٣٢

الان نجد أن المعاوقة Z_1 متصلة على التوازي مع المعاوقة 5Ω ، وبجمعها نحصل على :

$$Z_2 = 1.94 - j0.265 + j5 = 1.94 + j4.735 \Omega$$

ويمكن الحصول على المعاوقة المكافئة Z' من محصلة Z_2 والمقاومة 5Ω . إذن

$$Z' = \frac{(1.94 + j4.735)5}{6.94 + j4.735} = 3.04 \angle 33.4^\circ = 2.54 + j1.67 \Omega$$

وباعتبار الدائرة المفتوحة واستخدام طريقة تيار الشبكة للحصول على I_2 نجد أن :

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 - j2 & 10/30^\circ \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 - j2 & -3 \\ -3 & 8 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{30/30^\circ}{69.25/20.3^\circ} = 0.433 \angle 9.7^\circ \Omega$$

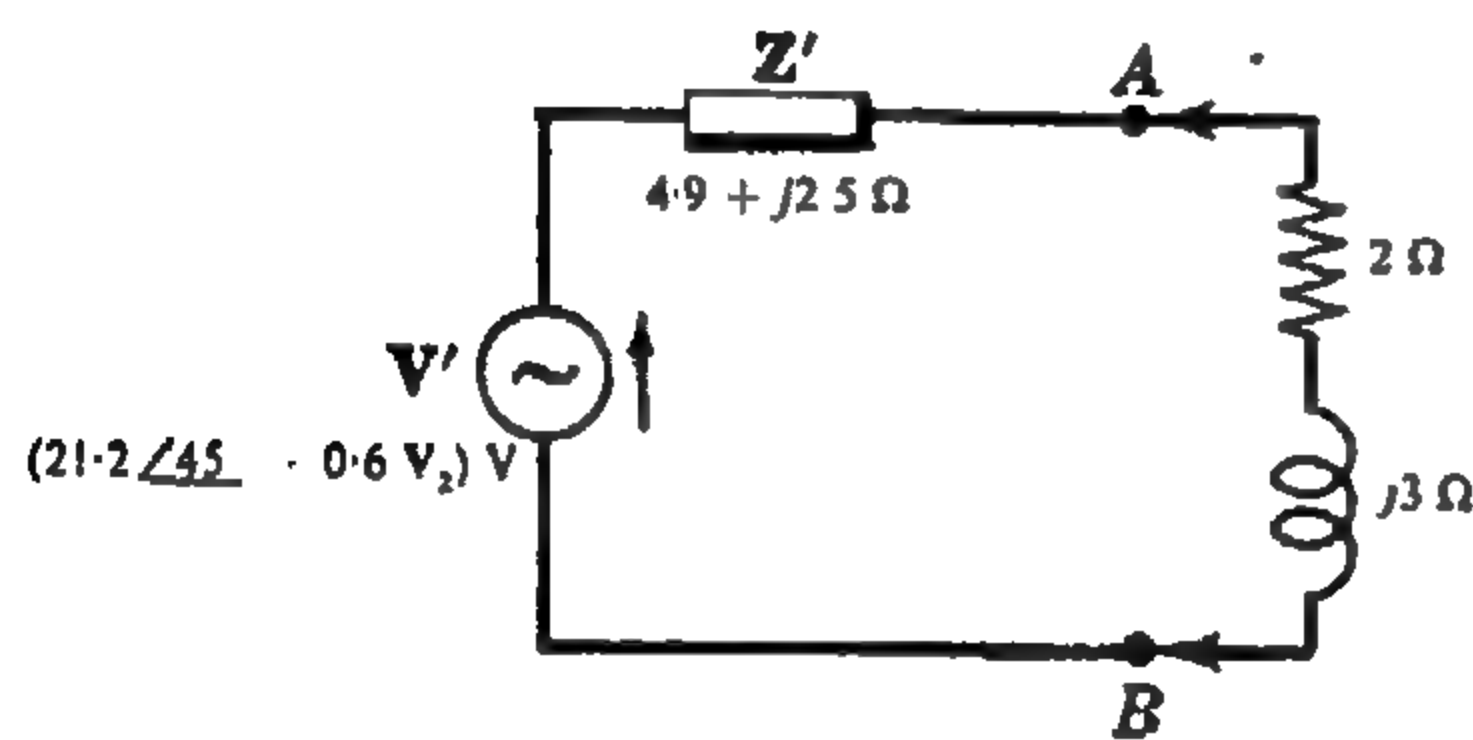
إن جهد الدائرة المفتوحة هو المهبوط في الجهد على المقاومة 5Ω ، أي أن

$$V' = I_2(5) = (0.433 \angle 9.7^\circ)5 = 2.16 \angle 9.7^\circ V$$

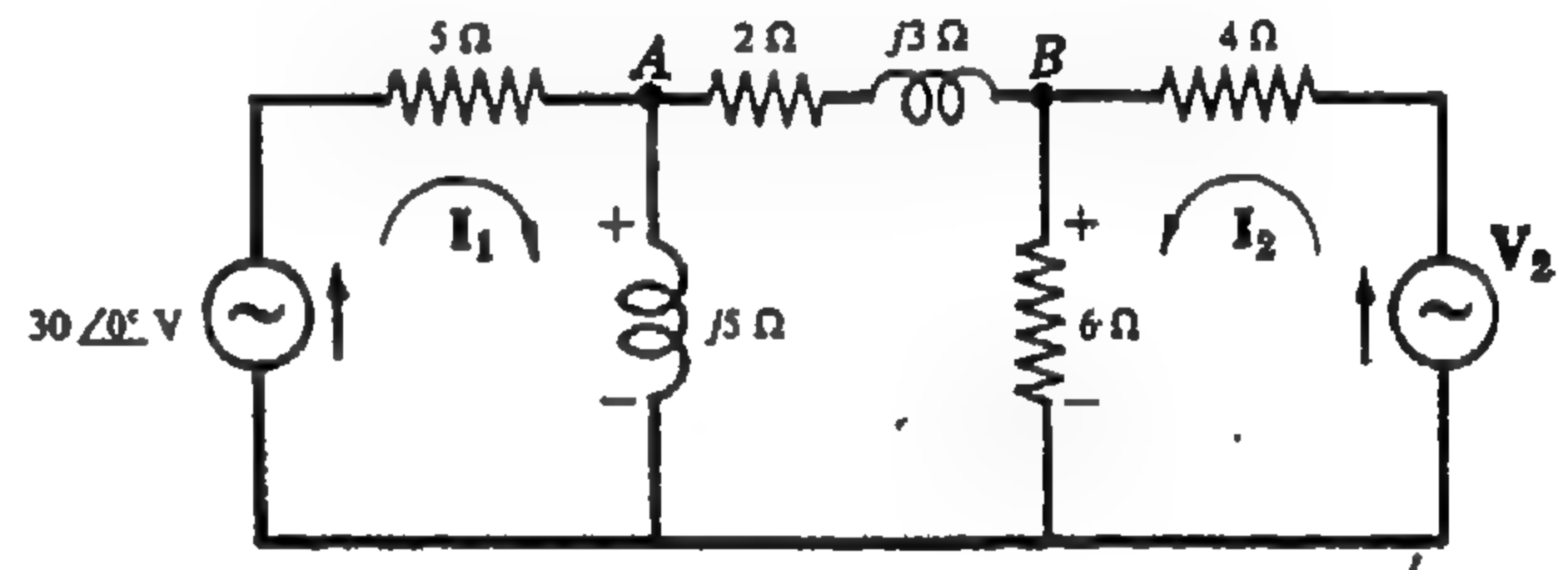
وبتوصيل المعارقة $2 - j2 \Omega$ بدائرة ثنيتين المكافئة الموضحة في الشكل ١١-٣٣ ، يكون التيار المطلوب هو :

$$I = V'/(Z' + 2 - j2) = (2.16 \angle 9.7^\circ)/(4.54 - j0.33) = 0.476 \angle 13.87^\circ A$$

١١-١٤ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-٣٤ ، أوجد V_2 بحيث يصبح التيار المار في المعارقة $2 + j3 \Omega$ مساوياً للصفر .



شكل ١١ - ٣٥



شكل ١١ - ٣٤

نطبق نظرية ثنيتين على الدائرة المعطاة للحصول على الجهد المكافئ المقاس بين الطرفين AB . وبعمل دائرة مفتوحة فإن تيارى المسارين المنلقين هما

$$I_2 = V_2/10 \text{ amperes} \quad \text{و} \quad I_1 = (30 \angle 0^\circ)/(5 + j5) A$$

وبفرض أن جهد النقطة A أعلى من جهد النقطة B نحصل على :

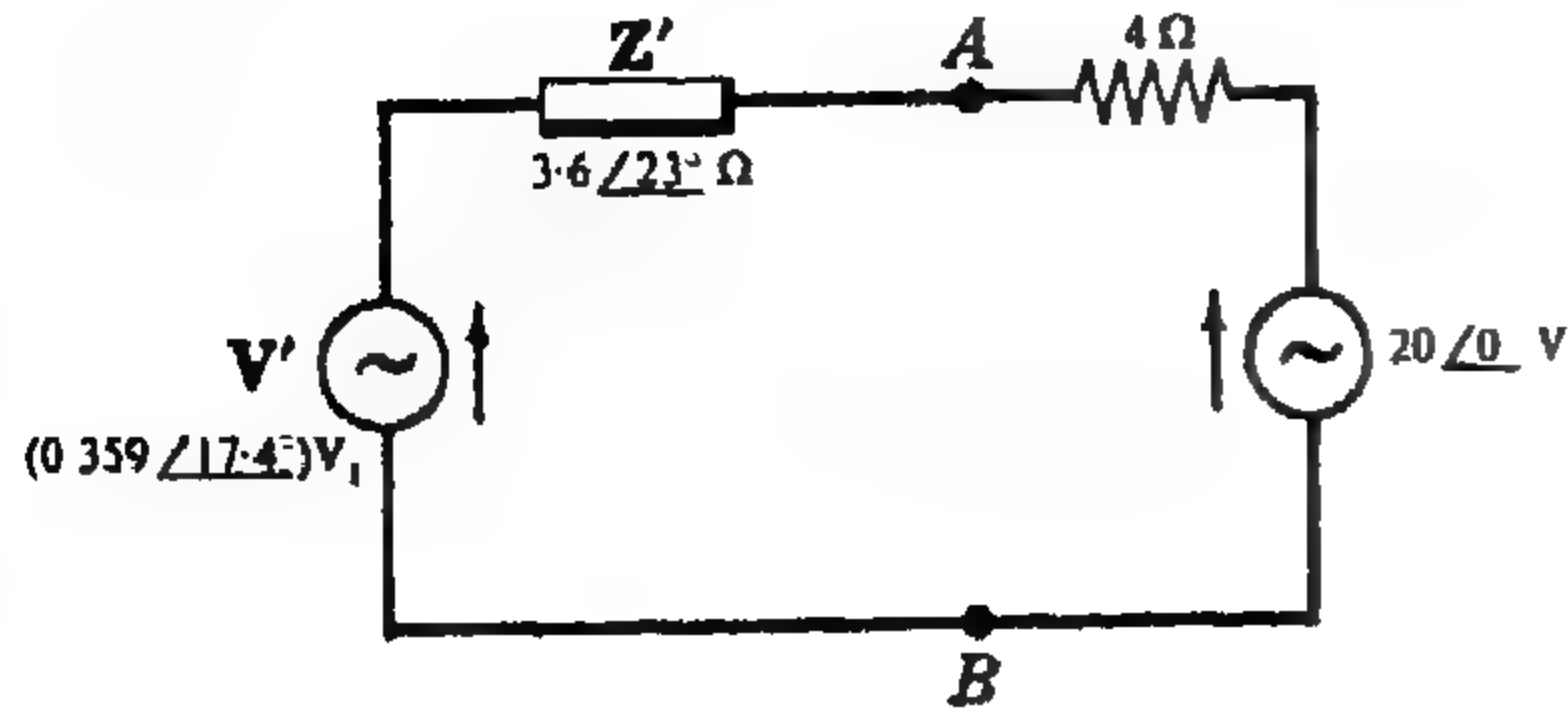
$$V' = V_{AB} = I_1(j5) - I_2(6) = 30 \angle 0^\circ (j5)/(5 + j5) - V_2(6)/10 = 21.2 \angle 45^\circ - 0.6V_2 \text{ volts}$$

ويكون التيار المار في دائرة ثنيتين المكافئة الموضحة في الشكل ١١-٣٥ مساوياً للصفر إذا كان $V' = 0$. إذن

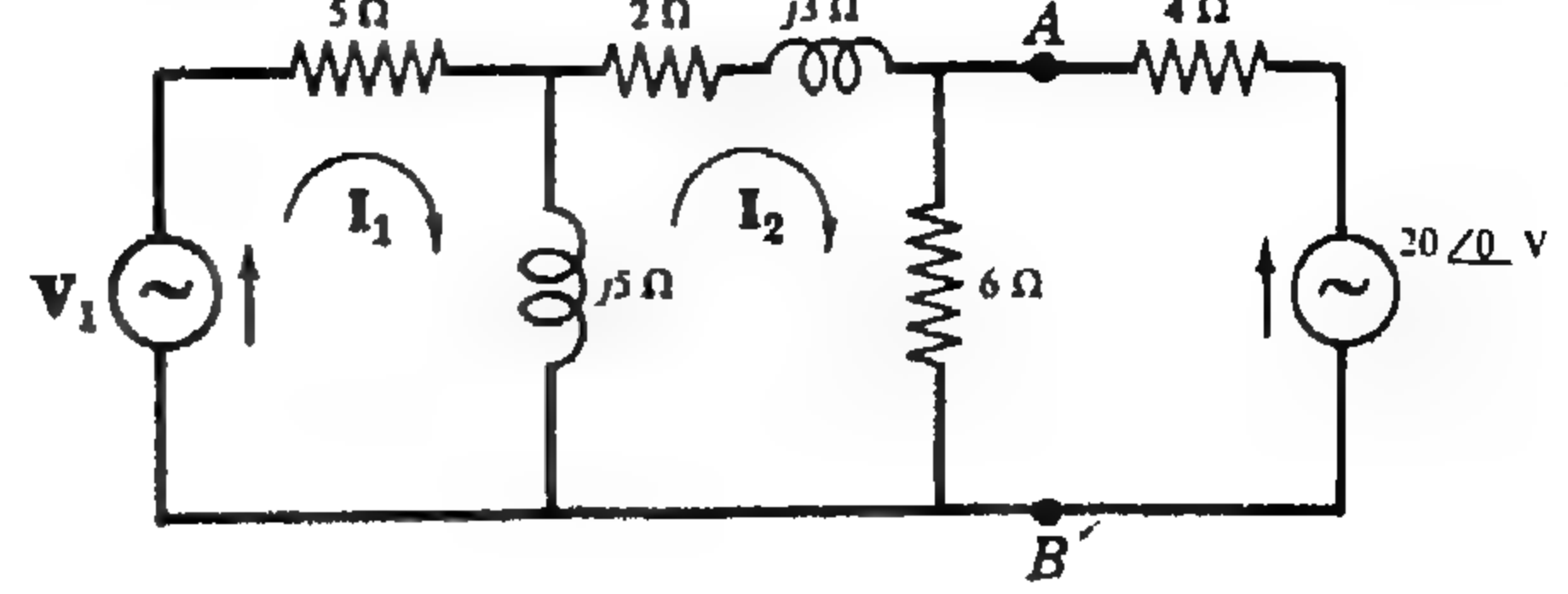
$$V_2 = 35.4 \angle 45^\circ V \quad , \quad 0 = 21.2 \angle 45^\circ - 0.6V_2$$

ملحوظة : لانتاج في هذه المسألة إلى قيمة المعارقة Z' الموضحة في الشكل ١١-٣٥ ولكن يترك حساب قيمتها كتمرين للقارئ .

١١ - ١٥ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١١ - ٣٦ ، أوجد قيمة جهد المصدر V_1 التى تجعل تيار المصدر $20\angle 0^\circ V$ مساوياً للصفر



شكل ١١ - ٣٧



شكل ١١ - ٣٦

نوجد دائرة ثننين المكافئة للشبكة الكهربائية الفعالة التى على يسار الطرفين AB . وبعمل دائرة مفتوحة فإنه يوجد تياران للشبكتين الفرعيتين I_1 و I_2 كما هو موضح . وبالحل للحصول على I_2 نجد أن

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & V_1 \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 8 + j8 \end{vmatrix}} = \frac{V_1 5/90^\circ}{83.6/72.6^\circ} \text{ amperes}$$

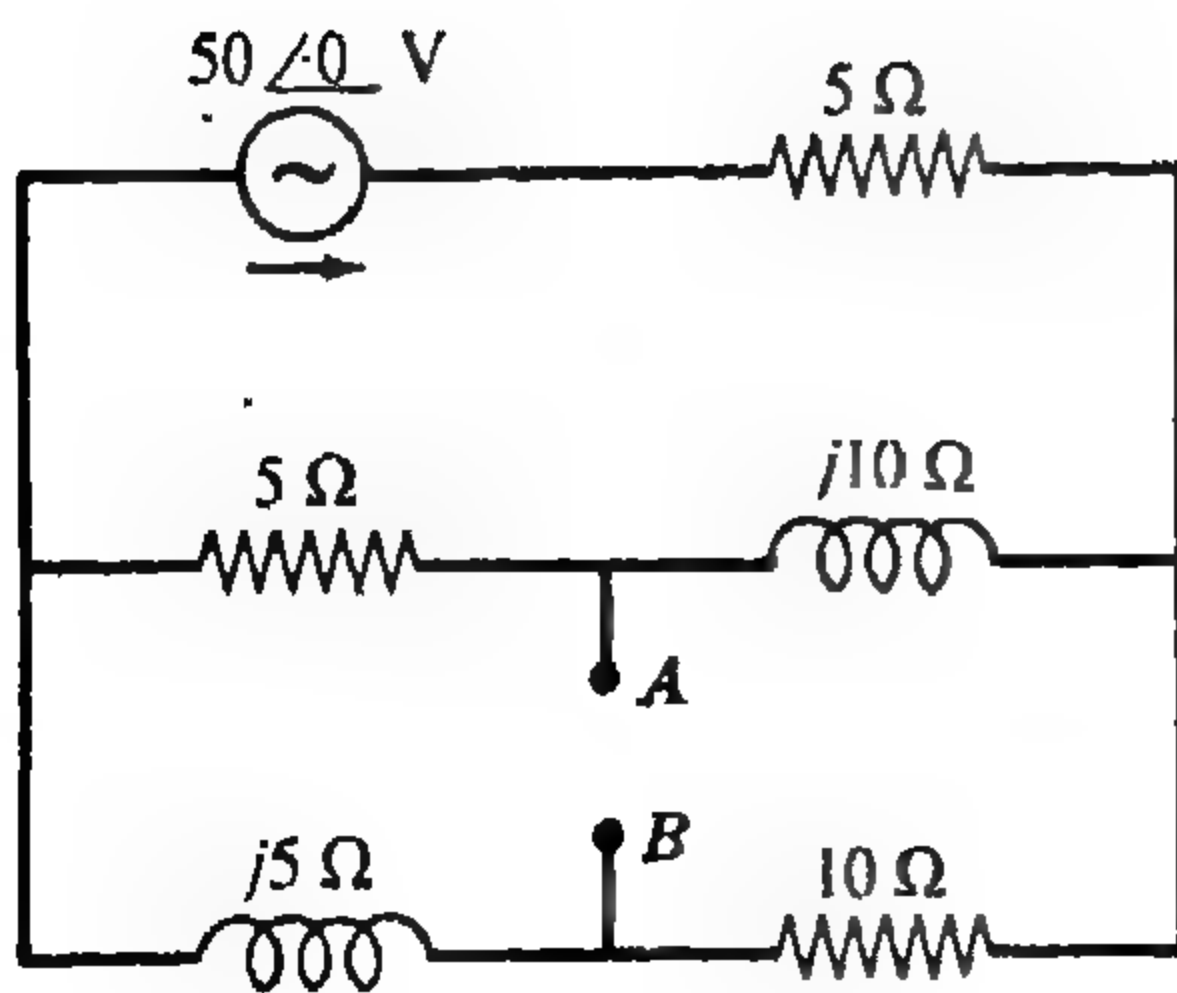
والآن نلاحظ أن جهد الدائرة المفتوحة هو المهبوط فى الجهد على المقاومة 6Ω وهو يساوى $I_2(6)$.

$$V' = \frac{V_1 5/90^\circ}{83.6/72.6^\circ} (6) = (0.359 \angle 17.4^\circ) V_1 \text{ volts}$$

وعند توصيل دائرة ثننين المكافئة بالطرفين AB كما هو موضح فى الشكل ١١ - ٣٧ ، يتضح أنه لى يصبح التيار مساوياً للصفر فإن $V' = 20\angle 0^\circ V$ لابد وأن يساوى المصدر الآخر ، أى أن $V' = 20\angle 0^\circ V$. إذن

$$V_1 = 55.7 \angle -17.4^\circ V \text{ ومنها نجد أن } (0.359 \angle 17.4^\circ) \tilde{V}_1 = 20\angle 0^\circ V$$

وتنطبق أيضاً الملاحظة الموجودة فى المسألة ١١ - ١٤ على هذه المسألة



شكل ١١ - ٣٨

١١ - ١٦ إذا وصلت المعوقات $Z_1 = 10\angle 30^\circ \Omega$ و $Z_2 = 20\angle 0^\circ \Omega$

و $Z_3 = 5 - j5\Omega$ تبعاً بين النقطتين AB فى الشبكة

الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١ - ٣٨ ، فاحسب القدرة فى كل معاوقة .

نستبدل الشبكة الكهربائية بين النقطتين AB بدائرة ثننين

المكافئة . ثم نصل المعوقات تبعاً بالدائرة المكافئة .

لحساب المعاوقة الداخلة نختار ثلاثة تيارات شبكية كما لو كان المصدر المحرك بين AB كما هو مبين فى الشكل ١١ - ٣٩ . فى هذه الحالة تكون المعاوقة الداخلة Z_{input} هى Z' لدائرة ثنيتين . ومن تعريف Z_{input}

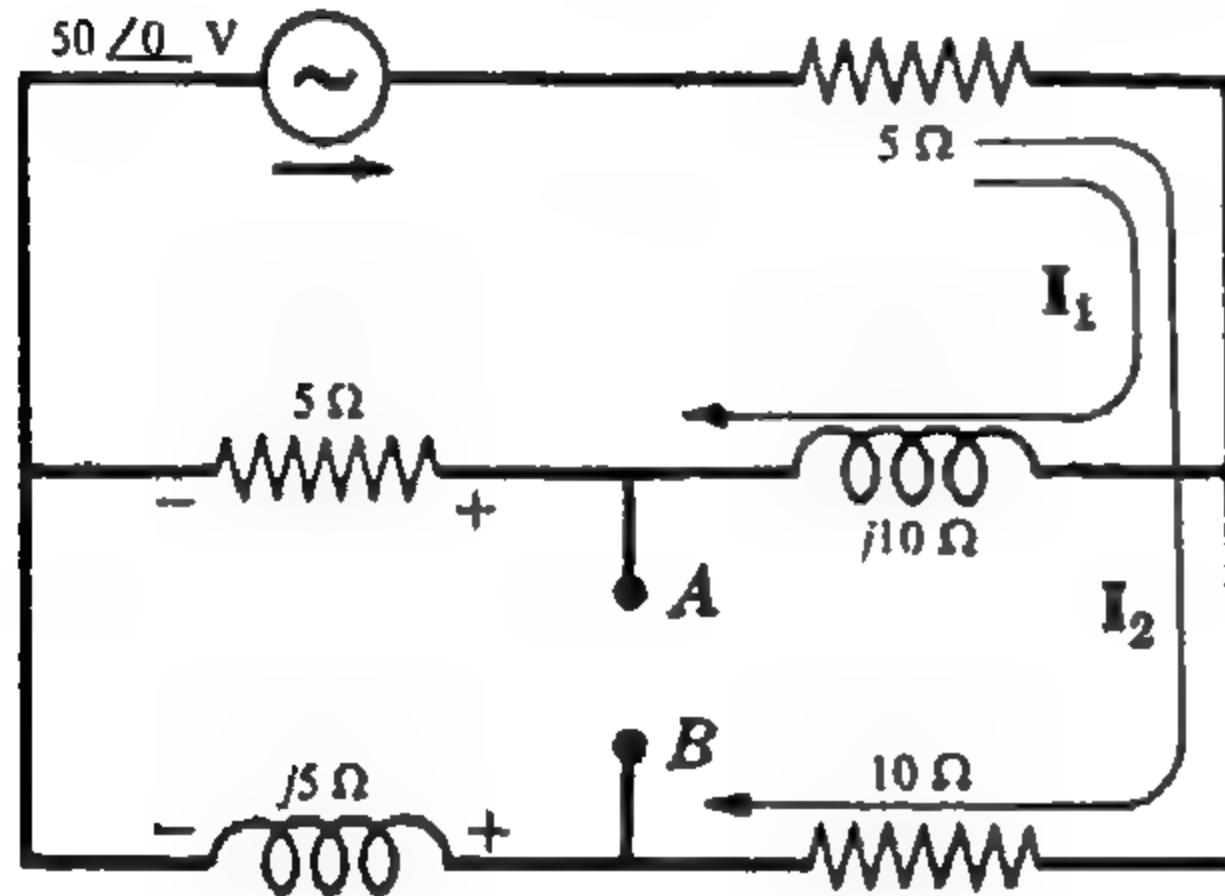
لدينا $Z_{input 1} = \Delta_z / \Delta_{11}$ ، حيث

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} (5 + j5) & -5 & (5 + j5) \\ -5 & (10 + j10) & (-5 - j10) \\ (5 + j5) & (-5 - j10) & (15 + j15) \end{vmatrix} = 1455 / 121^\circ$$

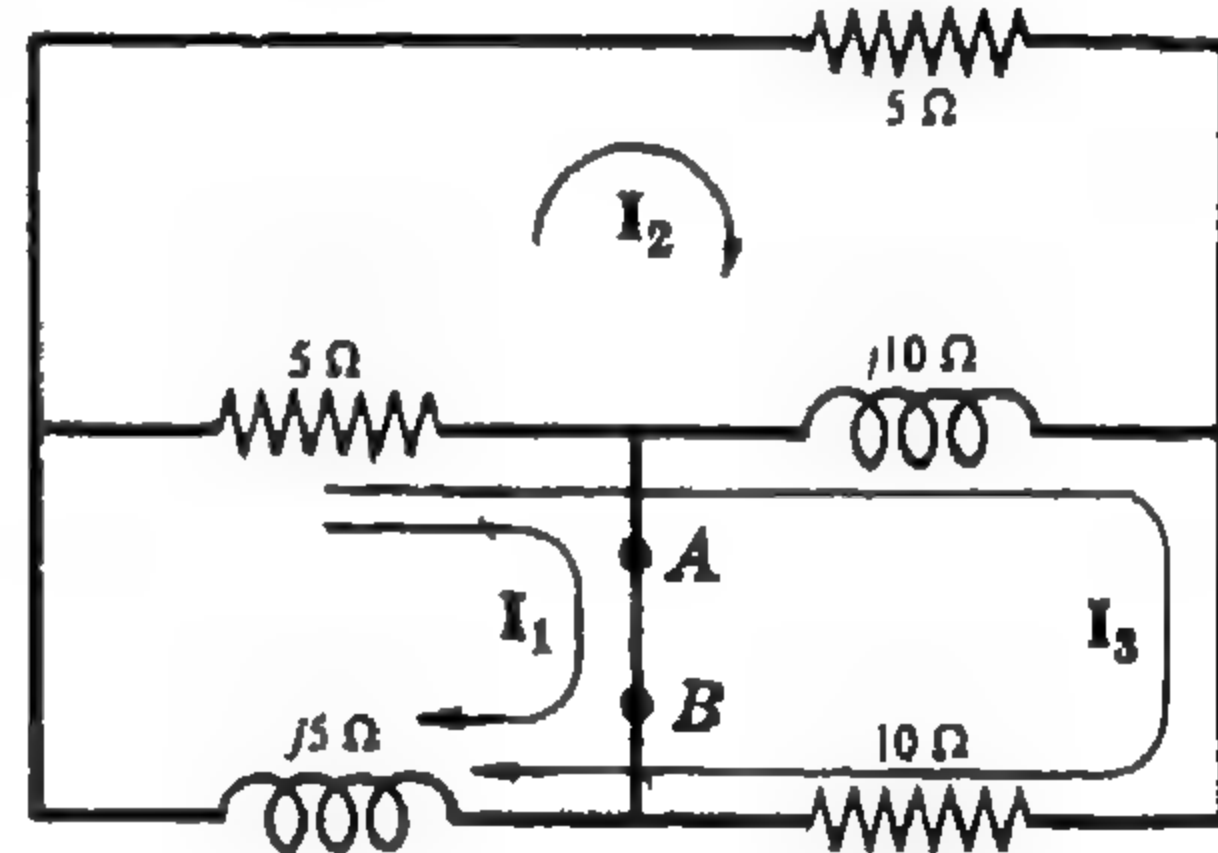
$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} (10 + j10) & (-5 - j10) \\ (-5 - j10) & (15 + j15) \end{vmatrix} = 213.5 / 69.4^\circ$$

$$Z' = Z_{input 1} = \Delta_z / \Delta_{11} = 1455 / 121^\circ / 213.5 / 69.4^\circ = 6.82 / 51.6^\circ = 4.23 + j5.34 \Omega$$

وبالتعويض



شكل ١١ - ٤٠



شكل ١١ - ٣٩

وبعمل دائرة مفتوحة يوجد لدينا تياران للشبكة I_1 و I_2 كما فى الشكل ١١ - ٤٠ وهذا هو التياران هما

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 5 \\ 50 & 15 + j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 + j10 & 5 \\ 5 & 15 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{558 / 26.6^\circ}{213.5 / 69.4^\circ} = 2.62 / -42.8^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 + j10 & 50 \\ 5 & 50 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{558 / 63.4^\circ}{213.5 / 69.4^\circ} = 2.62 / -6^\circ \text{ A}$$

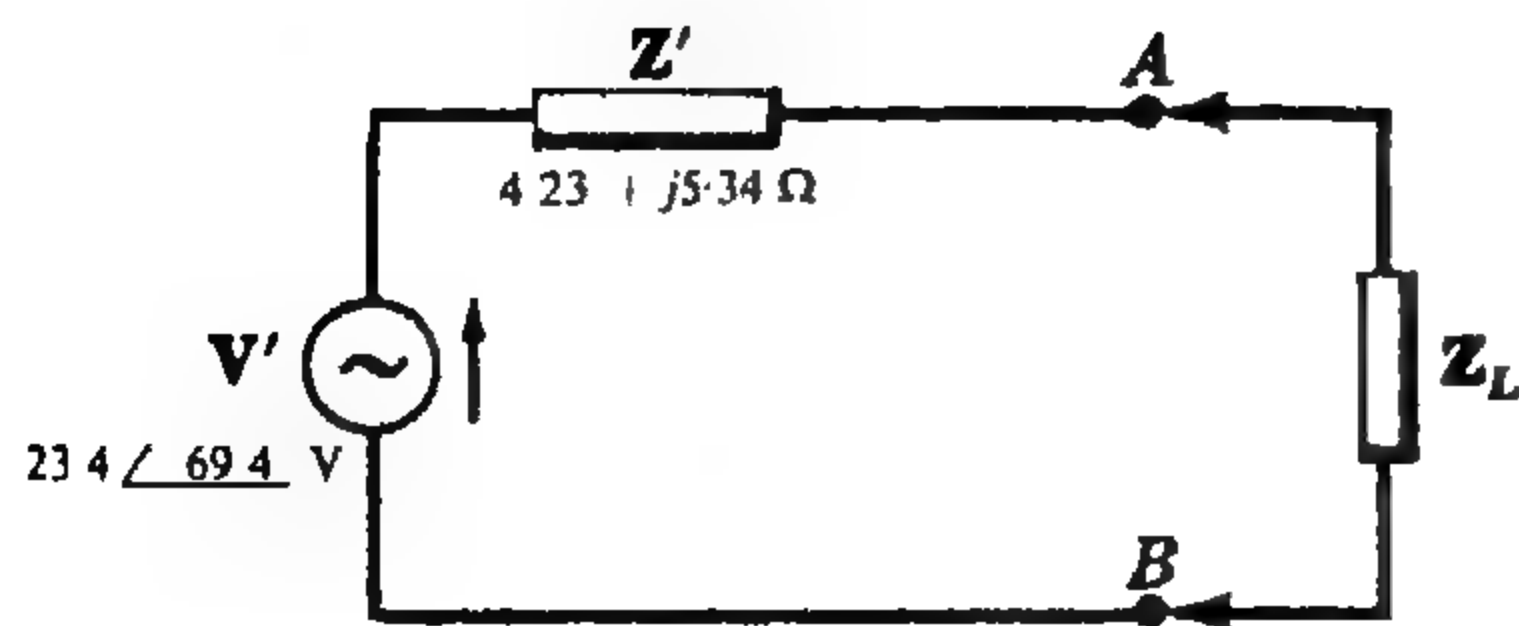
والآن فإن جهد ثنيتين المكافئ V' هو جهد الدائرة المفتوحة

وذلك مع فرض أن جهد A أعلى من جهد B . ونجد فى الشكل

١١ - ٤٠ القطبية اللحظية للهبوط فى الجهد على المقاومة 5Ω المتصلة فى

الفرع الأوسط والهبوط فى الجهد على الممانعة 5Ω المتصلة فى الفرع

السفل إذن :



شكل ١١ - ٤١

$$\begin{aligned} V' &= V_{AB} = I_1(5) - I_2(j5) \\ &= (2.62 / -42.8^\circ)(5) - (2.62 / -6^\circ)(5 \angle 90^\circ) \\ &= 23.4 / -69.4^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

ويوضح الشكل ١١ - ٤١ دائرة ثنيتين المكافئة والمتصلة بها معاوقة الحمل Z_L . بين الطرفين AB .

وبالتمويض عن قيمة Z_L المعطاة في $I = V'/(Z + Z_L)$. يمكننا الحصول على التيارات والقدرات المطلوبة

$$Z_L = Z_1 - 10 \angle 30^\circ = 8.66 + j5 \Omega \quad \text{إذن عندما}$$

$$P_1 = (I_1)^2 \text{Re}Z_1 = (1.414)^2(8.66) = 17.32 \text{ W} \quad , \quad I_1 = \frac{23.4 \angle -69.4^\circ}{(4.23 + j5.34 + 8.66 + j5)} = 1.414 \angle -108.2^\circ \text{ A}$$

$$Z_1 = Z_2 = 20 \angle 0^\circ \Omega \quad \text{وعندما}$$

$$P_2 = (0.940)^2(20) = 17.65 \text{ W} \quad , \quad I_2 = \frac{23.4 \angle -69.4^\circ}{4.23 + j5.34 + 20} = 0.940 \angle -81.8^\circ \text{ A}$$

$$Z_L = Z_3 = 5 - j5 \Omega \quad \text{وعندما}$$

$$P_3 = (2.54)^2(5) = 32.3 \text{ W} \quad , \quad I_3 = \frac{23.4 \angle -69.4^\circ}{(4.23 + j5.34 + 5 - j5)} = 2.54 \angle -71.5^\circ \text{ A}$$

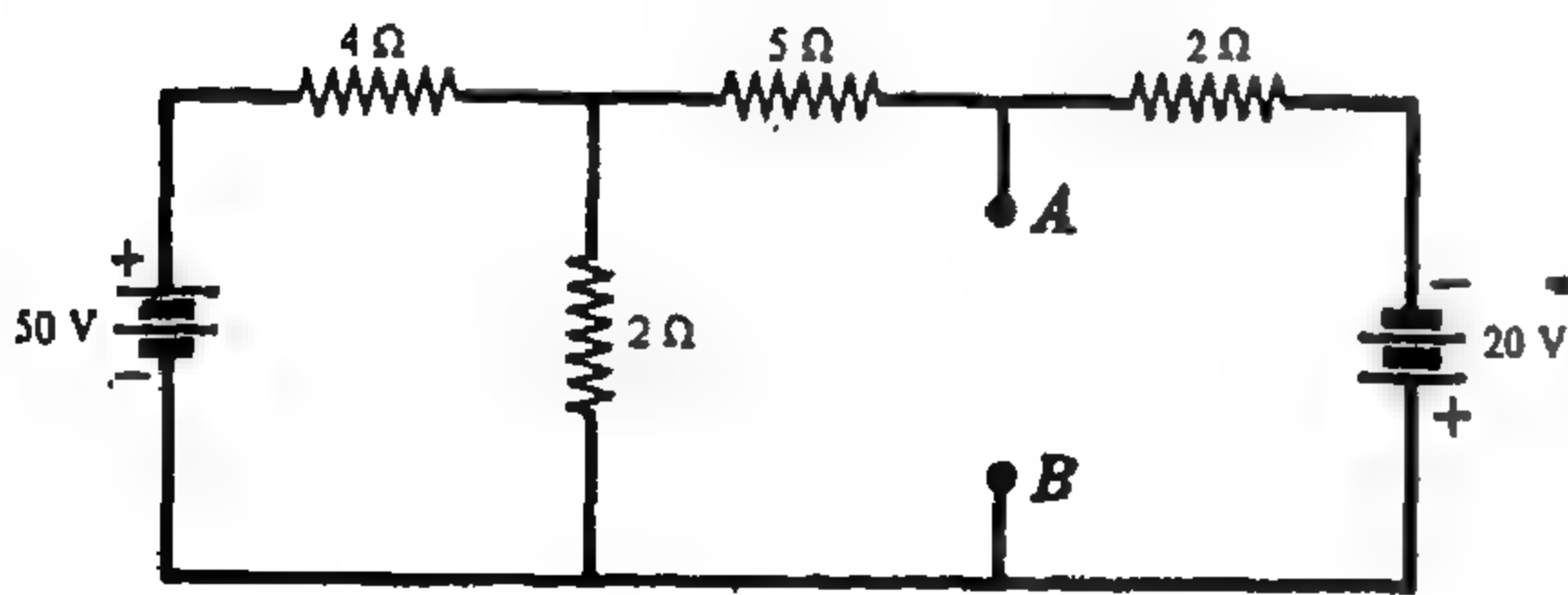
مسائل إضافية

١٧ - ١ أوجد دائرة ثنيتين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الفعالة المعطاة في الشكل ١١ - ٤٢ .

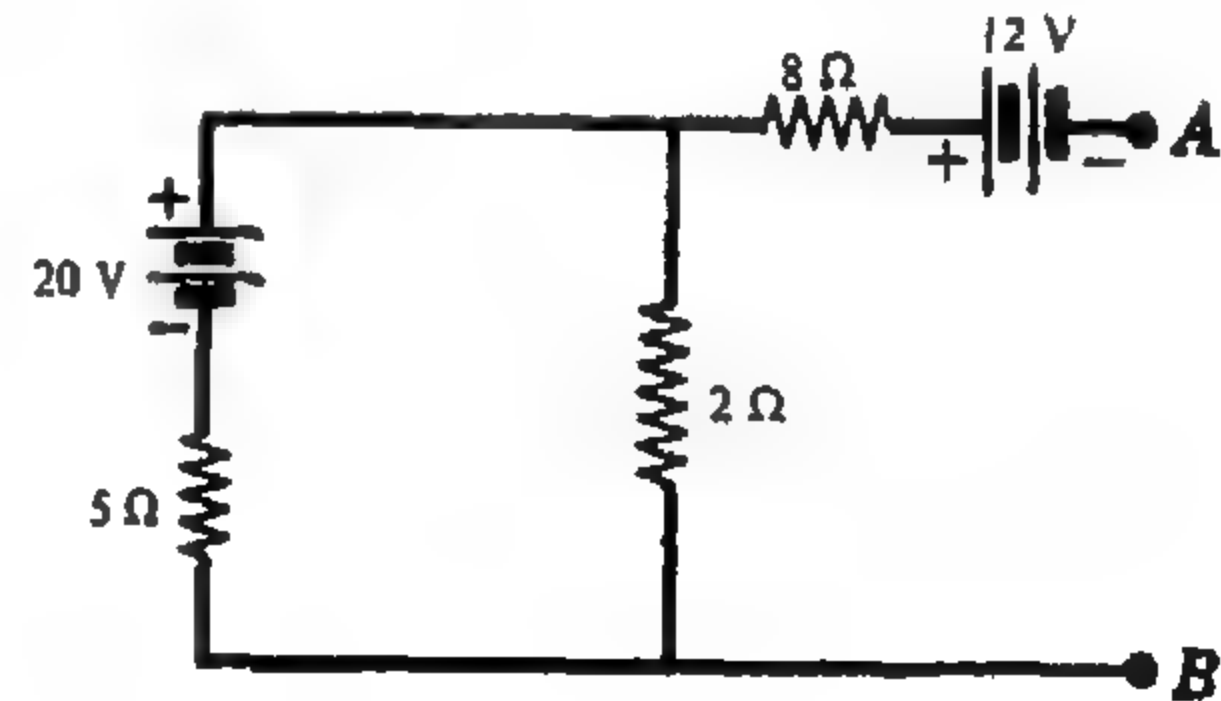
$$\text{الجواب : } Z' = 9.43 \text{ ohms}, V' = 6.29 \text{ V (B+)}$$

١٨ - ١ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٤٢

$$\text{الجواب : } Z' = 9.43 \text{ ohms}, I' = 0.667 \text{ A}$$



شكل ١١ - ٤٣



شكل ١١ - ٤٢

١٩ - ١ أوجد دائرة ثنيتين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية النشطة المعطاة في الشكل ١١ - ٤٣ .

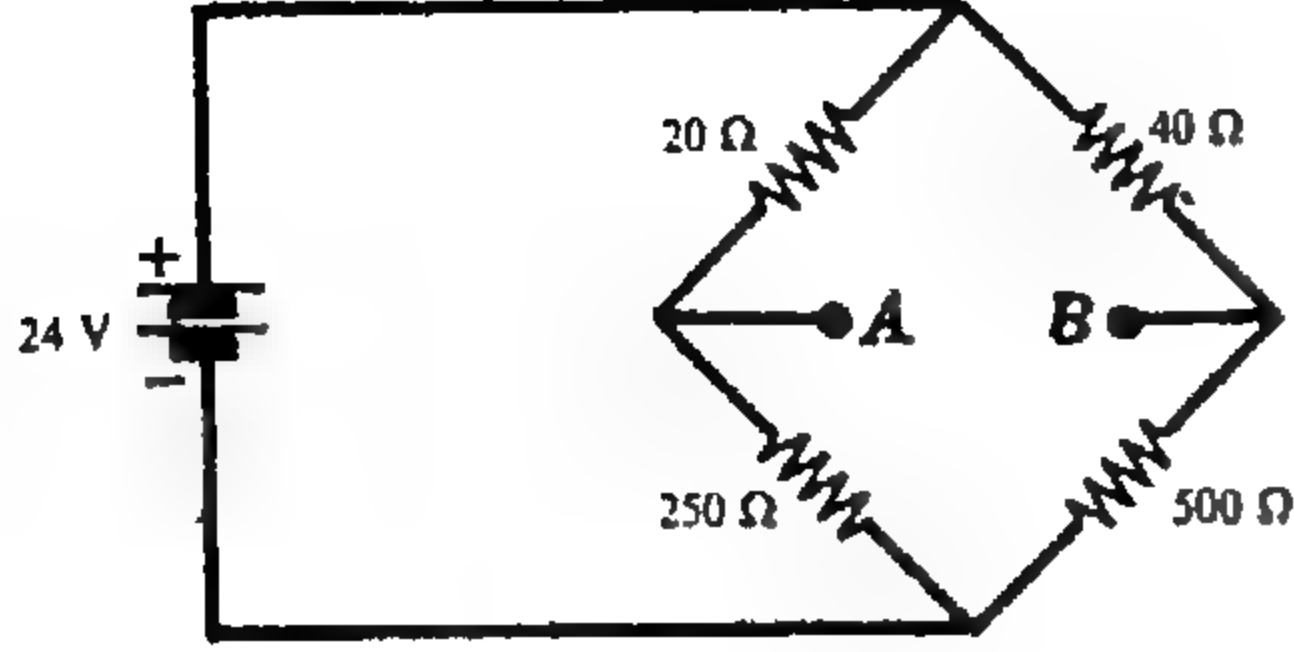
$$\text{الجواب : } Z' = 1.52 \text{ ohms}, V' = 11.18 \text{ V (B+)}$$

٢٠ - ١ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٤٣ .

$$\text{الجواب : } Z' = 1.52 \text{ ohms}, I' = 7.35 \text{ A}$$

١١-٢١ أوجد ثنيتين المكافئة بين الطرفين AB لدائرة القنطرة الموضحة فى الشكل ١١-٤٤ .

الجواب : $Z' = 55.5 \text{ ohms}$, $V' = 0$



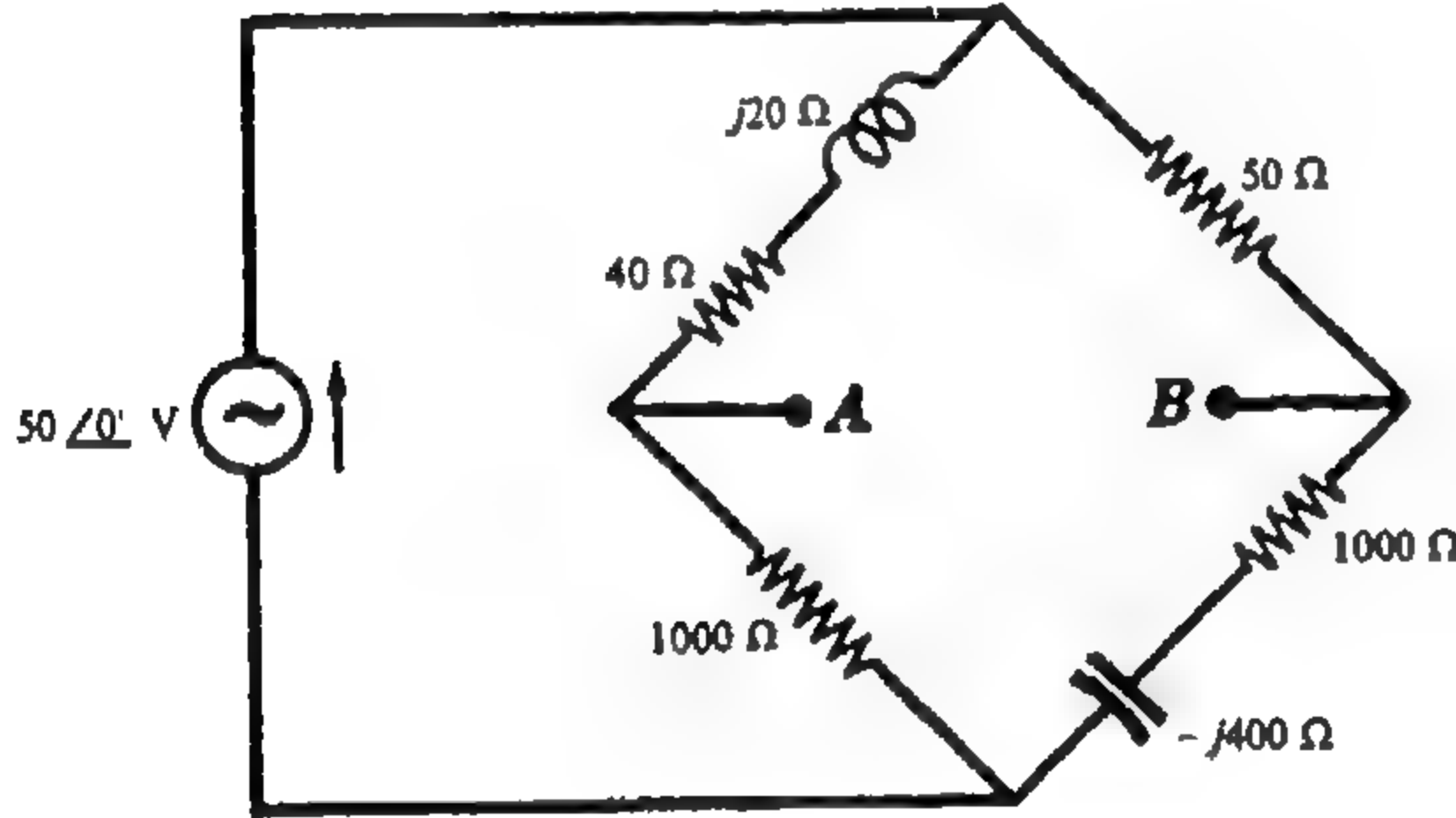
شكل ١١ - ٤٤

١١-٢٢ إذا استبدلنا المقاومة 500Ω بمقاومة 475Ω فى دائرة القنطرة الموضحة فى الشكل ١١-٤٤ ، فأوجد دائرة ثنيتين المكافئة فى هذه الحالة

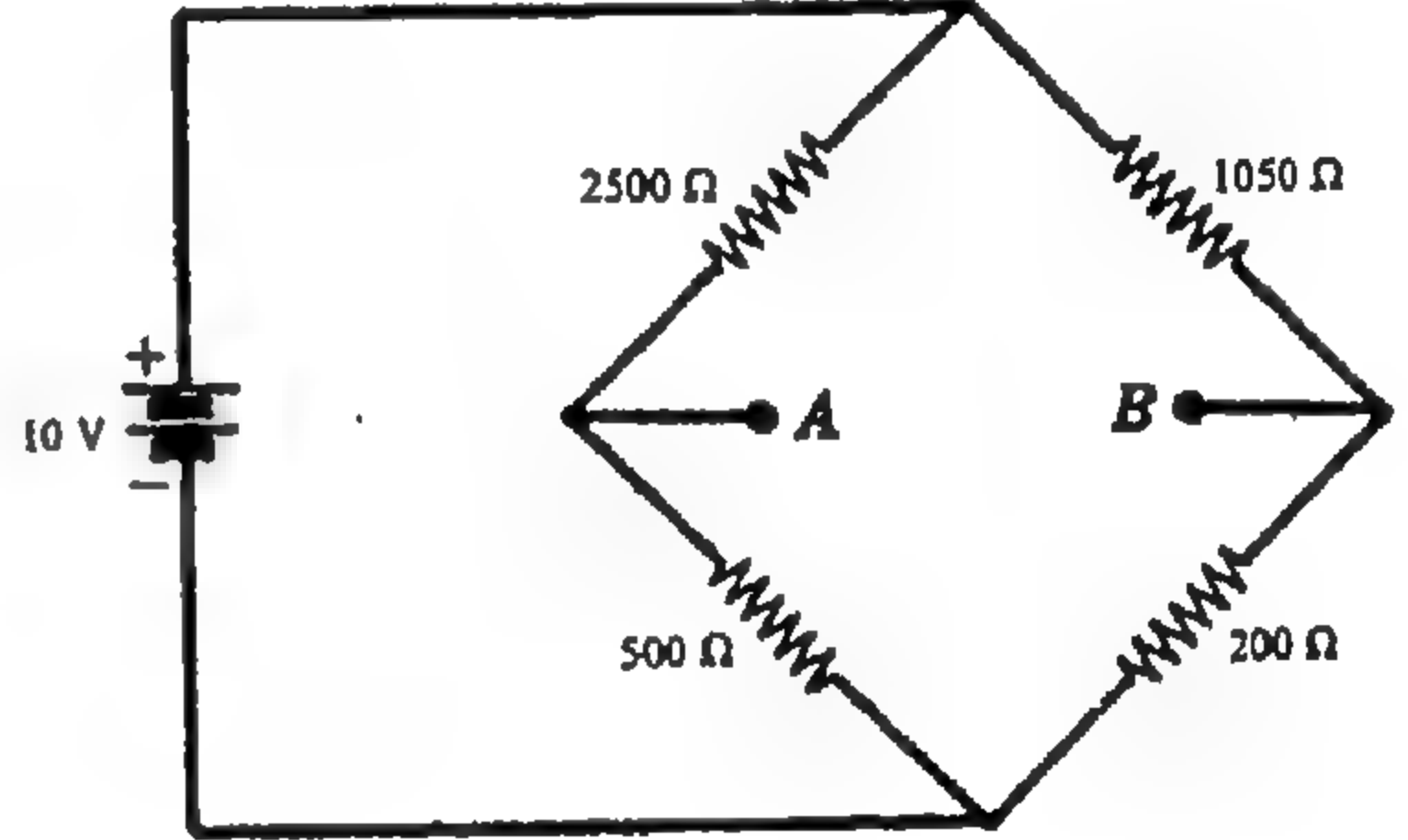
الجواب : $Z' = 55.4 \text{ ohms}$, $V' = 0.0863 \text{ V (A+)}$

١١-٢٣ طبق نظرية ثنيتين على دائرة القنطرة الموضحة فى الشكل ١١-٤٥ لتحصل على الانحراف فى الجلفانومتر المتصل بين AB علماً بأن مقاومته 100Ω وحساسيته $0.5 \mu\text{A/mm}$.

الجواب : $D = 0.195 \text{ m}$



شكل ١١ - ٤٦



شكل ١١ - ٤٥

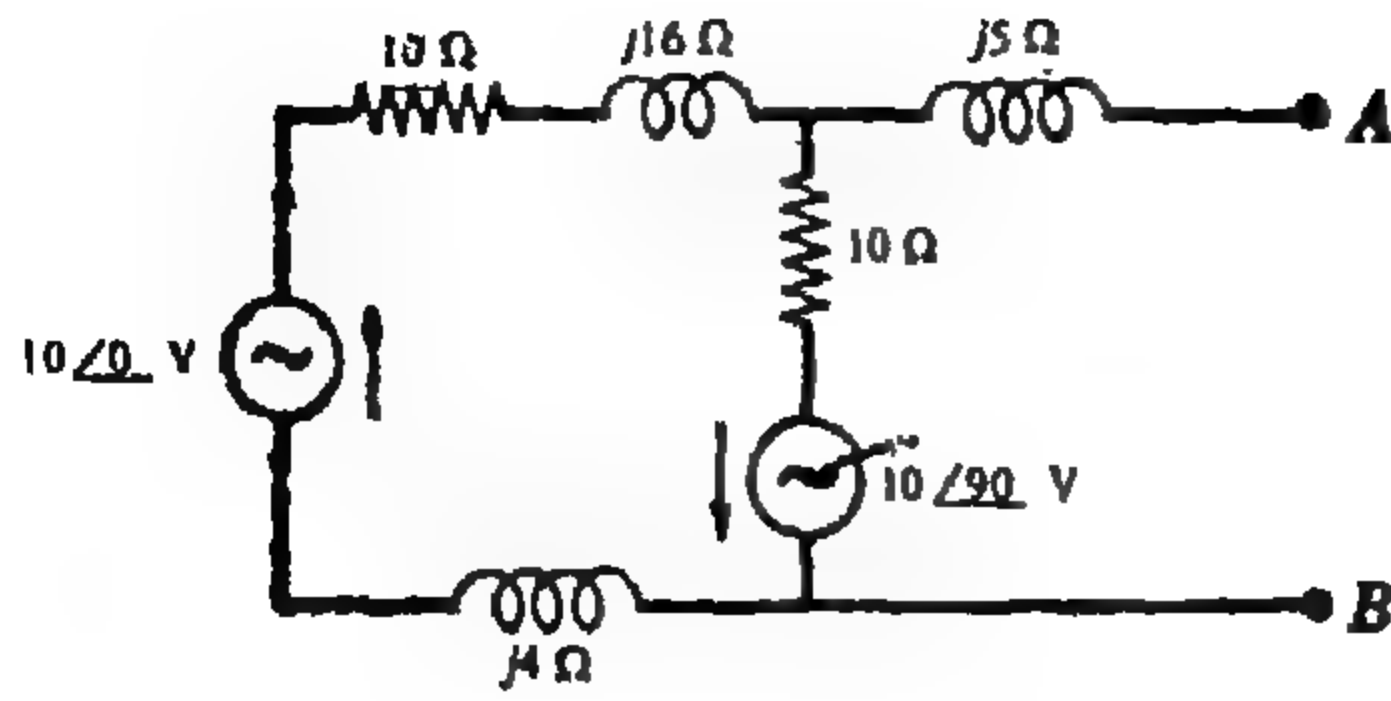
١١-٢٤ أوجد دائرة ثنيتين المكافئة بين الطرفين AB لقنطرة التيار المتردد الموضحة فى الشكل ١١-٤٦ .

الجواب : $Z' = 88.7 \angle 11.55^\circ \Omega$, $V' = 0.192 \angle -43.4^\circ \text{ V}$

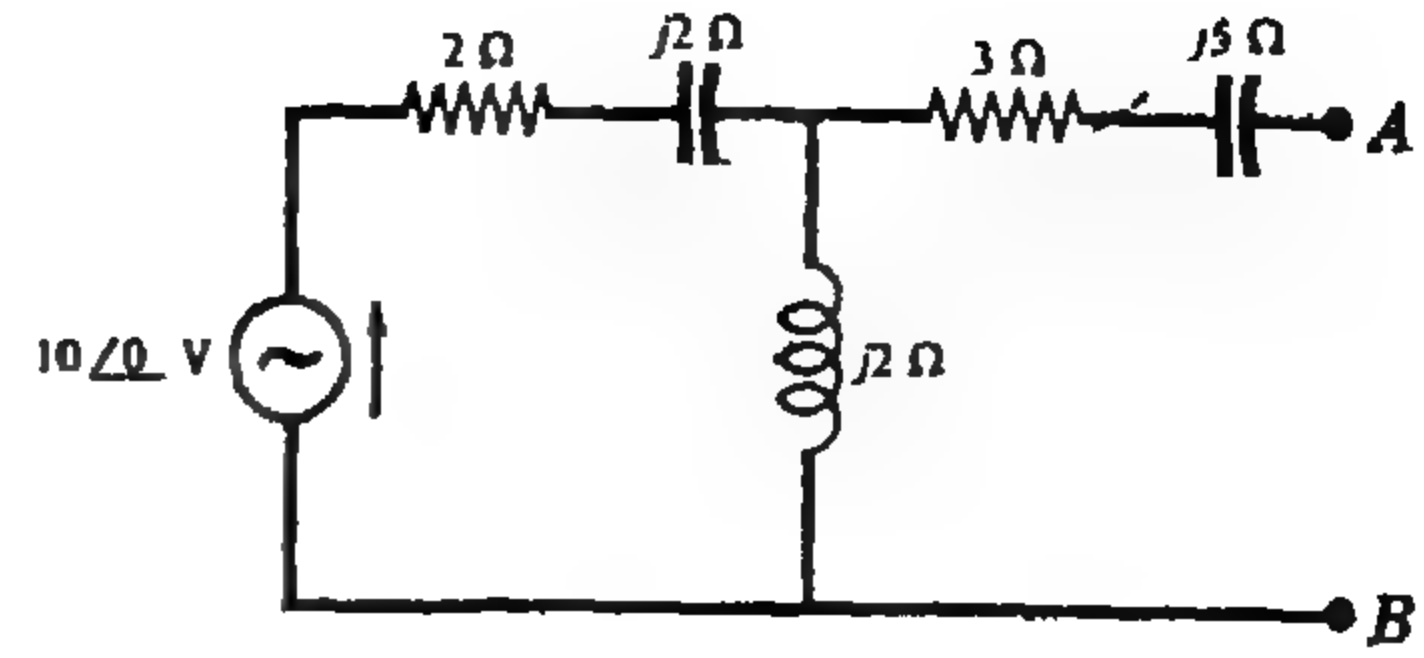
١١-٢٥ استخدم نظرية ثنيتين لإيجاد القدرة فى المقاومة 1Ω المتصلة بين الطرفين AB فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١-٤٧ .

الجواب : 2.22 W

١١-٢٦ كرر المسألة ١١-٢٥ باستخدام دائرة نورتن المكافئة .



شكل ١١ - ٤٨



شكل ١١ - ٤٧

١١-٢٧ أوجد دائرة ثنيتين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٤٨ .

الجواب : $Z' = 10.6 \angle 45^\circ \Omega$, $V' = 11.17 \angle -63.4^\circ V$

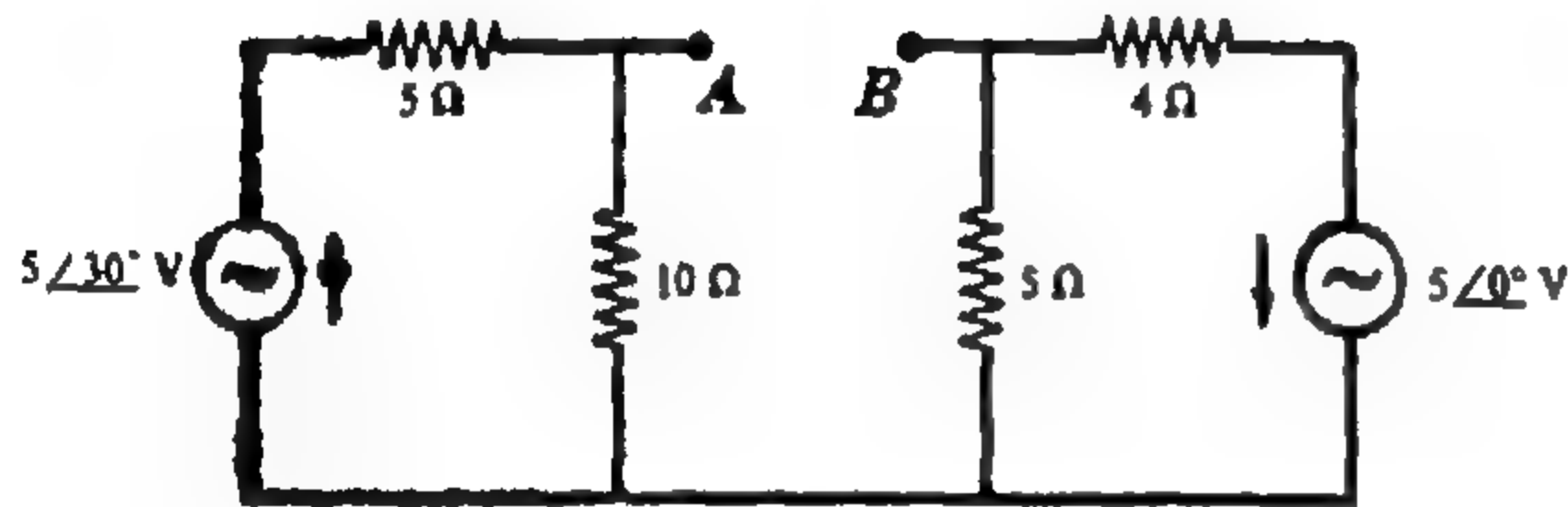
١١-٢٨ أوجد دائرة نورتن المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٤٨ .

الجواب : $Z' = 10.6 \angle 45^\circ \Omega$, $I' = 1.05 \angle 251.6^\circ A$

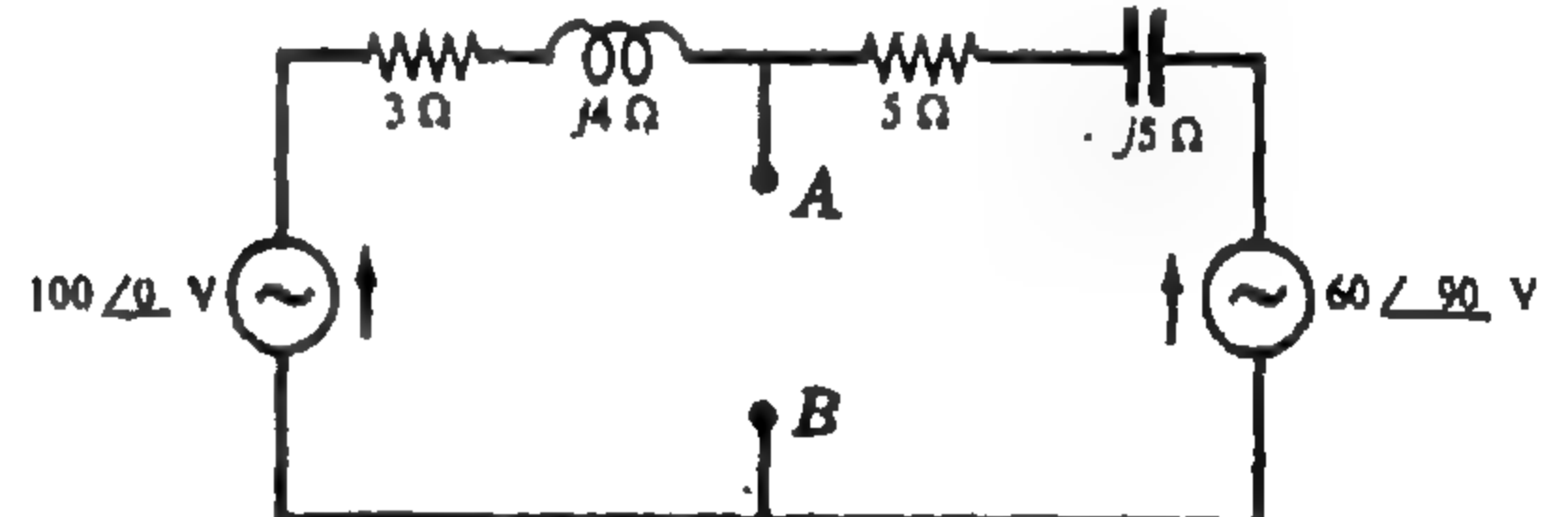
١١-٢٩ استخدم نظرية ثنيتين لتحصل على القدرة في المعاوقة $2 + j4 \Omega$ المتصلة بين الطرفين AB في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٤٩ .

الجواب : $475 W$

١١-٣٠ كرر المسألة ١١ - ٢٩ باستخدام نظرية نورتن .



شكل ١١ - ٥٠



شكل ١١ - ٤٩

١١-٣١ أوجد دائرة ثنيتين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٥٠ .

الجواب : $Z' = 5.55 \angle 0^\circ \Omega$, $V' = 5.9 \angle 16.4^\circ V$

١١-٣٢ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٥٠ .

الجواب : $Z' = 5.55 \angle 0^\circ \Omega$, $I' = 1.06 \angle 16.4^\circ A$

١١-٣٣ أوجد دائرة ثنيتين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٥١ .

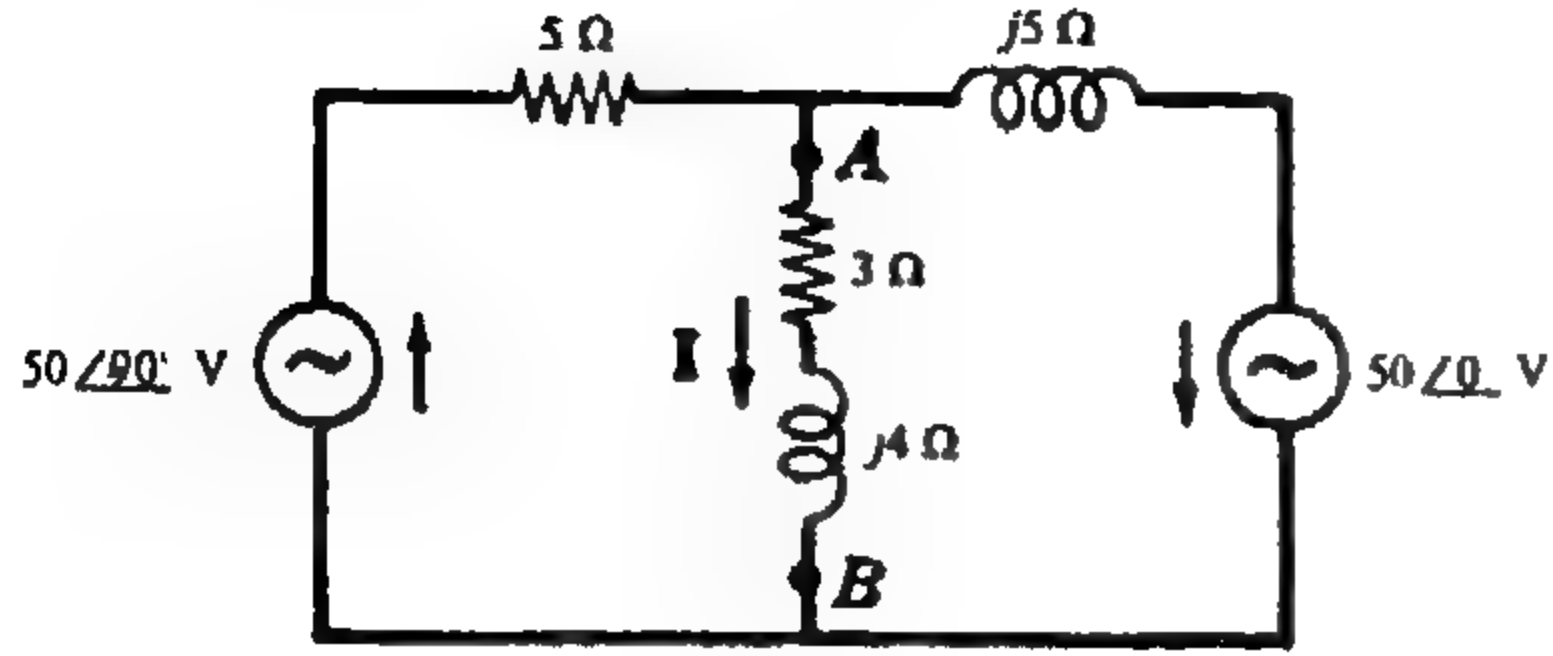
الجواب : $Z' = 2.5 + j12.5 \Omega$, $V' = 25\sqrt{2} \angle 45^\circ V$

١١-٣٤ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٥١ .

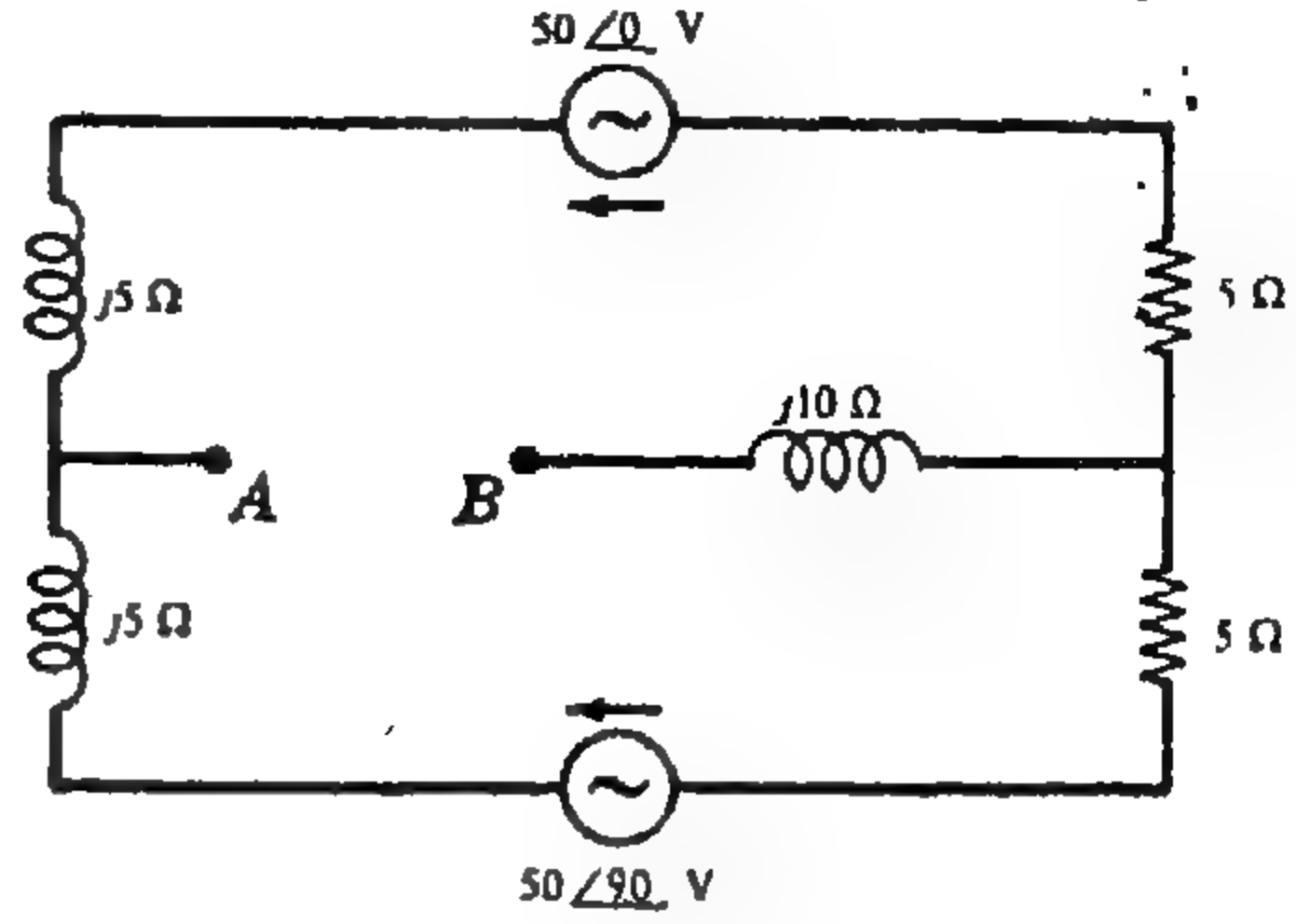
الجواب : $Z' = 2.5 + j12.5 \Omega$, $I' = 2.77 \angle -33.7^\circ A$

١١ - ٣٥ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١١ - ٥٢ أوجد التيار I المار فى المعاوقه $3 + j4 \Omega$ وذلك باستبدال الشبكة الكهربائية بين الطرفين AB بدائرة ثفنين المكافئة .

الجواب : $Z' = 3.53 \angle 45^\circ \Omega, V' = 70.7 \angle 135^\circ V, I = 8.3 \angle 85.2^\circ A$



شكل ١١ - ٥٢



شكل ١١ - ٥١

١١ - ٣٦ كرر المسأله ١١ - ٣٥ باستخدام دائرة نورتن المكافئة بين الطرفين AB .

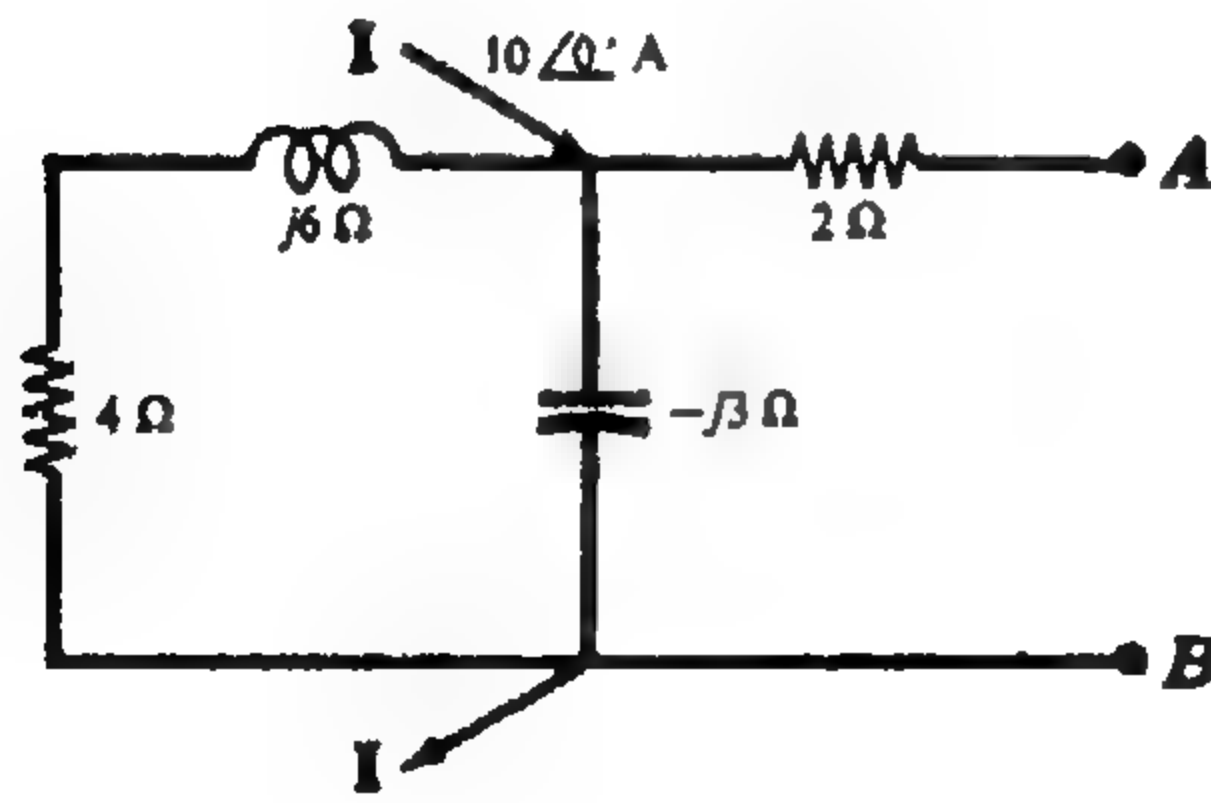
الجواب : $Z' = 3.53 \angle 45^\circ \Omega, I' = 20 \angle 90^\circ A, I = 8.3 \angle 85.2^\circ A$

١١ - ٣٧ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ - ٥٣ ، وصل تيار محرك $15 \angle 45^\circ A$ بين النهايتين الموضحتين فى الرسم . ابدل الشبكة الكهربائية بين AB بدائرة ثفنين المكافئة .

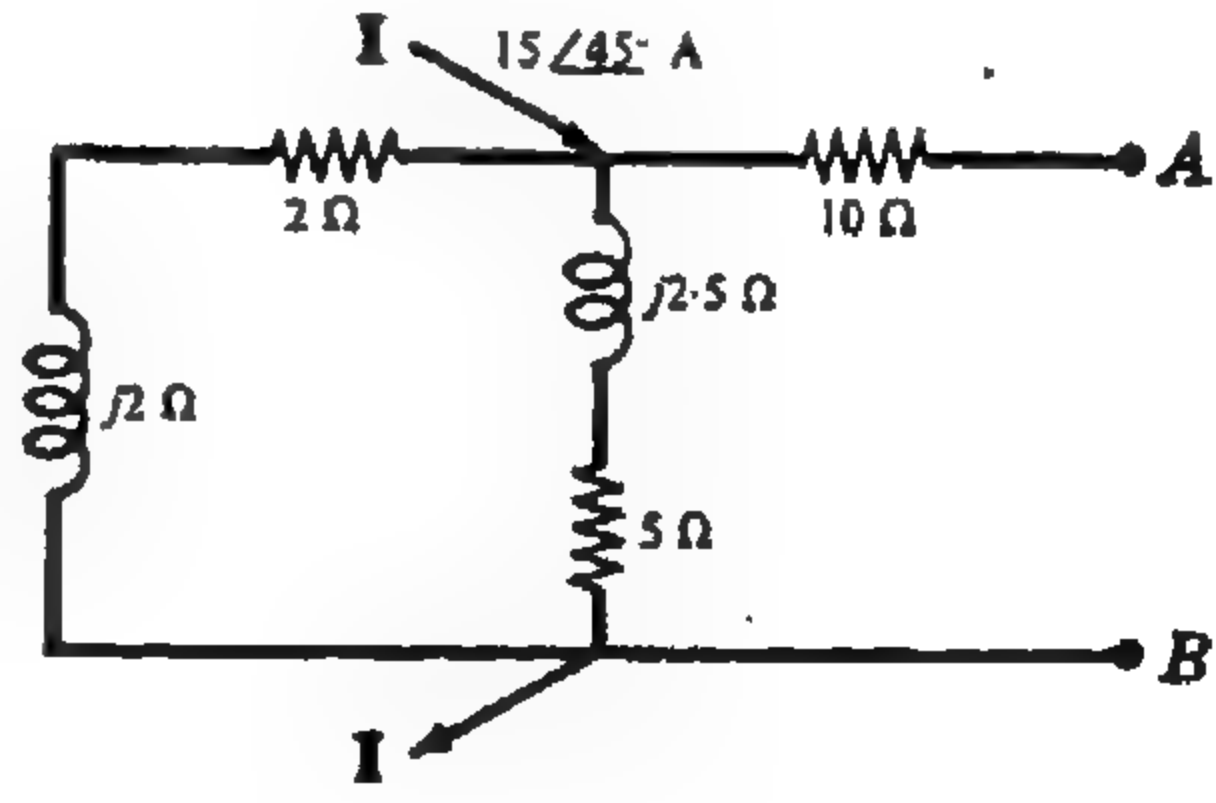
الجواب : $Z' = 11.48 + j1.19 \Omega, V' = 28.6 \angle 83.8^\circ V$

١١ - ٣٨ أوجد دائرة نورتن المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ - ٥٣ .

الجواب : $Z' = 11.48 + j1.19 \Omega, I' = 2.47 \angle 77.9^\circ A$



شكل ١١ - ٥٤



شكل ١١ - ٥٣

١١ - ٣٩ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ - ٥٤ .

الجواب : $Z' = 5.34 \angle -49.8^\circ \Omega, V' = 43.3 \angle -70.6^\circ V$

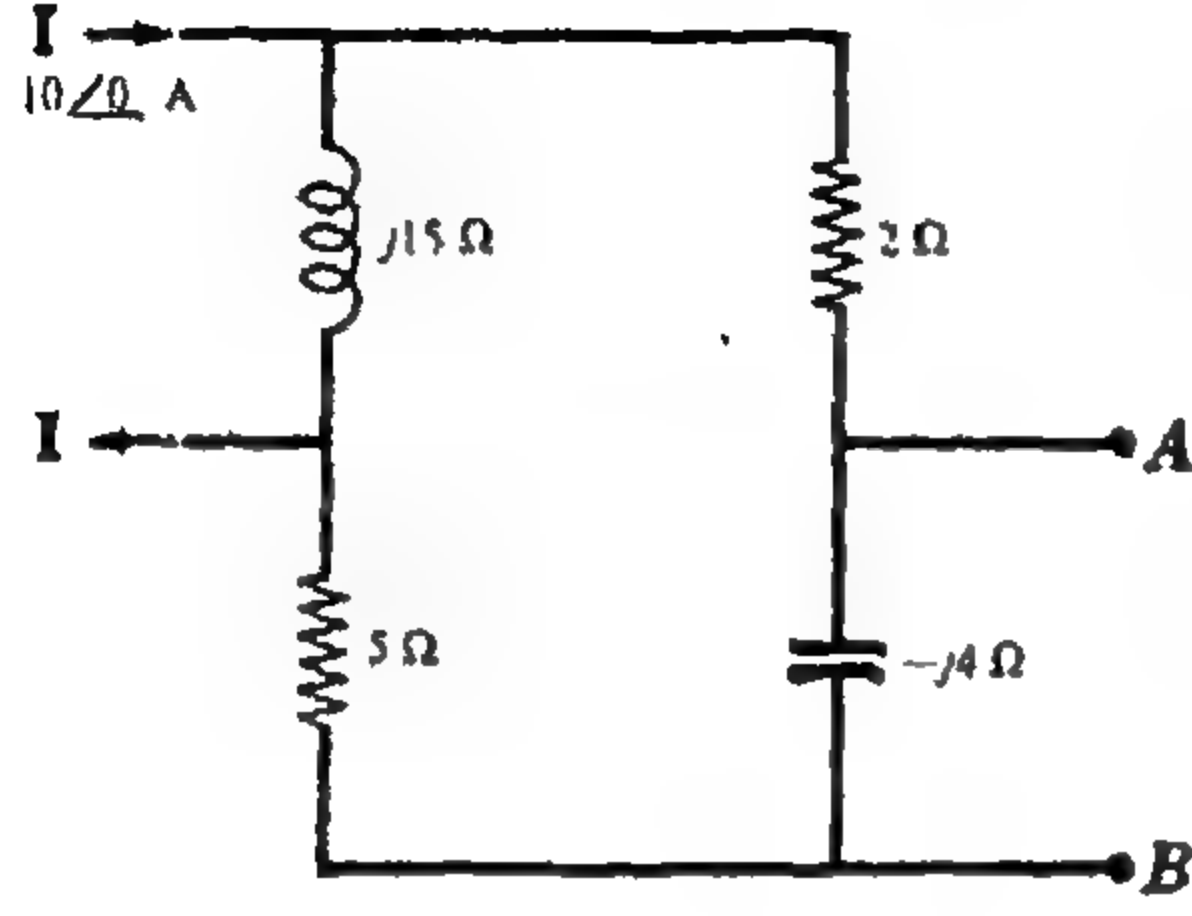
١١ - ٤٠ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ - ٥٤ .

الجواب : $Z' = 5.34 \angle -49.8^\circ \Omega, I' = 8.1 \angle -20.8^\circ A$

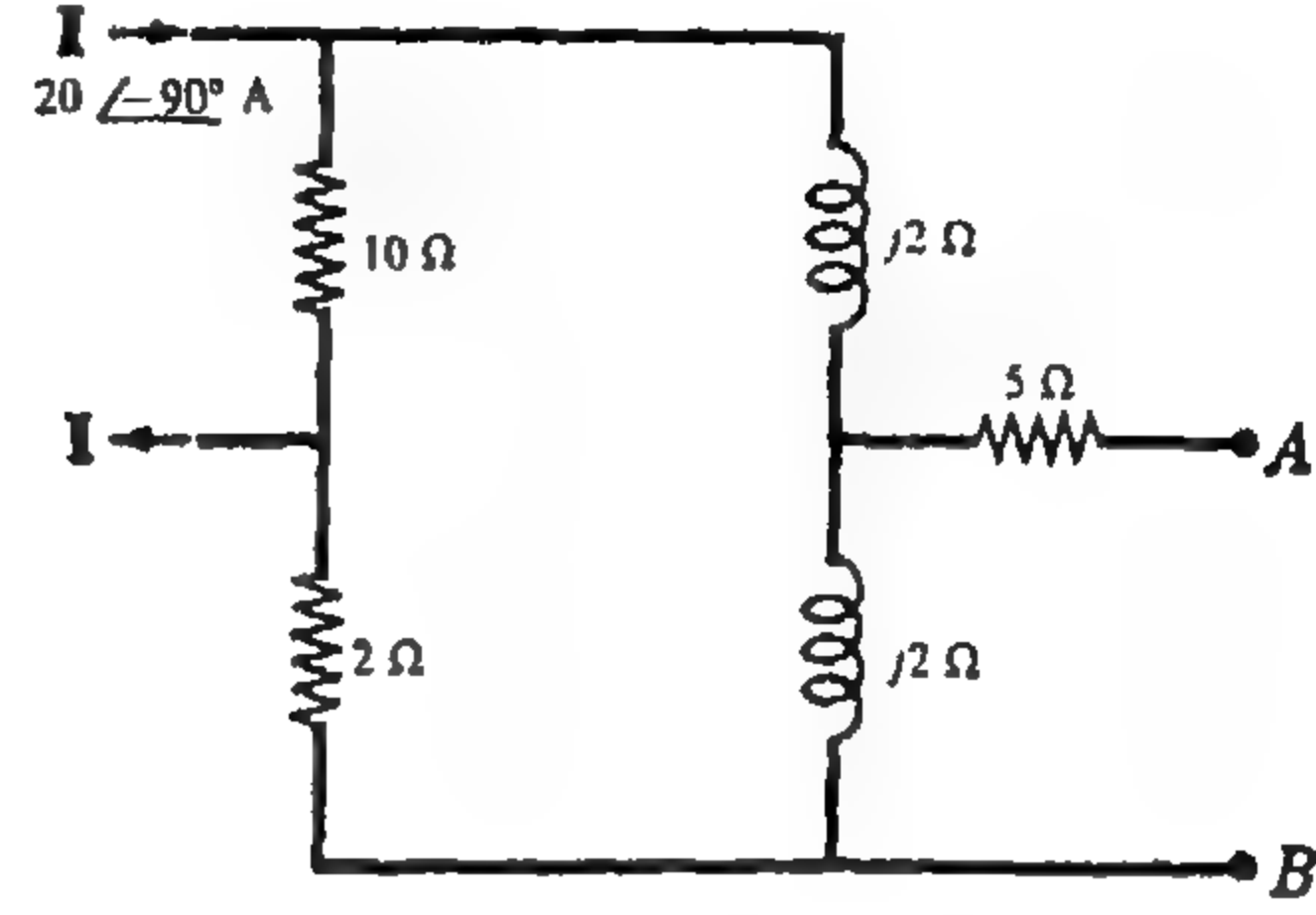
١١ - ١ : استخدام نظرية ثفنين لتحصل على القدرة في المدوة $Z = 10 \angle 60^\circ \Omega$ المتصلة بين الطرفين AB في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٥٥ .

الجواب : 23 W

١١ - ٢ : كرر المسألة ١١ - ١ باستخدام دائرة نورتن المكافئة .



شكل ١١ - ٥٦



شكل ١١ - ٥٥

١١ - ٣ : أوجد دائرة ثفنين المكافئة للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة في الشكل ١١ - ٥٦ .

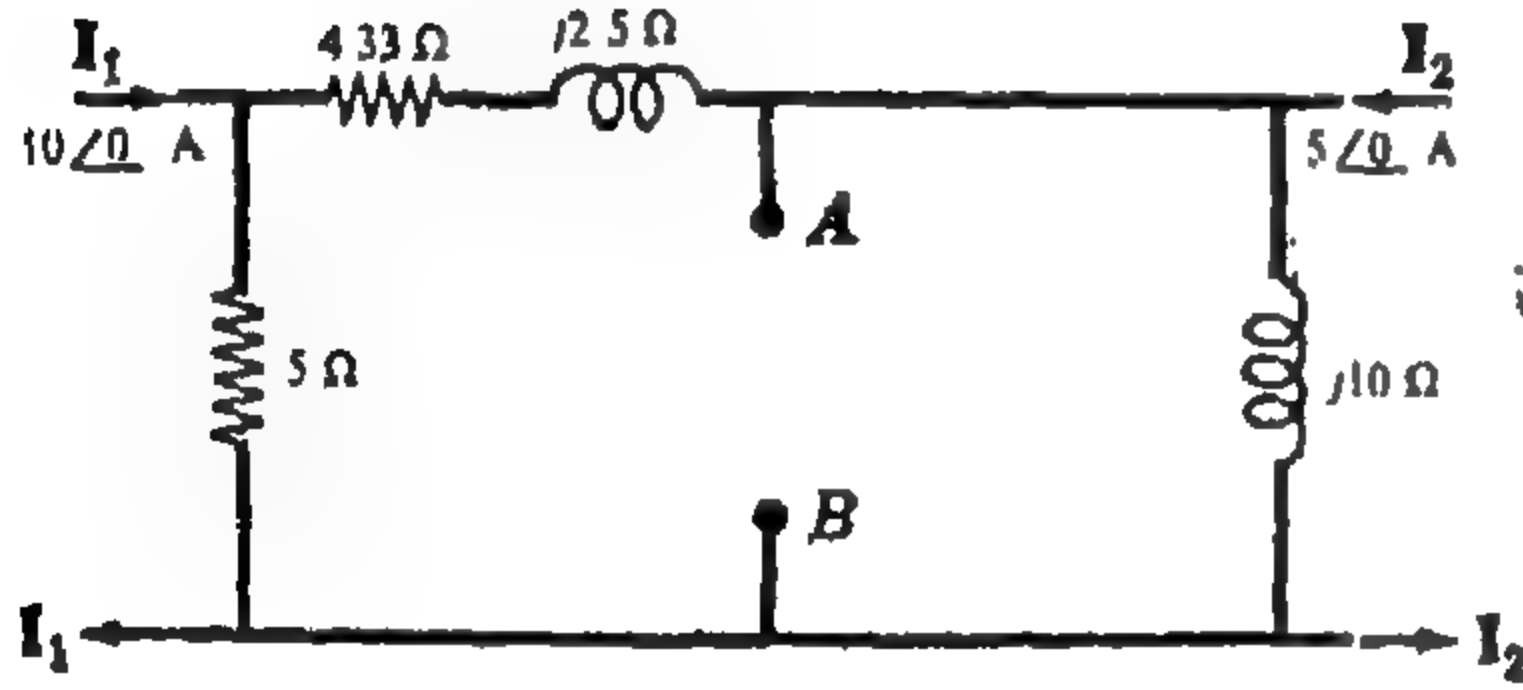
الجواب :

$$Z' = 5.09 \angle -82.5^\circ \Omega, V' = 46.2 \angle 57.5^\circ V$$

١١ - ٤ : أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٥٦ .

الجواب :

$$Z' = 5.09 \angle 82.5^\circ \Omega, I' = 9.05 \angle 25^\circ A$$



شكل ١١ - ٥٧

١١ - ٥ : أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة في الشكل ١١ - ٥٧ .

الجواب : $Z' = 6.2 \angle 51.8^\circ \Omega, V' = 62.6 \angle 44.17^\circ V$

١١ - ٦ : أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٥٧ .

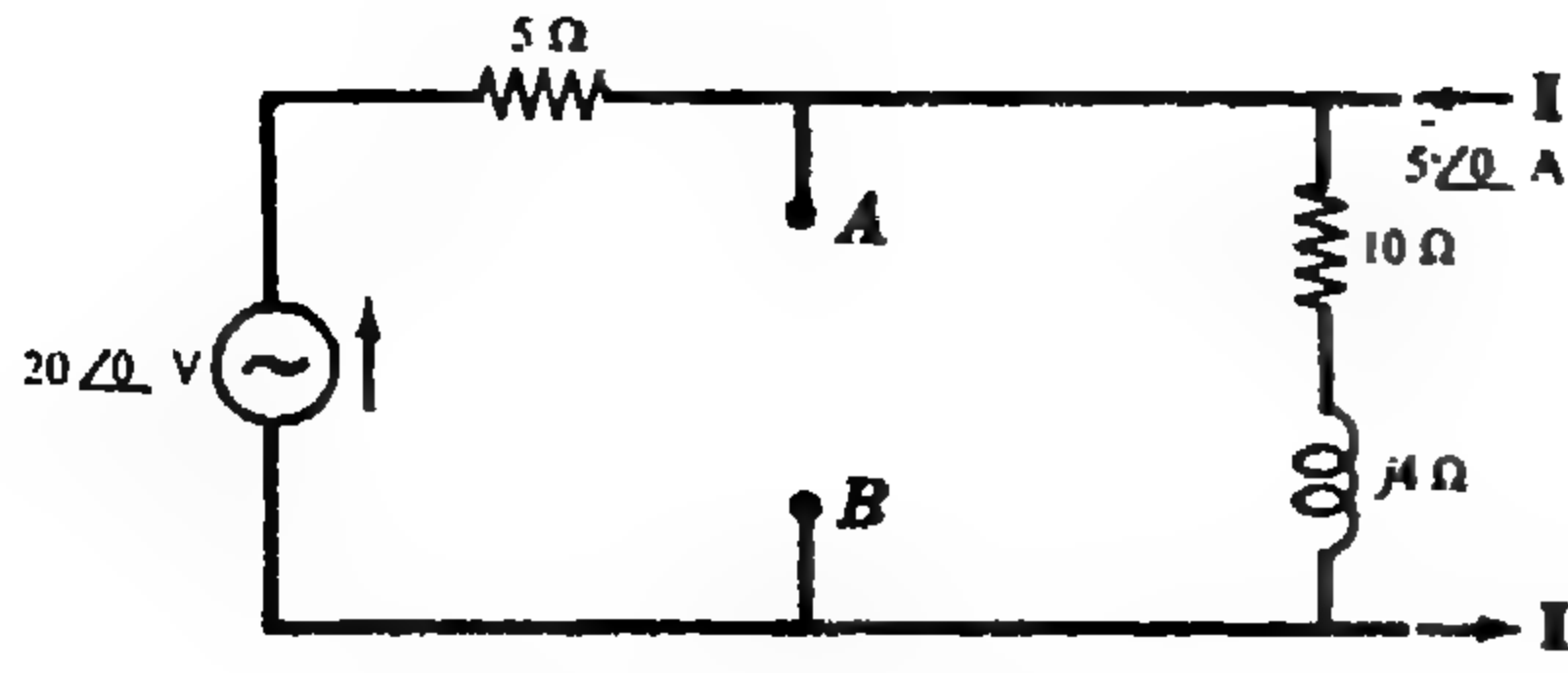
الجواب : $Z' = 6.2 \angle 51.8^\circ \Omega, I' = 10.1 \angle -7.63^\circ A$

١١ - ٧ : أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٥٨ والتي تحتوى على مصدر للتيار $4 \angle 45^\circ A$ ومصدر للجهد $25 \angle 90^\circ V$.

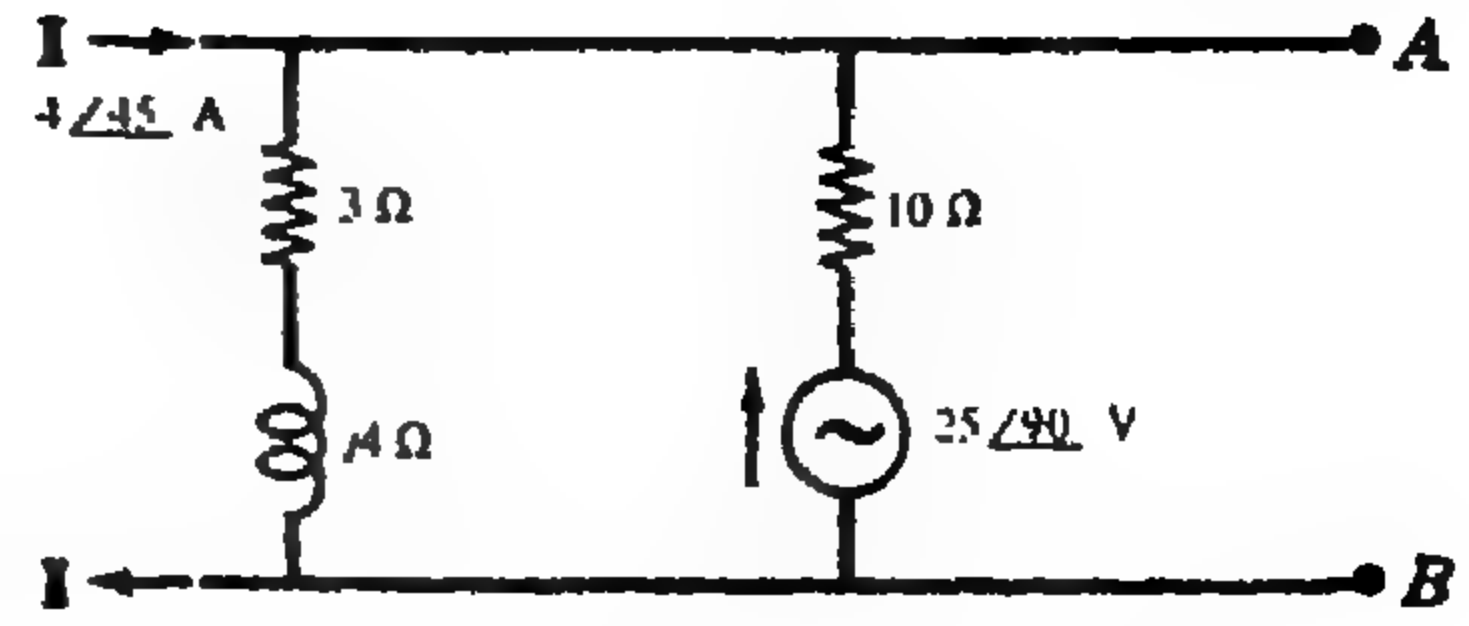
الجواب : $Z' = 3.68 \angle 36^\circ \Omega, V' = 22.2 \angle 98^\circ V$

١١ - ٨ : أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٥٨ .

الجواب : $Z' = 3.68 \angle 36^\circ \Omega, I' = 6.03 \angle 62^\circ A$



شكل ١١ - ٥٩



شكل ١١ - ٥٨

١١ - ٥٩ : أوجد دائرة ثنيتين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة في الشكل ١١ - ٥٩ .

الجواب : $Z' = 3.47 \angle 6.85^\circ \Omega, V' = 31.2 \angle 6.89^\circ V$

١١ - ٥٨ : أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الموضحة في الشكل ١١ - ٥٨ .

الجواب : $Z' = 3.47 \angle 6.85^\circ \Omega, I' = 9.0 \angle 0^\circ A$

الفصل الثاني عشر

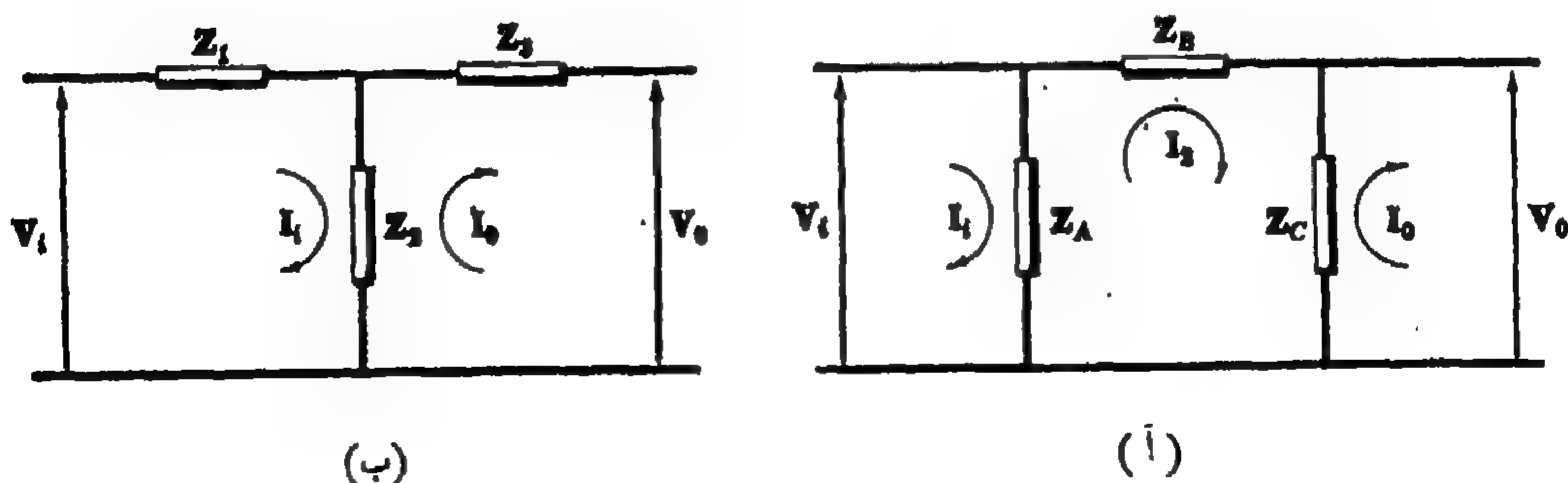
نظريات الشبكات الكهربائية

مقدمة :

باستخدام طريقتي تيار الشبكة وجهد العقدة يمكننا حل معظم مسائل الدوائر الكهربائية . ولقد ثبت فاعلية نظريتي ثفنين ونورتين الواردتين في الفصل الحادي عشر في اختصارات العمليات الحسابية وذلك عند وجود عدد من المعاوقات متصلة على انفراد من نهايتها وبالمثل فإن النظريات الواردة في هذا الفصل تصل بنا إلى نفس الغرض وهو تبسيط حل بعض الأنواع الخاصة للدوائر الكهربائية . ولهذا فإنه يمكن اعتبار هذا الفصل امتدادا للفصل الحادي عشر .

تحويلات نجمة — دلتا ($\Delta - T$)

يقال عن الشبكة الحاملة (غير الفعالة) ذات النهايات الثلاث والتي تتكون من ثلاث معاوقات Z_A و Z_B و Z_C والموضحة في الشكل ١٢ - ١ (أ) بأنها تكون توصيلة على هيئة دلتا (Δ) أو π . ويقال عن الشبكة الحاملة (غير الفعالة) ذات النهايات الثلاث والتي تتكون من ثلاث معاوقات Z_1 و Z_2 و Z_3 والموضحة في الشكل ١٢ - ١ (ب) بأنها تكون توصيلة على هيئة (ستار) نجمة أو شكل حرف T . والدائرتان متكافئتان إذا تساوت معاوقات الدخول والخروج وكذلك معاوقة الانتقال في الدائرتين .



شكل ١٢ - ١

نفرض أن V_i هو الجهد الداخل وأن V_o هو الجهد الخارج المقابل وذلك لكل دائرة . ونختار التيار الداخل I_i والتيار الخارج I_o وذلك في نفس اتجاه عقارب الساعة لكل دائرة . وأن تيار الشبكة المتوسطة في دائرة توصيل دلتا هو I_2 بالاتجاه الموضح .

وبذلك تكون معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية لدائرة توصيل دلتا هي

$$\begin{bmatrix} Z_A & -Z_A & 0 \\ -Z_A & Z_A + Z_B + Z_C & -Z_C \\ 0 & -Z_C & Z_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ 0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون معاوقات الدخول والخروج ومعاوقة الانتقال هي

$$Z_{\text{input}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B}$$

$$Z_{\text{output}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{33}} = \frac{Z_B Z_C}{Z_B + Z_C}$$

$$Z_{\text{transfer } i0} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = Z_B$$

ومعادلات تيار الشبكة لدائرة اتصال نجمة الموضحة في الشكل ١٢ - ١ (ب) هي :

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون معاوقات الدخول والخروج ومعاوقة الانتقال هي

$$Z_{\text{input}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{\text{output}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{33}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z_{\text{transfer } i0} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}$$

والآن بمساواة معاوقات دلتا بالمعاوقات النجمية نحصل على :

$$(١) \quad \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$(٢) \quad \frac{Z_B Z_C}{Z_B + Z_C} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2}$$

$$(٣) \quad Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}$$

وبالتعويض عن Z_B من المعادلة (٣) في المعادلتين (١) ، (٢) ثم بحلها للحصول على Z_A و Z_C نحصل على

$$(٤) \quad Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3}$$

$$(٥) \quad Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1} \quad ,$$

وعلى ذلك فإنه يمكن ابدال دائرة توصيل نجمية معاوقاتها Z_1 و Z_2 و Z_3 بدائرة توصيل على هيئة دلتا معاوقاتها كما في المعادلات (٣) ، (٤) ، (٥)

وللحصول على تحويل دلتا إلى نجمية نجمع المعادلات (٣) ، (٤) ، (٥) ثم نعكس المجموع فنجد أن :

$$(٦) \quad \frac{1}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)^2}$$

والآن بضرب الطرف الأيسر في المعادلة (٦) في Z_A و Z_B والطرف الأيمن في المعادلة (٦) بما يساوي Z_A من المعادلة (٤) و Z_B من المعادلة (٣) ، فنحصل على

$$\left(\frac{1}{Z_A + Z_B + Z_C} \right) Z_A Z_B = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)^2} \left(\frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} \right) \left(\frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2} \right)$$

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad \text{ومنها نجد أن}$$

وباستخدام طريقة مشابهة يمكن الحصول على Z_2 و Z_3 بدلالة Z_A و Z_B و Z_C . وللسهولة نجد فيما يلي النتيجة النهائية لتحويلات النجمة إلى دلتا .

التحويل من دلتا إلى النجمة

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

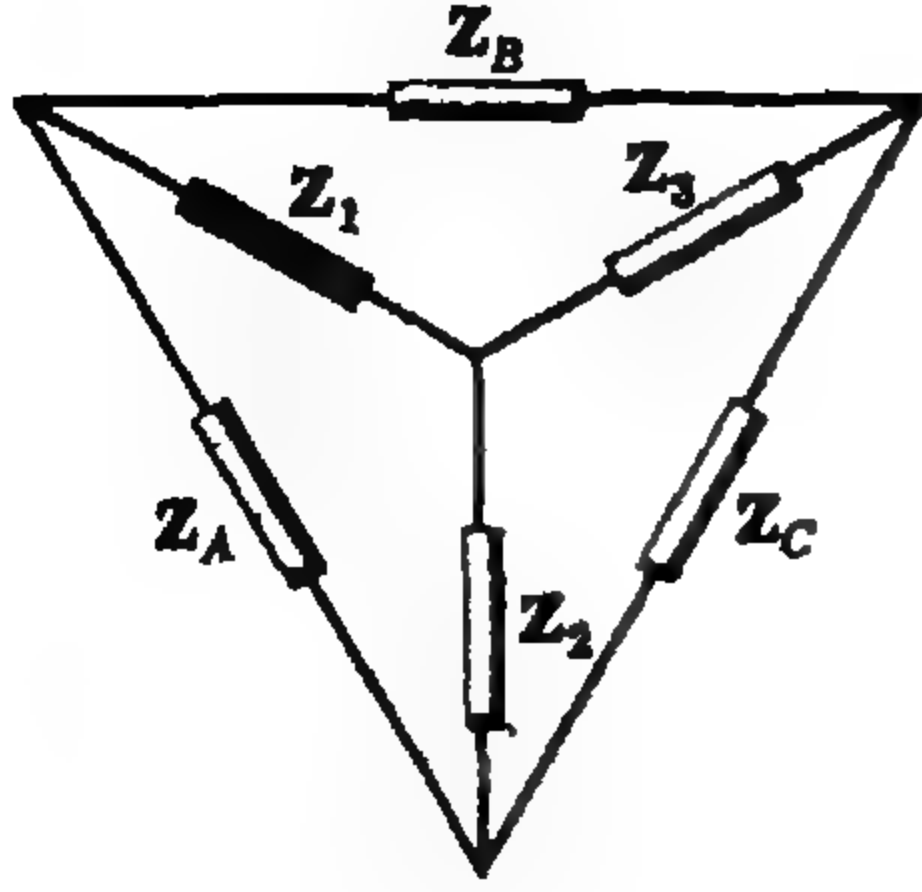
$$Z_3 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

التحويلات من النجمة إلى دلتا

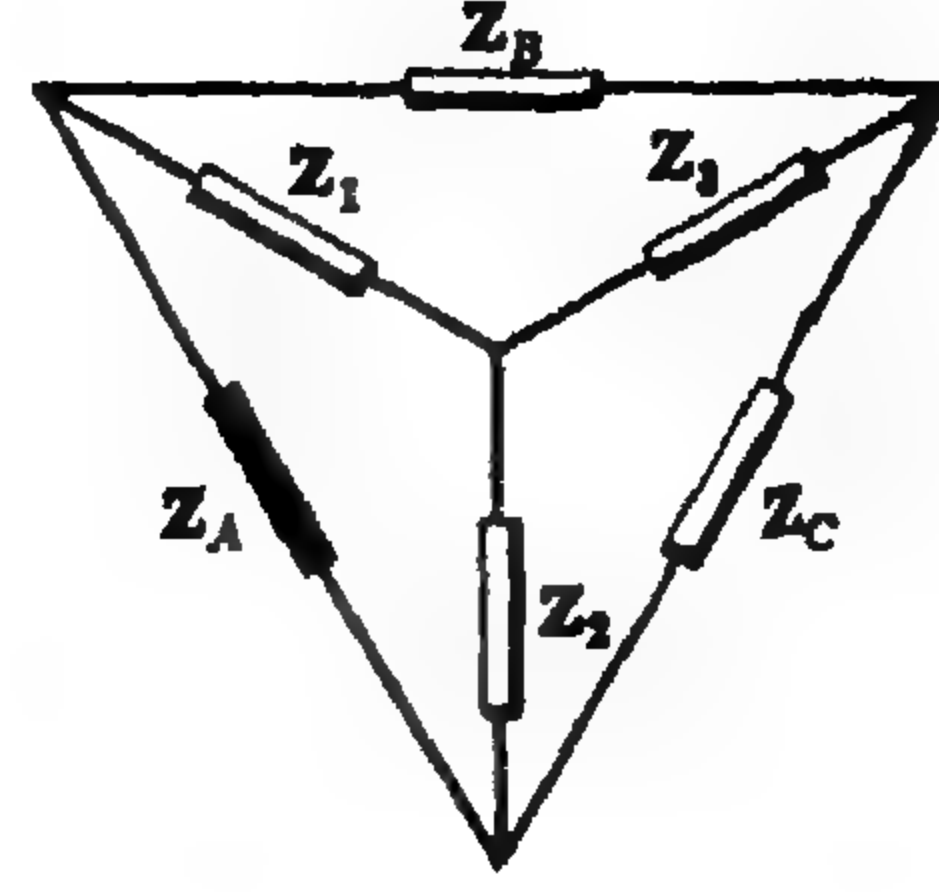
$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3}$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1}$$



شكل ١٢ - ٣



شكل ١٢ - ٢

وفيما يلي قاعدتان للتذكرة في تعيين العلاقات السابقة :

١ - التحويل من النجمة إلى دلتا .

أي معاوقة في دائرة دلتا تساوى مجموع كل احتمالات حاصل ضرب الزوجي لمعاوقات النجمة مقسوماً على المعاوقة المقابلة في دائرة النجمة .

وبالإشارة إلى الشكل ١٢ - ٢ ، فإن Z_A تعطى بمجموع ثلاثة حواصل ضرب مقسوماً على Z_3 ، وهى المعاوقة المقابلة في دائرة النجمة .

٢ - التحويل من دلتا إلى نجمة .

أي معاوقة في دائرة النجمة تساوى حاصل ضرب المعاوقتين المجاورتين لها في دائرة دلتا مقسوماً على مجموع الثلاث معاوقات للشكل دلتا .

وبالإشارة إلى الشكل ١٢ - ٣ ، فإن Z_1 تعطى بحاصل ضرب Z_B Z_C ، وهما المعاوقتان المجاورتان من معاوقات دائرة دلتا ، مقسوماً على مجموع معاوقات دلتا الثلاث .

نظرية التراكب

تنص نظرية التراكب على أن الاستجابة في أى عنصر في شبكة كهربائية خطية ذات جانبيين وتحتوى على مصدرين أو أكثر تساوى مجموع الاستجابات التى نحصل عليها من كل عنصر عندما يؤثر بمفرده في الدائرة وذلك مع وضع جميع العناصر الباقية مساوية للصفر

وبعداً التراكب موجود ضمنيّاً في طريقتى تيار الشبكة وجهد العقدة لتحليل الشبكات . ولقد وجدنا أن تيارات الشبكة وجهود العقد ، عبارة عن نسب بين محددين (انظر الفصلين التاسع والعاشر) . وفك محددات البسط بدلالة عناصر العمود المحتوى على المصادر يعطينا معادلات من الشكل :

$$(٧) \quad I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} + V_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} + V_3 \frac{\Delta_{31}}{\Delta_z} + \dots$$

$$(٨) \quad V_1 = I_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_y} + I_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_y} + I_3 \frac{\Delta_{31}}{\Delta_y} + \dots$$

والحدود في المعادلة (٧) هي مركبة التيارات لتيار الشبكة I_1 الناتجة عن الجهود V_1 و V_2 . الخ أما الحدود في المعادلة (٨) فهي مركبات جهد العقدة V_1 الناتج عن التيارات I_1 و I_2 . الخ .

وإذا اخترنا تيارات الشبكة بحيث تكون المصادر في أفرع ذات تيارات غير مركبة . فإن الحدود في المعادلة (٧) تكون مطابقة للتيارات الناتجة عن تأثير المصادر كل على حدة . وبالمثل إذا كانت تيارات مصادر الشبكة الكهربائية التي نحلها بطريقة جهد العقدة لها جميعاً نفس نقطة الرجوع ، فإذا اخترنا هذه النقطة كنقطة إسناد فإننا نجد أن الحدود في المعادلة (٨) تكون مطابقة لجهود العقدة الناتجة عن تأثير المصادر كل على حدة .

ويطبق مبدأ التراكب في تعيين التيارات وجهود العقدة المتعلقة خطأً بالمصادر التي تؤثر في الشبكة الكهربائية . أما القدرة فلا يمكن تعيينها بالتراكب وذلك لأن العلاقة بين القدرة والتيار أو الجهد علاقة تربيعية .

نظرية التبادل

تنص نظرية التبادل على أنه في أى شبكة خطية ذات جانبيين بها مصدر واحد تكون النسبة بين الإثارة والاستجابة ثابتة وذلك عند تغيير موضعى الإثارة والاستجابة .

ويمكن اثبات هذه النظرية على أساس تيار الشبكة في حالة تأثير مصدر واحد في الشبكة الكهربائية وذلك باعتبار المعادلة الآتية لتيار الشبكة I_r .

$$I_r = V_1 \frac{\Delta_{1r}}{\Delta_z} + V_2 \frac{\Delta_{2r}}{\Delta_z} + \dots + V_r \frac{\Delta_{rr}}{\Delta_z} + V_s \frac{\Delta_{sr}}{\Delta_z} + \dots$$

وإذا فرضنا أن المصدر الوحيد في الشبكة الكهربائية هو V_s . إذن

$$I_r = V_s \frac{\Delta_{sr}}{\Delta_z}$$

والنسبة بين الإثارة والاستجابة هي :

$$(٩) \quad \frac{V_s}{I_r} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{sr}} = Z_{\text{transfer } sr}$$

والآن عند تغيير موضعى الإثارة والاستجابة فإن المصدر يصبح V_r والتيار I_s .

$$I_s = V_r \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}$$

والنسبة بين الإثارة والاستجابة هي

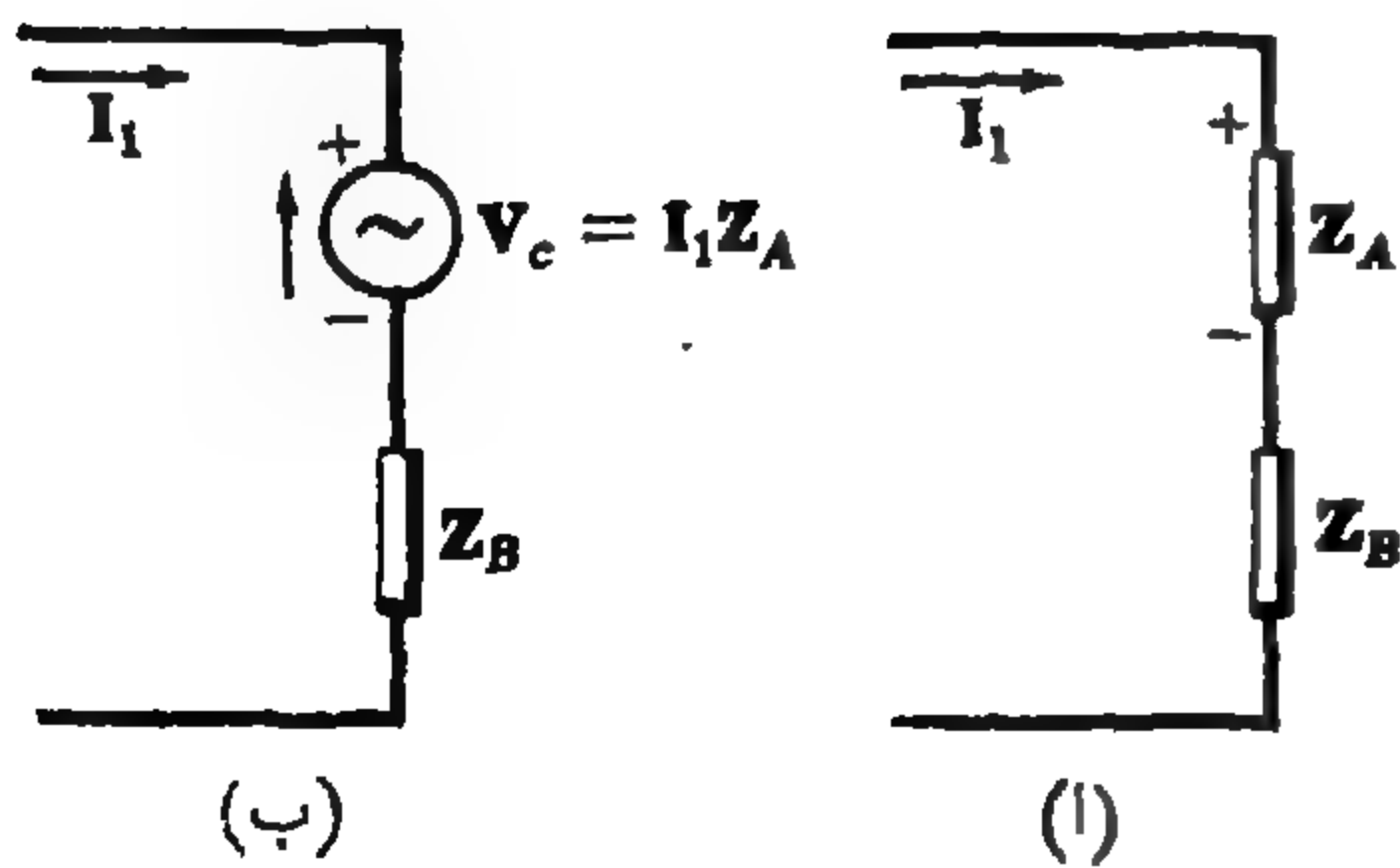
$$(10) \quad \frac{V_r}{I_s} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{rs}} = Z_{transfer rs}$$

ولأى شبكة كهربائية خطية ذات جانبين تكون معاوقى الانتقال فى المعادلتين (٩) و (١٠) متساويتين ، ذلك لأنه فى مثل هذه الشبكات الكهربائية تكون مصفوفة المعاوقة $[Z]$ متماثلة بالنسبة للمحور الأساسى ، وتكون العوامل المشتركة Δ_{rs} و Δ_{sr} متساوية ولذلك فإن التيار فى الشبكة الفرعية r الناتج عن مصدر الجهد فى الشبكة الفرعية s يكون هو نفسه التيار فى الشبكة الفرعية s عندما ننقل مصدر الجهد إلى الشبكة الفرعية r . يجب ملاحظة أن التيارات فى الأجزاء الأخرى من الشبكة الكهربائية لا تظل كما هى .

تطبق نظرية التبادل أيضاً على الشبكات الكهربائية التى تحتوى على مصدر واحد للتيار . وفى هذه الحالة فإن النظرية تنص على أن الجهد الناتج بين طرفين mn نتيجة لمصدر تيار يؤثر بين طرفين a, b يساوى الجهد بين الطرفين a, b عندما ننقل مصدر التيار ليؤثر بين الطرفين mn . ويجب ملاحظة أن الجهد فى الأجزاء الأخرى من الشبكة الكهربائية لا يظل كما هو . انظر المسألة ١٢ - ٩ .

نظرية المعادلة :

يحدث على الشبكة الكهربائية التى تحتوى على معاوقة Z ويمر بها تيار I هبوط فى الجهد مقداره IZ . وعلى حسب نظرية المعادلة فإن هذه المعاوقة يمكن استبدالها بقوة دافعة كهربائية معادلة ويكون مقدار وطور هذا المصدر مساوياً لـ IZ . وبالمثل إذا كان الجهد V على أى عنصر أو فرع فى شبكة كهربائية تحتوى على معاوقة Z ، فإن هذا العنصر أو الفرع يمكن إبداله بمصدر تيار $I = V/Z$. وبعد التحويل بالمصدر المعادل فإن التيارات أو الجهود فى الأجزاء الأخرى فى الشبكة الكهربائية تظل كما هى . وتسمى أيضاً نظرية التبادل أو المعادلة بنظرية التحويل .

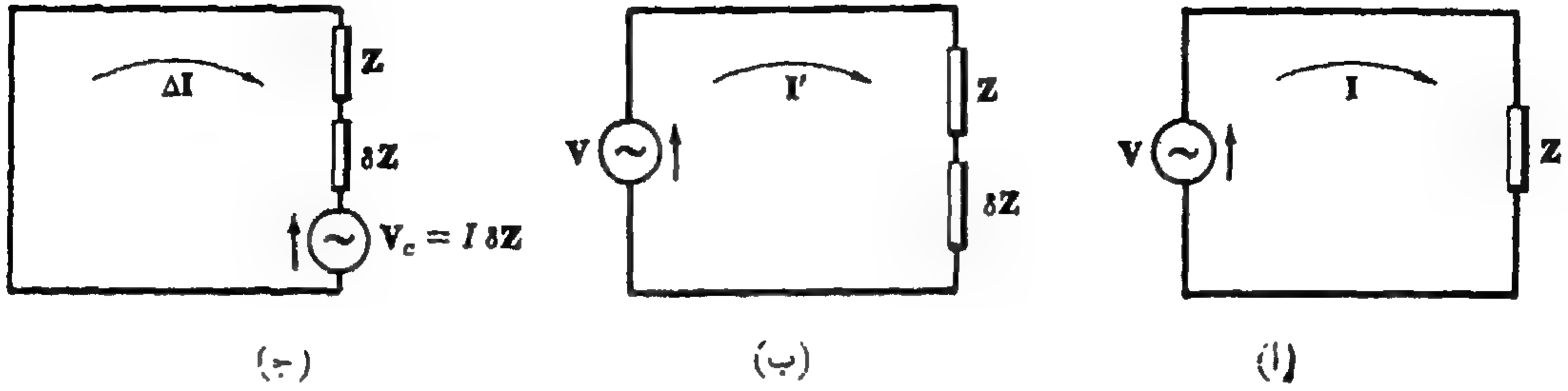


شكل ١٢ - ٤

يوضح الشكل ١٢ - ٤ (١) فرعاً من شبكة كهربائية تحتوى على معاوقتين Z_A و Z_B . فإذا كان التيار المار فى هذا الفرع هو I_1 يكون الهبوط فى الجهد على Z_A هو $I_1 Z_A$. يوضح الشكل ١٢ - ٤ (ب) المصدر بالقطبية الموضحة . يوضح الشكل ١٢ - ٤ (ب) المصدر المعادل $V_c = I_1 Z_A$ الذى يوضع بدلاً من Z_A . والمصدر V_c يجب أن يكون مستقطباً كما هو موضح فى الشكل وذلك لأن رؤوس الأسهم تتجه إلى النهاية الموجبة .

إذا حدث أى تغيير فى الشبكة الكهربائية بحيث تتأثر قيمة I_1 به فإن المصدر المعادل يجب بالتالى أن تتغير قيمته . ولهذا السبب فإن المصدر المعادل V_c يسمى مصدراً غير مستقل .

ويستفاد بنظرية المعادلة في تعيين التغير الذي يحدث في تيار وجهد عنصر ما في الدائرة وذلك عندما تتغير قيمة معاوقته .
ويحدث هذا في دوائر القنطرة ومقياس الجهد حيث يحدث تغيير بسيط في معاوقة ما ينتج عنه انحراف عن شرط الاتزان :

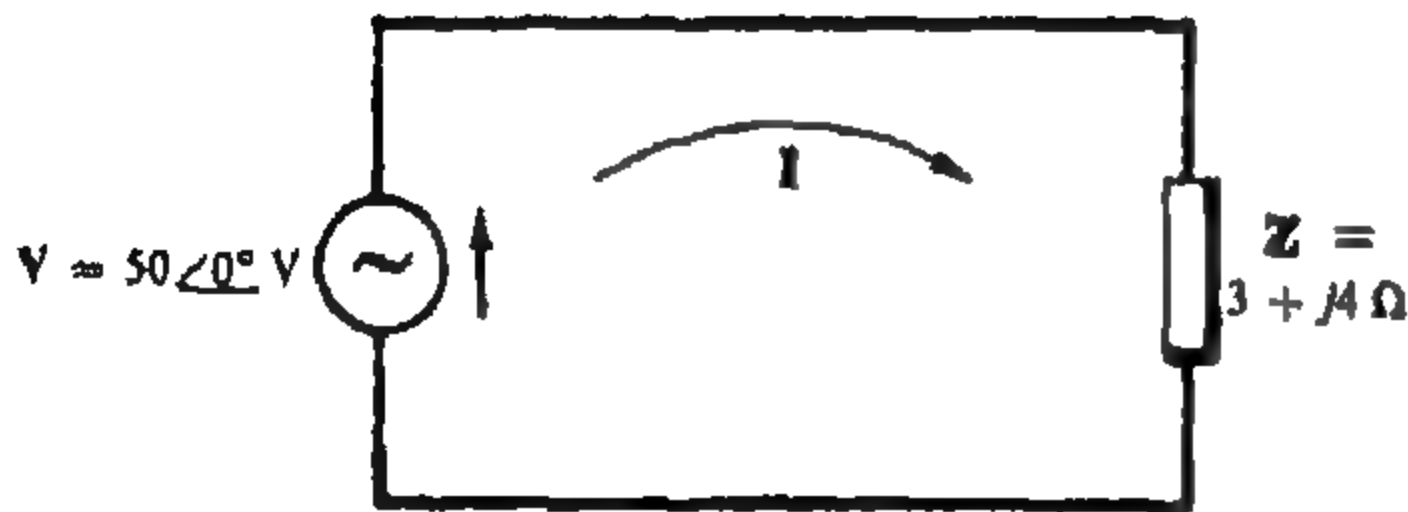


شكل ١٢ - ٥

في الشكل ١٢ - ٥ (ا) يؤثر المصدر V على الدائرة وينتج عنه تيار $I = V/Z$. في الشكل ١٢ - ٥ (ب) تغيرت قيمة معاوقة الدائرة الكلية إلى $(Z + \delta Z)$ إذن يصبح تيار الدائرة $I' = V/(Z + \delta Z)$. والآن يوجد عندنا المصدر المعادل $V_c = I \delta Z$ يؤثر في الدائرة التي تحتوي على Z و δZ « وذلك مع وضع المصدر الأصل مساوياً للصفر » وينتج عنه تيار ΔI كما هو موضح في الشكل ١٢ - ٥ (ج) . ΔI هو التغير في التيار الذي ينتج عن التغير δZ في معاوقة الدائرة - ونجد من نظرية التراكب أن $I + \Delta I = I'$ أو $\Delta I = I' - I$

مثال :

في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢ - ٦ تتغير قيمة المعاوقة $3 + j4 \Omega$ إلى $5 + j5 \Omega$ ، أي أن $\delta Z = 2 + j1 \Omega$. أوجد التغير الحادث في التيار وذلك باستخدام الحسابات المباشرة ثم حقق النتيجة بتطبيق نظرية المعادلة .



شكل ١٢ - ٦

لدينا قبل التغير

$$I = V/Z = (50 \angle 0^\circ) / (5 \angle 53.1^\circ) = 10 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

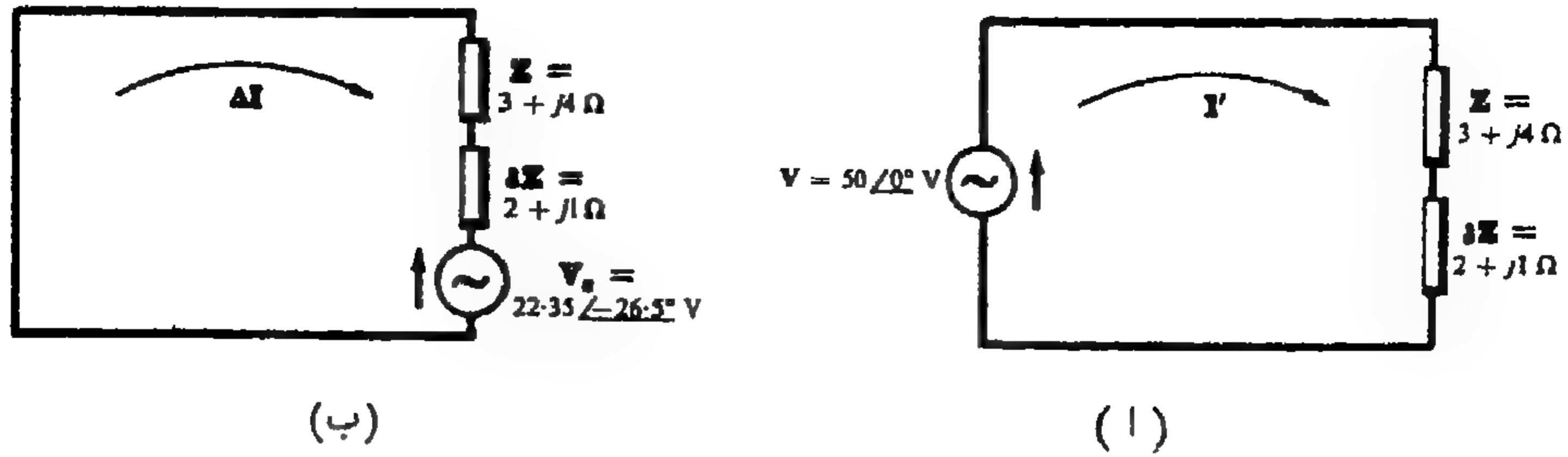
وعند إضافة δZ إلى الدائرة كما هو موضح في الشكل

١٢ - ٧ (ا) يكون لدينا .

$$I' = V/(Z + \delta Z) = (50 \angle 0^\circ) / (5 + j5) = 7.07 \angle -45^\circ \text{ A}$$

ويكون التغير الناتج في التيار هو

$$\Delta I = I' - I = (5 - j5) - (6 - j8) = -1 + j3 = 3.16 \angle 108.45^\circ \text{ A}$$



شكل ١٢ - ٧

بتطبيق نظرية المعادلة يكون المصدر المعادل هو $V_g = I\delta Z = (10\angle-26.5^\circ)(2 + j1) = 22.35\angle-26.5^\circ V$ وبإدخال هذا المصدر في الدائرة التي تحتوى على Z و δZ ووضع المصدر $50\angle0^\circ$ مساويا للصفر كما هو موضح في الشكل ١٢ - ٧ (ب) ، فإن التغير في التيار يكون

$$\Delta I = -\frac{V_g}{Z + \delta Z} = -\frac{22.35\angle-26.5^\circ}{5 + j5} = 8.16\angle108.45^\circ A$$

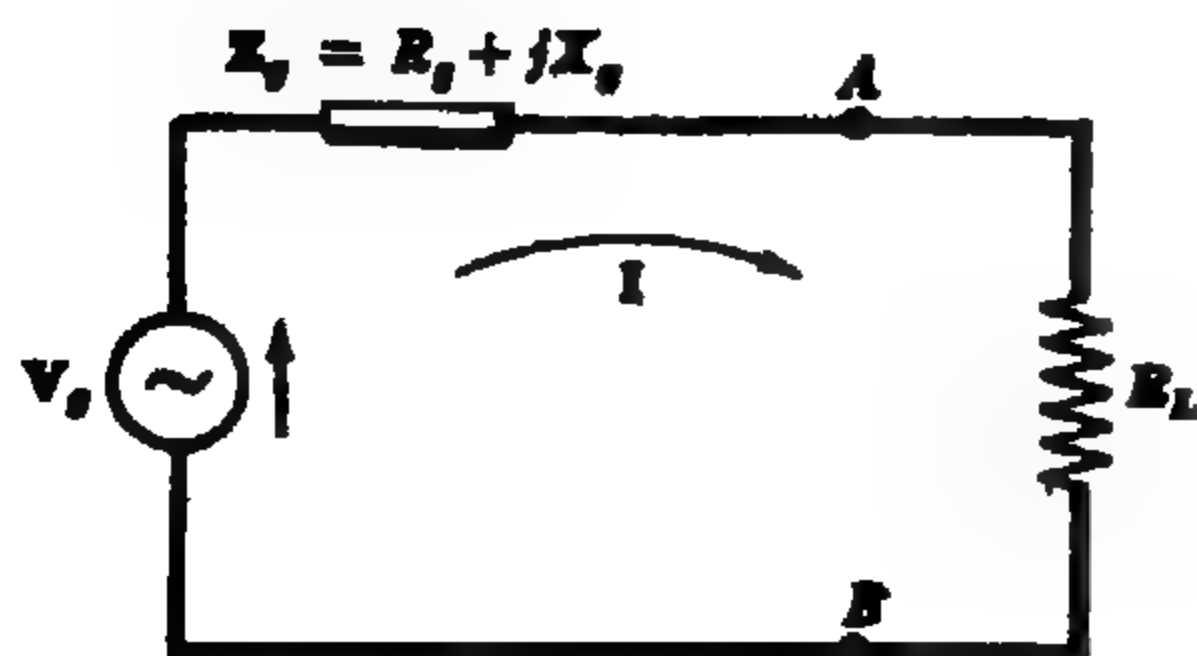
وعلى ذلك عندما نريد حساب التغير في التيار ΔI المقابل للتغير الحادث في معاوقة دائرة فإن ΔI تعين بجعل المصدر المعادل V_g يؤثر في الشبكة الكهربائية ونضع جميع المصادر الأخرى مساوية للصفر .

نظريات انتقال أكبر قدرة :

تحدد نظريات انتقال أكبر قدرة التالية قيم معاوقات الحمل الذي ينتج أكبر قدرة عبر نهايات شبكة كهربائية فعالة .
نعتبر مجموعة مصادر متصلة على التوالي متصل معها معاوقة مركبة ثابتة تعطى قدرة إلى حمل يتكون من مقاومة متغيرة أو معاوقة مركبة متغيرة .

الحالة الأولى : الحمل يتكون من مقاومة متغيرة R_L (شكل ١٢ - ٨)

التيار المار في الدائرة هو



$$I = \frac{V_g}{(R_g + R_L) + jX_g}$$

$$I = |I| = \frac{V_g}{\sqrt{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}}$$

شكل ١٢ - ٨

إذن القدرة المعطاة للمقاومة R_L هي

$$P = I^2 R_L = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}$$

لتعيين قيمة R_L التي يكون انتقال القدرة عندها إلى الحمل أكبر ما يمكن نضع المشتقة التفاضلية الأولى dP/dR_L مساوية للصفر .

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{d}{dR_L} \left[\frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + X_g^2} \right] = V_g^2 \left\{ \frac{[(R_g + R_L)^2 + X_g^2] - R_L(2)(R_g + R_L)}{[(R_g + R_L)^2 + X_g^2]^2} \right\} = 0$$

$$R_g^2 + 2R_g R_L + R_L^2 + X_g^2 - 2R_L R_g - 2R_L^2 = 0 \quad \text{أو}$$

$$R_g^2 + X_g^2 = R_L^2$$

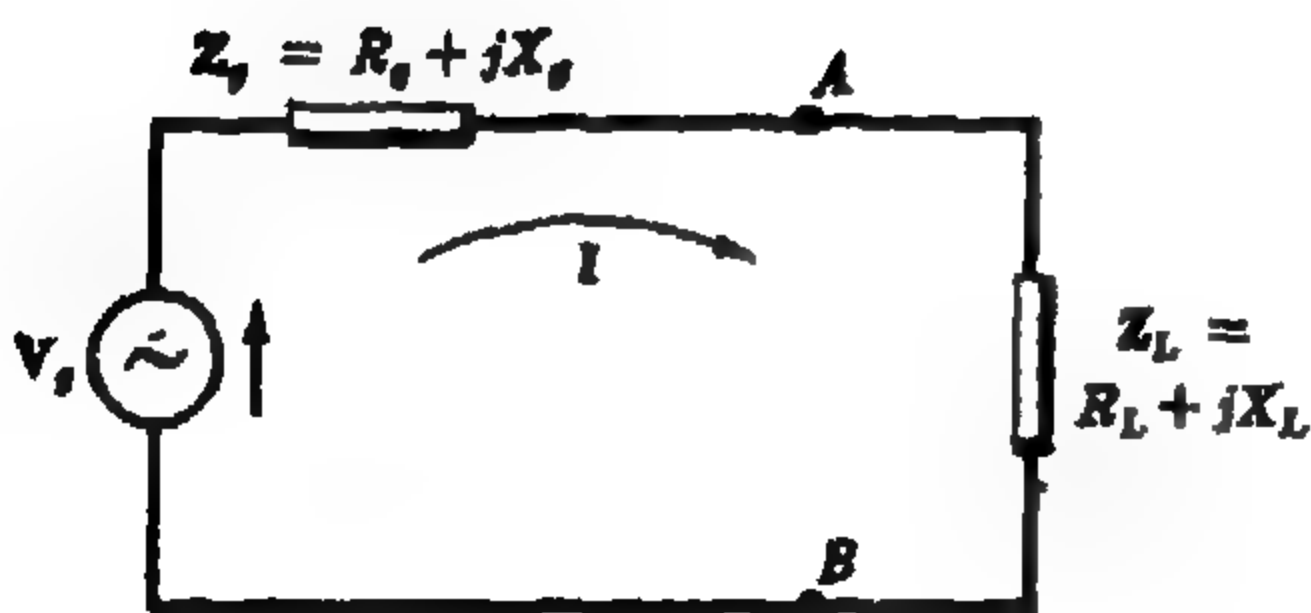
$$R_L = \sqrt{R_g^2 + X_g^2} = |Z_g| \quad \text{إذن}$$

وعلى ذلك فعندما يكون الحمل مقاومة نقية متغيرة فإننا نحصل على أكبر قدرة من نهايتي شبكة كهربائية فعالة عندما تكون قيمة مقاومة الحمل مساوية للقيمة المطلقة لمعاوقة الشبكة الكهربائية الفعالة .

وإذا كانت المركبة الممانعة للمعاوقة المتصلة على التوالي مع المصدر مساوية للصفر ، أى أن $X_g = 0$ فإن أكبر قدرة تنتقل إلى الحمل عندما تتساوى قيمتا الحمل ومقاومة المصدر ، أى أن $R_L = R_g$.

الحالة الثانية : الحمل يتكون من معاوقة Z_L مقاومتها وممانعتها متغيرتان (شكل ١٢-٩) .

تيار الدائرة هو .



شكل ١٢ - ٩

$$I = \frac{V_g}{(R_g + R_L) + j(X_g + X_L)}$$

$$I = |I| = \frac{V_g}{\sqrt{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2}}$$

والقدرة المعطاة بالمصدر هي

$$P = I^2 R_L = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2}$$

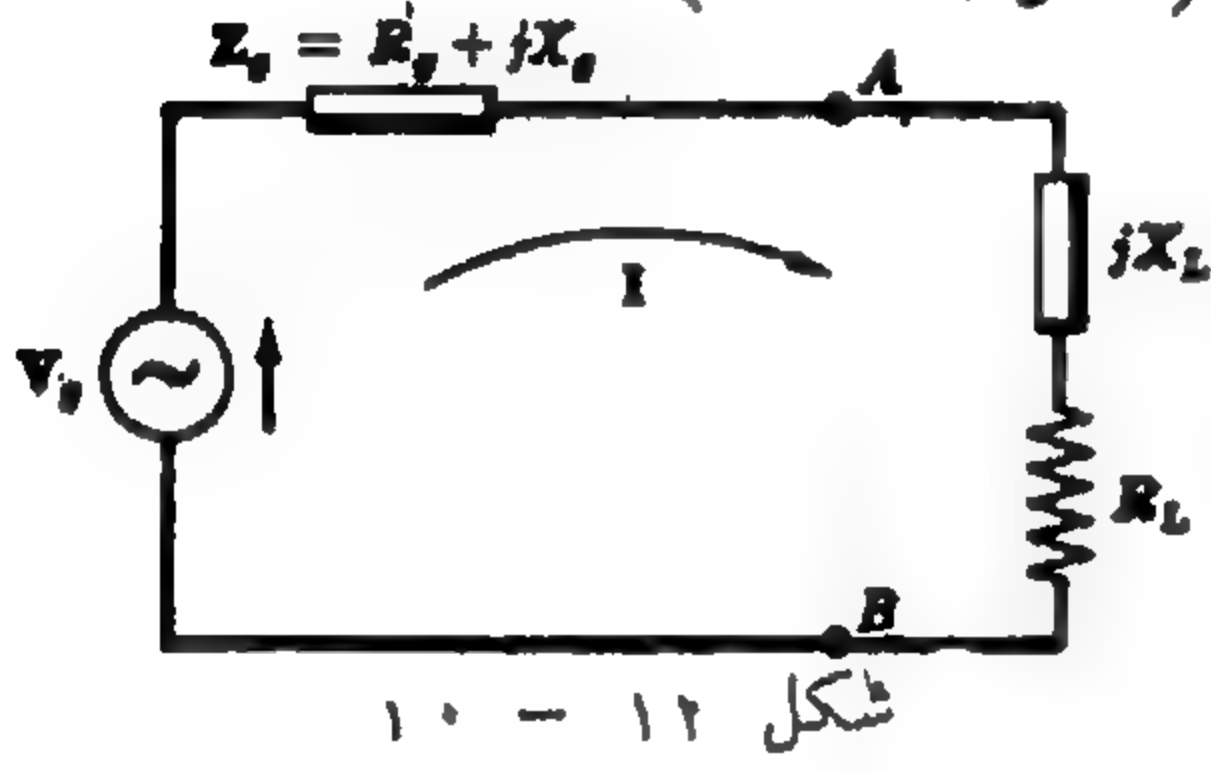
إذا ثبتنا قيمة R_L في (١١) فإن قيمة P تكون أكبر ما يمكن عندما $X_g = -X_L$. إذن المعادلة (١١) تصبح

$$P = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2}$$

نعتبر الآن قيمة R_L متغيرة وكما في الحالة الأولى فإن أكبر قدرة تعطى للحمل عندما $R_L = R_g$ وإذا كانت $R_L = R_g$ فإن $X_L = -X_g$ و $Z_L = Z_g^*$

بما سبق يتضح أنه إذا كانت معاوقة الحمل تتكون من مقاومة متغيرة وممانعة متغيرة ، فإننا نحصل على أكبر قدرة من طرفي شبكة كهربائية فعالة عندما تكون معاوقة الحمل Z_L مساوية لمرافق المعاوقة المركبة Z_g للشبكة الكهربائية .

الحالة الثالثة : الحمل يتكون معاوقة Z_L مقاومتها متغيرة وممانعتها ثابتة (شكل ١٢ - ١٠) .



نحصل في هذه الحالة على نفس معادلات التيار I والقدرة P

كما في الحالة الثانية عندما تكون X_L ثابتة .

عند مساواة المشتقة التفاضلية الأولى للقدرة P بالنسبة إلى R_L

بالصفر فإننا نجد أن

$$R_L^2 = R_g^2 + (X_g + X_L)^2$$

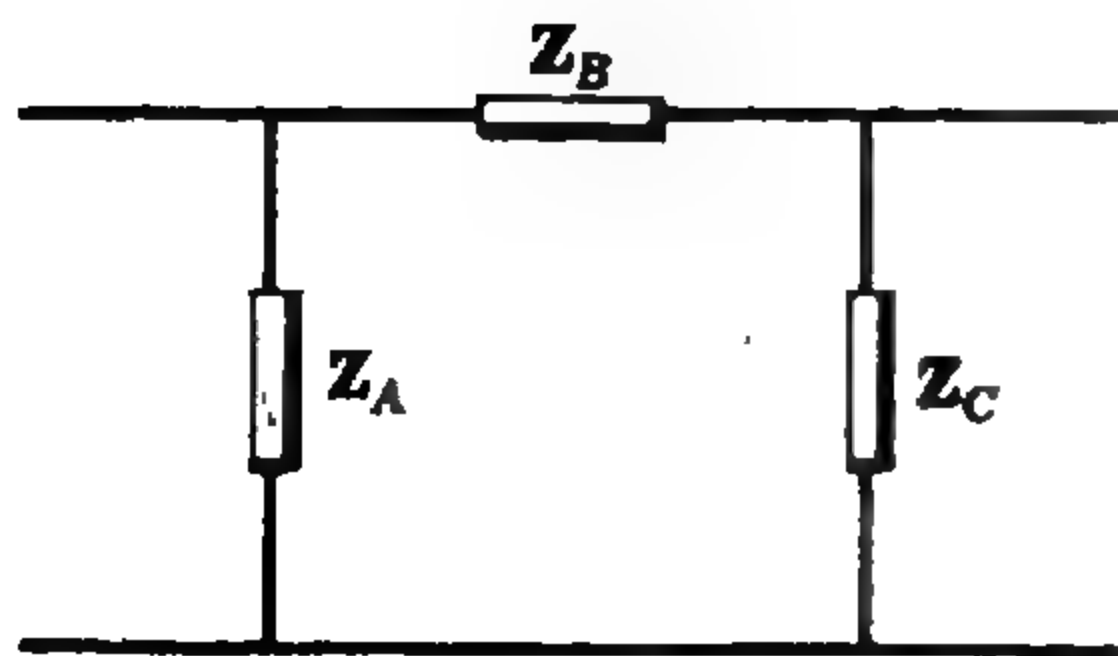
$$R_L = |Z_g + jX_L|$$

بما أن قيمة كل من Z_g و X_L ثابتة فإنه يمكن جمعها في معاوقة واحدة . وعندما تكون R_L متغيرة فإن الحالة الثالثة

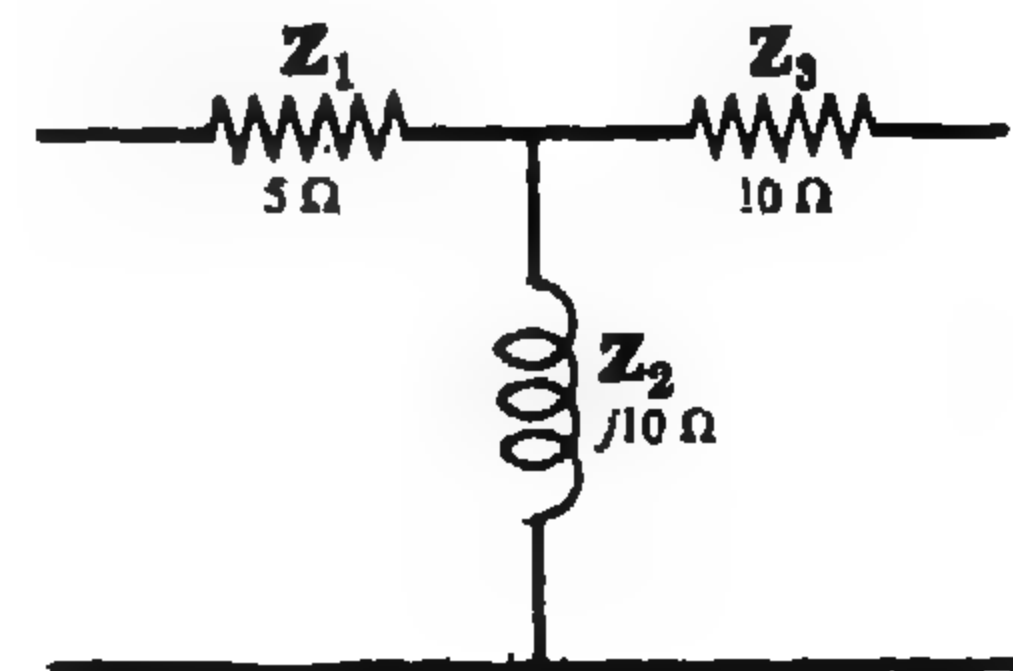
تؤول إلى الحالة الأولى ، وتنتج أكبر قدرة عندما تكون R_L مساوية للقيمة المطلقة لمعاوقة الشبكة الكهربائية

مسائل محلولة

١٢ - ١ عين دائرة دلتا المكافئة للمعاوقات المتصلة على شكل النجمة الموضحة في الشكل ١٢ - ١١ .



شكل ١٢ - ١٢



شكل ١٢ - ١١

تحتوى دائرة دلتا المكافئة على Z_A و Z_B و Z_C كما فى الشكل ١٢-١٢ .

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} = \frac{5(j10) + 5(10) + 10(j10)}{10} = \frac{50 + j150}{10} = 5 + j15 \Omega$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2} = \frac{50 + j150}{j10} = 15 - j5 \Omega$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1} = \frac{50 + j150}{5} = 10 + j30 \Omega$$

وكا اختبار للنتيجة نحول معاوقات دائرة دلتا الموضحة فى الشكل ١٢-١٢ مرة اخرى إلى دائرة النجمة - إذن

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(5 + j15)(15 - j5)}{5 + j15 + 15 - j5 + 10 + j30} = \frac{150 + j200}{30 + j40} = 5 \Omega$$

$$Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(5 + j15)(10 + j30)}{30 + j40} = j10 \Omega$$

$$Z_3 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(15 - j5)(10 + j30)}{30 + j40} = 10 \Omega$$

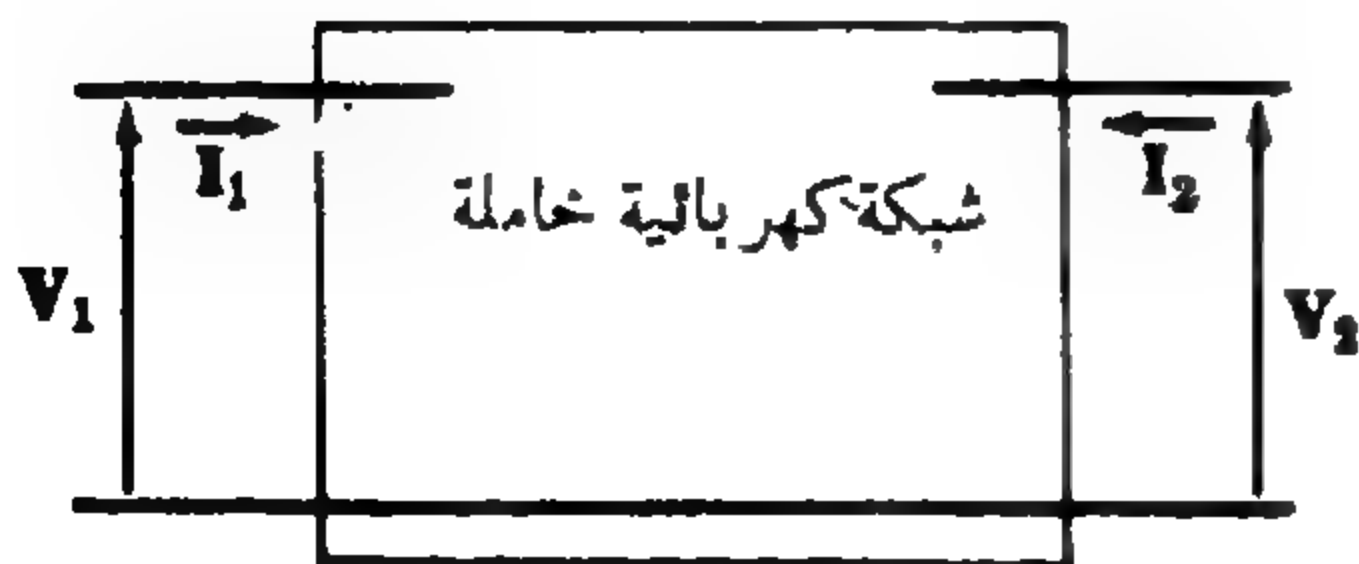
١٢ - ٢ مجموعة متصلة على شكل دلتا تتكون من ثلاث معاوقات متساوية $Z_\Delta = 15/30^\circ \Omega$. أوجد المعاوقات المكافئة المتصلة على شكل النجمة .

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z_\Delta \quad \text{حيث} \quad Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$\text{إذن} \quad Z_2 = Z_3 = Z_\Delta/3 = 5/30^\circ \Omega \quad \text{وبالمثل} \quad Z_1 = Z_\Delta/3 = (15/30^\circ)/3 = 5/30^\circ \Omega$$

وعلى ذلك فإن أى دائرة على شكل دلتا بثلاث معاوقات متطابقة لها دائرة نجمة مكافئة معاوقتها تساوى ثلث معاوقات دائرة دلتا .

وبالعكس فعندما تتساوى معاوقات دائرة على شكل النجمة فإن معاوقات دائرة دلتا المكافئة لها تكون أيضا متساوية وتساوى ثلاث أضعاف معاوقات دائرة النجمة .



شكل ١٢ - ١٣

١٢ - ٣ بين أنه يمكن ابدال الشبكة الكهربائية المتعددة الحاملة ذات الأطراف الثلاثة بثلاث معاوقات متصلة على شكل دلتا .

نحمل مصدر جهد V_1 يؤثر على طرفى الجهة اليسرى فى الشبكة الكهربائية . ونزمر أيضا بـ V_2 ، I_2 عند طرفى الجهة اليمنى كما هو موضح .
برأى أن الشبكة الكهربائية خاملة فإن جميع المصادر المحركة الأخرى تساوى صفرا .

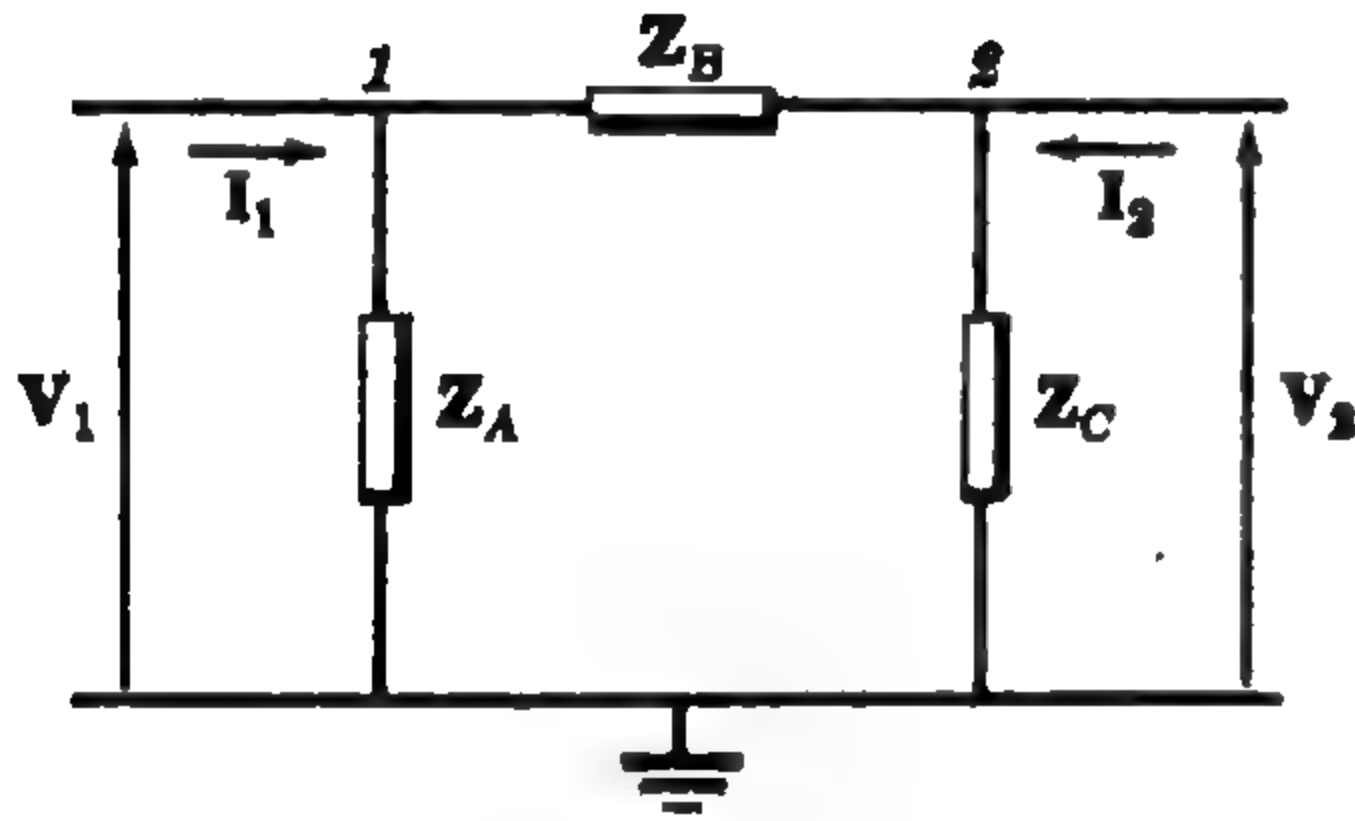
أن معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية هي

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & \dots & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن $I_2 = V_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} + V_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}$ و $I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} + V_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}$

والآن بالتعبير عن هاتين المعادلتين الآتيتين بالصيغة المصفوفية نجد أن :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} & \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



شكل ١٢ - ١٤

وهذه المعادلة المصفوفية مشابهة للمعادلة الناتجة

من شبكة كهربائية ذات عقد ثلاث وذلك مع

اختيار واحدة منها كمقدمة إسناد. الشكل ١٢-١٤

يوضح مثل هذه الشبكة التي فيها Z_C و Z_B و Z_A

متصلة على شكل دلتا. بادخال V_1 و I_1 و V_2 و I_2

بنفس الاتجاه الموضح في الشكل ١٢-١٣ وكتابة

المعادلات المقابلة في الصيغة المصفوفية عن طريق

تطبيق طريقة جهد العقدة نحصل على

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} \right) & -\frac{1}{Z_B} \\ -\frac{1}{Z_B} & \left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

بمساواة معاملات العناصر في المصفوفتين ، نجد أن

$$\left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} \right) = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} \quad (٢) \quad \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} \right) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} \quad (١)$$

$$-\frac{1}{Z_B} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \quad (٣)$$

وبالتعويض في (١)، (٢) بـ (٣) نحصل على

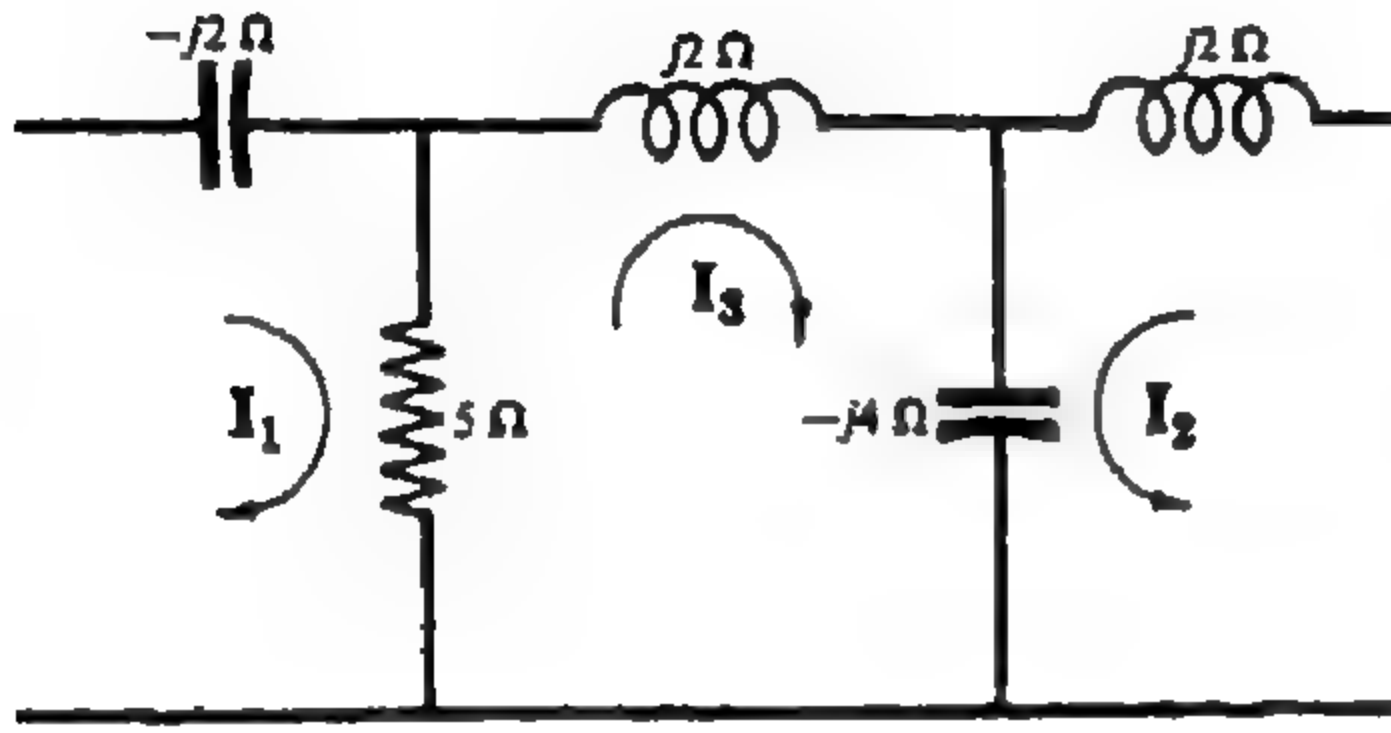
$$Z_A = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11} + \Delta_{21}}, \quad Z_B = -\frac{\Delta_Z}{\Delta_{21}}, \quad Z_C = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22} + \Delta_{21}}$$

كما سبق يتضح أنه يمكن رياضياً تحويل أى شبكة كهربائية ذات ثلاثة أطراف إلى دائرة مكافئة على شكل دلتا أو النجمة . ولكن عناصر كل دائرة مكافئة ربما لا يكون لها معنى فيزيائى . أنظر المسألة ١٢-٤ .

١٢ - ٤ طبق نتيجة المسألة ١٢ - ٣ على الشبكة الكهربائية

الموضحة في الشكل ١٢ - ١٥ لتحصل على دائرة

دلتا المكافئة .



شكل ١٢ - ١٥

نختار تيارات الشبكة كما هو موضح في الرسم

فنحصل على

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 5 - j2 & 0 & -5 \\ 0 & -j2 & -j4 \\ -5 & -j4 & 5 - j2 \end{vmatrix}$$

$$= 40 - j24 = 46.6 / -31^\circ$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -j2 & -j4 \\ -j4 & 5 - j2 \end{vmatrix} = 12 - j10, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 5 - j2 & -5 \\ -5 & 5 - j2 \end{vmatrix} = -4 - j20,$$

$$\Delta_{21} = (-) \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -j4 & 5 - j2 \end{vmatrix} = j20$$

باستخدام تعبيرات المسألة ١٢-٣ نجد أن

$$Z_A = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11} + \Delta_{21}} = \frac{46.6 / -31^\circ}{12 - j10 + j20} = 2.98 / -70.8^\circ \Omega$$

$$Z_B = -\frac{\Delta_Z}{\Delta_{21}} = -\frac{46.6 / -31^\circ}{j20} = 2.33 / 59^\circ \Omega$$

$$Z_C = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22} + \Delta_{21}} = \frac{46.6 / -31^\circ}{-4 - j20 + j20} = 11.65 / 149^\circ \Omega$$

لاحظ أن المعاوقة Z_A يمكن تحقيقها بمقاومة ومكثف متصلين على التوالى و Z_B بمقاومة وحث متصلين على التوالى . أما تحقيق المعاوقة Z_C يلزمه مقاومة سالبة . وعلى ذلك فإن الدائرة ذات الثلاث مقاومات المحسوبة لا يمكن تحقيقها .

١ - ٥ باستخدام نظرية التراكب أوجد التيار المار في المقاومة 2Ω في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢-١٦ .

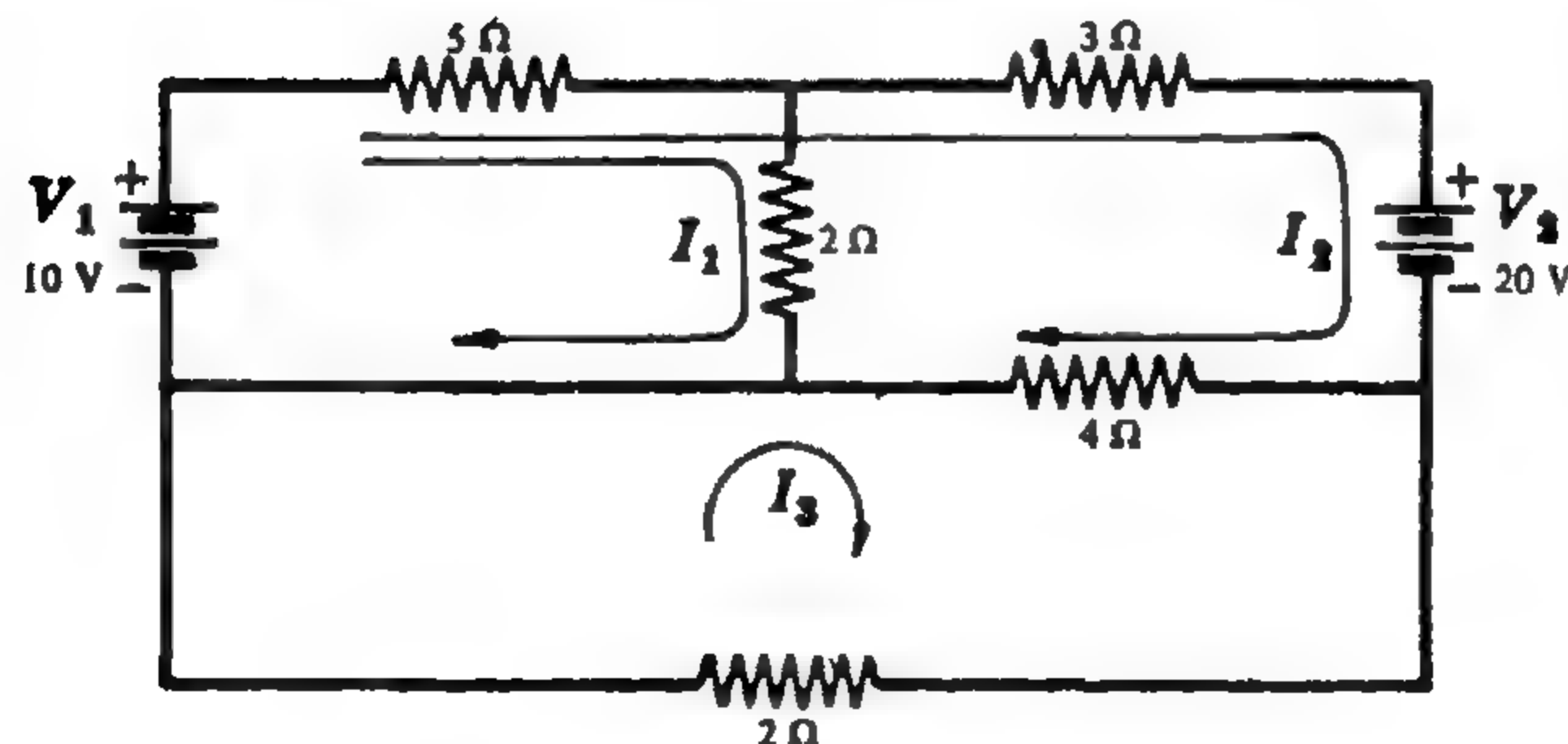
نفرض أن I' هو التيار المار في المقاومة 2Ω نتيجة للمصدر V_1 وذلك مع وضع المصدر V_2 مساويا للصفر . وأن I'' هو التيار المار في نفس الفرع نتيجة للمصدر V_2 مع وضع V_1 مساويا للصفر . باختيار تيارات الشبكة كما هو موضح في الشكل ١٢ - ١٦ وحل المعادلات للحصول على I' و I'' نجد أن

$$I' = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & 5 & 0 \\ V_1 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 5 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{10 \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = 1.075 \text{ A}$$

$$I'' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -V_2 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = \frac{-(-20) \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = 2.48 \text{ A}$$

بتطبيق نظرية التراكب يكون التيار I_1 الناتج عن وجود المصدرين في آن واحد هو

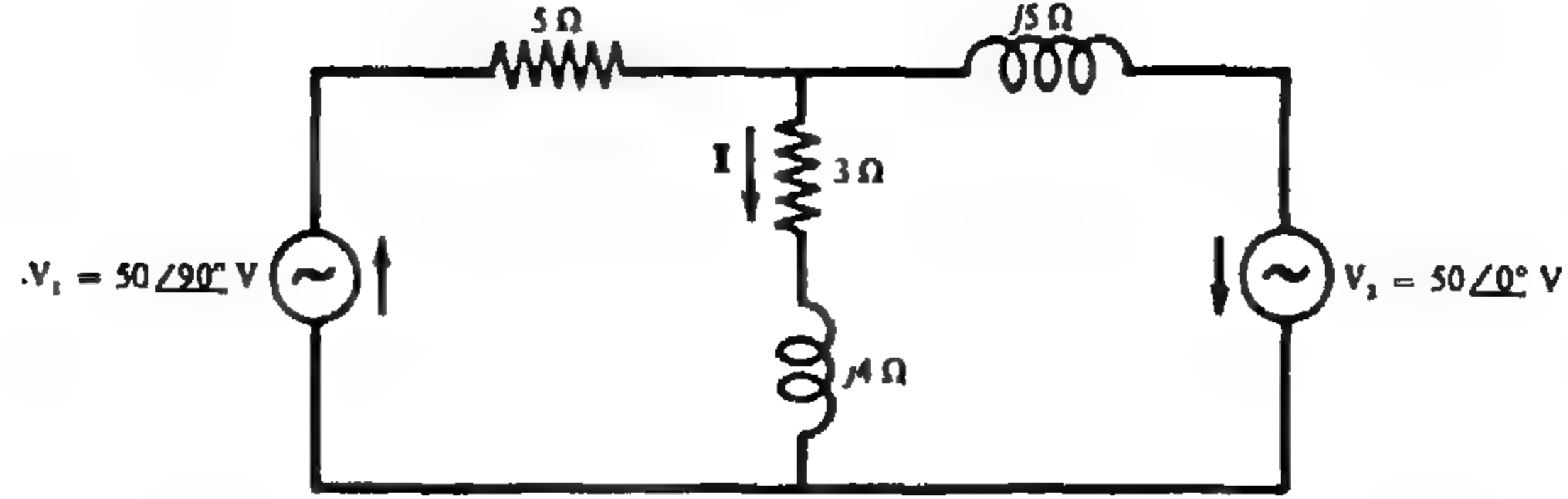
$$I_1 = I' + I'' = 1.075 + 2.48 = 3.555 \text{ A}$$



شكل ١٢ - ١٦

١٢ - ٦ طبق نظرية التراكب على الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ١٧ لتحصل على التيار المار في المعاوقة

$$3 + j4 \Omega$$



شكل ١٢ - ١٧

نضع $V_2 = 0$ وبذلك يكون V_1 هو المصدر الوحيد الموجود في الدائرة . إذن

$$Z_{T_1} = 5 + \frac{(3 + j4)j5}{3 + j9} = 5.83 + j2.5 = 6.35/23.2^\circ \Omega$$

$$I_{T_1} = \frac{V_1}{Z_{T_1}} = \frac{50/90^\circ}{6.35/23.2^\circ} = 7.87/66.8^\circ \text{ A}$$

والتيار المار في الفرع $3 + j4 \Omega$ نتيجة للمصدر V_1 فقط هو

$$I_1 = I_{T_1} \left(\frac{j5}{3 + j9} \right) = 7.87/66.8^\circ \left(\frac{j5}{3 + j9} \right) = 4.15/85.3^\circ \text{ A}$$

بوضع $V_1 = 0$ وبذلك يكون V_2 هو المصدر الوحيد في الدائرة . إذن

$$Z_{T_2} = j5 + \frac{5(3 + j4)}{8 + j4} = 2.5 + j6.25 = 6.74/68.2^\circ \Omega$$

$$I_{T_2} = \frac{V_2}{Z_{T_2}} = \frac{50/0^\circ}{6.74/68.2^\circ} = 7.42/-68.2^\circ \text{ A}$$

والتيار المار في الفرع $3 + j4 \Omega$ نتيجة للمصدر V_2 فقط هو

$$I_2 = -(7.42/-68.2^\circ) \left(\frac{5}{8 + j4} \right) = 4.15/85.3^\circ \text{ A}$$

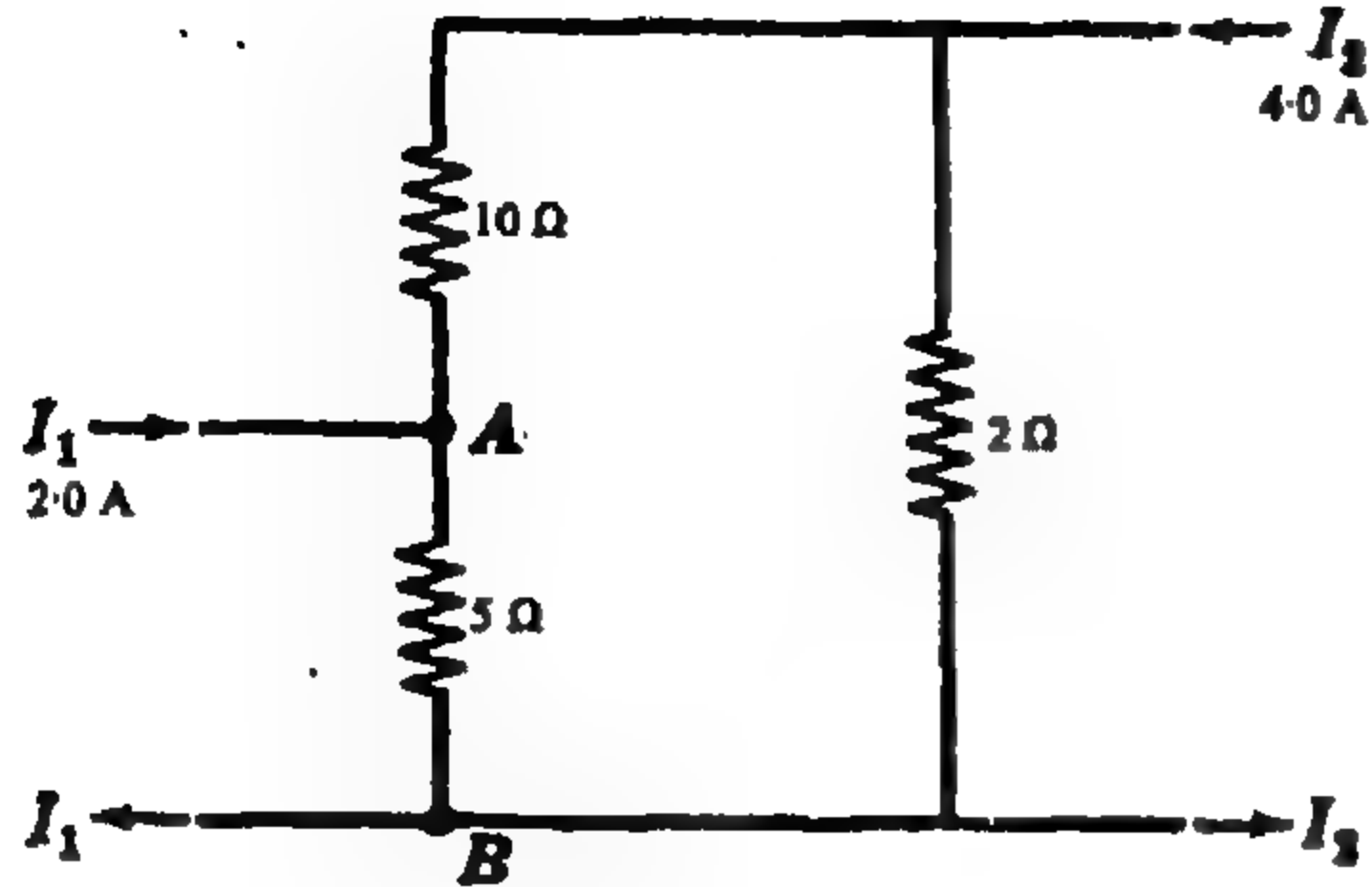
وبذلك يكون التيار الكلي المار في الفرع $3 + j4 \Omega$ هو

$$I = I_1 + I_2 = 4.15/85.3^\circ + 4.15/85.3^\circ = 8.30/85.3^\circ \text{ A}$$

١٢ - ٧ طبق نظرية التراكب على الشبكة الكهربائية

الموضحة في الشكل ١٢ - ١٨ وذلك لإيجاد

الجهد V_{AB} .



شكل ١٢ - ١٨

نفرض أن المصدر $I_1 = 2A$ يؤثر في

الشبكة الكهربائية ونضع المصدر $I_2 = 0$

$$V'_{AB} = \frac{2 \cdot 5(12)}{17} = 7.06 V.$$

نضع الآن $I_1 = 0$ وبذلك يكون $I_2 = 4A$

هو الذي يؤثر في الشبكة الكهربائية وبذلك يكون

التيار المار في المقاومة 5Ω هو

$$I_x = 4(2/17) = 8/17 A$$

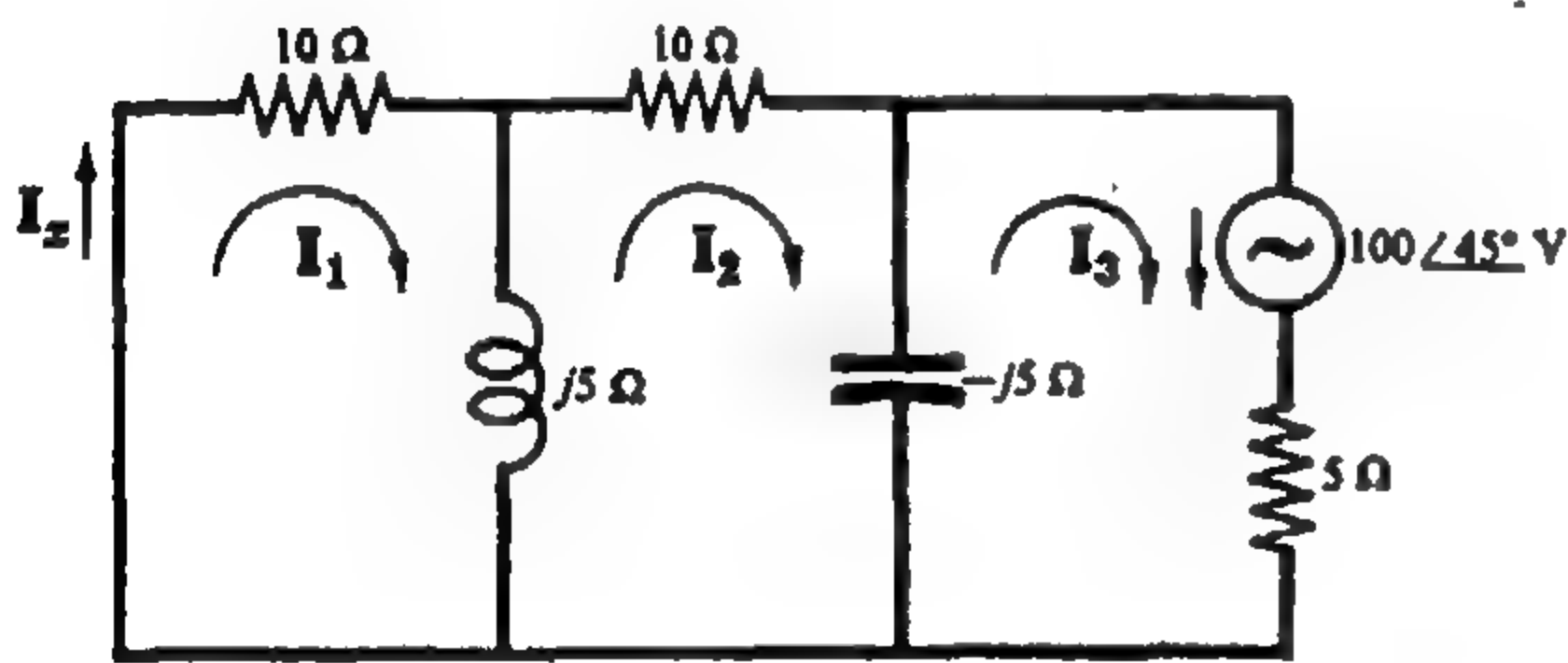
$$V''_{AB} = (8/17)5 = 2.35 \text{ volts.}$$

وعلى هذا فإن الجهد V_{AB} في حالة وجود المصدرين معاً هو

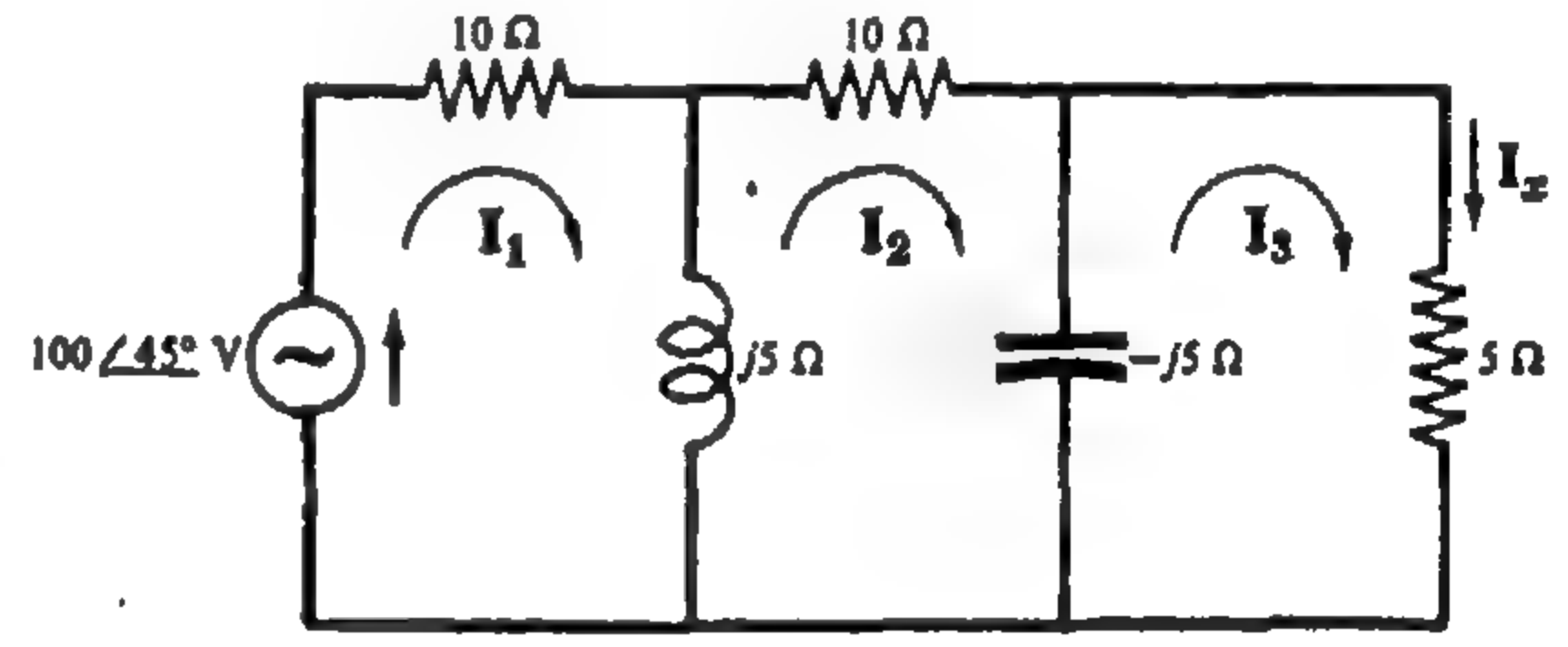
$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = 7.06 + 2.35 = 9.41 V$$

١٢ - ٨ إذا كان التيار I_x هو التيار المار في الفرع 5Ω في الشبكة الكهربائية وحيد المصدر في الشكل ١٢ - ١٩

(١) والناتج عن مصدر الجهد $100 \angle 45^\circ V$ ، فأوجد I_x ثم حقق نظرية التبادل لهذه الدائرة .



(ب)



(أ)

شكل ١٢ - ١٩

يوضح الشكل ١٢-١٩ (١) تيارات الشبكة I_1 و I_2 و I_3 . التيار المطلوب I_x هو تيار الشبكة I_3 .

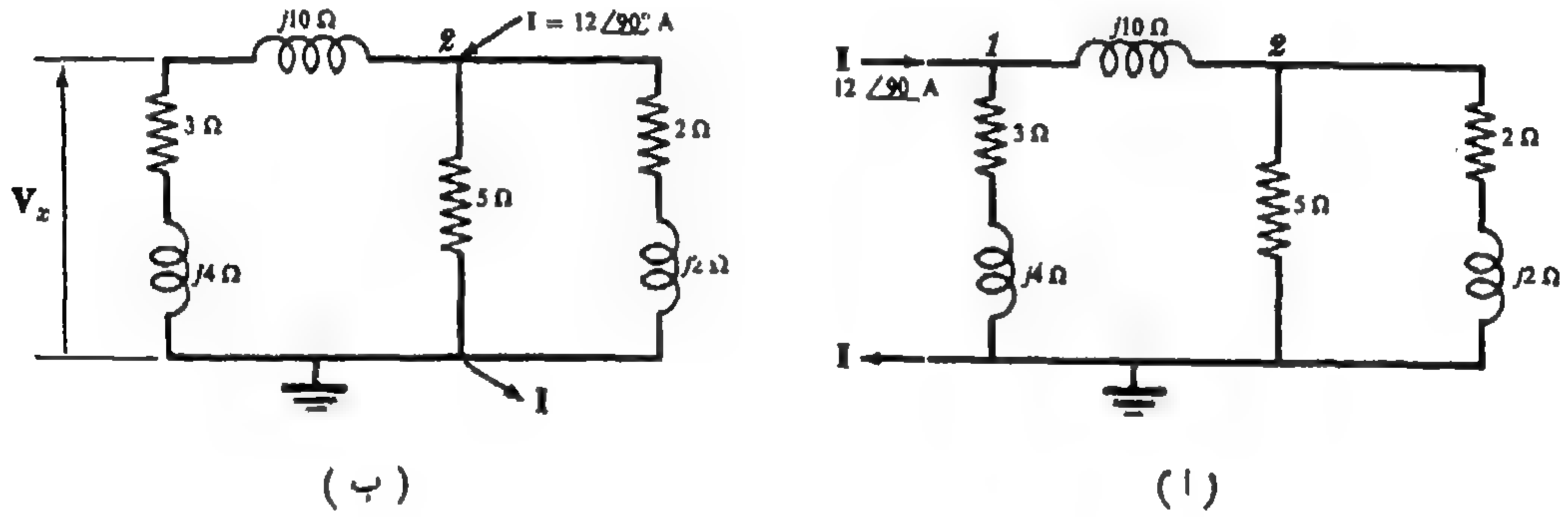
$$(١) \quad I_x = I_3 = \begin{vmatrix} 10 + j5 & -j5 & 100 \angle 45^\circ \\ -j5 & 10 & 0 \\ 0 & j5 & 0 \end{vmatrix} = 100 \angle 45^\circ \left(\frac{25}{1155 \angle -12.6^\circ} \right) = 2.16 \angle 57.5^\circ A$$

والآن نطبق نظرية التبادل بتغيير موضعي الإثارة والاستجابة كما هو موضح في الشكل ١٢-١٩ (ب) .
ومرة أخرى باستخدام تيارات المسار المغلق الأولى في اتجاه عقارب الساعة كما هو موضح وبملاحظة أن $I_x = I_1$ ،
إذن

$$(٢) \quad I_x = I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -j5 & 0 \\ 0 & 10 & j5 \\ 100/45^\circ & j5 & 5 - j5 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 100/45^\circ \left(\frac{25}{1155/-12.5^\circ} \right) = 2.16/57.5^\circ \text{ A}$$

وبمقارنة نتيجتي (١) و (٢) نجد أن قيمتي I_x في المعادلتين مساويتان وهذا يحقق نظرية التبادل .

١٢ - ٩ تحتوي الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٠ (١) على مصدر واحد للتيار هو $I = 12/90^\circ \text{ A}$.
عين الجهد V_2 عند العقدة 2 . طبق نظرية التبادل ثم قارن النتيجة .



شكل ١٢ - ٢٠

إن معادلتى المقدة في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٠ (١) بالصيغة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3+j4} + \frac{1}{j10} \right) & -\frac{1}{j10} \\ -\frac{1}{j10} & \left(\frac{1}{j10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2+j2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/90^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن هنا نجد أن

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.12 - j0.26 & 12/90^\circ \\ j0.1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.12 - j0.26 & j0.1 \\ j0.1 & 0.45 - j0.35 \end{vmatrix}} = 12/90^\circ \left(\frac{-j0.1}{0.161/260.35^\circ} \right) = 7.45/99.65^\circ \text{ V}$$

نستخدم نظرية التبادل مع اعتبار أن التيار I بين العقدة 2 وعقدة الإسناد في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢-٢٠ (ب) . ثم نحسب الجهد بين الناهيتين نتيجة للمصدر المحرك السابق . بما أنه يوجد عقدتان فقط في الشبكة الكهربائية فإن المطلوب معادلة عقدة واحدة .

$$\left(\frac{1}{3+j14} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2+j2} \right) V_2 = 12/90^\circ \quad \text{إذن}$$

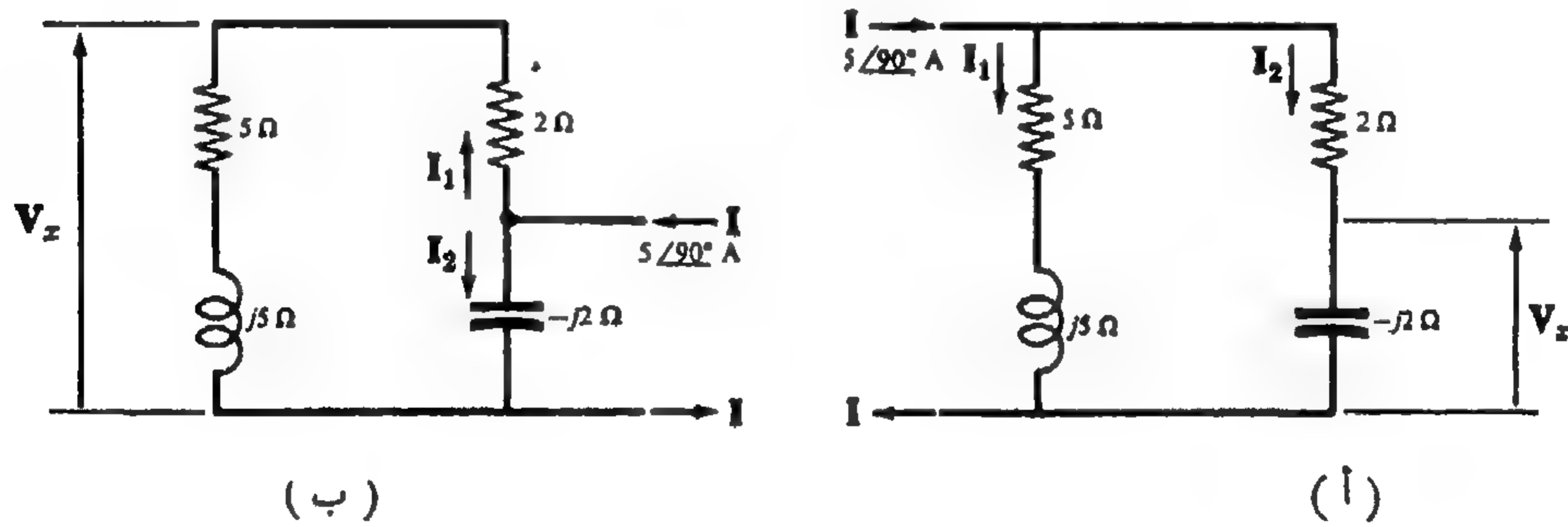
$$V_2 = \frac{12/90^\circ}{0.563 \angle -34.4^\circ} = 21.3 \angle 124.4^\circ \text{ V}$$

وبالتالي فإن الجهد V_x يكون

$$V_x = V_2 \left(\frac{3+j4}{3+j4+j10} \right) = 21.3 \angle 124.4^\circ \left(\frac{3+j4}{3+j14} \right) = 7.45 \angle 99.6^\circ \text{ V}$$

بمقارنة القيمة المحسوبة للجهد V_2 للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٠ (أ) بالجهد V_x للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٠ (ب) نجد أنها متساويان ، وهذا يحقق نظرية التبادل . لاحظ أيضا أن V_2 لا يظل كما هو بعد تغيير موضعى الإثارة والاستجابة .

١٢-١٠ أوجد الجهد V_x في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢-٢١ (أ) والتي تحتوى على مصدر واحد للتيار . غير موضعى مصدر التيار والجهد الناتج V_x . هل تتحقق نظرية التبادل ؟



شكل ١٢ - ٢١

في الشكل ١٢-٢١ (أ) نجد أن التيار $I_2 = I \left(\frac{5+j5}{7+j3} \right) = 5 \angle 90^\circ \left(\frac{5+j5}{7+j3} \right) = 4.64 \angle 111.8^\circ \text{ A}$

$$\text{إذن الجهد } V_x = I_2(-j2) = 4.64 \angle 111.8^\circ (2 \angle -90^\circ) = 9.28 \angle 21.8^\circ \text{ V}$$

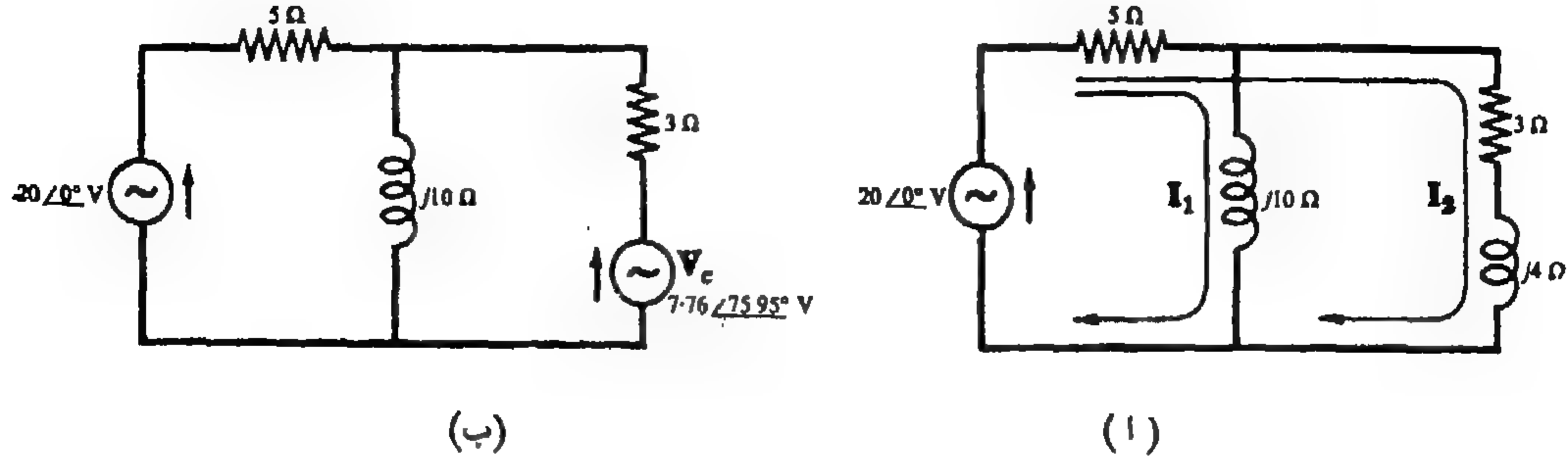
إذا بدلنا موضعى مصدر التيار I والجهد V_x المقاس بين الناهيتين كما في الشكل ١٢-٢١ (ب) ،

يكون التيار في هذه الحالة هو $I_1 = I \left(\frac{-j2}{7+j3} \right) = 5 \angle 90^\circ \left(\frac{-j2}{7+j3} \right) = 1.31 \angle -23.2^\circ \text{ A}$. وبما أن

$$V_x = 1.31 \angle -23.2^\circ (5+j5) = 9.27 \angle 21.8^\circ \text{ V}$$

كما في الحالة السابقة ، إذن فهذا يحقق نظرية التبادل .

١٢ - ١١ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٢ (أ) ابدل الممانعة $4j\Omega$ بقوة دافعة كهربائية معادلة .



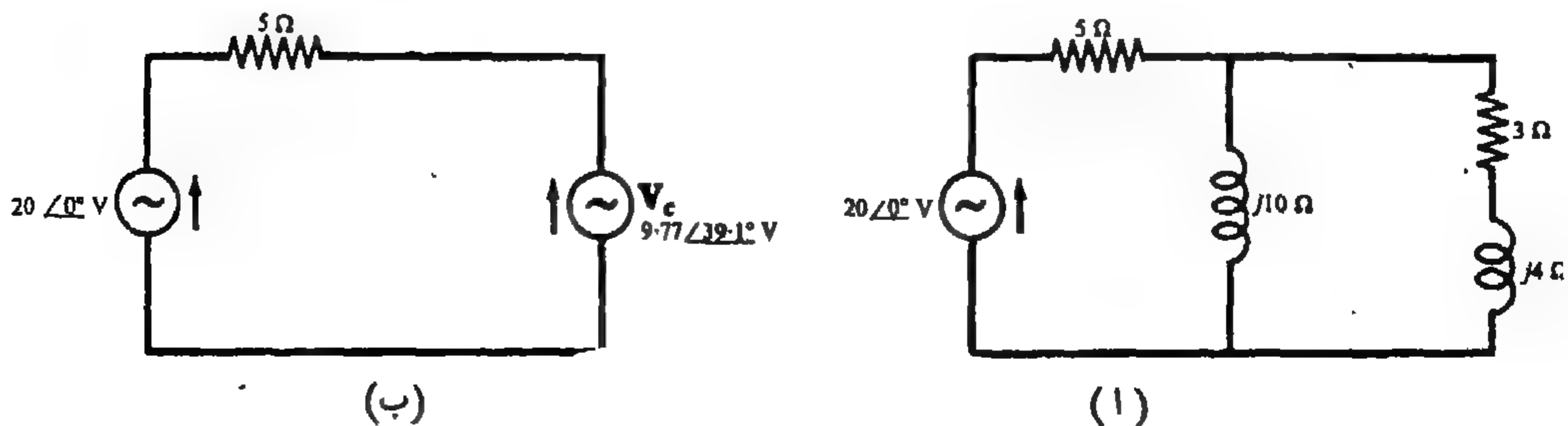
شكل ١٢ - ٢٢

نختار تيارات الشبكة I_1 ، I_2 كما هو موضح في الرسم ثم نحل المعادلات للحصول على التيار I_3 المار في الممانعة $4j\Omega$ فنجد أن

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j10 & 20 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j10 & 5 \\ 5 & 8 + j4 \end{vmatrix}} = \frac{20(j10)}{103/104.05^\circ} = 1.94/-14.05^\circ \text{ A}$$

والمصدر المعادل هو $V_c = I_2(j4) \angle -14.05^\circ (j4) = 7.76 \angle 75.95^\circ \text{ V}$. يوضح الشكل ١٢-٢٢ (ب) الدائرة بعد وضع المصدر المعادل بدلا من الممانعة $4j\Omega$. لإثبات أن الدائرتين متكافئتان أوجد تيار أحد الأفرع في الدائرتين وقارن النتيجة.

١٢ - ١٢ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٣ (أ) ابدل المجموعة المتصلة على التوازي والمكونة من 10Ω و $3 + j4\Omega$ بمصدر معادل .



شكل ١٢ - ٢٣

المعاوقة المكافئة للمجموعة المتصلة على التوازي هي

$$Z_{eq} = \frac{j10(3+j4)}{3+j14} = 1.46 + j3.17 = 3.50 \angle 65.3^\circ \Omega$$

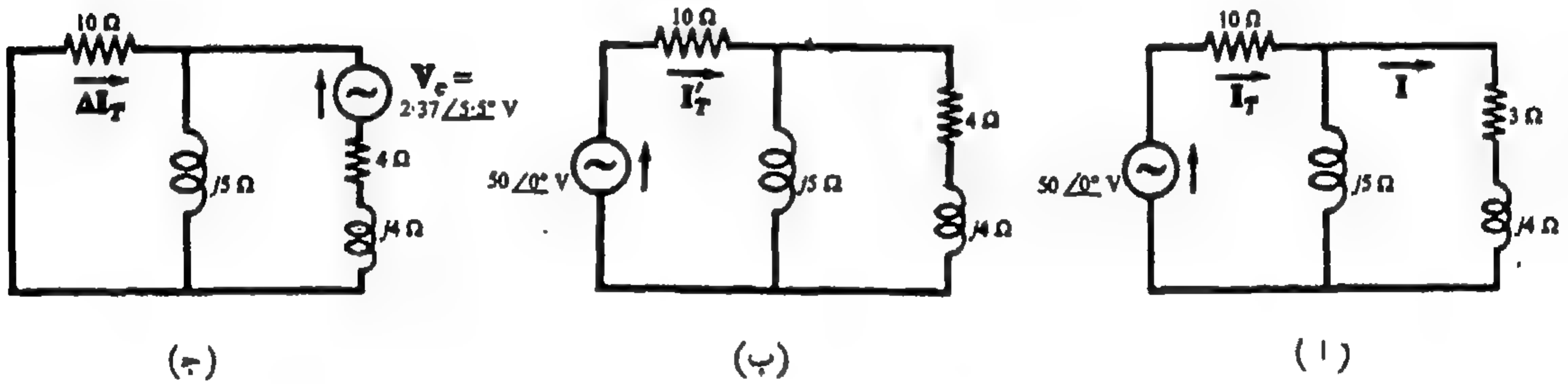
$$I_T = \frac{V}{Z_T} = \frac{20 \angle 0^\circ}{7.18 \angle 26.2^\circ} = 2.79 \angle -26.2^\circ \text{ A} \quad , \quad Z_T = 5 + 1.46 + j3.17 = 7.18 \angle 26.2^\circ \Omega \quad \text{إذن}$$

والمصدر المعادل هو :

$$V_c = I_T Z_{eq} = 2.79 \angle -26.2^\circ (3.50 \angle 65.3^\circ) = 9.77 \angle 39.1^\circ \text{ V}$$

وبوضح الشكل ١٢ - ٢٣ (ب) الدائرة بعد وضع مصدر الجهد المعادل بالقطبية الفعلية .

١٢-١٣ إذا تغيرت المعاوقة $3+j4 \Omega$ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٤ (أ) إلى المعاوقة $4+j4 \Omega$ كما في الشكل ١٢-٢٤ (ب) . فأوجد التيار المار في المقاومة 10Ω قبل وبعد التغير . ثم طبق نظرية التعادل أو المعادلة لتعين الفرق في تيار المقاومة 10Ω .



شكل ١٢ - ٢٤

قبل التغير في المعاوقة $3+j4 \Omega$ (شكل ١٢-٢٤ (أ)) لدينا

$$I_T = \frac{V}{Z_T} = \frac{50 \angle 0^\circ}{11.1 \angle 13^\circ} = 4.50 \angle -13^\circ \text{ A} \quad , \quad Z_T = 10 + \frac{j5(3+j4)}{3+j9} = 11.1 \angle 13^\circ \Omega$$

بعد التغير (شكل ١٢-٢٤ (ب)) لدينا

$$I_T' = \frac{V}{Z_T'} = 4.41 \angle -13.65^\circ \text{ A} \quad , \quad Z_T' = 10 + \frac{j5(4+j4)}{4+j9} = 11.03 + j2.68 = 11.35 \angle 13.65^\circ \Omega$$

بمصدر التعادل الجهدى $V_c = I(\delta Z)$ حيث I التيار الابتدائي في الفرع $3+j4 \Omega$ هو

$$I = I_T \left(\frac{j5}{3+j9} \right) = 4.5 \angle -13^\circ \left(\frac{j5}{3+j9} \right) = 2.37 \angle 5.5^\circ \text{ A}$$

د $\delta Z = (4 + j4) - (3 + j4) = 1 \Omega$ إذن $V_c = 2.37 \angle 5.5^\circ (1) = 2.37 \angle 5.5^\circ \Omega$ و اتجاهه في عكس اتجاه I .

ونحصل على التغيير ΔI_T في التيار بوضع مصدر الجهد الأساسي مساويا للصفر مع ترك V_c يؤثر بمفرده في الدائرة كما في الشكل ١٢-٢٤ (ج) . إذن لهذه الدائرة يكون لدينا $Z_T' = 4 + j4 + \frac{j5(10)}{10 + j5} = 10 \angle 53.1^\circ \Omega$

$$\Delta I_T = - \left(\frac{V_c}{Z_T} \right) \left(\frac{j5}{10 + j5} \right) = - \left(\frac{2.37 \angle 5.5^\circ}{10 \angle 53.1^\circ} \right) \left(\frac{j5}{10 + j5} \right) = 0.1055 \angle 195.8^\circ A$$

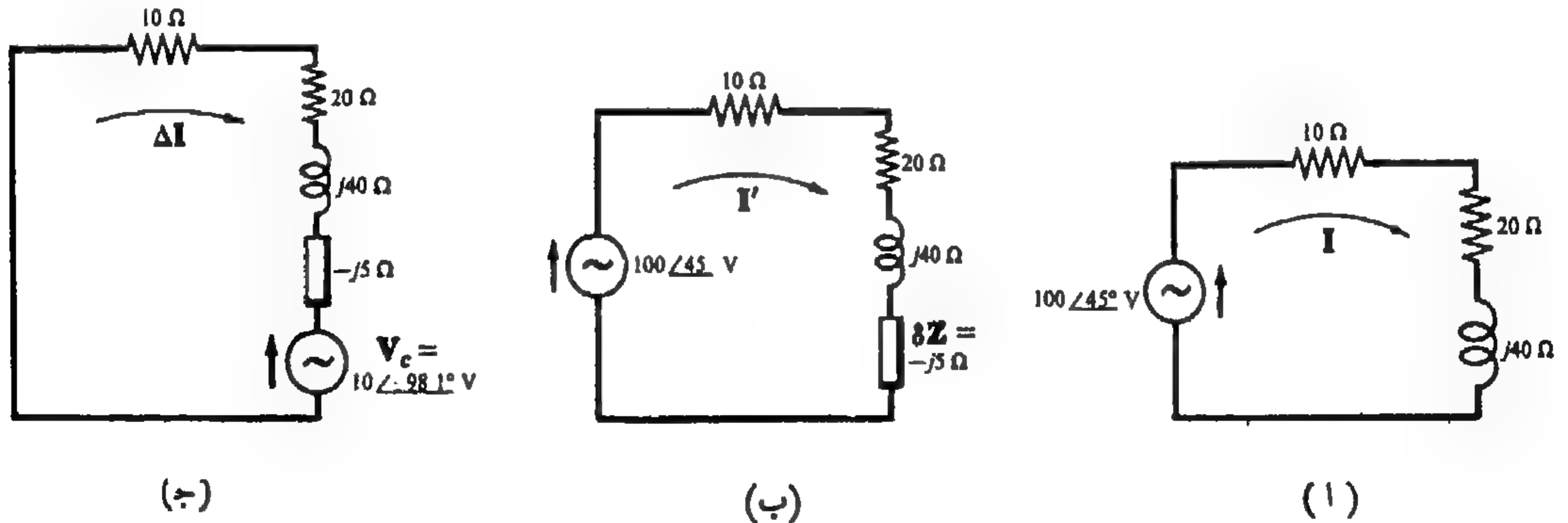
نقارن ΔI_T بالفرق بين I_T و I'_T

$$I' - I_T = (4.41 \angle -13.65^\circ) - (4.50 \angle -13^\circ) = -0.10 - j0.03 = 0.1045 \angle 196.7^\circ A$$

لاحظ أن قيمتي ΔI_T غير متساويتين تماما . إن قيمة ΔI_T المحسوبة باستخدام جهد التعادل V_c أكثر دقة من قيمة ΔI_T التي حصلنا عليها من طرح التيارين الأساسيين I_T و I'_T . وهذه النتيجة صحيحة تماما عندما يكون التغيير في المعاوقة صغير . والنتيجة السابقة للحالة التي يكون فيها تغيير التيار صغير تقتضي اعتبار وجود خطأ عند حساب الفرق بين كيتين متقاربتين في القيمة .

١٢-١٤ احسب التغير في تيار الدائرة المتصلة على التوالي والموضحة في الشكل ١٢-٢٥ (أ) وذلك عندما تقل قيمة الممانعة إلى 35Ω .

نفرض أن I و I' هما تيارا الدائرة قبل وبعد التغيير الحادث في الممانعة كما هو موضح في الشكل ٢٢-٢٥ (أ) ، (ب) . إذن



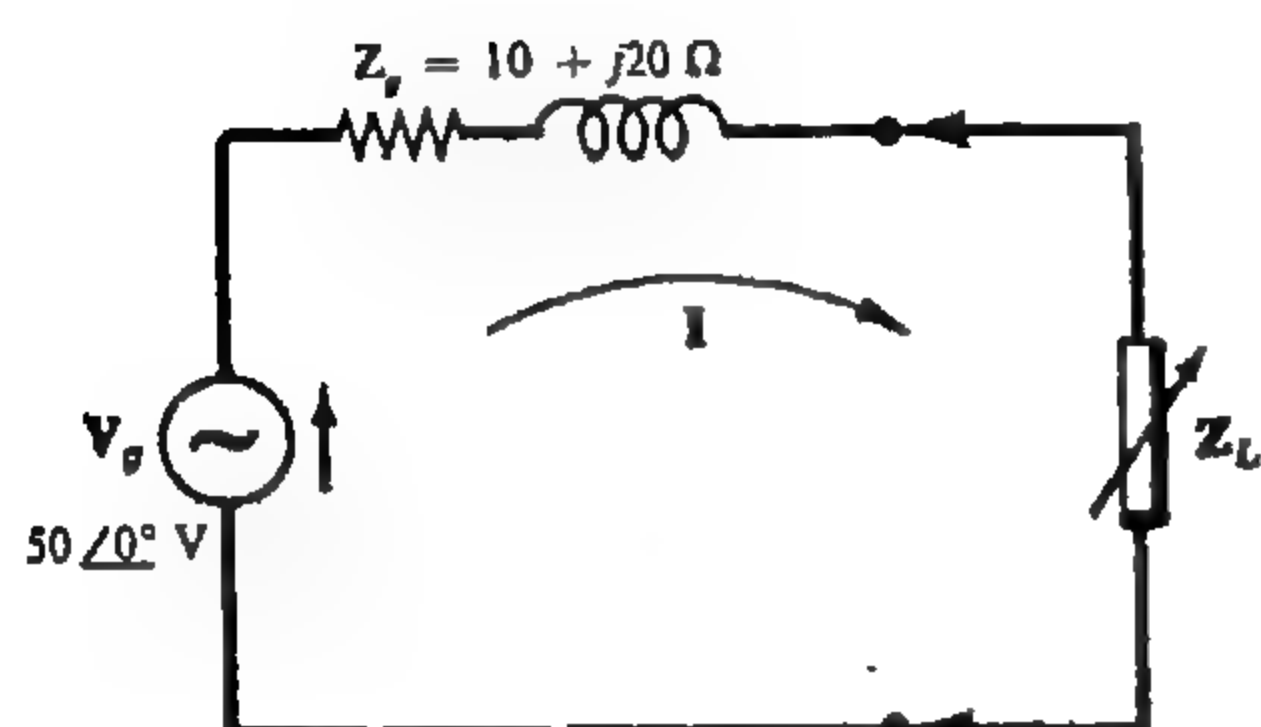
شكل ١٢-٢٥

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100 \angle 45^\circ}{50 \angle 53.1^\circ} = 2.0 \angle -8.1^\circ A; I' = \frac{V}{Z + \delta Z} = \frac{100 \angle 45^\circ}{30 + j35} = 2.17 \angle -4.4^\circ A$$

$$\Delta I = I' - I = 2.17 \angle -4.4^\circ - 2.0 \angle -8.1^\circ = 0.223 \angle 31.6^\circ A$$

إذا حسبنا ΔI بتطبيق نظرية التعادل نحصل على $V_c = I(\delta Z) = 2.0 \angle -8.1^\circ (-j5) = 10 \angle -98.1^\circ V$ واتجاهه كما في الشكل ١٢-٢٥ . والتغير في التيار هو

$$\Delta I = -V_c / (Z + \delta Z) = -(10 \angle -98.1^\circ) / (30 + j35) = (10 \angle 81.9^\circ) / (46.1 \angle 49.4^\circ) = 0.217 \angle 32.5^\circ A$$



شكل ١٢ - ٢٦

١٢-١٥ إذا كان الحمل المتصل بالدائرة الموضحة في الشكل

١٢-٢٦ يتكون من مقاومة نقية R_L . فأوجد قيمة R_L التي تكون عندها القدرة المعطاة بالمصدر للحمل أكبر ما يمكن . عين قيمة أكبر قدرة .

تنتقل أكبر قدرة للحمل عندما

$$R_L = |Z_s| = |10 + j20| = 22.4 \text{ ohms}$$

$$I = V / (Z_s + R) = (50 \angle 0^\circ) / (10 + j20 + 22.4) = 1.31 \angle -31.7^\circ A$$

وأكثر قدرة تعطى للحمل هي

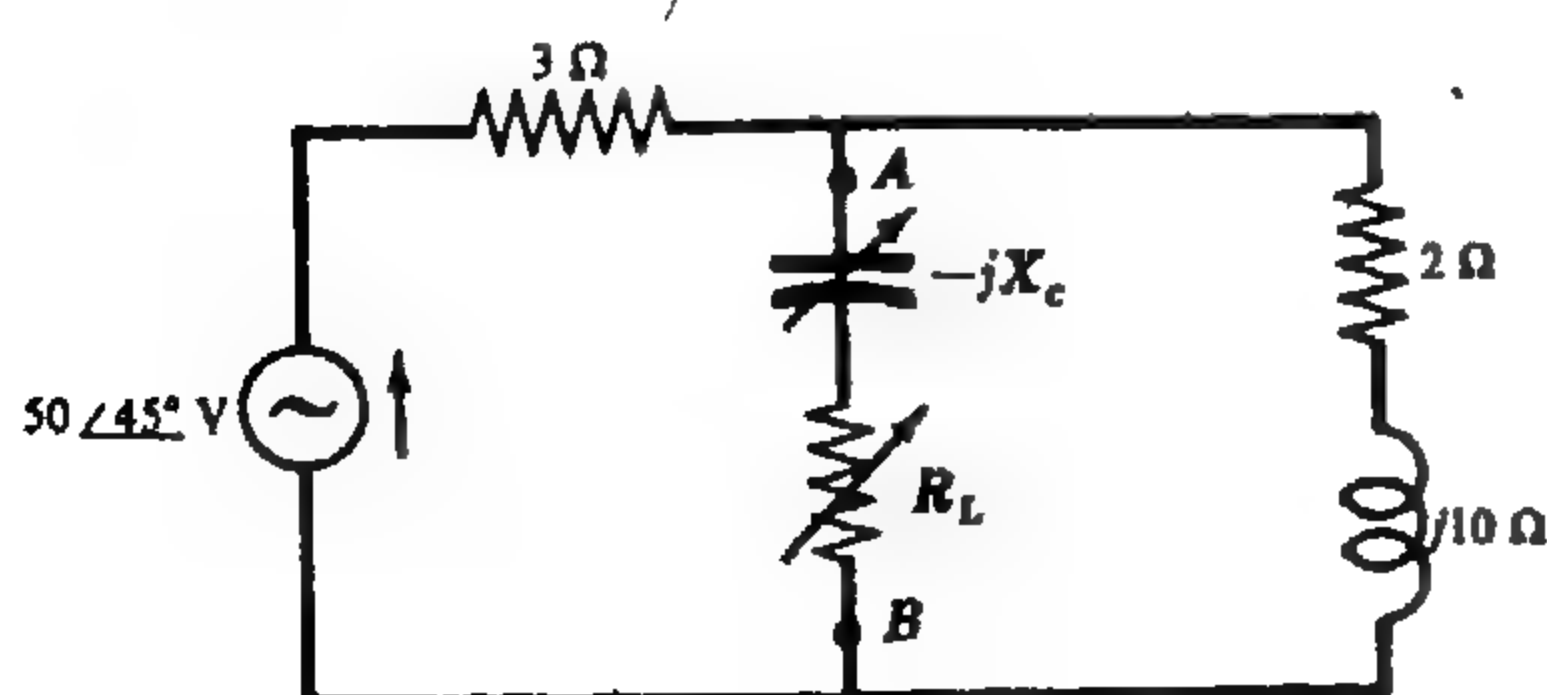
$$P = I^2 R_L = (1.31)^2 22.4 = 38.5 \text{ watts.}$$

١٢-١٦ إذا كان الحمل المتصل بالدائرة الموضحة في الشكل ١٢-٢٦ يتكون من معاوقة مركبة Z_L التي فيها كل من R_L و X_L متغيرة ، فعين قيمة Z_L التي ينتج عنها انتقال أكبر قدرة . احسب قيمة أكبر قدرة .

تنتقل أكبر قدرة عندما يكون $Z_L = Z_s^*$. وبما أن $Z_s = 10 + j20 \Omega$ $Z_L = 10 - j20 \Omega$

إذن المعاوقة الكلية للدائرة هي $Z_T = (10 + j20) + (10 - j20) = 20 \Omega$.

$$I = V / Z_T = (50 \angle 0^\circ) / 20 = 2.5 \angle 0^\circ A \quad P = I^2 R_L = (2.5)^2 10 = 62.5 \text{ watts}$$



شكل ١٢ - ٢٧

١٢-١٧ إذا كان الحمل المتصل بين النقطتين AB للشبكة

الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٧

يتكون من مقاومة متغيرة R_L وممانعة سعوية X_C

تغير قيمتها بين 2Ω و 8Ω ، فعين R_L و X_C

الذي ينتج عندهما انتقال أكبر قدرة . احسب أكبر

قدرة P معطاة للحمل .

إن جهد ثقيين بين الطرفين AB هو $V' = \frac{50 \angle 45^\circ}{5 + j10} (2 + j10) = 45.6 \angle 60.3^\circ \text{ V}$ ومعاوقة الشبكة

الكهربائية الفعالة المتصلة بين الهاتين AB هي $Z' = 3(2 + j10)/(5 + j10) = 2.64 + j0.72 \Omega$

ويحدث أن تنتقل أكبر قدرة في الدائرة المعطاة عندما $Z_L = Z'^* = 2.64 - j0.72 \Omega$. وحيث أن

الشرط المعطى في المسألة هو أن X_C تتغير قيمتها بين 2Ω و 8Ω ، إذن أقرب قيمة لـ X_C هي 2Ω

$$R_L = |Z_g - jX_C| = |2.64 + j0.72 - j2| = |2.64 - j1.28| = 2.93 \text{ ohms}$$

والآن لدينا

$$Z_T = Z' + Z_L = (2.64 + 2.93) + j(0.72 - 2) = 5.57 - j1.28 = 5.70 \angle -13^\circ \Omega$$

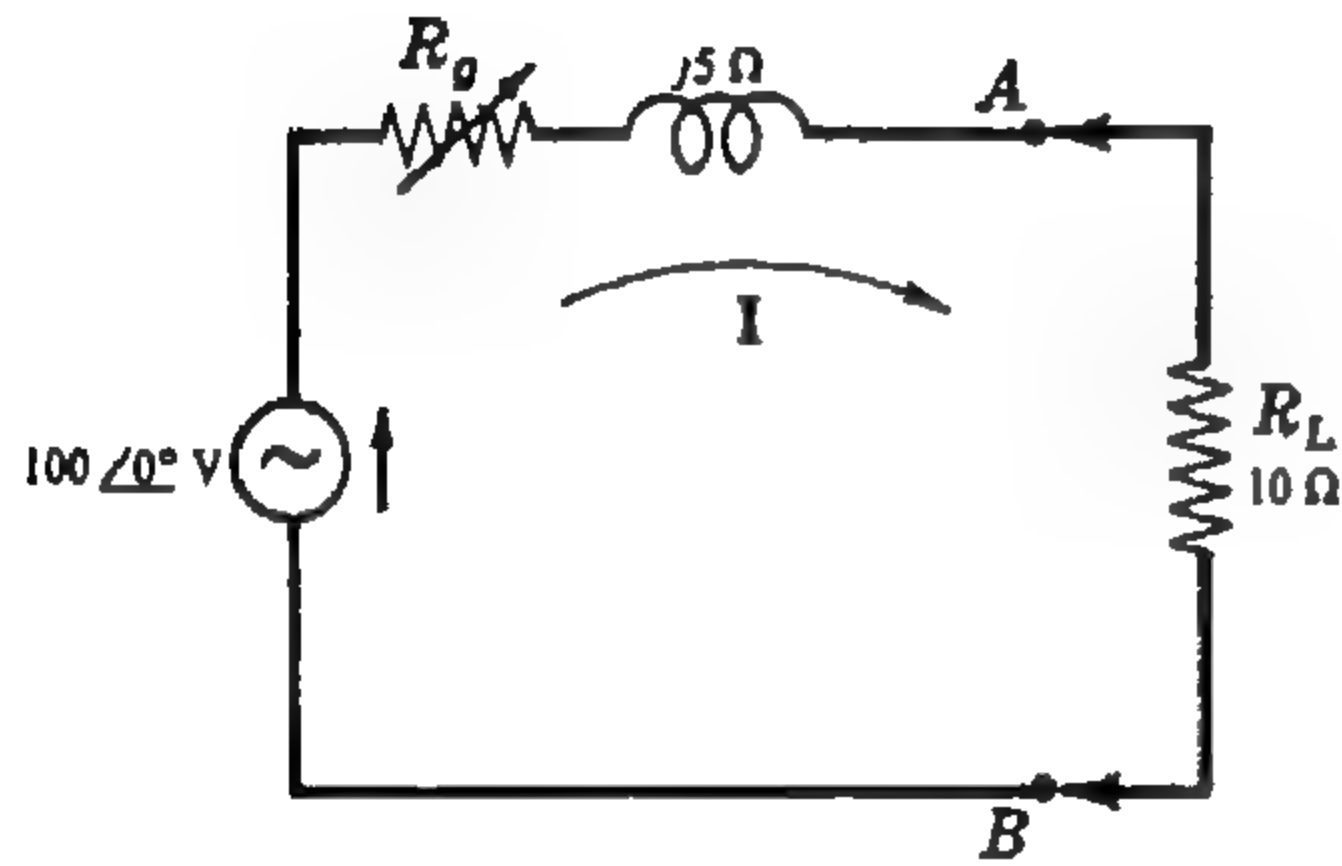
إذن

$$I = \frac{V'}{Z_T} = \frac{45.6 \angle 60.3^\circ}{5.70 \angle -13^\circ} = 8.0 \angle 73.3^\circ \text{ A} , \quad P = P_{R_L} = (8.0)^2 2.93 = 187.5 \text{ W}$$

١٢ - ١٨ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢ - ٢٨ تتغير

قيمة المقاومة R_g بين 2Ω و 55Ω .

ما هي قيمة R_g التي ينتج عنها انتقال أكبر قدرة عبر الطرفين AB ؟



شكل ١٢ - ٢٨

بما أن مقاومة الحمل R_L في الدائرة المعطاة ثابتة . إذن نظريات انتقال أكبر قدرة لا تطبق في هذه الحالة . ومن الواضح أن أكبر تيار ينتج عندما R_g تكون أقل ما يمكن .

بوضع $R_g = 2\Omega$. إذن

$$Z_T = (2 + j5 + 10) = 13 \angle 22.6^\circ \Omega$$

$$I = V/Z_T = 100 \angle 0^\circ / (13 \angle 22.6^\circ) = 7.7 \angle -22.6^\circ \text{ A}$$

وأقصى قدرة هي

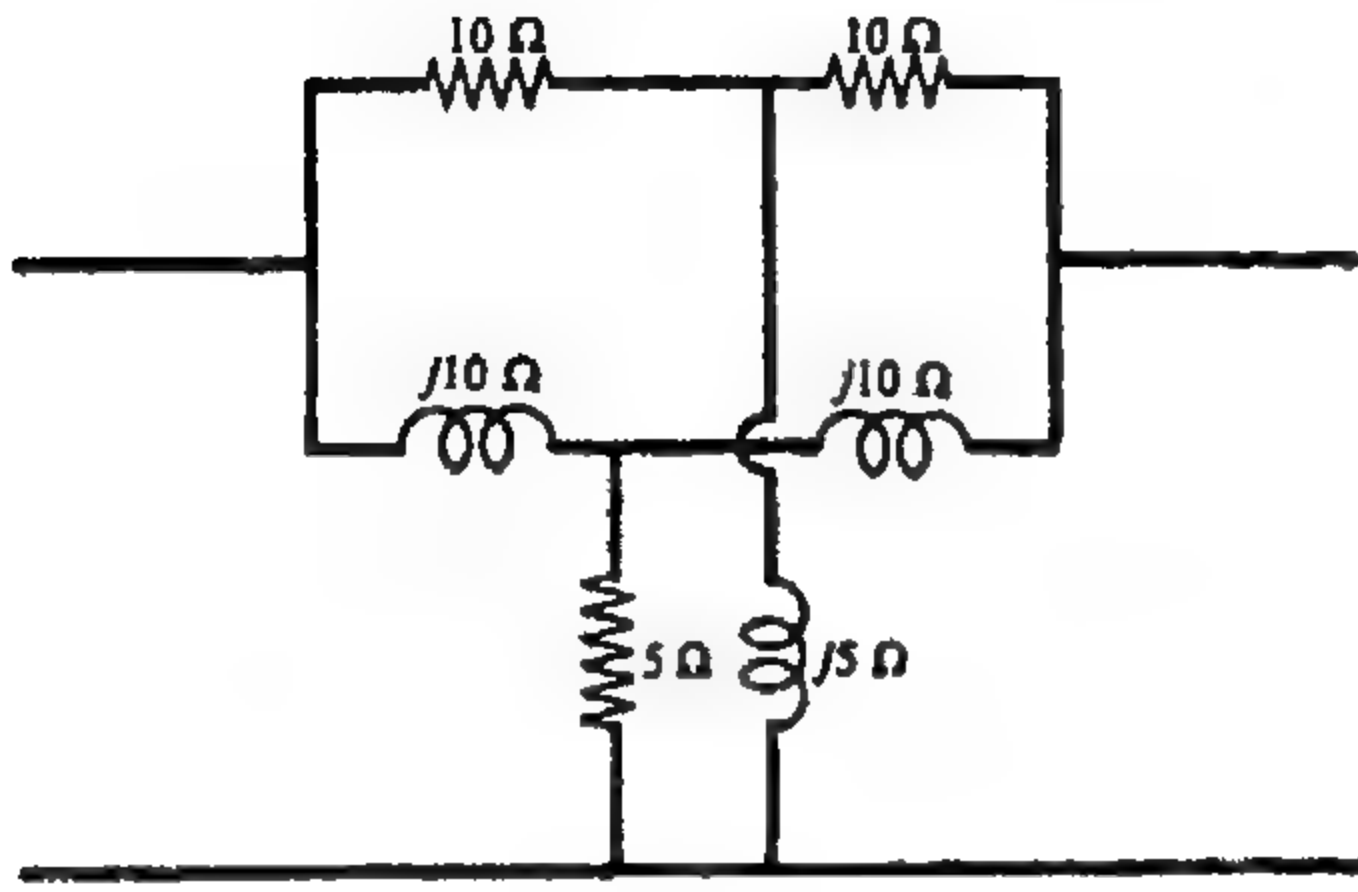
$$P = (7.7)^2 10 = 593 \text{ W.}$$

مسائل إضافية

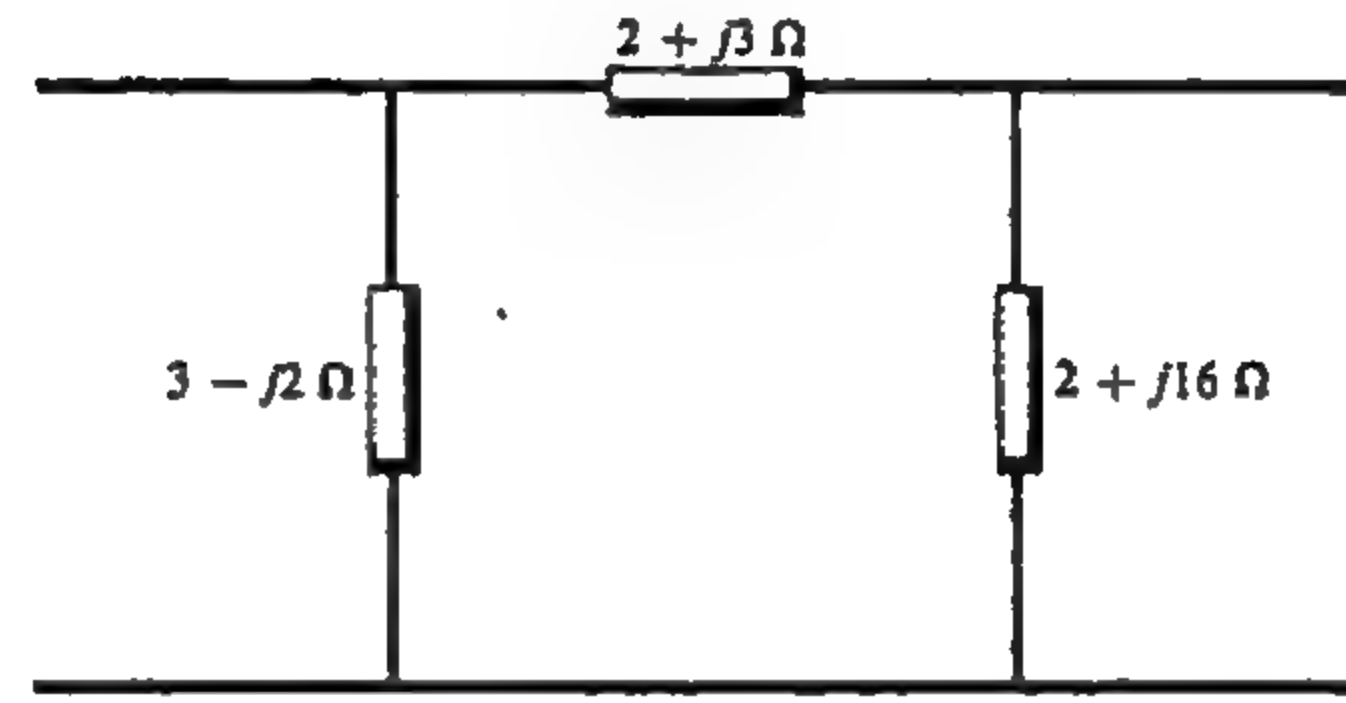
١٢-١٩ أوجد مجموعة المعاوقات المتصلة على شكل النجمة المكافئة لمجموعة المعاوقات المتصلة على شكل دلتا والموضحة

في الشكل ١٢ - ٢٩ .

الجواب : $(1 + j3) \Omega$, $(3 - j1) \Omega$, $(0.5 - j0.5) \Omega$



شكل ١٢ - ٣٠



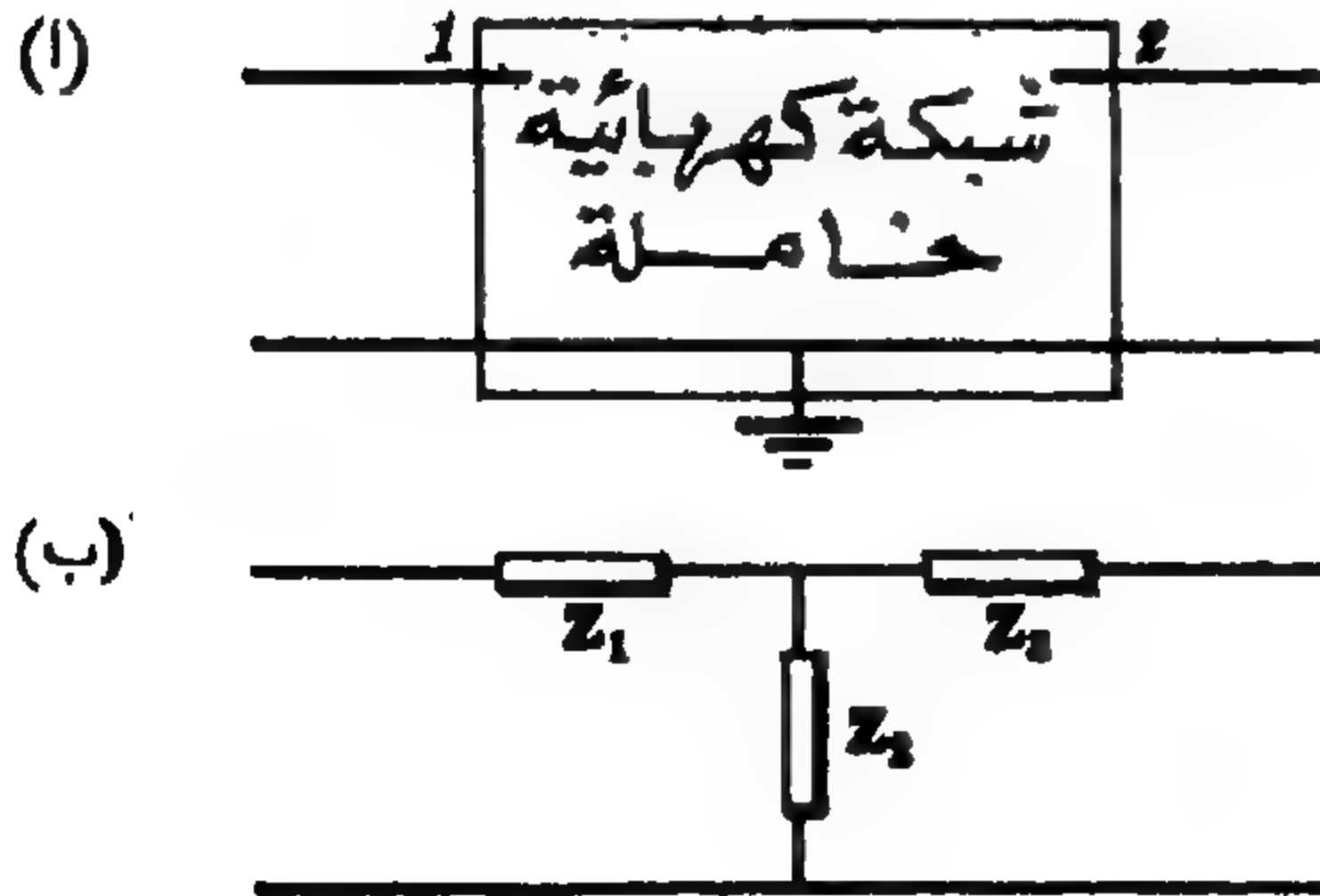
شكل ١٢ - ٢٩

١٢-٢٠ تتركب الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٠ من دائرتين متصلتين على التوازي كل منهما على شكل النجمة . أوجد المجموعة المكافئة لها بحيث تكون على شكل دلتا واحدة .

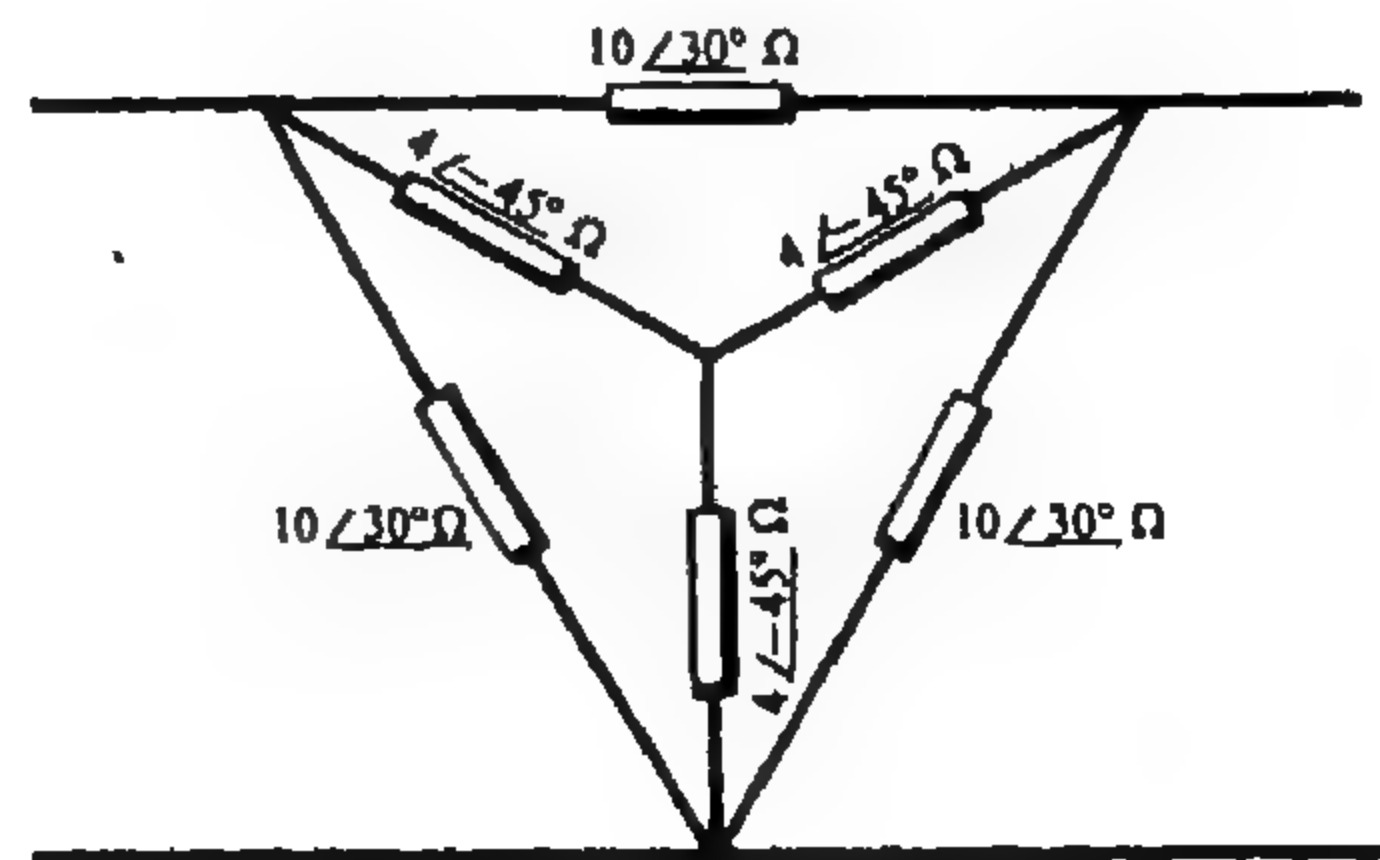
الجواب : $(5 + j5) \Omega$, ∞ , $(5 + j5) \Omega$

١٢-٢١ في الشكل ١٢-٣١ وصلت مجموعة دلتا المتزنة والتي فيها $Z = 10 \angle 30^\circ \Omega$ على التوازي مع مجموعة النجمة المتزنة والتي فيها $Z = 4 \angle -45^\circ \Omega$. أوجد مجموعة النجمة المكافئة لها .

الجواب : $Z = 2.29 \angle -3.5^\circ \Omega$



شكل ١٢ - ٣٢

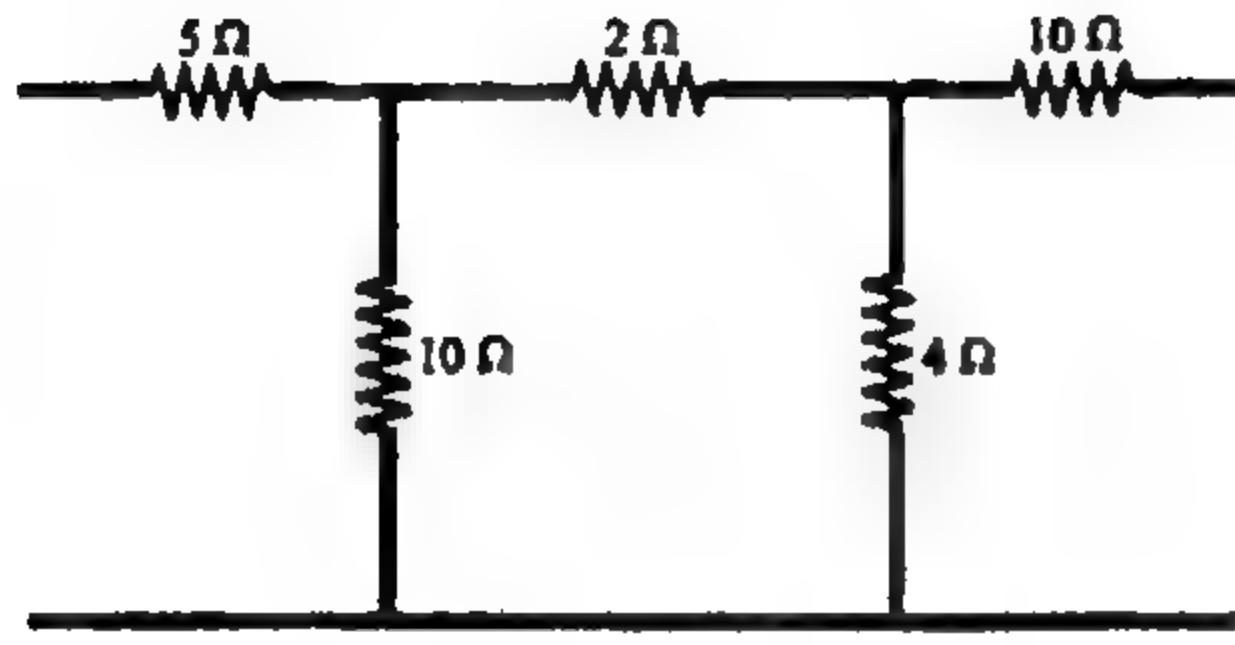


شكل ١٢ - ٣١

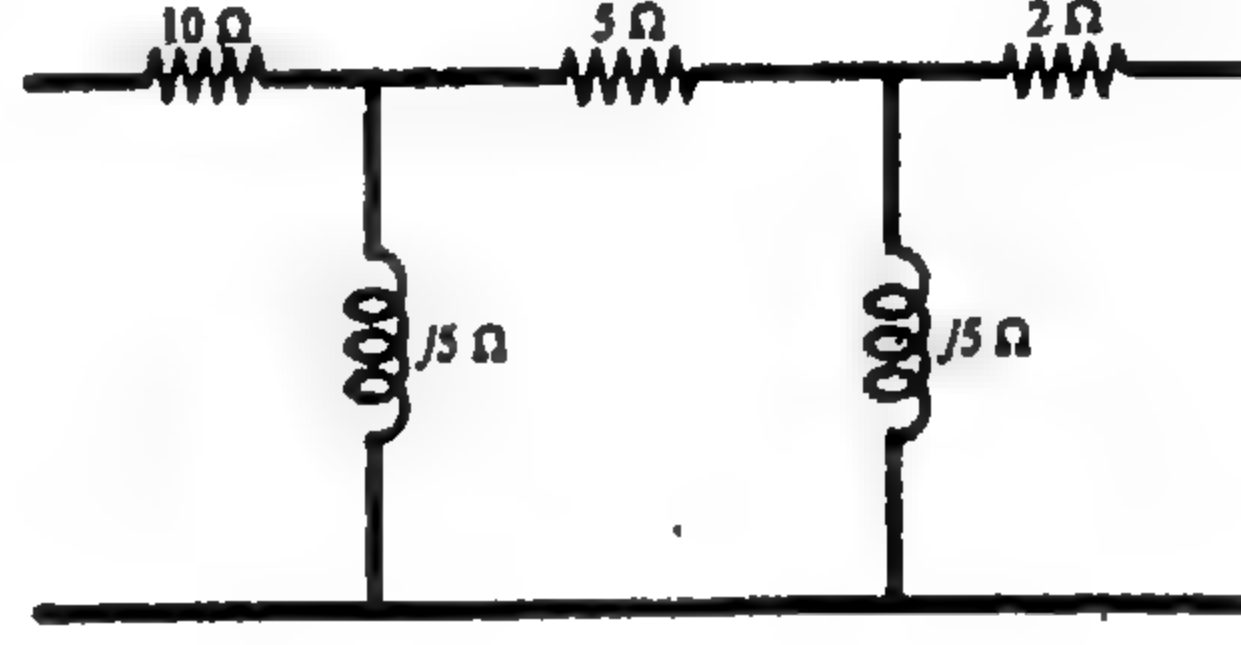
١٢-٢٢ بين أنه يمكن عموماً إبدال الشبكة الكهربائية الحاملة ذات النهايات الثلاث والموضحة في الشكل ١٢-٣٢ (أ) بدائرة متصلة على شكل النجمة مثل الموضحة في الشكل ١٢-٣٢ (ب)، حيث $Z_1 = (\Delta_{11} - \Delta_{12})/\Delta_Y$ و $Z_2 = \Delta_{12}/\Delta_Y$ و $Z_3 = (\Delta_{22} - \Delta_{12})/\Delta_Y$ (تشير Δ_Y والمعاملات المشتركة إلى معادلات جهد العقدة في الصيغة المصفوفية).

١٢-٢٣ استخدم طرق المسألة ١٢-٢٢ وذلك لإبدال الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٣ بدائرة مكافئة متصلة على شكل النجمة.

الجواب : $(12 + j1) \Omega, (-1 + j2) \Omega, (4 + j1) \Omega$



شكل ١٢ - ٣٤



شكل ١٢ - ٣٣

١٢-٢٤ أوجد الثلاثة معاوقات المتصلة على شكل النجمة والتي تكافئ الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٤

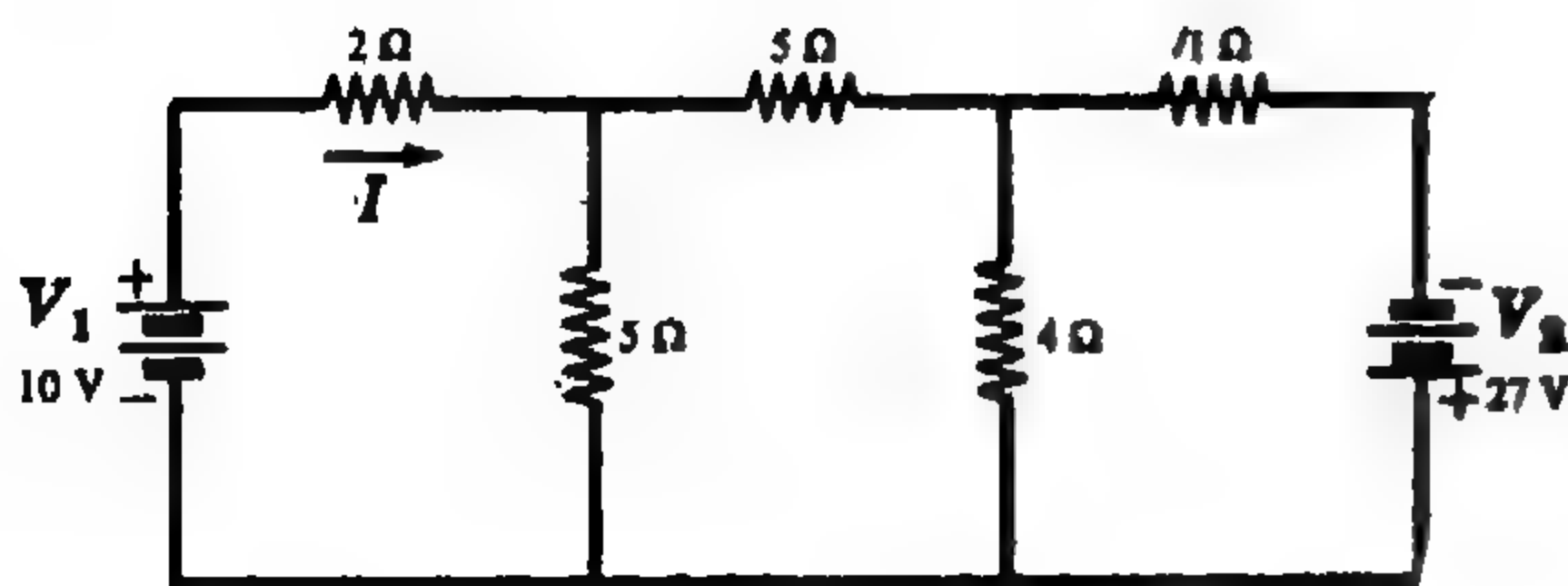
الجواب : $6.25 \Omega, 2.5 \Omega, 10.5 \Omega$

١٢-٢٥ بالإشارة إلى الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٤ أوجد دائرة دلتا المكافئة لها.

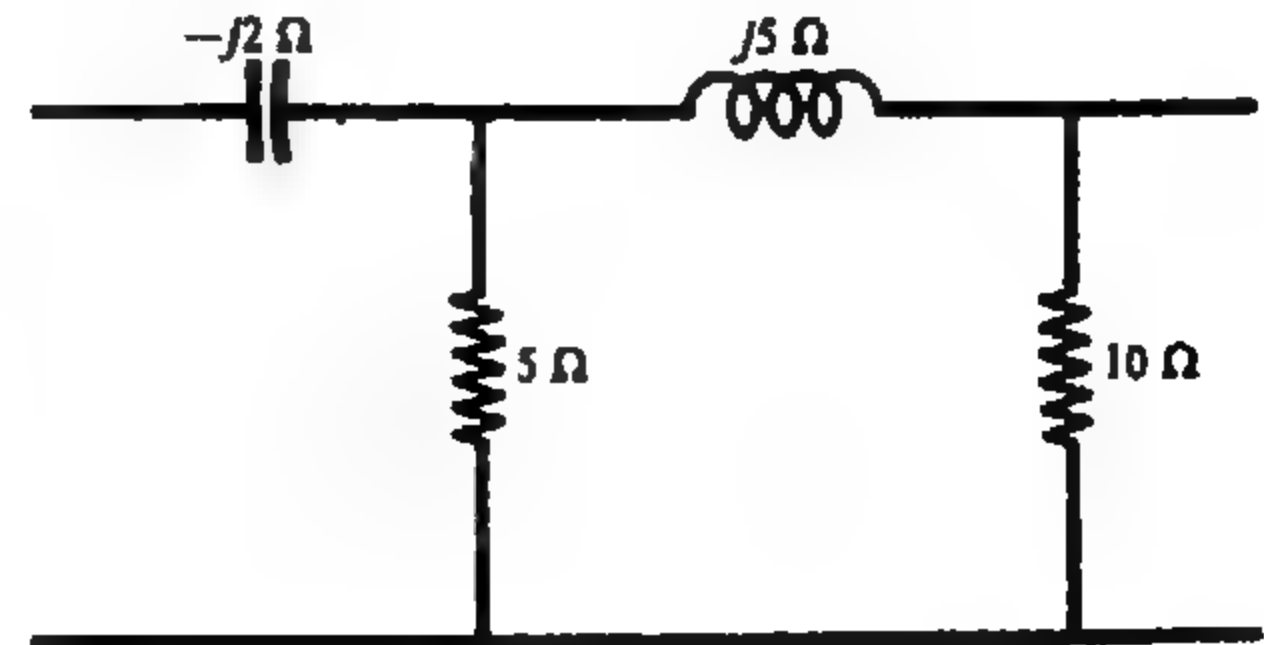
الجواب : $10.25 \Omega, 43 \Omega, 17.2 \Omega$

١٢-٢٦ أوجد دائرة دلتا المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٥.

الجواب : $(3 - j2) \Omega, (2 + j3) \Omega, (2 + j16) \Omega$



شكل ١٢ - ٣٦



شكل ١٢ - ٣٥

١٢ - ٢٧ باستخدام نظرية التراكب أوجد التيار المار في المقاومة 2Ω في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٦ .

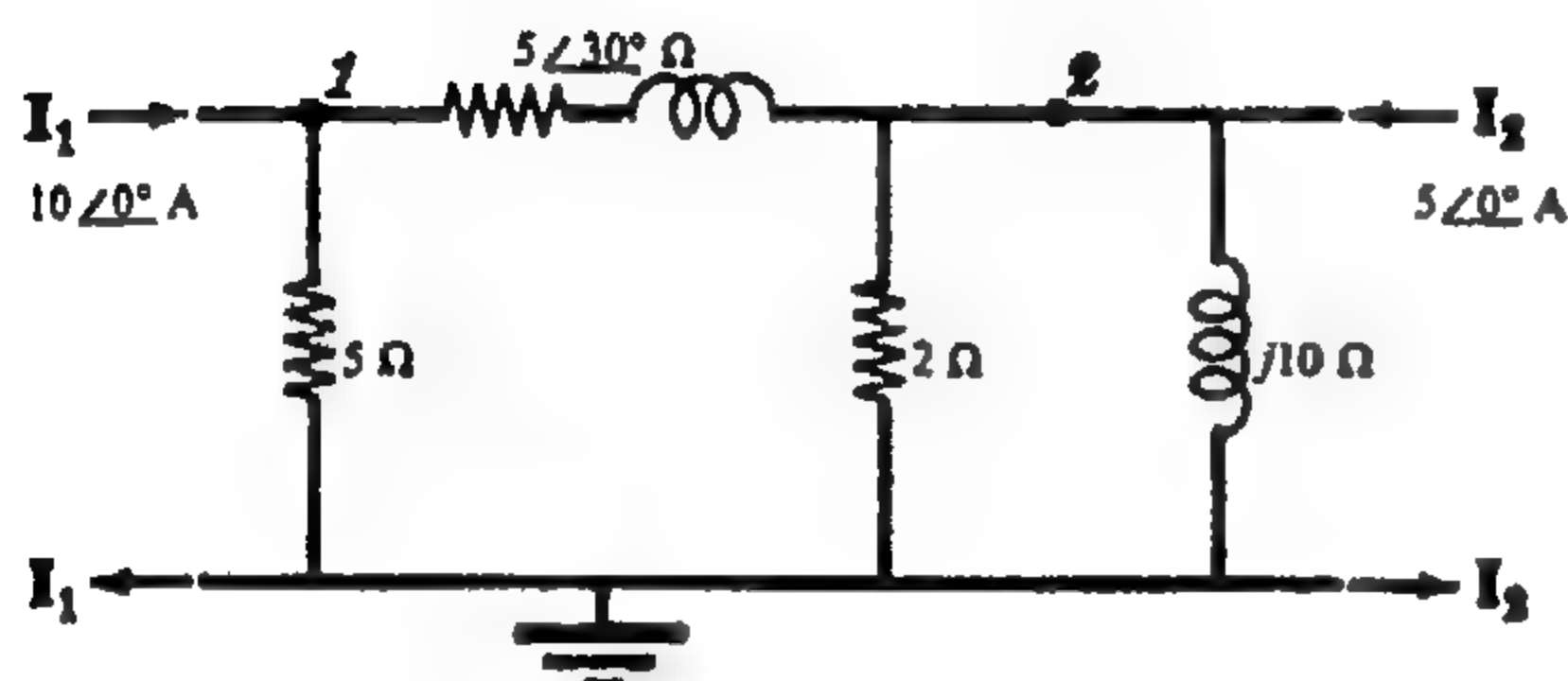
الجواب : $I = 4.27 \text{ A}$

١٢ - ٢٨ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٦ إذا تغير مصدر الجهد V_2 إلى 8.93 V وذلك مع اعتبار النهاية الموجبة له إلى أعلى ، فأوجد باستخدام نظرية التراكب التيار المار في المقاومة 2Ω .

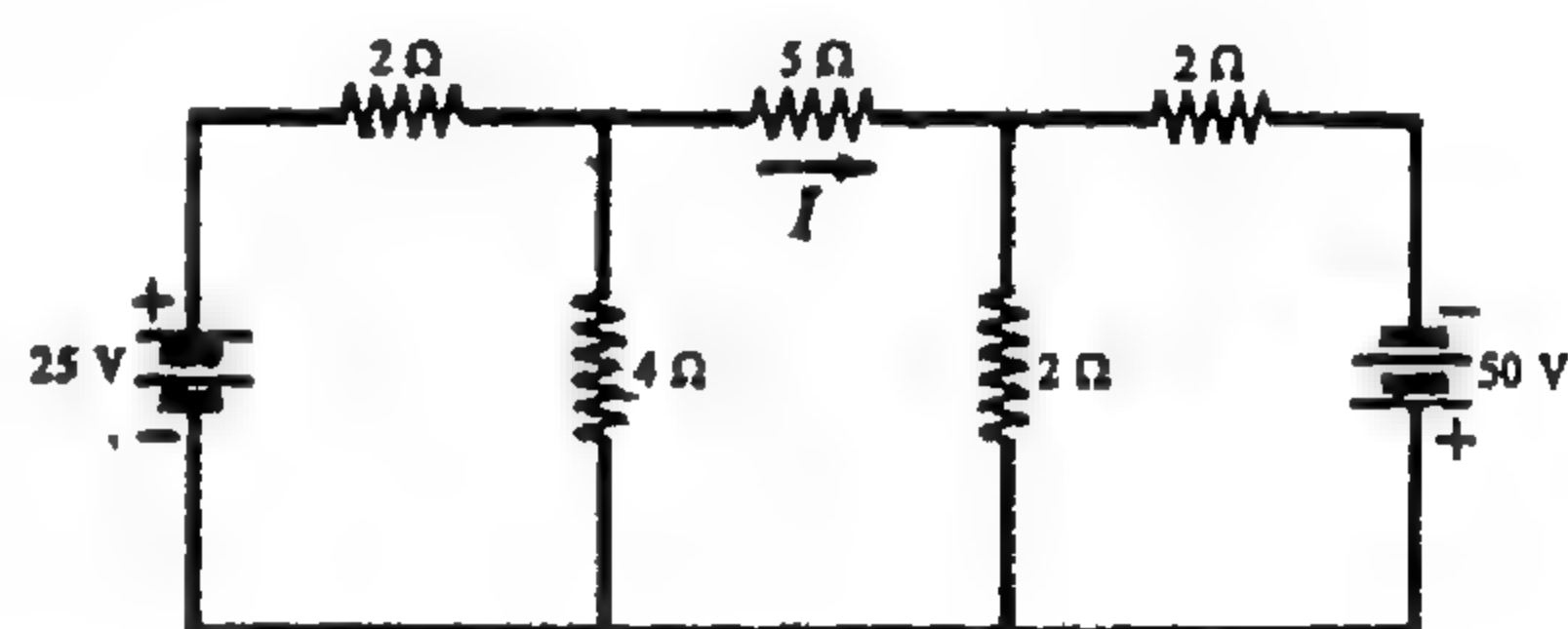
الجواب : $I = 1.43 \text{ A}$

١٢ - ٢٩ أوجد في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٣٧ التيار المار في المقاومة 5Ω نتيجة لكل مصدر من مصدرى الجهد .

الجواب : $2.27 \text{ A}, 3.41 \text{ A}$



شكل ١٢ - ٣٨



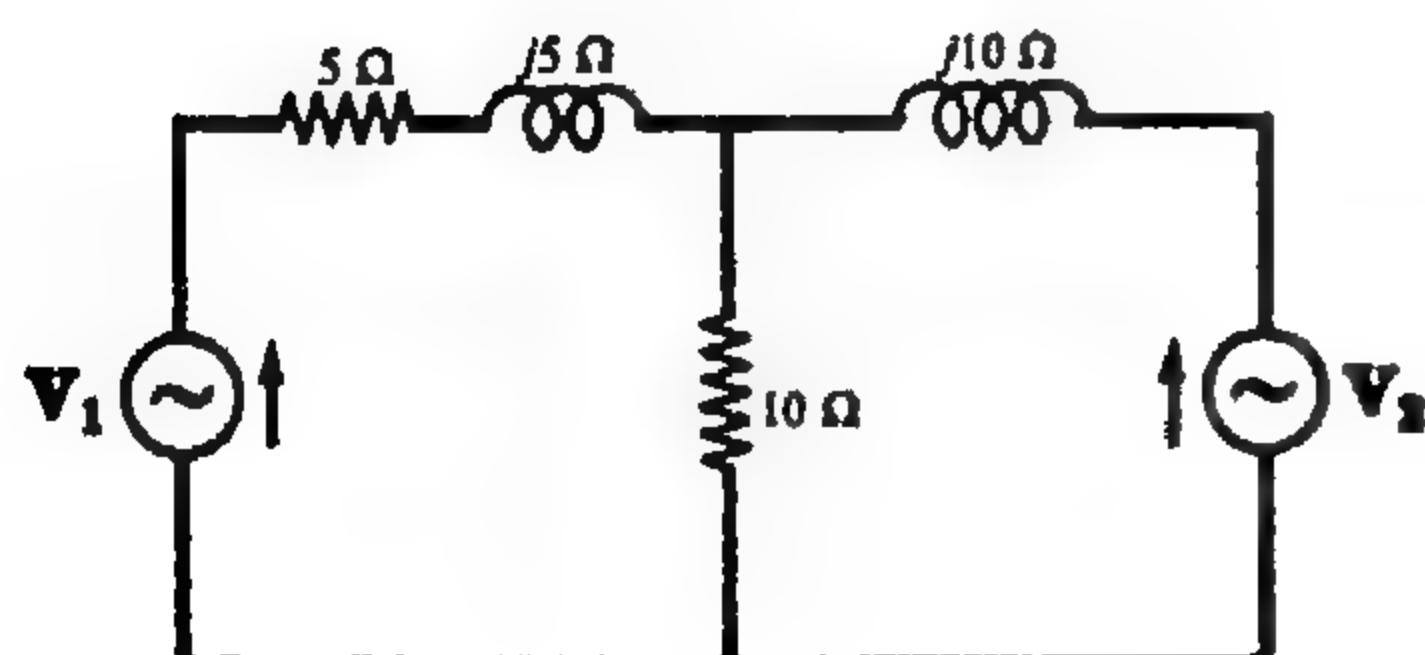
شكل ١٢ - ٣٧

١٢ - ٣٠ عين للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٨ مركبات جهد العقدة V_2 الناتجة عن كل مصدر من مصادر التيار .

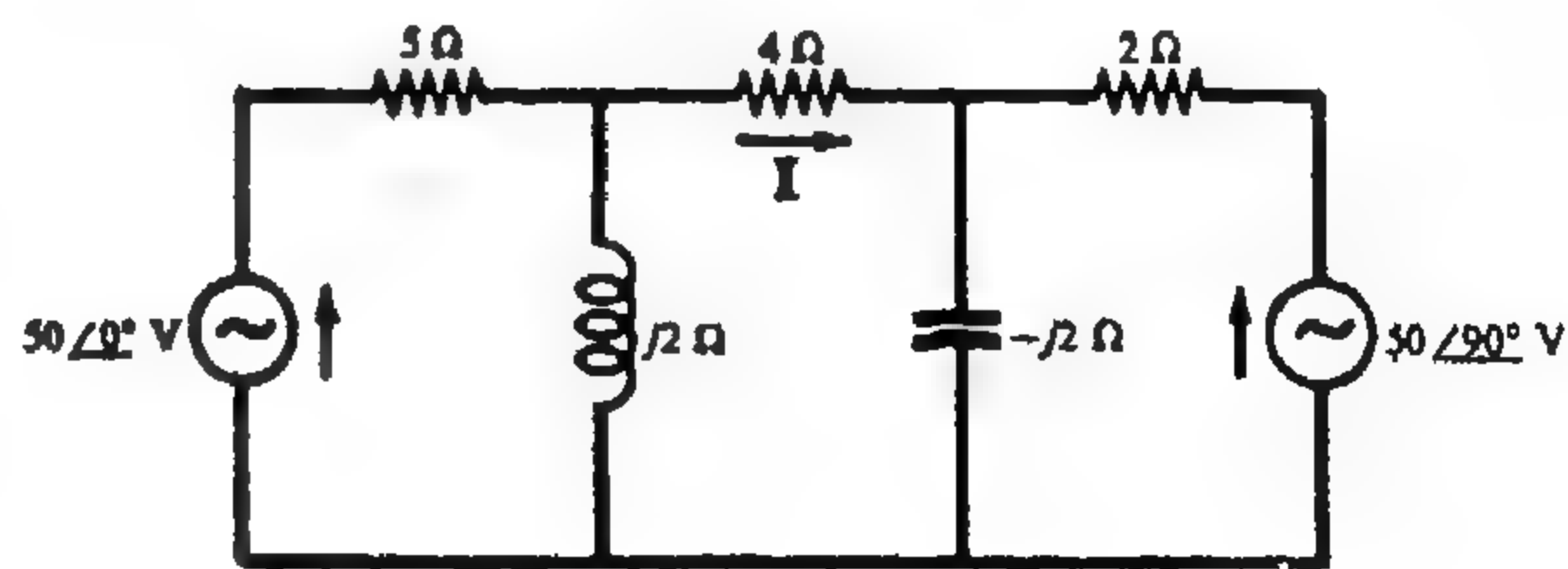
الجواب : $8.48 \angle -2.8^\circ \text{ V}, 8.20 \angle 12.2^\circ \text{ V}$

١٢ - ٣١ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٣٩ . أوجد التيار المار في المقاومة 4Ω والناتج عن كل مصدر من مصدرى الجهد .

الجواب : $3.24 \angle 60.95^\circ \text{ A}, 6.16 \angle -142.2^\circ \text{ A}$



شكل ١٢ - ٤٠



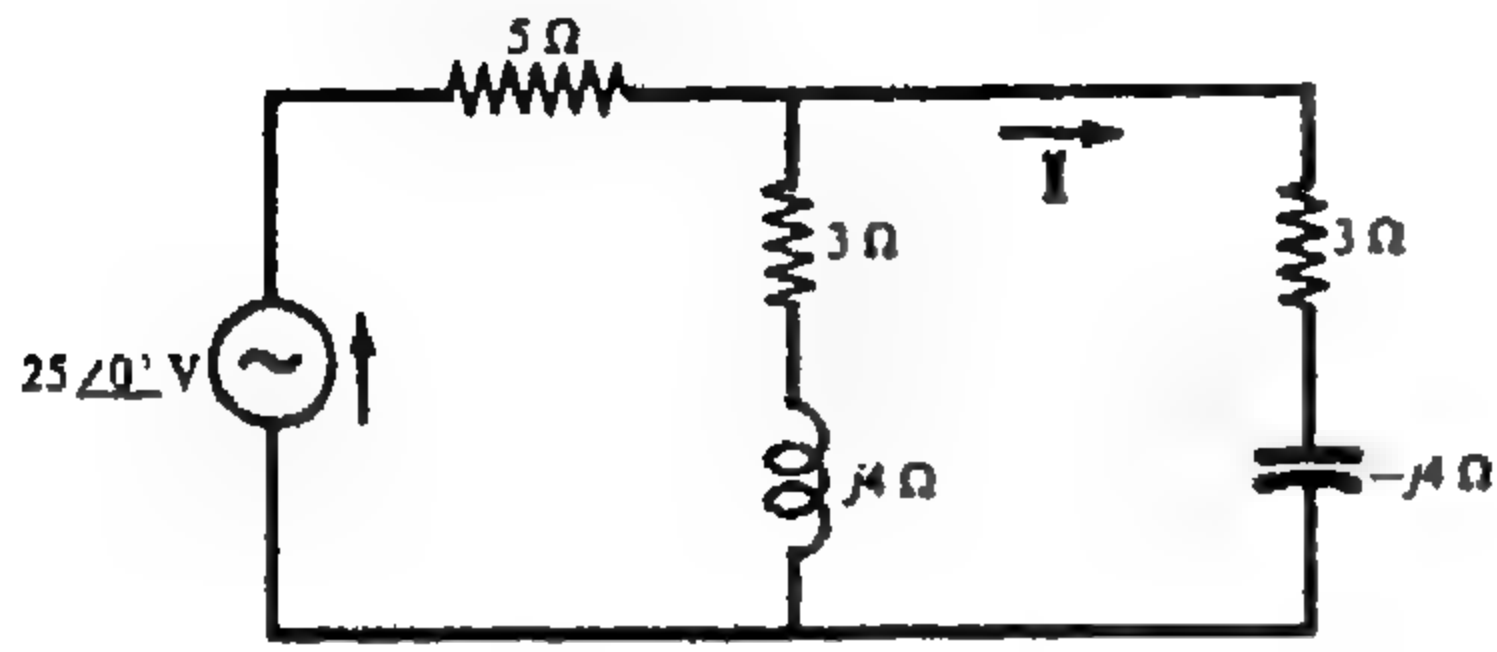
شكل ١٢ - ٣٩

١٢ - ٣٢ إذا فرضنا في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٤٠ أن مصدرى الجهد يؤثر كل منهما في الدائرة على حدة . فإذا كان التياران الناتجان في المقاومة 10Ω متساويين . فما هي قيمة النسبة V_1/V_2 ؟

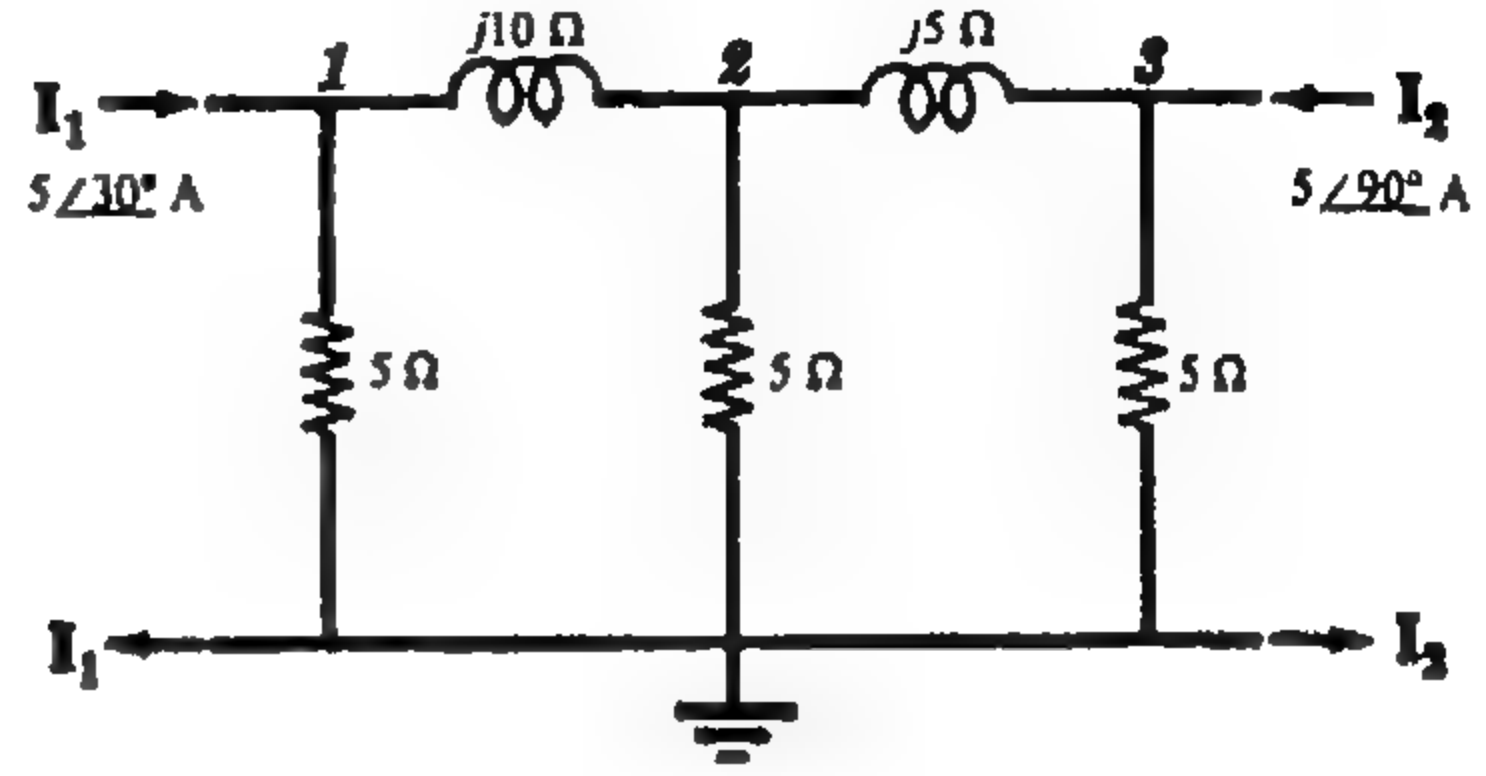
الجواب : $0.707 \angle 45^\circ$

١٢ - ٣٣ أوجد في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٤١ مركبات جهد العقدة V_2 الناتجة عن كل مصدر من مصدرى التيار I_1 و I_2 .
الجواب : $5.82 \angle -5.5^\circ \text{ V}, 9.22 \angle 72.9^\circ \text{ V}$

١٢ - ٣٤ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٤١ إذا تغير مصدر التيار I_2 إلى $3.16 \angle 191.6^\circ \text{ A}$ فحين جهد العقدة V_2 باستخدام نظرية التراكب .



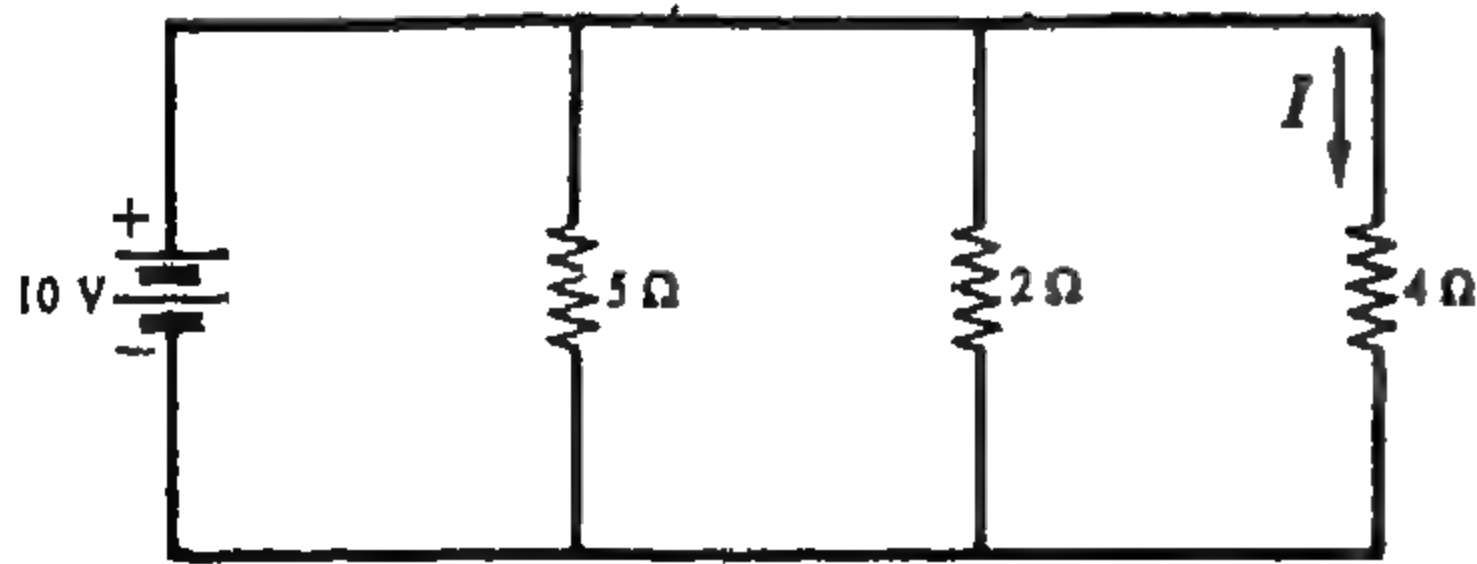
شكل ١٢ - ٤٢



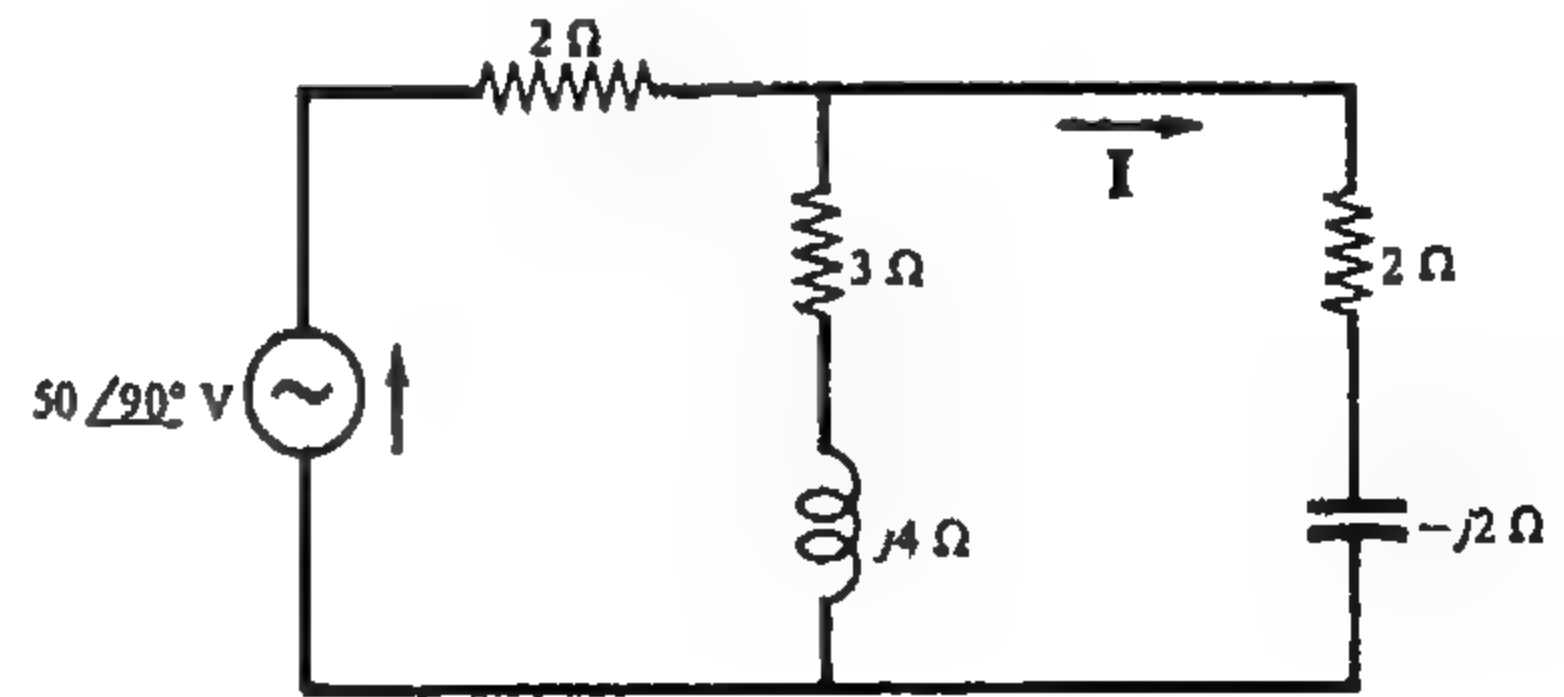
شكل ١٢ - ٤١

١٢ - ٣٥ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٤٢ أوجد التيار I المار في المقاومة $3 - j4\Omega$. طبق نظرية التبادل ثم قارن بين التيارين .
الجواب : $2.27 \angle 53.2^\circ \text{ A}$

١٢ - ٣٦ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٤٣ أوجد التيار I المار في المقاومة $2 - j2\Omega$. طبق نظرية التبادل ثم قارن بين التيارين .
الجواب : $10.1 \angle 129.1^\circ \text{ A}$



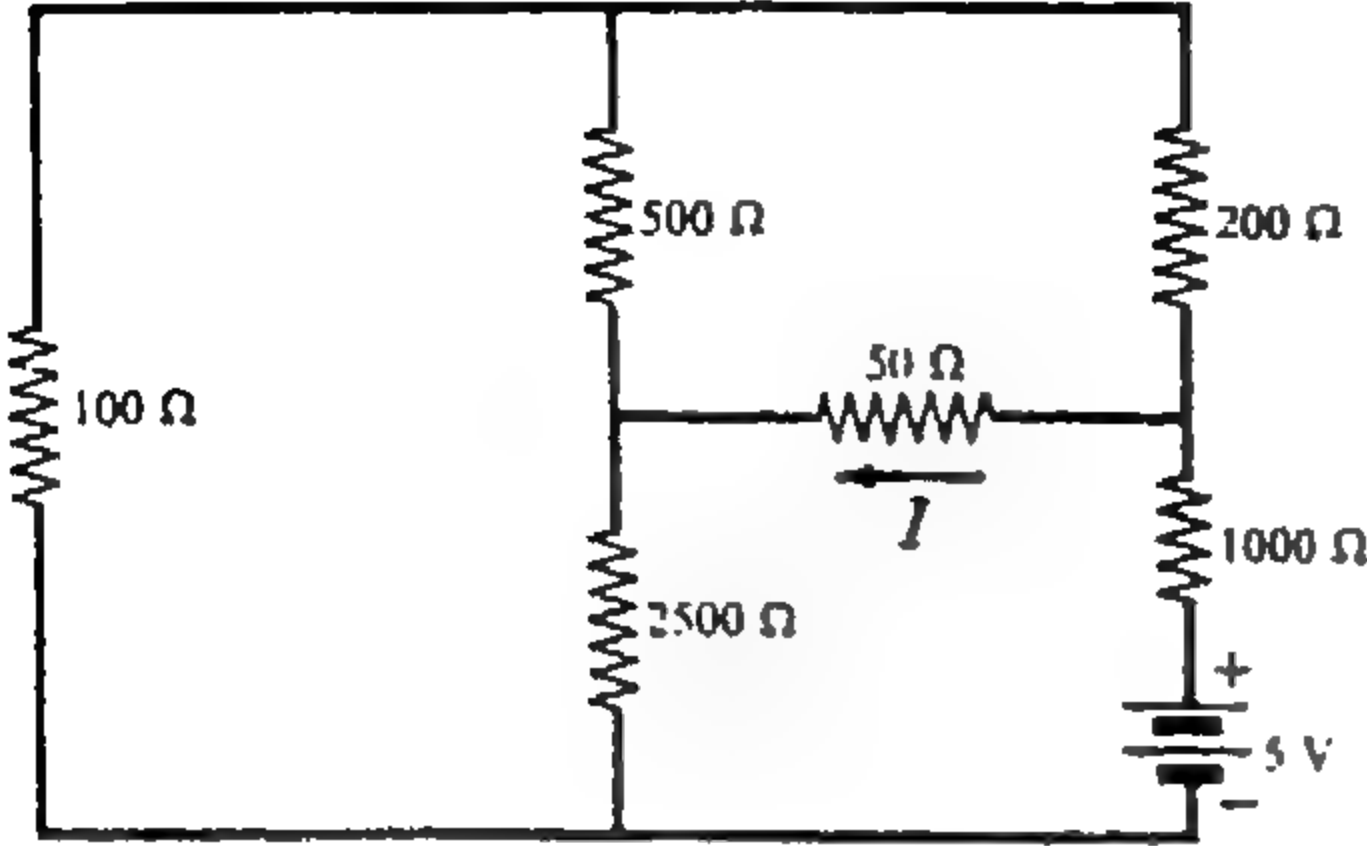
شكل ١٢ - ٤٤



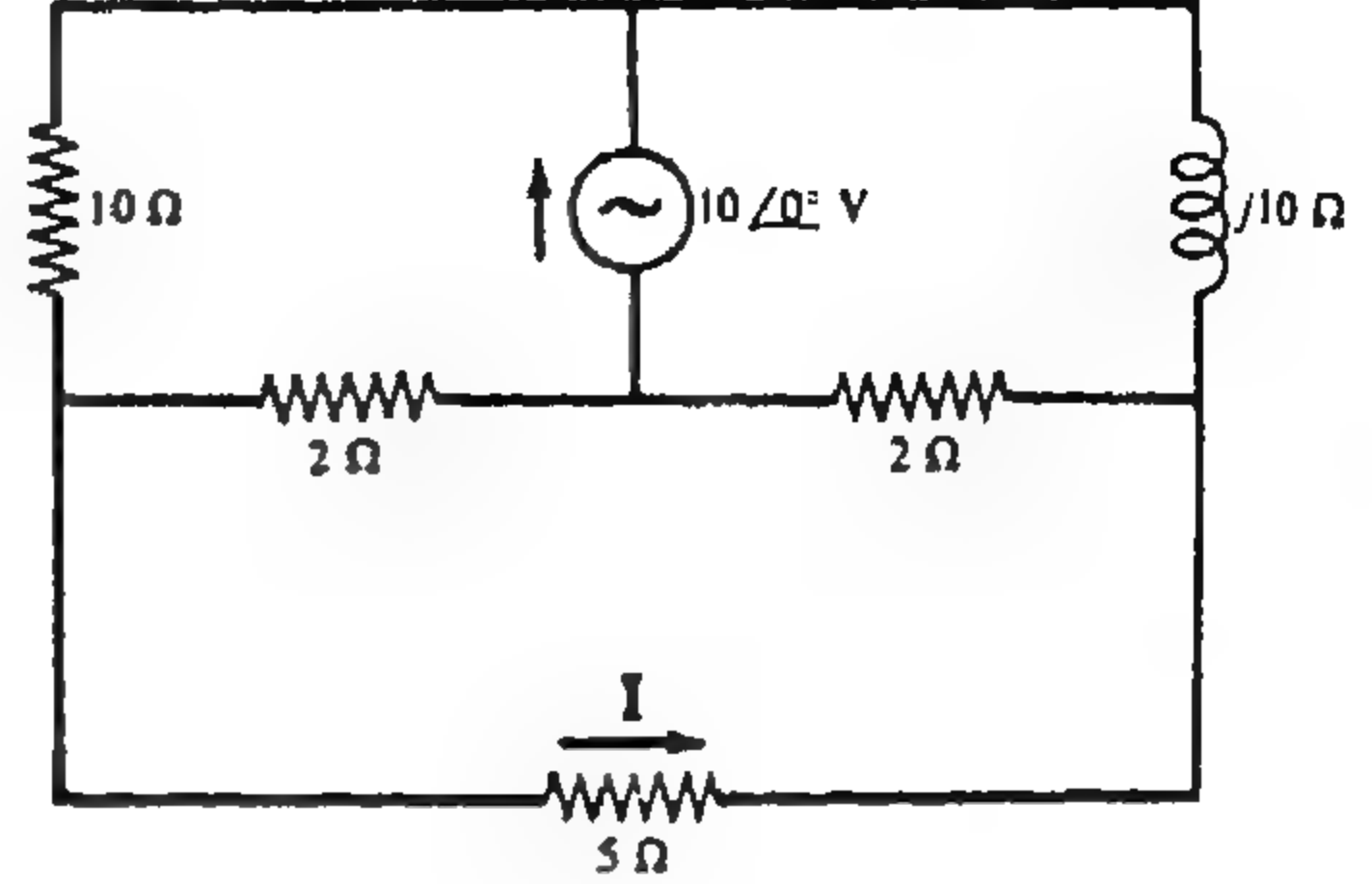
شكل ١٢ - ٤٣

١٢ - ٣٧ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٤٤ أوجد التيار المار في المقاومة 4Ω طبق نظرية التبادل وقارن بين التيارين . ما هو التغير في التيار المار في الفرعين 5Ω و 2Ω ؟
الجواب : 2.5 A ، بعد تطبيق نظرية التبادل نجد أن تيار الفرعين 5Ω و 2Ω يساوى صفراً . وكان التيار المار فيهما قبل ذلك يساوى 2 A و 5 A على الترتيب .

١٢-٣٨ أوجد في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٤٥ التيار المار في المقاومة 5Ω . طبق نظرية التبادل ثم قارن بين التيارين .
الجواب : $0.270 \angle 53.75^\circ \text{ A}$



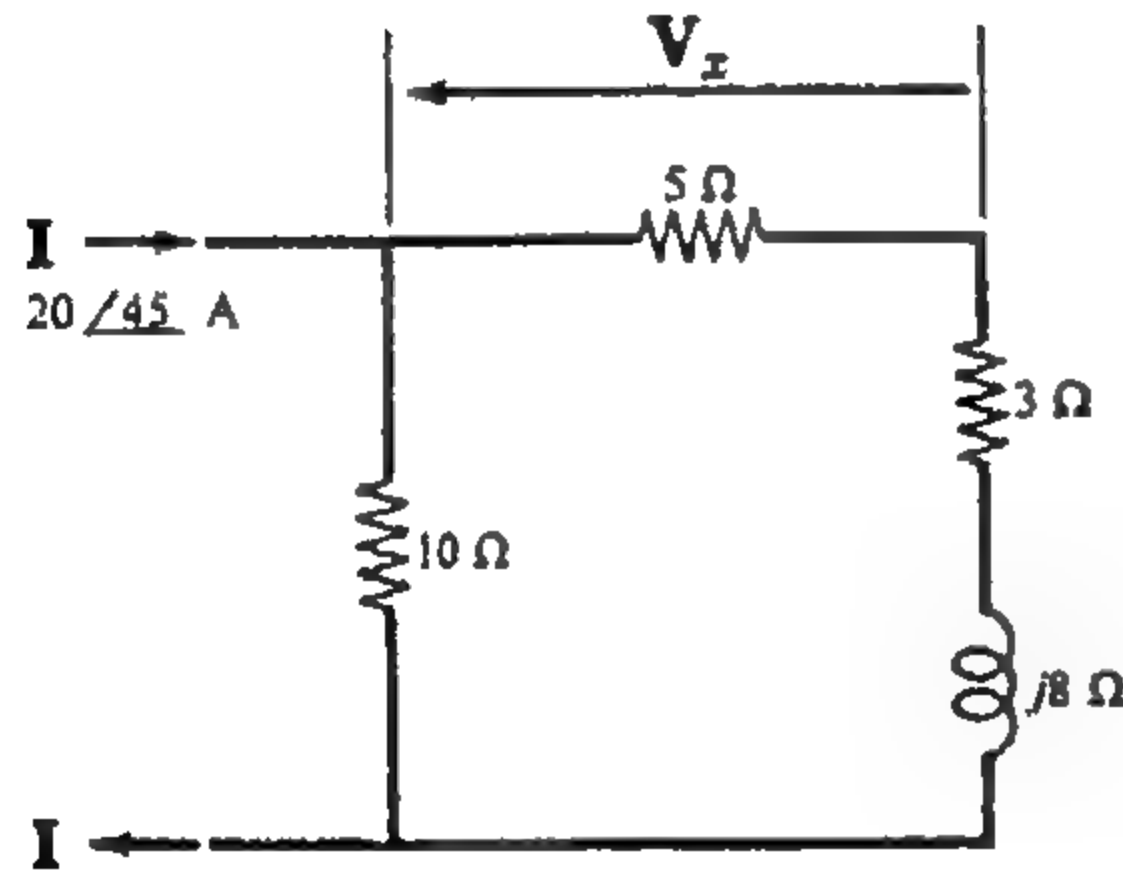
شكل ١٢ - ٤٦



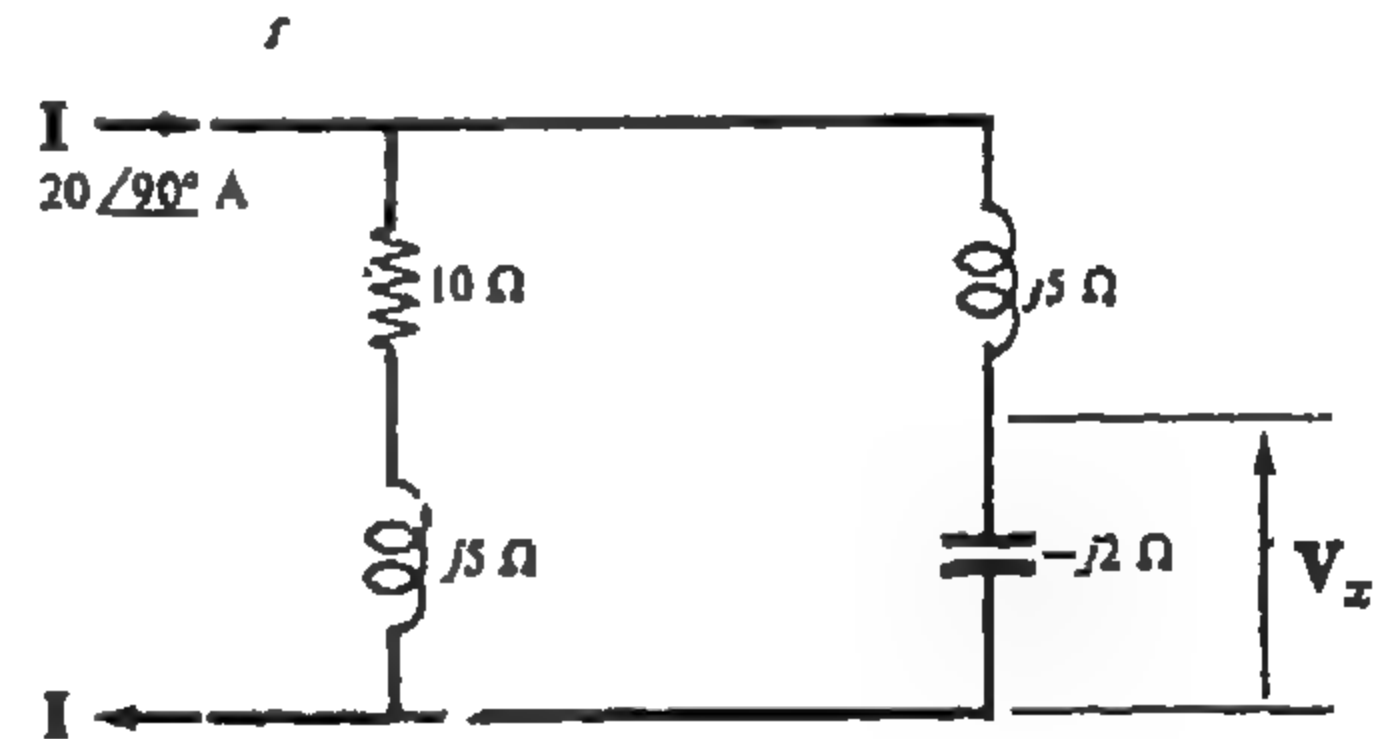
شكل ١٢ - ٤٥

١٢-٣٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٤٦ احسب التيار I المار في المقاومة 50Ω . حقق نظرية التبادل وذلك بتغيير موضع مصدر الجهد والتيار الناتج I .
الجواب : 1.32 m A

١٢-٤٠ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢-٤٧ عين الجهد V_x . ثم طبق نظرية التبادل وقارن بين الجهدين .
الجواب : $35 \angle -12.1^\circ \text{ V}$



شكل ١٢ - ٤٨

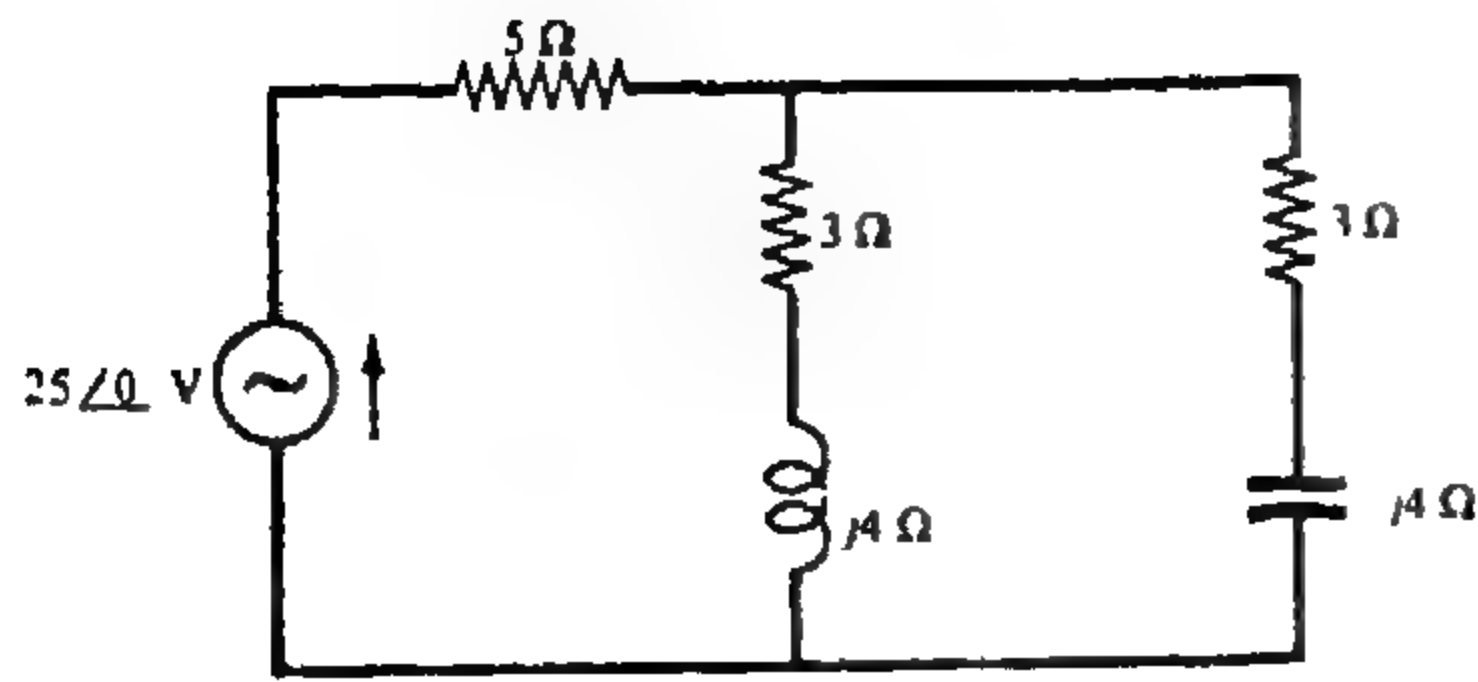


شكل ١٢ - ٤٧

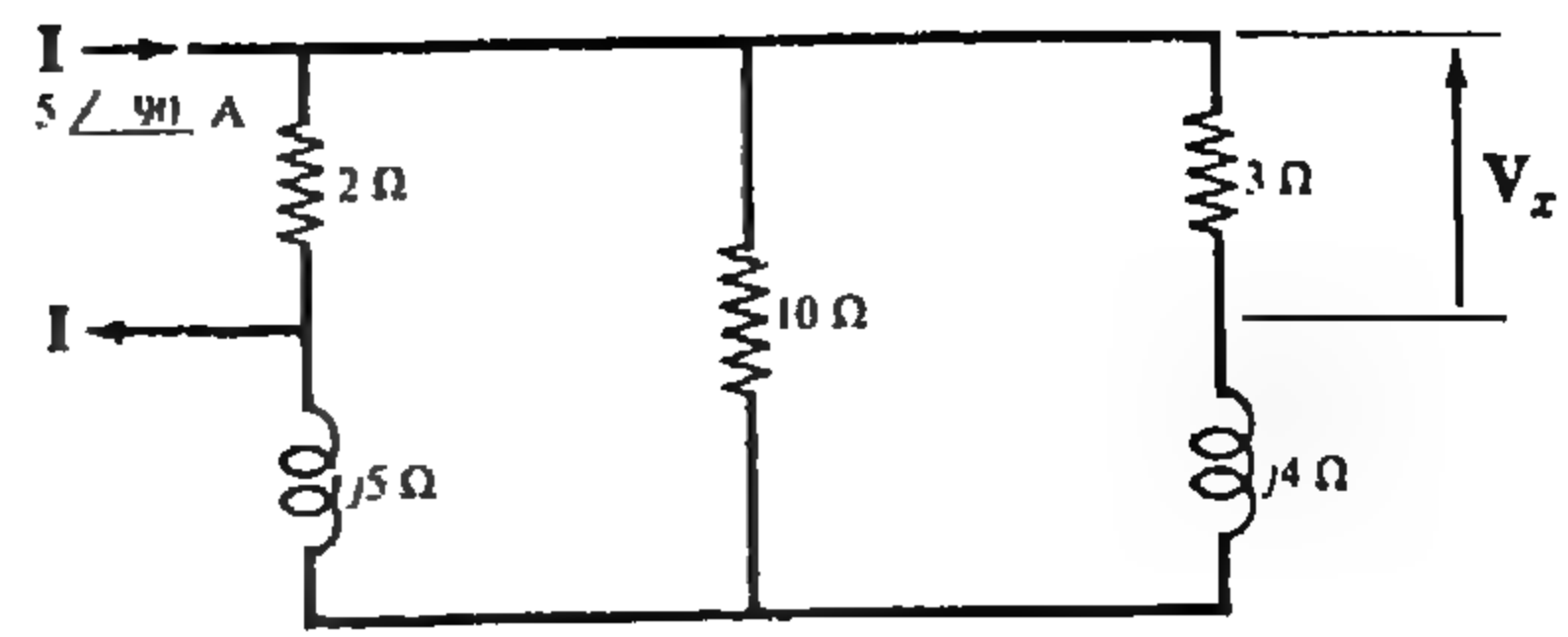
١٢-٤١ أوجد V_x في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢-٤٨ ثم حقق نظرية التبادل .
الجواب : $50.8 \angle 21^\circ \text{ V}$

١٢-٤٢ أوجد الجهد V_x في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٤٩ . غير موضع مصدر التيار والجهد V_x وحقق نظرية التبادل .

الجواب : $2.53 \angle -162.3^\circ \text{ V}$



شكل ١٢ - ٥٠



شكل ١٢ - ٤٩

١٢ - ٤٣ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٥٠ ابدل المعاوقتين $3 + j4\Omega$ و $3 - j4\Omega$ المتصلتين على التوازي بمصدر جهد معادل . كاختبار أوجد التيار المار في المقاومة 5Ω قبل وبعد التعويض .

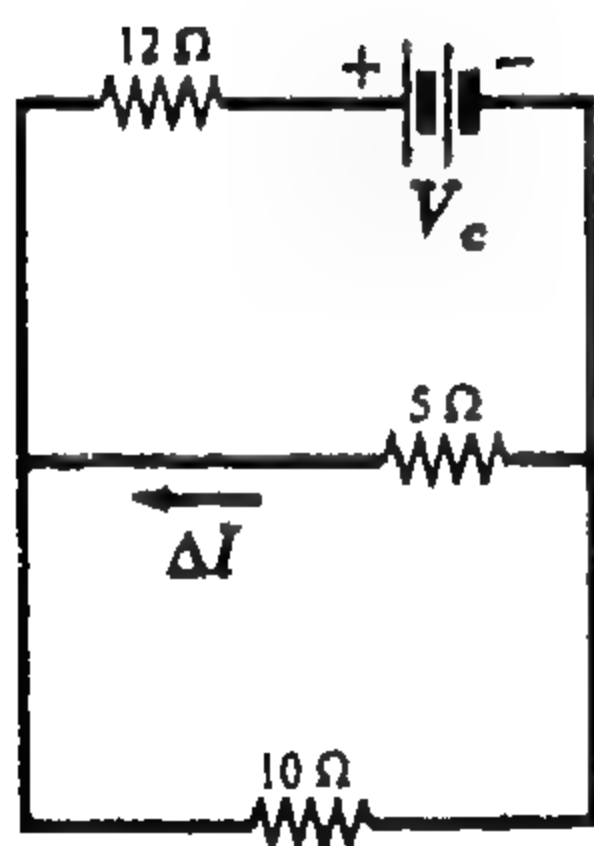
الجواب : $V_c = 11.35\angle 0^\circ V, I = 2.73\angle 0^\circ A$

١٢ - ٤٤ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٥٠ ابدل المقاومة 5Ω بمصدر جهد معادل ثم أوجد التيار الكلي الناتج عن المصدر $25\angle 0^\circ V$ قبل وبعد التعويض .

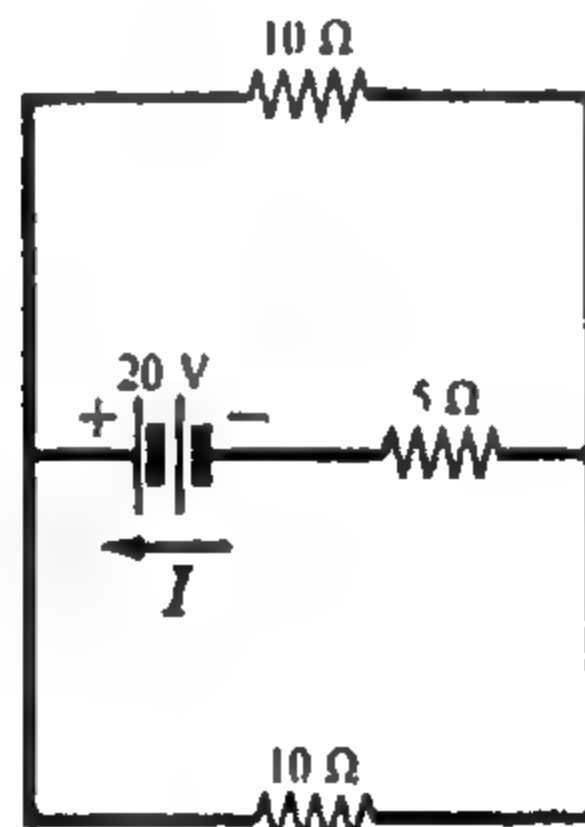
الجواب : $V_c = 13.65\angle 0^\circ V, I = 2.73\angle 0^\circ A$

١٢ - ٤٥ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٥١ ابدل كل مجموعة مقاومات متصلة على التوازي بمصدر جهد معادل ثم احسب التيار الكلي الخارج من المصدر 50 volt .

الجواب : $11.35 V, 4.55 V, 3.41 A$

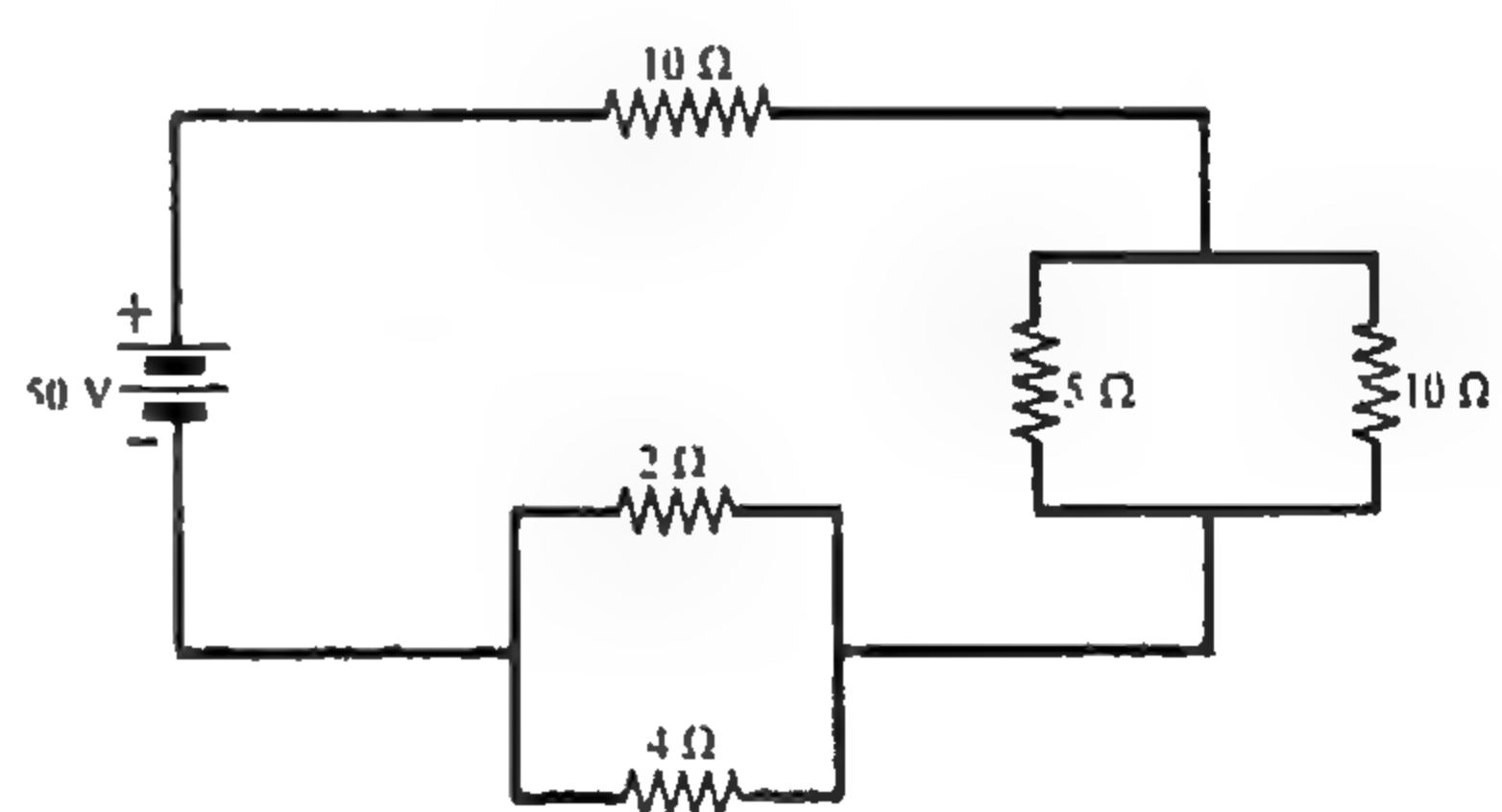


(ب)



(أ)

شكل ١٢ - ٥٢

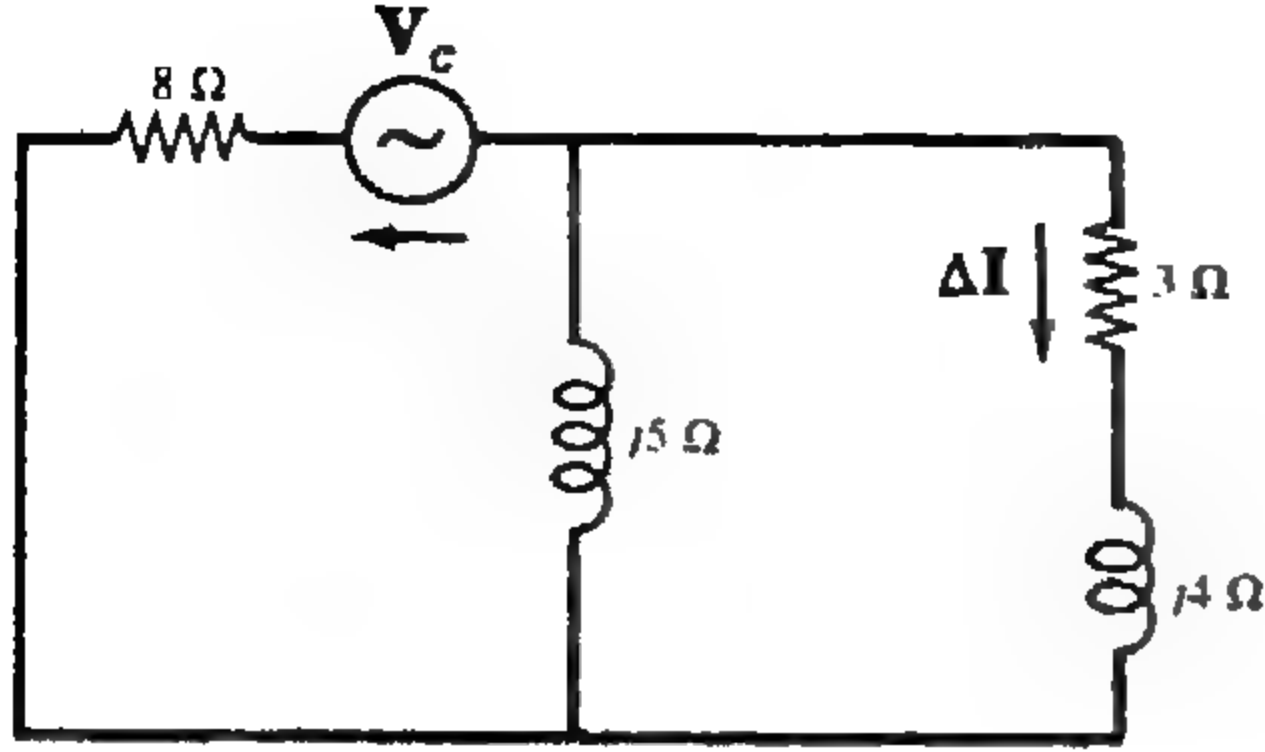


شكل ١٢ - ٥١

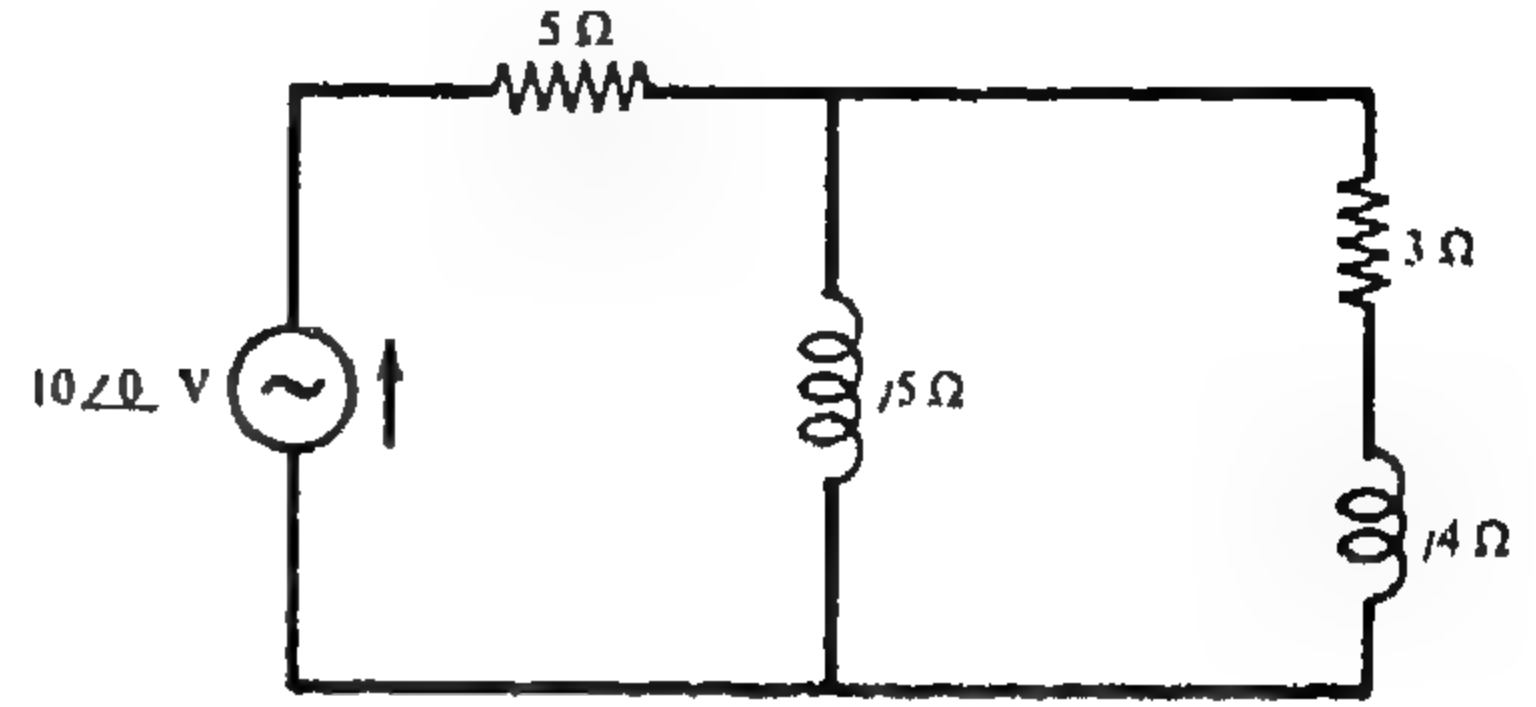
١٢ - ٤٦ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٥٢ (أ) يحتوي مصدر الجهد 20 volt على تيار I ، فإذا تغير التيار الخارج من المصدر إلى I' عندما تغيرت المقاومة 10Ω العلوية إلى 12Ω ، فأوجد التغير في التيار ΔI ($I' - I$) وذلك باستخدام مصدر الجهد المعادل كما هو موضح في الشكل ١٢ - ٥٢ (ب) .

الجواب : $\Delta I = -0.087 A$

١٧-٤٧ إذا تغيرت المقاومة 5Ω في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٥٣ (أ) إلى 8Ω فعين التغير ΔI الناتج في التيار المار في المعاوقة $3 + j4$ الجواب : $0.271 \angle 159.5^\circ A$



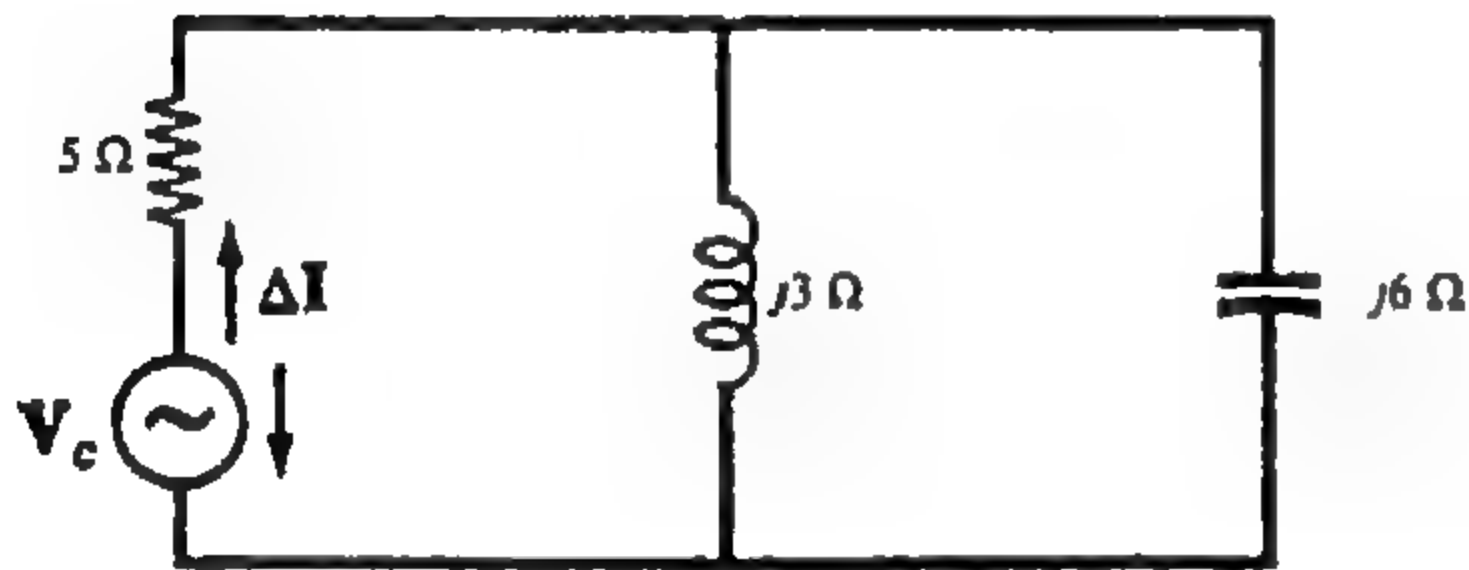
(ب)



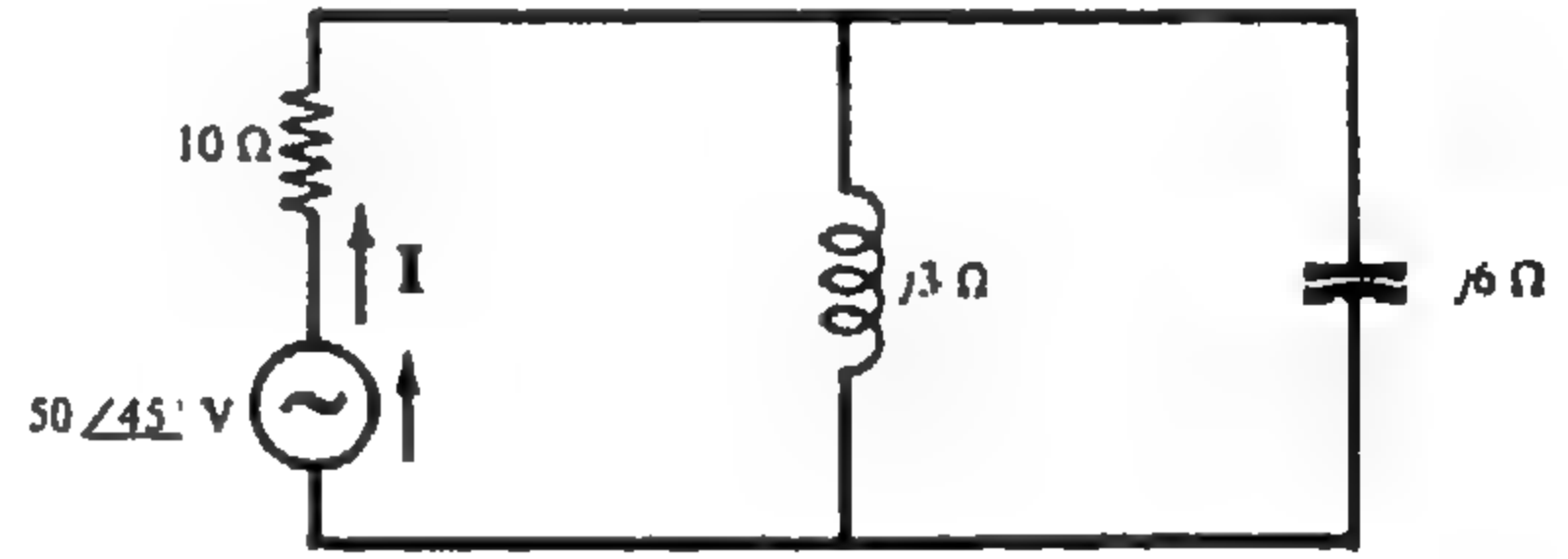
(أ)

شكل ١٢ - ٥٣

١٧-٤٨ يحتوي المصدر $50 \angle 45^\circ V$ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٥٤ (أ) على تيار I . فإذا تغيرت المقاومة 10Ω إلى 5Ω ، فأوجد V_c و ΔI الموضحين في الشكل ١٢-٥٤ (ب) وذلك باستخدام نظرية التعادل . الجواب : $21.45 \angle 166^\circ V, 2.74 \angle 36^\circ A$



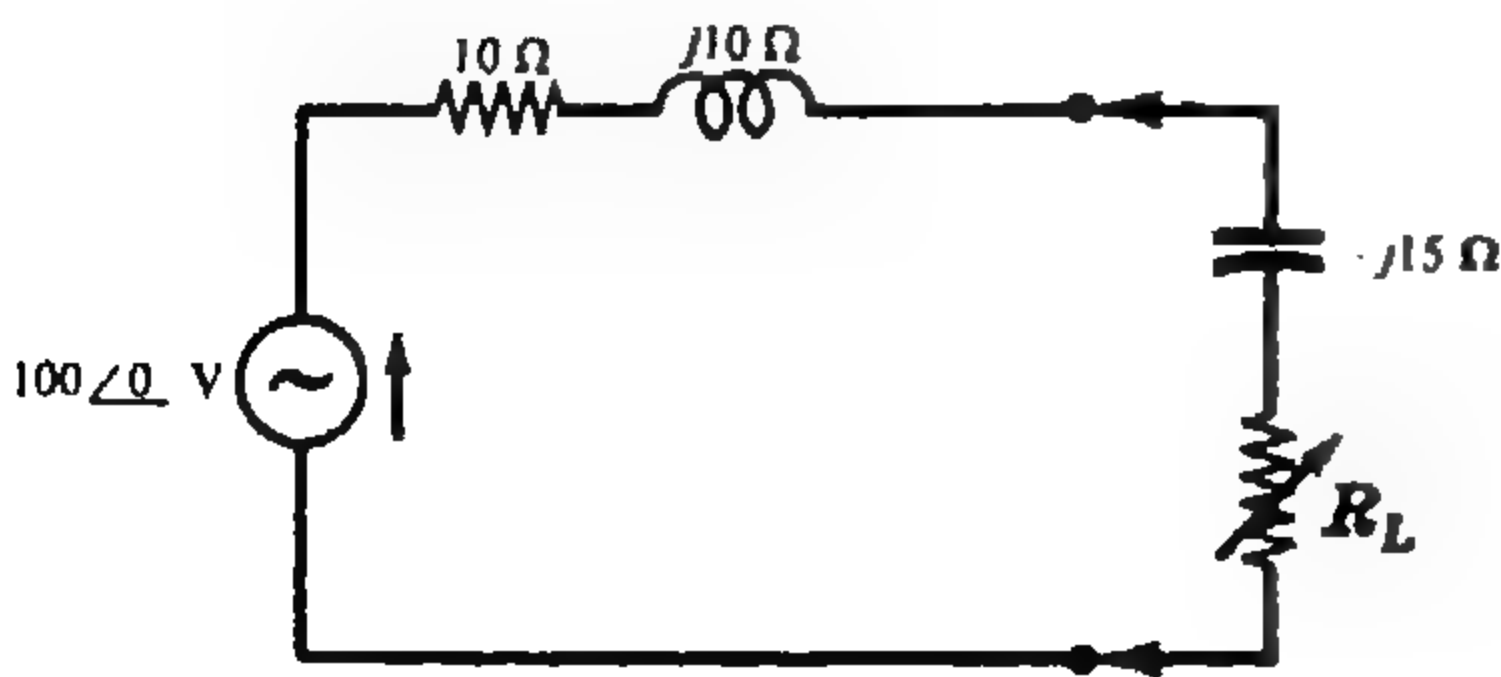
(ب)



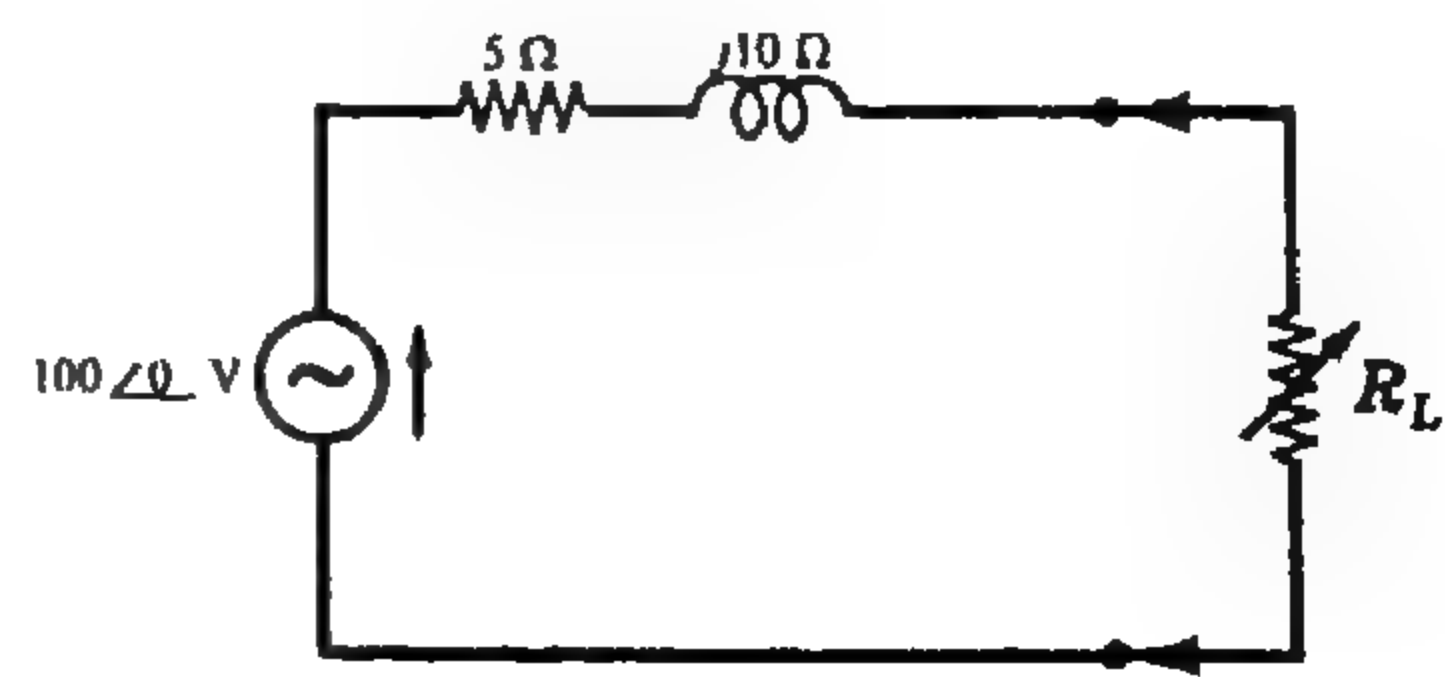
(أ)

شكل ١٢ - ٥٤

١٧-٤٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢-٥٥ أوجد قيمة R_L التي ينتج عنها انتقال أكبر قدرة . احسب قيمة أكبر قدرة . الجواب : $11.17 \text{ ohms}, 309 \text{ W}$



شكل ١٢ - ٥٦



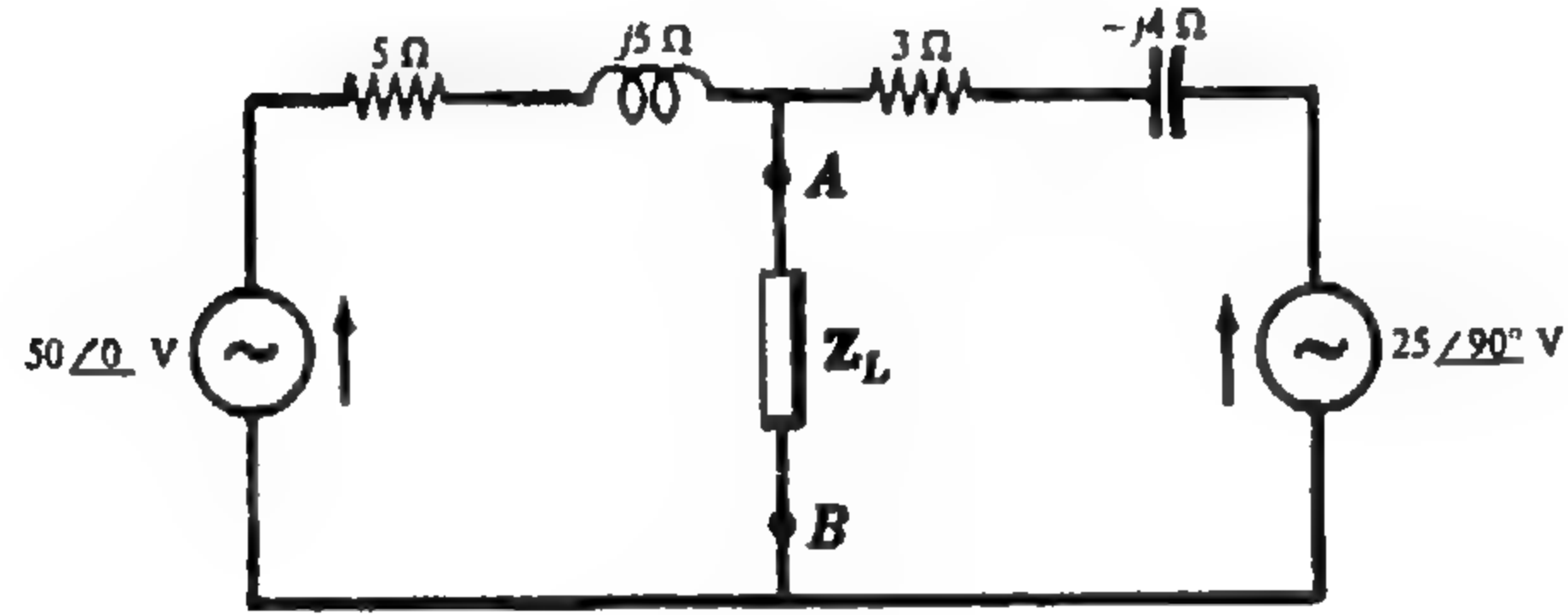
شكل ١٢ - ٥٥

١٢ - ٥٠ إذا كان الحمل في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٥٦ يتكون من ممانعة سعوية ثابتة مقدارها 15Ω ومقاومة متغيرة R_L . فأوجد (أ) : قيمة R_L التي ينتج عنها أكبر قدرة ، (ب) قيمة أكبر قدرة .

الجواب : (أ) $R_L = 11.17 \Omega$ (ب) $236 W$

١٢ - ٥١ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٥٧ يؤثر مصدرا جهد على معاوقة الحمل المتصلة بالنهايتين AB . فإذا تغير كل من الممانعة ومقاومة الحمل - فما هي معاوقة الحمل Z_L التي تستقبل أكبر قدرة ؟

الجواب : $(4.23 + j1.15) \Omega, 5.68 W$



شكل ١٢ - ٥٧

الفصل الثالث عشر

الحث التبادلي

مقدمة :

تتكون الشبكات الكهربائية التي درست في الفصول السابقة من مسارات مغلقة أو شبكات فرعية وعقد . وبما أن كل مسارين مغلقين لهما عقد مشتركة وكل عقدتين مرتبطتين بعناصر خاملة أو فعالة . فإنه يقال إن الشبكات الفرعية والعقد مرتبطة توصيلياً وقد أعطيت طرق لحل هذه الشبكات الكهربائية .

وفي هذا الفصل نحلل نوعاً آخر من الارتباط يسمى الارتباط المغناطيسي . وعندما نأخذ في الاعتبار تفاعل مسارين مغلقين خلال مجال مغناطيسي بدلاً من خلال عناصر مشتركة فإنه يقال إن المسارات المغلقة مرتبطة حثياً أو مغناطيسياً .

الحث الذاتي :

عندما يتغير التيار في دائرة كهربائية ، فإن الفيض المغناطيسي الممتد في الدائرة نفسها يتغير وينتج قوة دافعة كهربائية تأثيرية في الدائرة . وبفرض أن نفاذية الوسط ثابتة فإن القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية تتناسب مع معدل تغير التيار ، أي أن

$$(1) \quad v_L = L \frac{di}{dt}$$

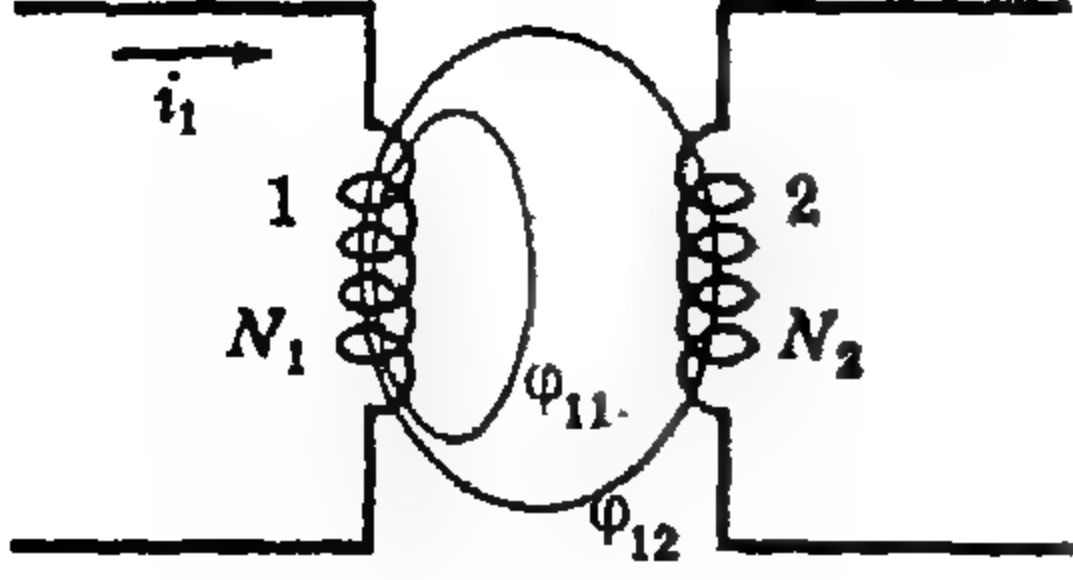
حيث يسمى ثابت التناسب L بالحث الذاتي للدائرة . ووحدة الحث الذاتي هي henry (H) وتعطى القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية الناتجة في ملف عدد لفاته N بالمعادلة

$$(2) \quad v_L = N \frac{d\phi}{dt}$$

حيث $N d\phi$ هو الفيض الممتد في الدائرة . من المعادلتين (1) و (2) نحصل على

$$(3) \quad L \frac{di}{dt} = N \frac{d\phi}{dt}$$

$$(4) \quad L = N \frac{d\phi}{di} \quad \text{ومنها نجد أن}$$



شكل ١٣ - ١

الحث المتبادلي :

اعتبر أن التيار i_1 المار في الملف 1 في الشكل ١٣ - ١ يتغير مع الزمن . وعلى ذلك فإن التيار المتغير i_1 ينتج عنه فيض مغناطيسي ϕ_1 . جزء من هذا الفيض يمتد داخل الملف فقط ويسمى بالفيض المتسرب ϕ_{11} . أما الفيض الباقي ϕ_{21} فهو يمتد في الملف 2 كما هو موضح في الرسم . ويعطى الجهد التأثيري في الملف 2 بقانون فاراداي :

$$(٣) \quad v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

بما أن ϕ_{12} تعتمد على التيار i_1 فإن v_2 يتناسب مع معدل تغير i_1 ، أو

$$(٤) \quad v_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

حيث يسمى ثابت التناسب M بالحث المتبادلي بين الملفين . ووحدة الحث المتبادلي هي نفس وحدة الحث الذاتي (H) .

من المعادلتين (٣) ، (٤) نجد أن

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} = M \frac{di_1}{dt}$$

(٥)

$$M = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}$$

وفي حالة لف مجموعة من الملفات حول قلب حديدي واحد فإن العلاقة بين الفيض والتيار تكون علاقة غير خطية ويعطى الحث المتبادلي في هذه الحالة بالمعادلة (٥) . أما إذا كان له سطر الممتد في الملفات هو الهواء فإن العلاقة بين الفيض والتيار تكون علاقة خطية ويعطى الحث المتبادلي في هذه الحالة بالمعادلة

(٦)

$$M = \frac{N_2 \phi_{12}}{i_1}$$

والربط المتبادلي ذو جانبيين ، أي أننا نحصل على نتائج مشابهة إذا مر تيار i_2 يتغير مع الزمن في الملف 2 الموضح في الشكل ١٣ - ١ في هذه الحالة يكون الفيض الممتد هو ϕ_2 و ϕ_{21} و ϕ_{22} ويعطى الجهد التأثيري في الملف 1 بالمعادلة $v_1 = M \frac{di_2}{dt}$ (٩) وتصبح المعادلتان (٥) ، (٦) على الصورة التالية على الترتيب .

(٧)

$$M = \frac{N_1 \phi_{21}}{i_2} \quad M = \frac{N_1 d\phi_{21}}{di_2}$$

معامل الربط k :

يعتمد الفيض الممتد في الشكل ١٣ - ١ على المسافة الفاصلة بين محوري الملفين وعلى اتجاهيهما وكذلك على نفاذية الوسط .
ويسمى جزء الفيض الذي يمتد في الملفات من الفيض الكلي بمعامل الربط k . أى أن

$$(٨) \quad k = \frac{\varphi_{12}}{\varphi_1} = \frac{\varphi_{21}}{\varphi_2}$$

حيث $\varphi_{12} \leq \varphi_1$ و $\varphi_{21} \leq \varphi_2$ ، وأكبر قيمة لـ k تساوى الوحدة .

ويمكن الحصول على تعبير لـ M بدلالة الحثين الذاتيين L_1 و L_2 كما يلي :
بضرب المعادلة (٦) في المعادلة (٨) نحصل على

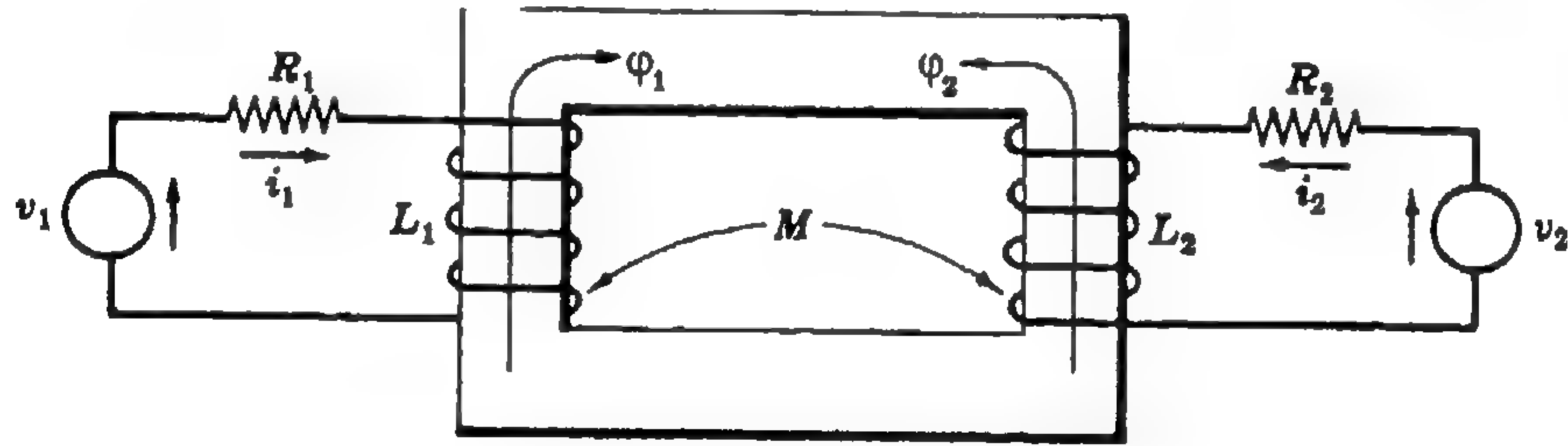
$$(٩) \quad M^2 = \left(\frac{N_2 \varphi_{12}}{i_1} \right) \left(\frac{N_1 \varphi_{21}}{i_2} \right) = \left(\frac{N_2 k \varphi_1}{i_1} \right) \left(\frac{N_1 k \varphi_2}{i_2} \right) = k^2 \left(\frac{N_1 \varphi_1}{i_1} \right) \left(\frac{N_2 \varphi_2}{i_2} \right)$$

بالتعويض عن $L_1 = N_1 \varphi_1 / i_1$ و $L_2 = N_2 \varphi_2 / i_2$ في (٩) نحصل على

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{و} \quad M^2 = k^2 L_1 L_2$$

تحليل الدوائر المترابطة :

لكي نوضح اتجاه اللف وتأثيره على الجهود الحثية المتبادلية نرى في شكل ١٣ - ٢ ملفين ملفوفين على قلب Λ .



شكل ١٣ - ٢

حيث أن كل دائرة تحتوي على مصدر للجهد فإننا نختار تيارات الشبكة i_1 و i_2 في نفس اتجاه المصادر ثم نكتب معادلتى الشبكة باستخدام قانون كيرشوف للجهد .

$$(١٠) \quad \begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} &= v_1 \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} &= v_2 \end{aligned}$$

وتعتمد قطبية جهود الحث المتبادل على اتجاه اللف . ولتعيين الإشارة الصحيحة في المعادلة (١٠) نطبق قاعدة اليد اليمنى على كل ملف ، مع جمل الأصابع تلف في اتجاه التيار المفروض . وفي هذه الحالة يشير إبهام اليد اليمنى إلى اتجاه الفيض . وبالتالي يكون

الاتجاه الموجب للمكثيتين ϕ_1 و ϕ_2 كما هو مبين بالشكل . إذا كان الفيضان ϕ_1 و ϕ_2 الناتجان عن اتجاهات التيار الموجبة المفروضة يساعد كل منهما الآخر ، فإن إشارات الجهود الحثية التبادلية تكون مثل إشارات الجهود الحثية الذاتية . وبالإشارة إلى الشكل ١٣ - ٢ نلاحظ أن اتجاه كل من ϕ_1 و ϕ_2 يعاكس كل منهما الآخر . وبإعادة كتابة المعادلة (١٠) بالإشارات الصحيحة نحصل على .

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= v_1 \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= v_2 \end{aligned} \quad (11)$$

وبفرض مصادر جيئية للتيار فإن مجموعة المعادلة (١١) في الحالة الجيئية المستقرة تصبح

$$\begin{aligned} (R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 &= V_1 \\ -j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2)I_2 &= V_2 \end{aligned} \quad (12)$$

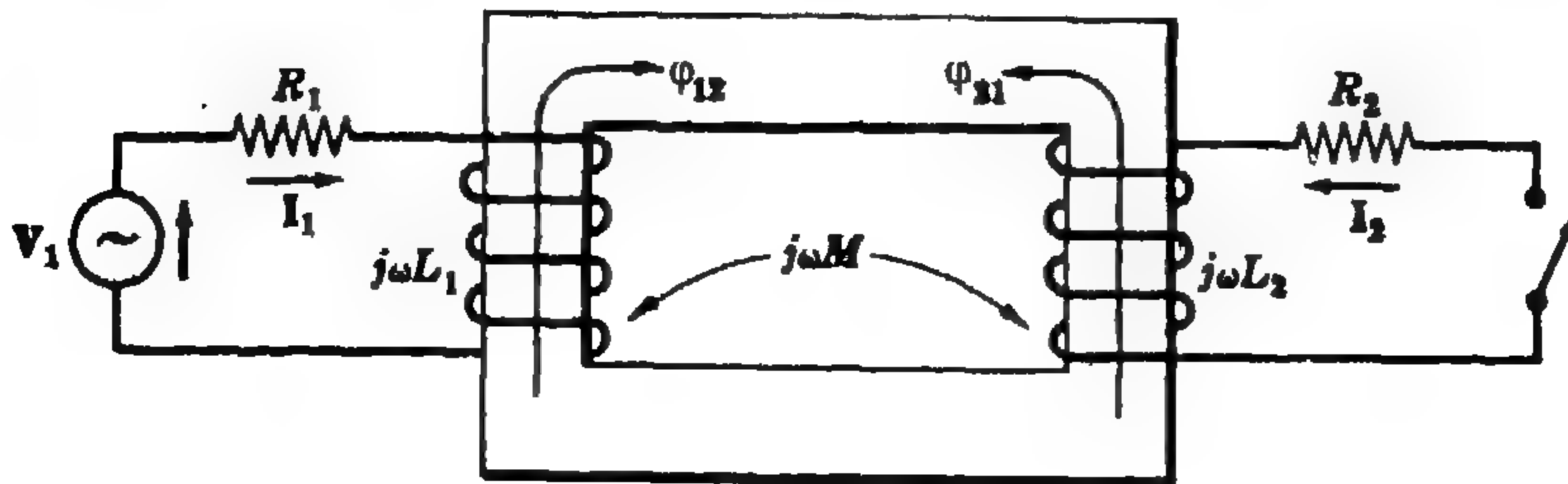
وبالرجوع إلى المجموعة العامة لمعادلتى تيار الشبكة الآتيتين (الفصل التاسع) نحصل على

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 &= V_1 \\ \pm Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 &= V_2 \end{aligned} \quad (13)$$

ولقد وجدنا أن $Z_{21} = Z_{12}$ هما المعاوقتان المشتركتان لتيارى الشبكة I_1 و I_2 . والشبكات الفرعية مرتبطة توصيلياً وذلك لمرور التيارات في فرع مشترك . والآن لدينا للدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ٢ مجموعة معادلات مشابهة للمعادلات (١٣) ، وفي الأولى $j\omega M$ تقابل Z_{12} و Z_{21} الموجودين في المعادلتين (١٣) . والشبكات الفرعية غير مرتبطة توصيلياً وذلك لأن التيارين ليس لهما معاوقات مشتركة . وعلى ذلك فالمعادلات تدل على عدم وجود ارتباط وفي هذه الحالات فإن الارتباط يسمى بالارتباط التبادلي أو الارتباط المغناطيسى .

التيار الطبيعي :

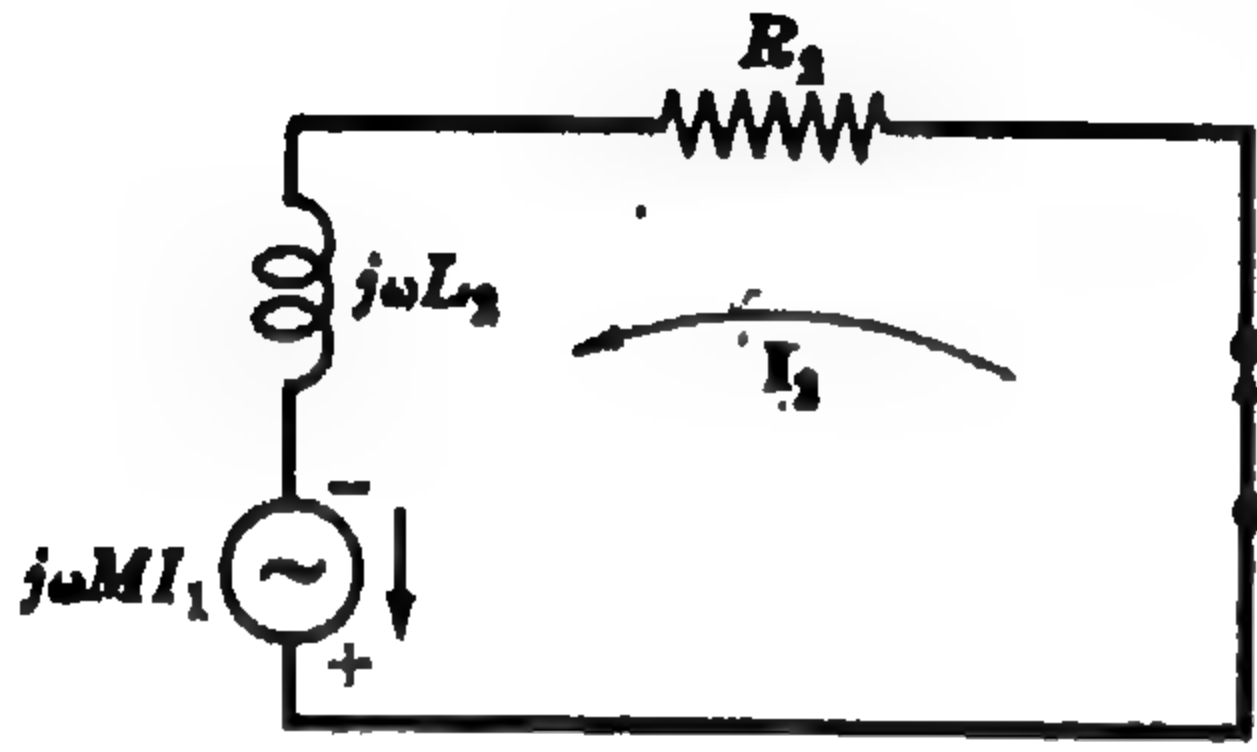
لقد درسنا في الفقرة السابقة دائرة تتكون من مسارين مغلقين مرتبطين تبادلياً يحتوى كل منهما على مصدر للجهد وذلك بعد فرض الاتجاهات الصحيحة للتيارات . ويلزمنا في نفس الوقت دراسة التيار الطبيعي الناتج في مسار مغلق لا يحتوى على جهود دافعة أو محرقة . ويتحدد اتجاه هذا التيار بتطبيق قانون لينز .



شكل ١٣ - ٢

اعتبر الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ٣ والتي فيها الشبكة الفرعية 1 هي فقط التي تحتوي على جهد محرك . نختار التيار I_1 بحيث يتفق اتجاهه مع المصدر V_1 ونطبق قاعدة اليد اليمنى لتحديد اتجاه الفيض Φ_{12} . والآن فإن قانون لينز ينص على أن قطبيه الجهد التأثيري تكون بحيث إذا أكلنا الدائرة فإن التيار يمر خلال الملف في اتجاه يتحدد بحيث يكون الفيض الناتج معاكساً للفيض الأصلي الناشئ عن التيار I_1 . وعلى هذا فعند إغلاق المفتاح في دائرة الشكل ١٣ - ٣ يكون اتجاه الفيض Φ_{21} كما هو مبين في الشكل وذلك تبعاً لقانون لينز . والآن بتطبيق قاعدة اليد اليمنى مع جبل الابهام يشير إلى اتجاه Φ_{21} فإن الأصابع سوف تدور حول الملف 2 في اتجاه التيار الطبيعي . وتكون إذن معادلات تيار الشبكة هي

$$\begin{aligned} (R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega MI_2 &= V_1 \\ -j\omega MI_1 + (R_2 + j\omega L_2)I_2 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$



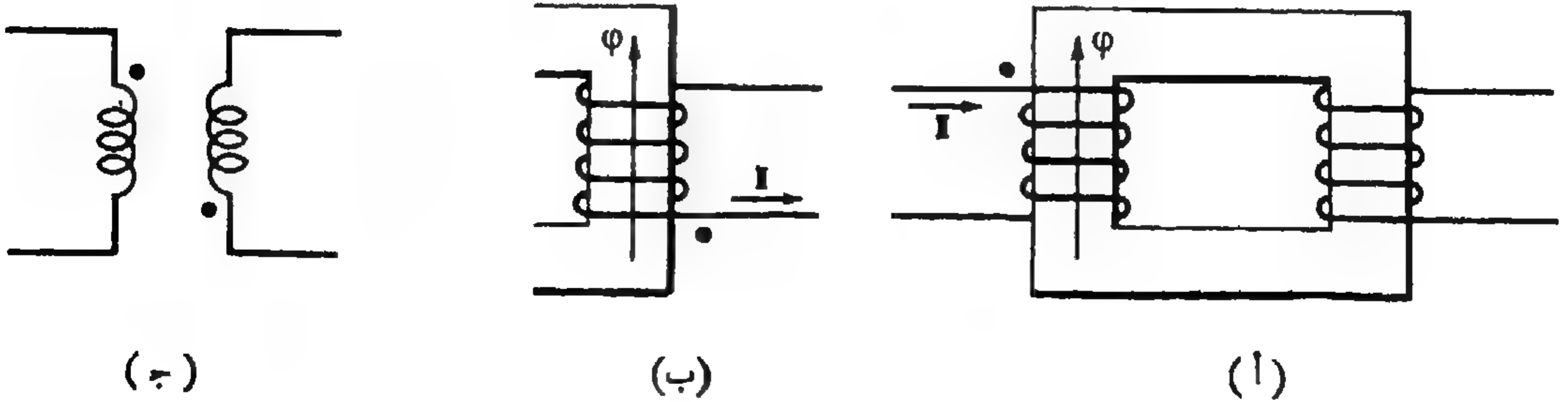
شكل ١٣ - ٤

وبما أن الشبكة الفرعية 2 لا تحتوي على جهد وبالتالي فإن التيار الطبيعي I_2 ينتج عن الجهد التأثيري التبادلي $(R_2 + j\omega L_2)$. وفي الشكل ١٣ - ٤ رسم هذا الجهد كمصدر جهد . واتجاه هذا المصدر يجب أن يكون كما هو موضح بالرسم وذلك مع فرض اتجاه موجب للتيار I_2 . وعلى هذا « فإن القطبية اللحظية للجهد التأثيري التبادلي في الملف الثاني تكون موجبة عند الطرف الذي يترك عنده التيار الطبيعي الملف » .

قاعدة النقطة للملفات المترابطة :

في حين أنه يمكن تعيين القطبية النسبية للجهود التأثيرية التبادلية برسم قلب الملفات الذي يوضح اتجاه الملف ، فإن هذه الطريقة غير عملية . ولتبسيط الرسم التوضيحي الذي يمثل الدوائر المترابطة ، فإننا نميز رسم الملفات بنقط كما هو موضح في الشكل ١٣ - ٥ (ج) . وذلك بوضع نقطة عند الأطراف التي لها نفس القطبية اللحظية على أساس التأثير التبادلي فقط . ولتطبيق نظام النقطة فإننا يجب أن نعرف عند أي طرف من الملف يجب وضع النقطة . وعلاوة على ذلك فإننا يجب أن نعين الإشارة اللازمة للجهد التأثيري التبادلي عند كتابة معادلات تيار الشبكة .

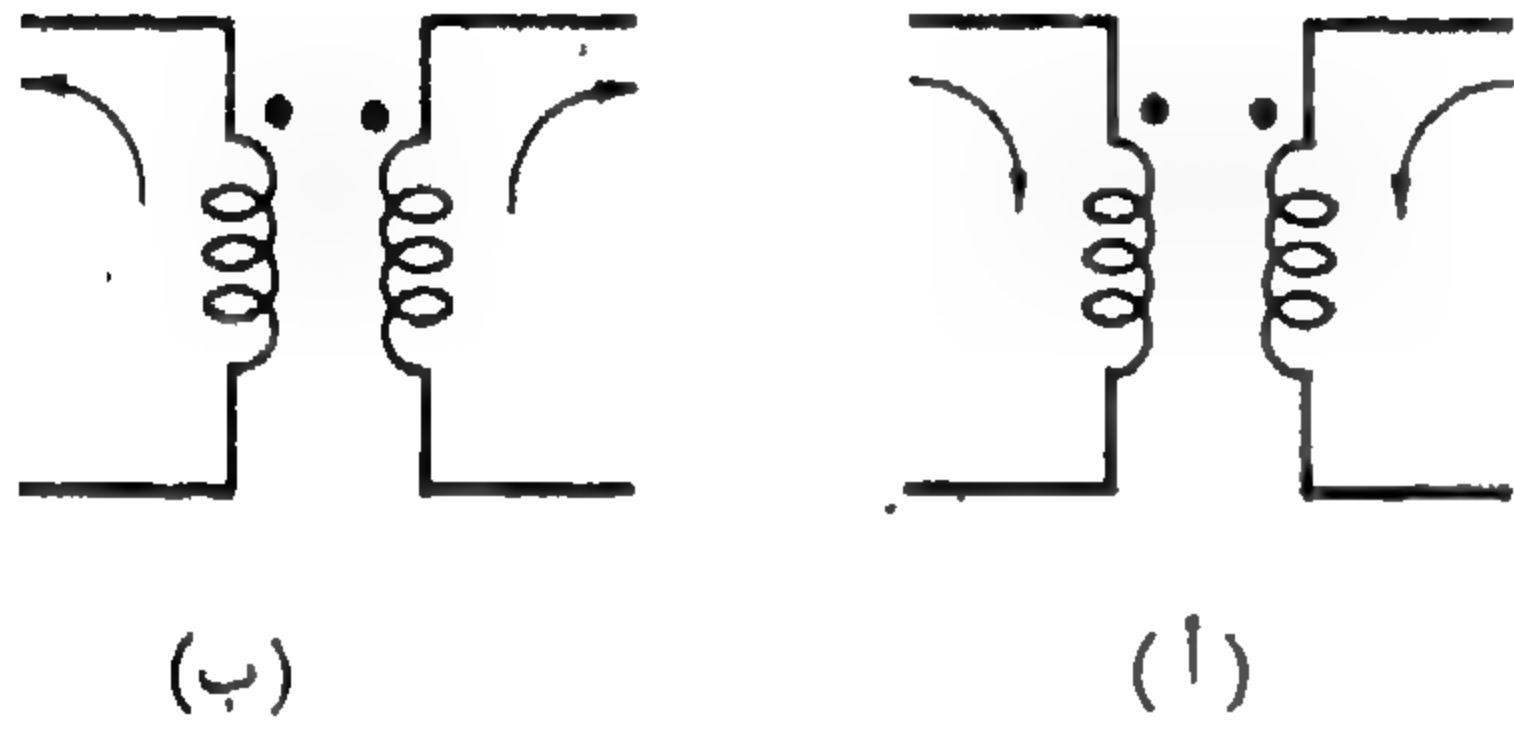
ولوضع النقط على زوج من الملفات المترابطة ، فإننا نختار اتجاه تيار في ملف من الملفين ونضع نقطة عن الطرف الذي يدخل عنده التيار إلى الملف . ويكون الطرف ذو النقطة موجباً لحظياً بالنسبة إلى الطرف الآخر للملف . نطبق قاعدة اليد اليمنى لإيجاد الفيض المقابل كما هو موضح في الشكل ١٣ - ٥ (أ) . والآن فإنه تبعاً لقانون لينز فإن الفيض في الملف الثاني يجب أن يعاكس الفيض الأصلي . انظر شكل ١٣ - ٥ (ب) .



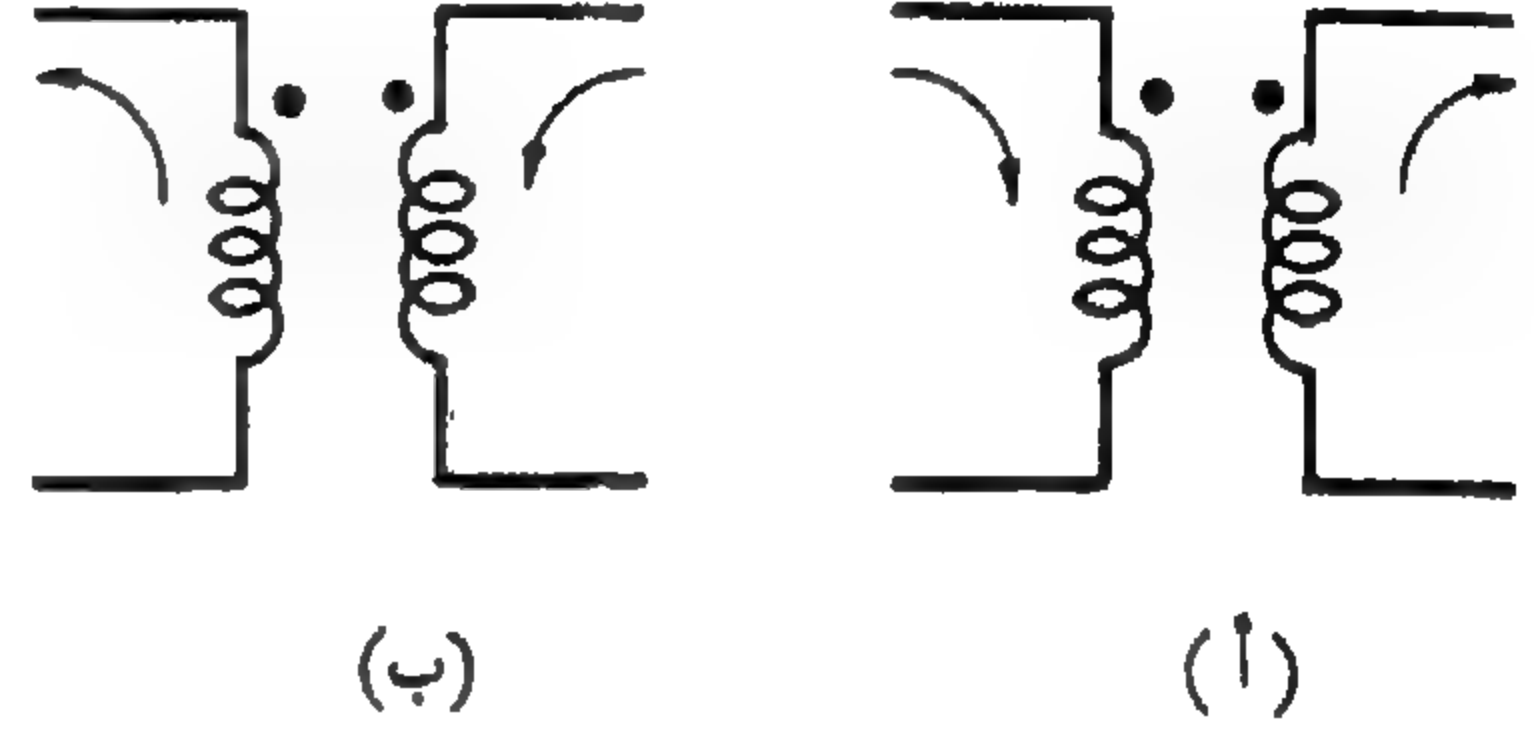
شكل ١٣ - ٥

نستخدم قاعدة اليد اليمنى لإيجاد اتجاه التيار الطبيعي ، وحيث أن الجهد التأثيري التبادلي يكون موجباً عند الطرف الذي يترك عنده التيار الطبيعي الملف ، فإننا نضع نقطة عند هذا الطرف كما هو موضح في الشكل ١٣ - ٥ (ب) . وباعطاء القطبية الحثية للملفات بواسطة النقط فإننا لا نحتاج إلى رسم قلب الملفات وبذلك يمكن رسم الملفات المترابطة كما في الشكل ١٣ - ٥ (ج) .

لتعيين إشارة الجهد التأثيري التبادلي في معادلات تيار الشبكة فإننا نستخدم قاعدة النقطة التي تنص على أن : (١) عندما تدخل أو تخرج التيارات المفروضة إلى زوج من الملفات المترابطة عند الطرف الذي عنده النقطة فإن إشارات الحدود M تكون نفسها إشارات الحدود L ؛ (٢) إذا دخل أحد التيارات من الطرف الذي عنده النقطة بينما خرج الثاني من الطرف الذي عنده النقطة ، فإن إشارات الحدود M تكون معاكسة لإشارات الحدود L .



شكل ١٣ - ٧



شكل ١٣ - ٦

يوضح الشكل ١٣ - ٦ حالتين فيهما إشارات الحدود M و L متعاكسة . ويوضح الشكل ١٣ - ٧ حالتين فيهما الحدود L و M لها نفس الإشارات .

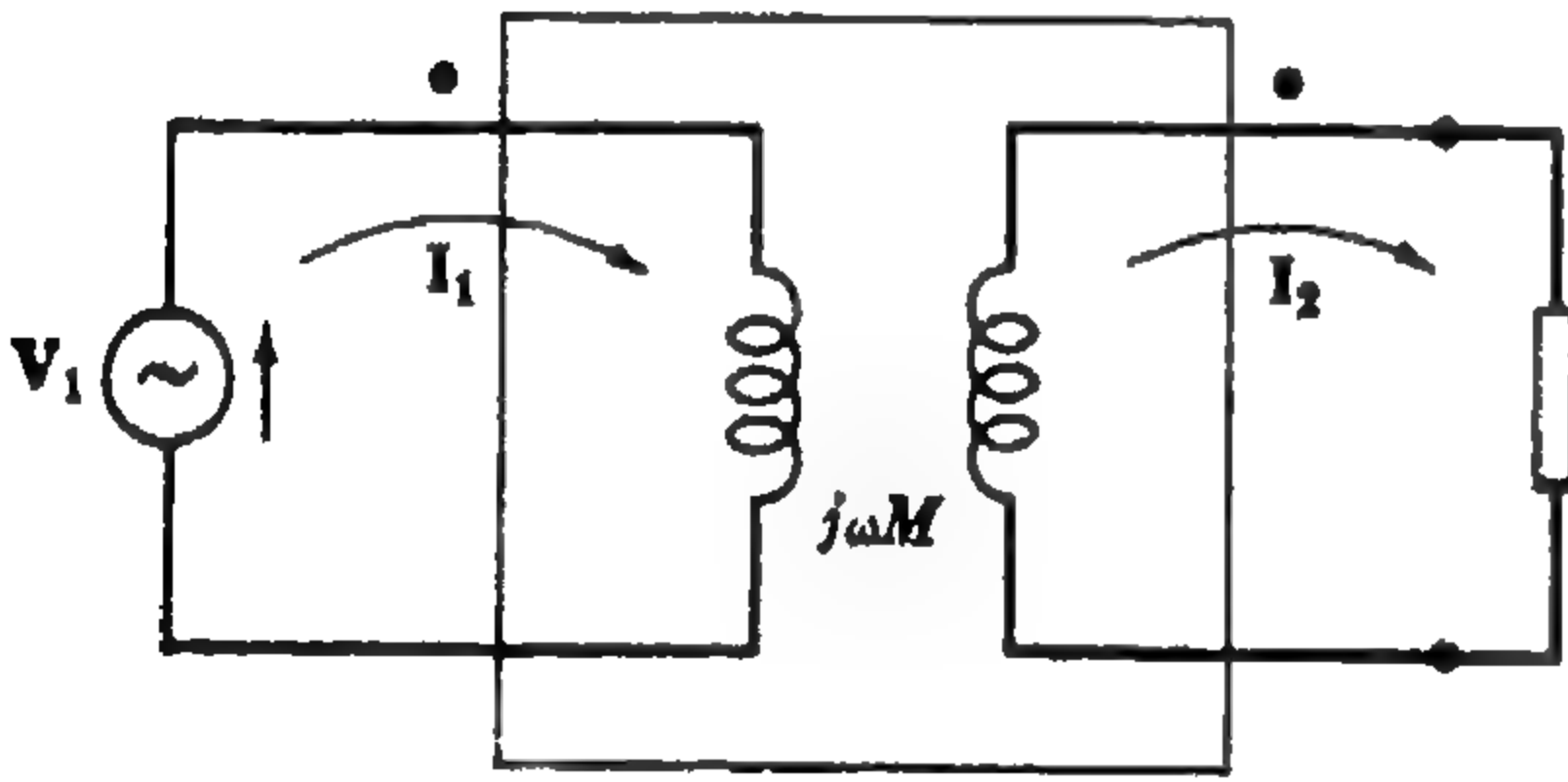
ولزيادة توضيح القطبية النسبية المتعلقة بدائرتين مرتبطتين تبادلياً نعتبر الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ٨ وفيها تم وضع النقط واختيار التيارات I_1 و I_2 كما هو موضح . وبما أن أحد التيارات يدخل عند الطرف الذي عنده النقطة ، فإن إشارة الحدود M تكون معاكسة لإشارة الحدود L . وتكون معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية لهذه الدائرة هي

$$(١٥) \begin{bmatrix} Z_{11} & -j\omega M \\ -j\omega M & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

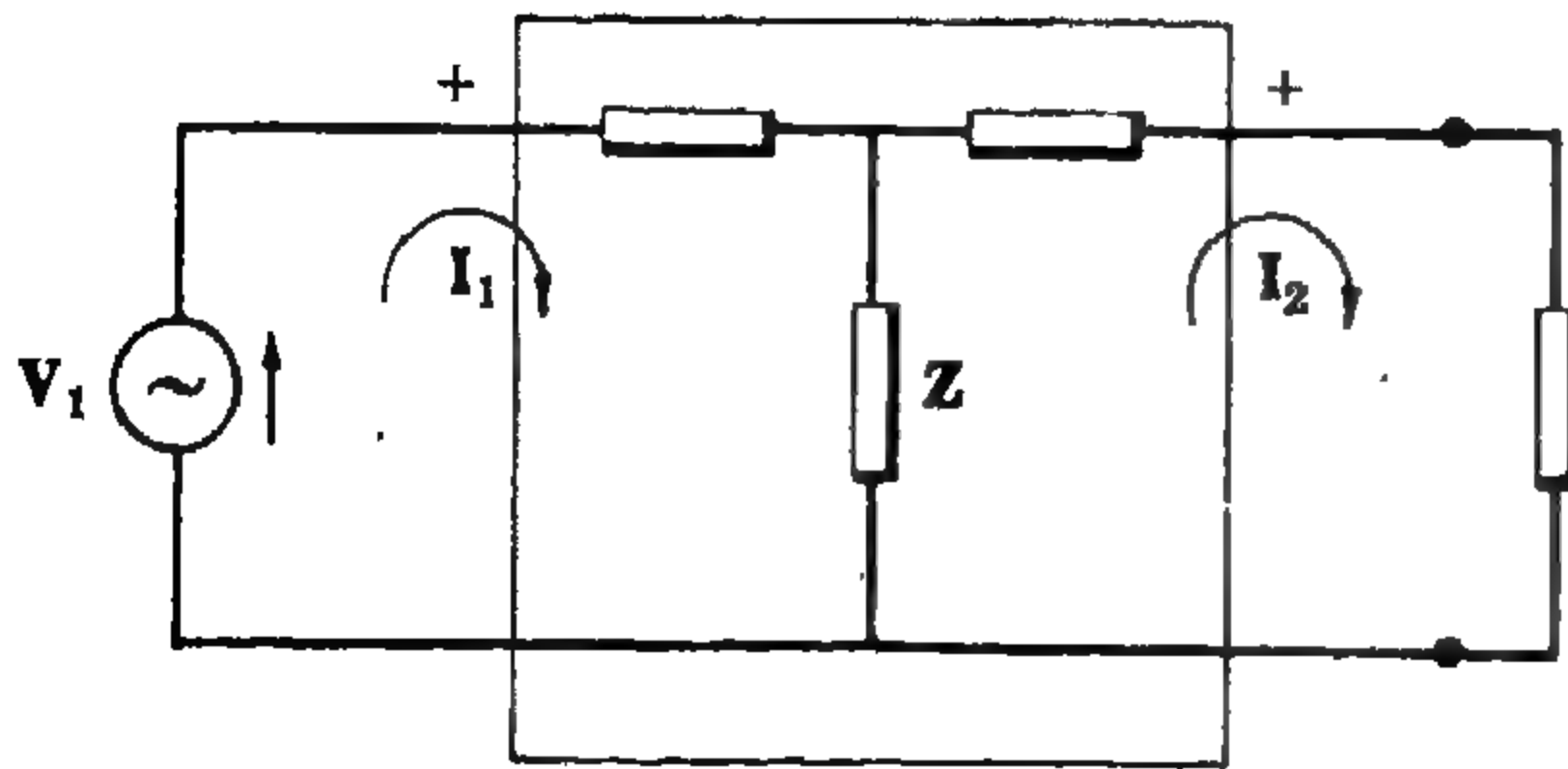
نعتبر الآن شبكتين فرعيتين بسيطتين مترابطتين توصيلياً كما هو موضح في الشكل ١٣ - ٩ وفيهما تم تعيين الأطراف الموجبة . إن معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية هي

$$(١٦) \begin{bmatrix} Z_{11} & -Z \\ -Z & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وتظهر المعاوقة المشتركة Z لتيار الشبكة بإشارة سالبة وذلك لأن التيارين I_1 و I_2 يمران في اتجاهين متعاكسين في الفرع الذي يحتوي على Z .



شكل ١٣ - ٨



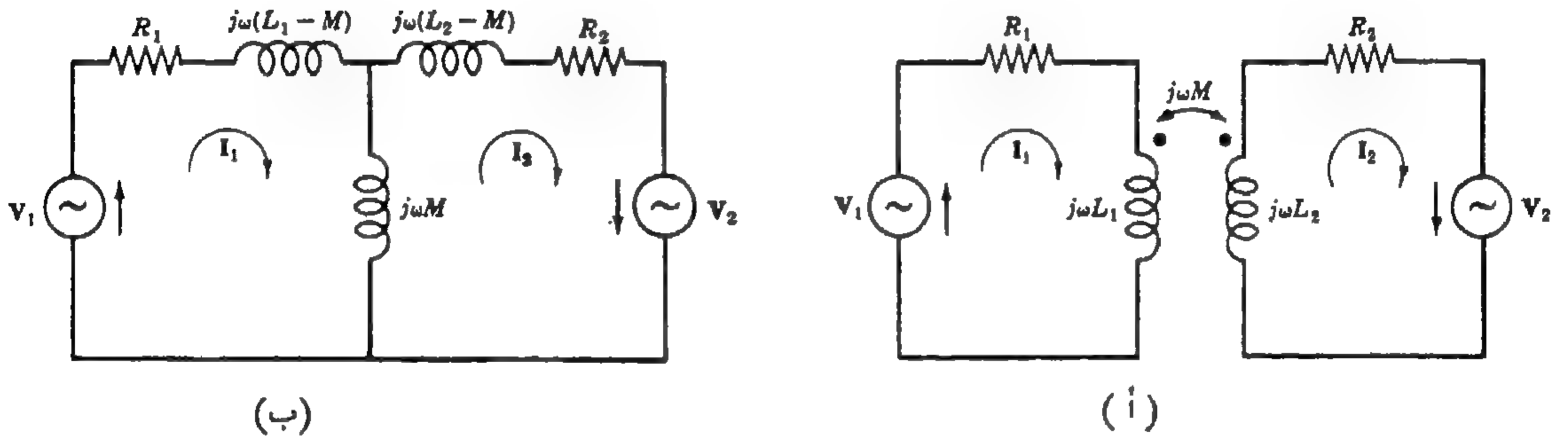
شكل ١٣ - ٩

وعند تغطية الصناديق الموضحة في الشكلين ١٣ - ٨ ، ١٣ - ٩ فإن الدائرتين تظهران متطابقتان فيما عدا الترميز النقطي في إحدى الدائرتين والترميز بالإشارات في الأخرى . بمقارنة (١٥) و (١٦) فإن الإشارة السالبة للحد $j\omega M$ تقابل الإشارة السالبة للمعاوقة Z .

الدوائر المكافئة المرتبطة توصيلياً :

يمكن في التحليل إبدال الدائرة المترابطة تبادلياً بدائرة مكافئة مترابطة توصيلياً . نعتبر الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٠ (أ) ونختار اتجاهي التيارين I_1 و I_2 كما هو موضح في الشكل . فتكون معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية هي

$$(١٧) \quad \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



شكل ١٣ - ١٠

نفرض اتجاهات التيار في الشكل ١٣ - ١٠ (ب) هي نفسها في الشكل ١٣ - ١٠ (أ) . والتياران I_1 و I_2 يمران في الفرع المشترك في اتجاهين متعاكسين ، والمعاوقة المطلوبة هنا هي $j\omega M$. نجد في المعادلة (١٧) أن $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$. وبما أن تيار الشبكة I_1 يمر في الفرع المشترك الذي معاوقته $j\omega M$ فإننا يجب أن ندخل $(-j\omega M)$ في المسار المغلق ونكتب

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 - j\omega M + j\omega M = R_1 + j\omega L_1$$

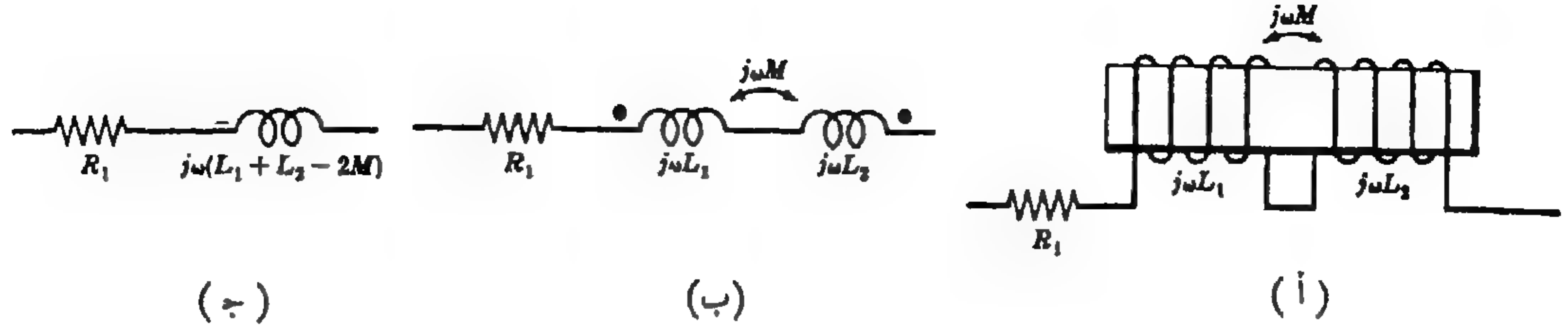
وبالمثل بالنسبة للمسار المغلق الثاني

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 - j\omega M + j\omega M = R_2 + j\omega L_2$$

وإذا كتبنا معادلات تيار الشبكة للدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٠ (ب) فإننا نحصل على مجموعة المعادلات (١٧) . وعلى ذلك فإن الدائرة المترابطة توصيلياً والموضحة في الشكل ١٣ - ١٠ (ب) تكافئ الدائرة المترابطة تبادلياً والموضحة في الشكل ١٣ - ١٠ (أ) .

والطريقة السابقة في التحليل لاتعطينا دائماً دائرة مكافئة يمكن تحقيقها فيزيائياً - وهذا صحيح عندما $M > L_1$ أو $M > L_2$.

لإبدال الملفين المرتبطين تبادلياً والمتصلين على التوالي الميبين في الشكل ١٣ - ١١ (أ) فإننا نتبع الطريقة التالية . نطبق أولاً الطرق السابقة لنحصل على الترميز النقطي الموضح في الشكل ١٣ - ١١ (ب) نستبدل الآن الترميز النقطي المكافئ بدائرة توصيلية مكافئة كما في الشكل ١٣ - ١١ (ج) .



شكل ١١ - ١٣

ولتحليل الدائرة الموضحة في الشكل ١١ - ١٣ (أ) فإنه يلزمنا اعتبار فيض مغناطيسي لتحديد إشارات الجهود التأثيرية التبادلية . أما في دائرة الشكل ١١ - ١٣ (ب) فإنه لا يلزمنا اعتبار أى فيض ولكن يلزمنا قاعدة النقطة . ويمكن كتابة المعادلات اللازمة لدائرة الشكل ١١ - ١٣ (ج) بالطريقة المعتادة بصرف النظر عن الفيض أو النقط أو التأثير التبادلي . والدوائر الثلاث لها جميعاً نفس المعاوقة المركبة $Z = R_1 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$.

مسائل محلولة

١٣ - ١ ملف يتكون من ملفين مترابطين يمر به تيار مستمر مقداره 5 A ، فإذا كان الفيض ϕ_{11} و ϕ_{12} المقابلين هما 0.2 mWb و 0.4 mWb على الترتيب ، وكان $N_1 = 500$ و $N_2 = 1500$. فأوجد L_1 و L_2 و M و k .

الفيض الكلى هو : $\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = 6 \times 10^{-4}\text{ webers}$. إذن الحث الذاتي للملف الأول هو

$$L_1 = N_1\phi_1/I_1 = 500(6 \times 10^{-4})/5 = 0.06\text{ H}$$

ومعامل الربط هو : $k = \phi_{12}/\phi_1 = 0.4/0.6 = 0.667$

والحث التبادلي هو : $M = N_2\phi_{12}/I_1 = 1500(4 \times 10^{-4})/5 = 0.12\text{ H}$

وبما أن $M = k\sqrt{L_1L_2}$ ، فإن $L_2 = 0.539\text{ H}$ ، $M = 0.667\sqrt{0.06L_2}$ ، $0.12 = 0.667\sqrt{0.06L_2}$

١٣ - ٢ ملفان مترابطان لهما $L_1 = 0.8\text{ H}$ و $L_2 = 0.2\text{ H}$ ومعامل الربط لهما $k = 0.9$. أوجد الحث التبادلي M والنسبة بين عدد لفاتهما N_1/N_2 .

الحث التبادلي هو : $M = k\sqrt{L_1L_2} = 0.9\sqrt{0.8(0.2)} = 0.36\text{ H}$

وباستخدام المعادلة $M = N_2\phi_{12}/i_1$ ، والتعويض فيها عن ϕ_{12} بـ $k\phi_1$ ثم ضربها في N_1/N_2 نحصل على ،

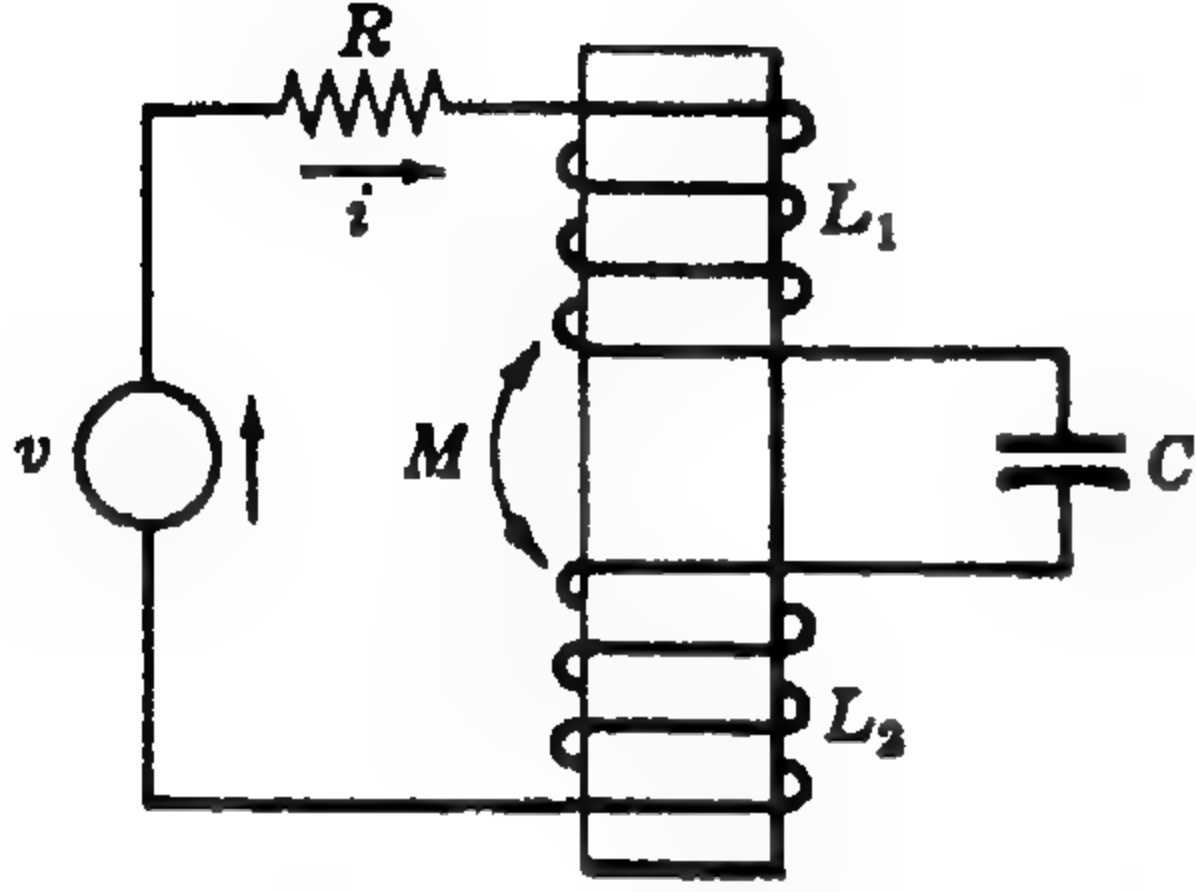
$$N_1/N_2 = kL_1/M = 0.9(0.8)/0.36 = 2 \quad \text{و} \quad M = k\frac{N_2}{N_1}\left(\frac{N_1\phi_1}{i_1}\right) = k\frac{N_2}{N_1}L_1$$

١٣ - ٣ ملفان مترابطان حثهما الذاتي على الترتيب هو $L_1 = 0.5\text{ H}$ و $L_2 = 0.20\text{ H}$ ومعامل الربط لهما هو $k = 0.5$ ، وعدد لفات الملف الثاني 1000 لفة . فإذا كان التيار المار في الملف الأول هو $i_1 = 5 \sin 400t\text{ amperes}$ ، فبين الجهد في الملف الثاني وكذلك أكبر قيمة للفيض المعطى بالملف الأول .

الحث التبادلي هو : $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.5\sqrt{0.05(0.20)} = 0.05 \text{ H}$ إذن الجهد في الملف الثاني يعطى بالمعادلة
 $v_2 = M(di_1/dt) = 0.05 \frac{d}{dt}(5 \sin 400t) = 100 \cos 400t$ وبما أن الجهد في الملف الثاني يعطى أيضاً بالمعادلة $N_2(d\phi_{12}/dt)$ فإن

$$\phi_{12} = 10^{-3} \int 100 \cos 400t \, dt = 0.25 \times 10^{-3} \sin 400t \text{ Wb}$$

وأكبر قيمة للفيض ϕ_{12} هي 0.25 mWb . إذن أكبر قيمة للفيض ϕ_1 هي .



شكل ١٣ - ١٢

$$\phi_{1 \max} = \frac{\phi_{12 \max}}{0.5} = \frac{0.25 \times 10^{-3}}{0.5} = 0.5 \text{ mWb}$$

١٣ - ١٢ طبق قانون كيرشوف للجهد على الدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٢ ثم اكتب المعادلة في الصيغة اللحظية .

بملاحظة اتجاه لف الملفات يتضح أن إشارات حدود M تماكس إشارات حدود L . ويلاحظ أيضاً أن الجهد التأثيري التبادلي يظهر في كل ملف نتيجة للتيار i المار في الملف الآخر.

$$Ri + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = v$$

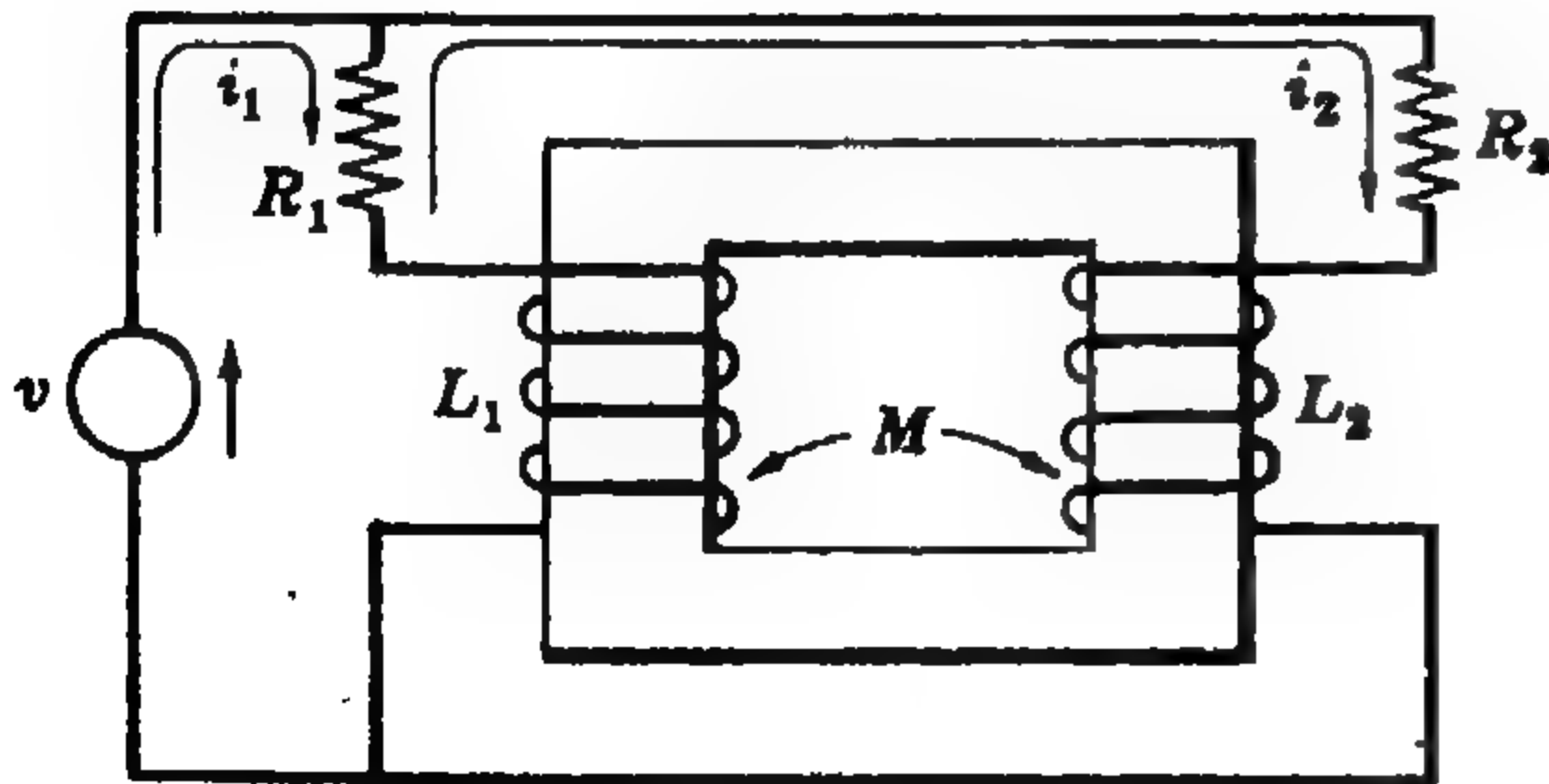
$$Ri + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt = v \quad \text{أو}$$

١٣ - ١٤ اكتب معادلات تيار الشبكة في الصيغة اللحظية للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٣ .

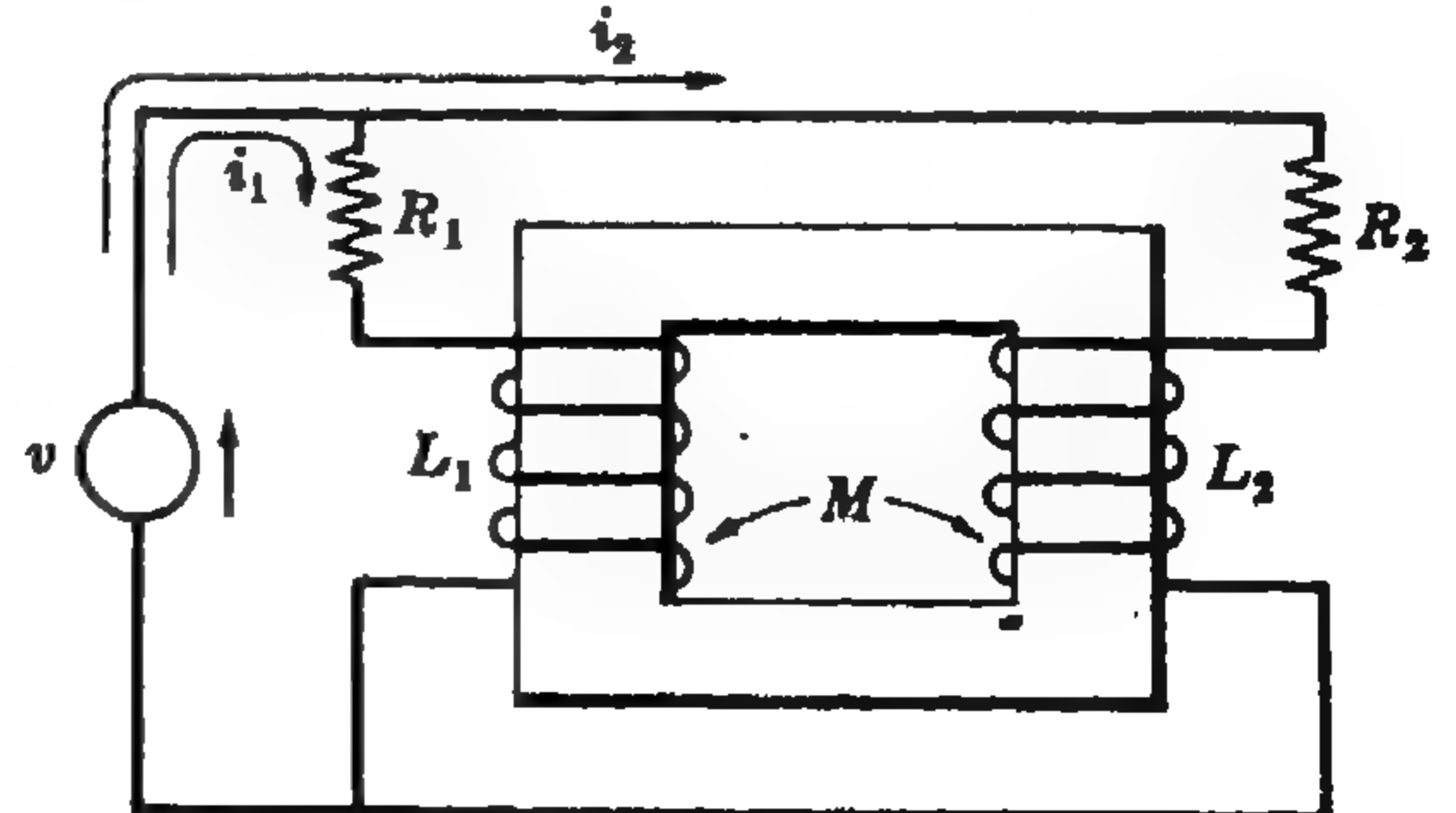
نختار تيارى الشبكة i_1 و i_2 كما هو موضح بالرسم ونطبق قاعدة اليد اليمنى على كل ملف . حيث أن الفيضين يساعد كل منهما الآخر فإن إشارة حدود M هي نفسها إشارة حدود L . إذن

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = v$$



شكل ١٣ - ١٤



شكل ١٣ - ١٣

١٣ - ٩ كرر المسألة ١٣ - ٥ مع أخذ تيار الشبكة i_2 كما هو موضح في الشكل ١٣ - ١٤ .

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسار المغلق للتيار i_2 فإن الجهود التأثيرية التبادلية تكون موجبة . إذن

$$R_1(i_1 - i_2) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + L_1 \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

١٣ - ٧ ملفان متصلان على التوالي لهما حث مكافئ L_A عندما كان التوصيل يقوى كل منهما الآخر وحث مكافئ L_B عندما كان التوصيل يعاكس كل منهما الآخر . أوجد الحث المتبادل M بدلالة L_A و L_B .

عندما كان التوصيل يقوى كل منهما الآخر فإن الحث المكافئ يعطى بالمعادلة

$$(١) \quad L_A = L_1 + L_2 + 2M$$

وعندما كان التوصيل يعاكس كل منهما الآخر فأننا نحصل على

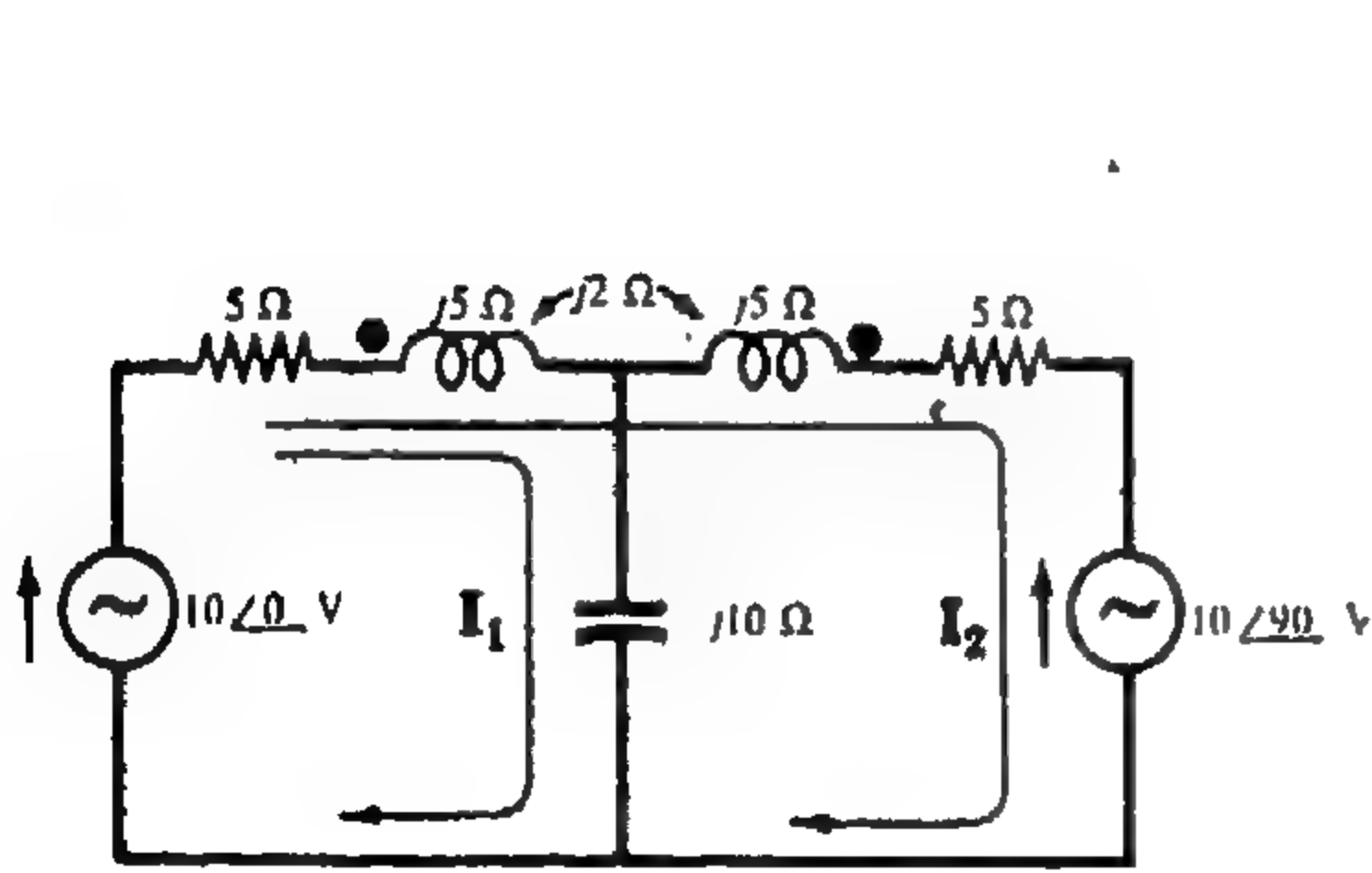
$$(٢) \quad L_B = L_1 + L_2 - 2M$$

ب طرح (٢) من (١) نجد أن

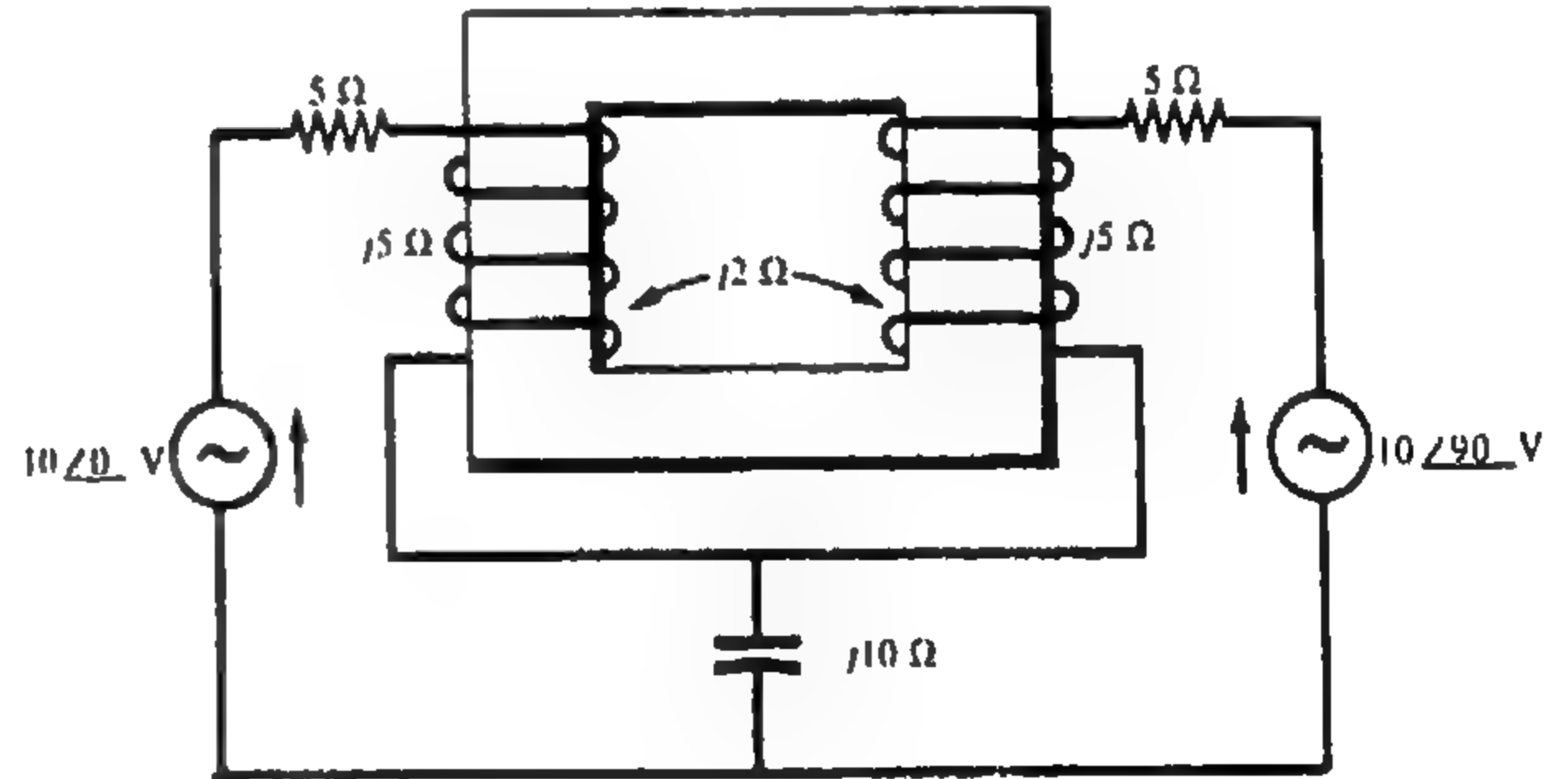
$$M = \frac{1}{4}(L_A - L_B) \quad \text{و} \quad L_A - L_B = 4M$$

يشير هذا الحل إلى طريقة عملية لتعيين M وذلك بتوصيل الملفين بالطريقتين السابقتين وتعيين الحث المكافئ لهما عن طريق قنطرة تيار متردد . ويكون الحث الناتج هو ربع الفرق بين الحثين المكافئين .

١٣ - ٨ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز النقطي للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٥ . أوجد الجهد على الممانعة $10 \angle 90^\circ \Omega$ وذلك باستخدام الدائرة المكافئة .



شكل ١٣ - ١٦



شكل ١٣ - ١٥

لوضع النقط على الدائرة نعتبر فقط الملفين واتجاه لهما . يتحرك التيار في أعلى الملف الذي على اليسار وعلى ذلك فإننا نضع نقطة عند هذا الطرف . ويكون اتجاه الفيض المقابل لهذا التيار في الجهة اليسرى من القلب إلى أسفل . من قانون لينز نجد أن اتجاه الفيض في الملف الذي على اليمين يجب أن يكون إلى أعلى . وتعطى قاعدة اليد اليمنى اتجاه التيار الطبيعي . وهذا التيار يترك الملف عند الطرف العلوي الذي يجب في هذه الحالة ترميزه بنقطة كما هو موضح في الشكل

١٣ - ١٦ .

وبالاختيار الموضح للتيارين i_1 و i_2 فإن معادلات تيار الشبكة في الصبنة المصفوفية تكون

$$\begin{bmatrix} 5 - j5 & 5 + j3 \\ 5 + j3 & 10 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 - j10 \end{bmatrix}$$

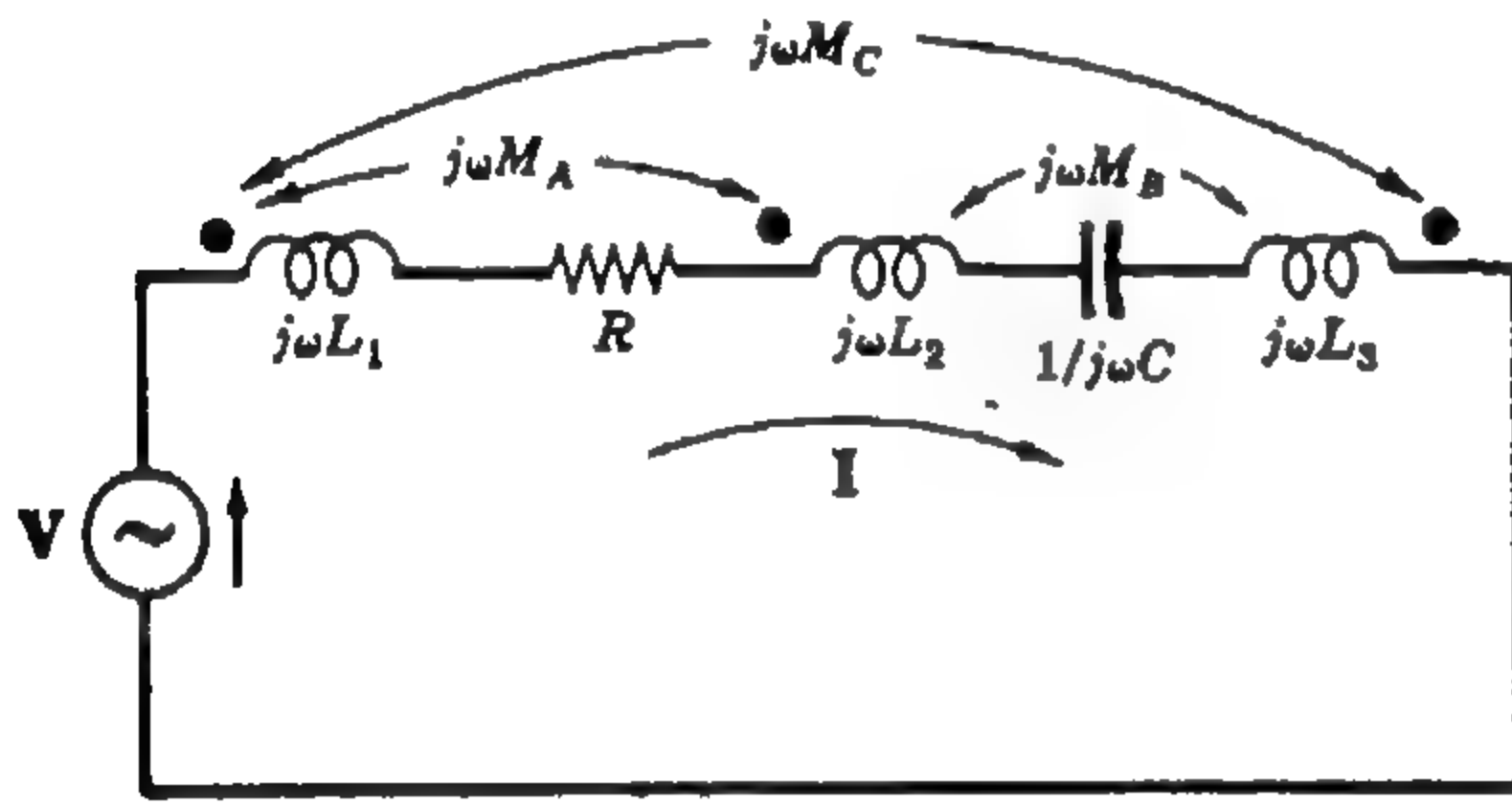
ومنها نجد أن

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5 + j3 \\ 10 - j10 & 10 + j6 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 1.015 \angle 113.95^\circ \text{ A}$$

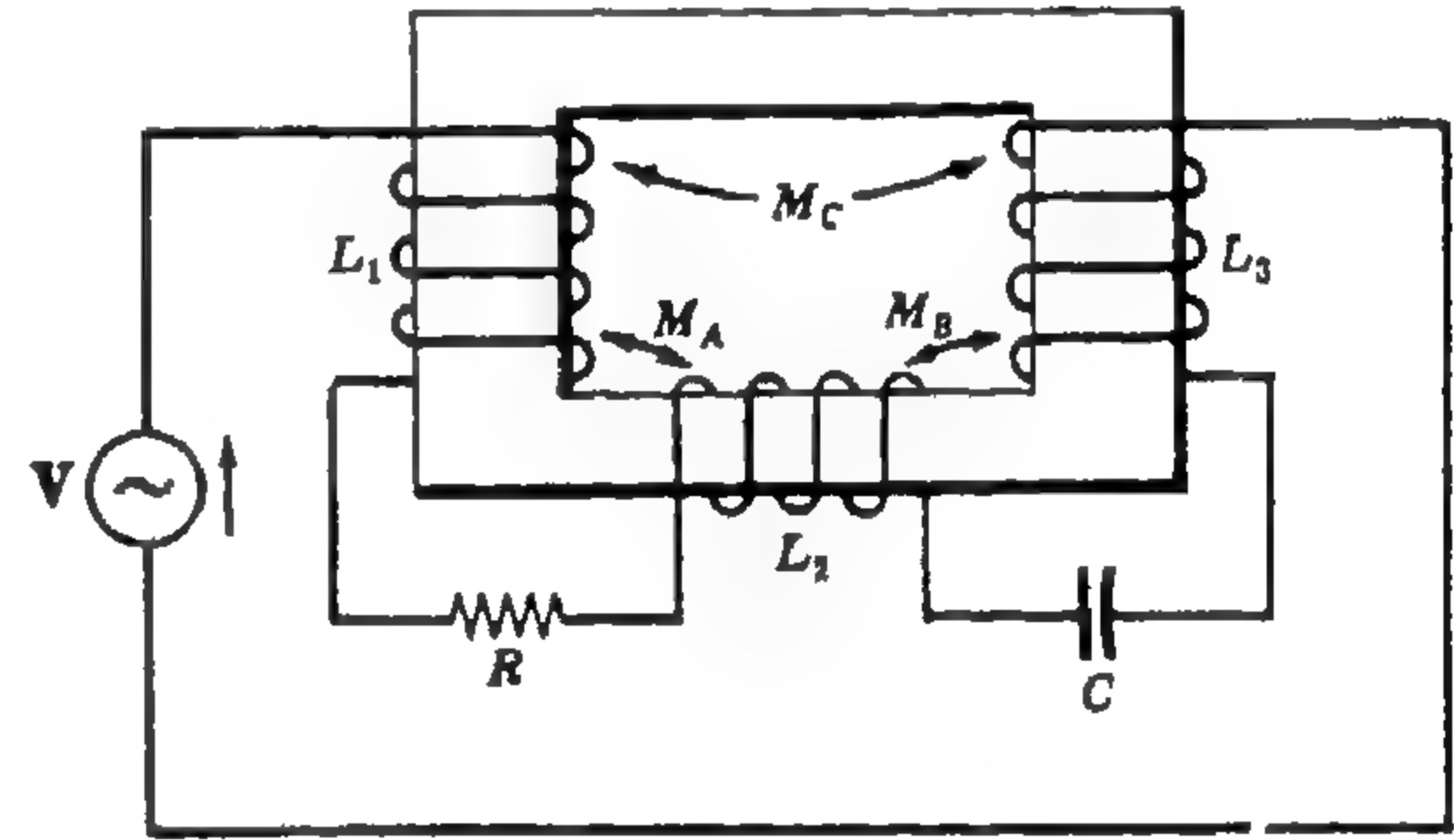
ويكون الجهد على الممانعة 10Ω هو

$$V = I_1(-j10) = 10.15 \angle 23.95^\circ \text{ V}$$

١٣ - ٩ أوجد الدائرة المكافئة في الترميز النقطي للملفات المترابطة والموضحة في الشكل ١٣ - ١٧ ثم اكتب المعادلات المناظرة .



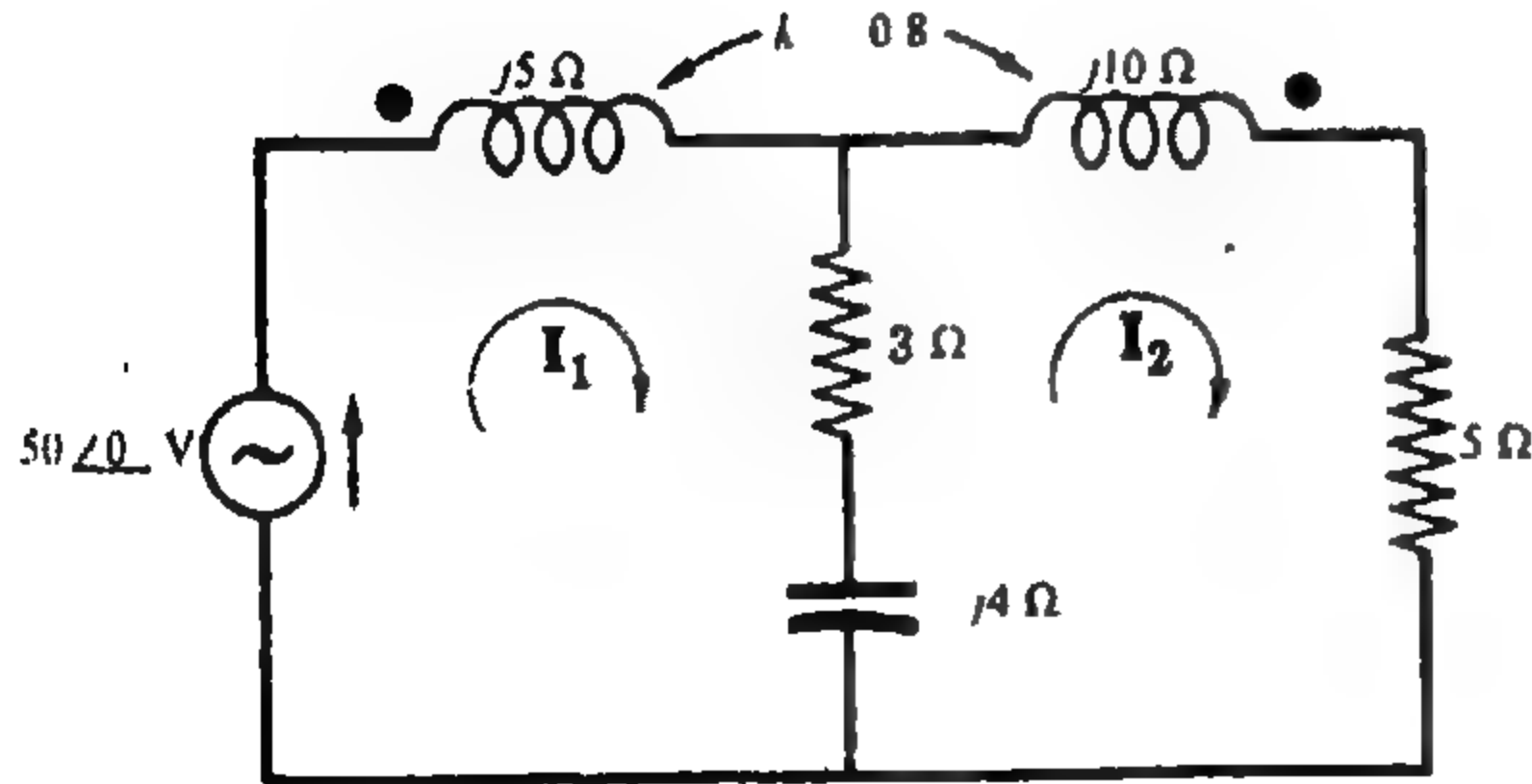
شكل ١٣ - ١٨



شكل ١٣ - ١٧

نضع النقط باستخدام طرق المسألة ١٣ - ٨ فنحصل على الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٨ . وبتطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسار المغلق الوحيد نجد أن

$$\left[R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega(L_1 + L_2 + L_3 + 2M_A - 2M_B - 2M_C) \right] I = V$$



شكل ١٣ - ١٩

١٣ - ١٩ في الشبكة الكهربائية المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٩

أوجد الجهد على المقاومة 5Ω وذلك بالنقط المعطاة

في الرسم . ثم اعكس قطبيه ملف واحد وكرر المسألة .

نحسب الحث المتبادلي من العلاقة

$$jX_m = jk\sqrt{X_{L1}X_{L2}} = j0.8\sqrt{5(10)} = j5.66 \Omega$$

ثم نوجد تيار الشبكة I_2 .

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j1 & 50 \\ -3 - j1.66 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j1 & -3 - j1.66 \\ -3 - j1.66 & 8 + j6 \end{vmatrix}} = \frac{171 \angle 29^\circ}{19.9 \angle 53.8^\circ} = 8.60 \angle 24.8^\circ \text{ A}$$

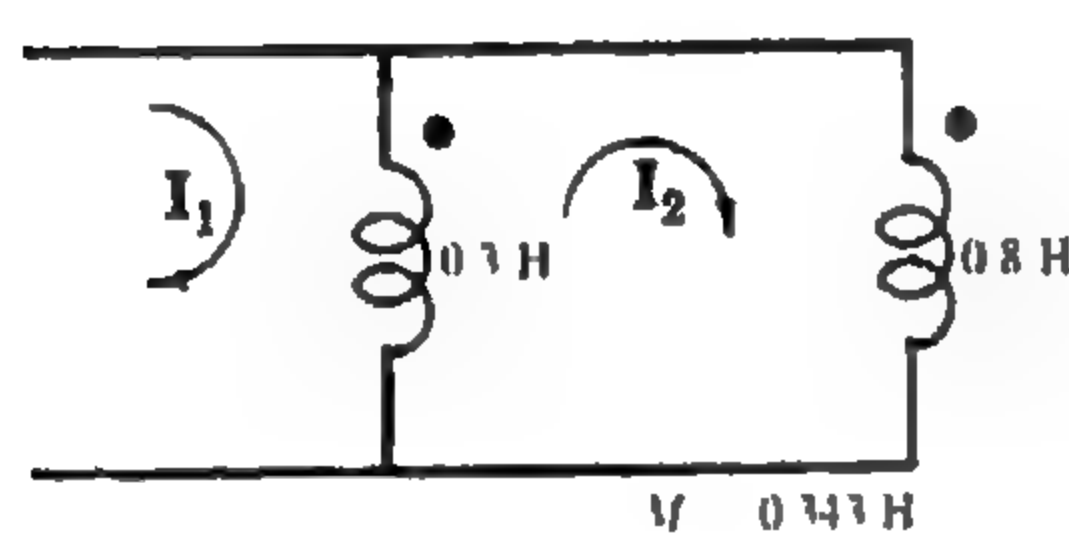
ويكون الجهد عبر المقاومة 5Ω هو $V_5 = I_2(5) = 43 \angle 24.8^\circ \text{ V}$

بتغيير قطبيه ملف واحد تتغير مصفوفة المعاوقة وينتج لدينا قيمة جديدة لتيار الشبكة I_2 .

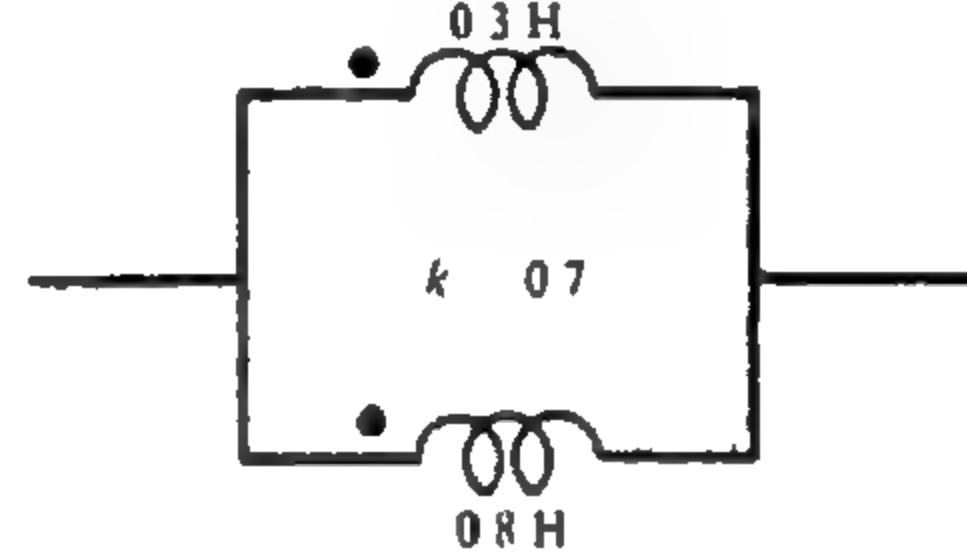
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j1 & 50 \\ -3 + j9.66 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j1 & -3 + j9.66 \\ -3 + j9.66 & 8 + j6 \end{vmatrix}} = \frac{505 \angle -72.7^\circ}{132 \angle 39.4^\circ} = 3.83 \angle 112.1^\circ \text{ A}$$

والجهد على المقاومة 5Ω هو $V_5 = I_2(5) = 19.15 \angle -112.1^\circ \text{ V}$

١١ - ١٣ أوجد الحث المكافئ للملفين L_1 و L_2 المتصلين على التوازي والموضحين في الشكل ١٣ - ٢٠ (أ)



(ب)



(أ)

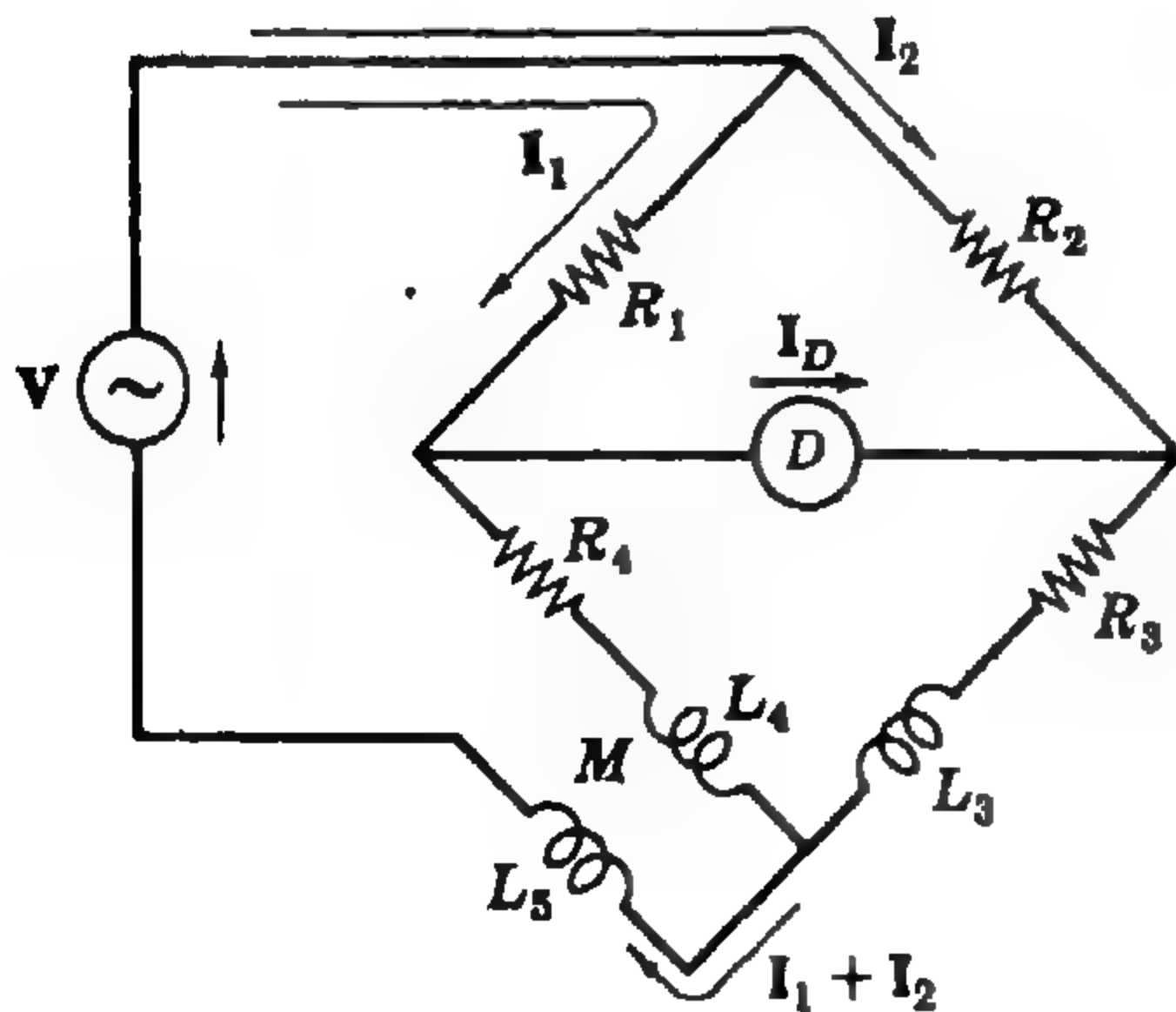
شكل ١٣ - ٢٠

الحث التبادلي هو $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.7\sqrt{0.3(0.8)} = 0.343 \text{ H}$. بوضع الدائرة كما في الشكل ١٣ - ٢٠ (ب) وادخال تيارات الشبكة نجد أن

$$[Z] = \begin{bmatrix} j\omega 0.3 & j\omega 0.043 \\ j\omega 0.043 & j\omega 0.414 \end{bmatrix}$$

$$Z_{\text{input 1}} = \frac{\Delta_2}{\Delta_{11}} = \frac{j\omega 0.3(j\omega 0.414) - (j\omega 0.043)^2}{j\omega 0.414} = j\omega 0.296 \Omega$$

والحث المكافئ للملفين المترابطين هو 0.296 H .



شكل ١٣ - ٢١

١٢ - ١٣ تستخدم قنطرة هيفيسيد في تعيين الحث التبادلي بين ملفين . أوجد M بدلالة الثوابت الأخرى للقنطرة عندما يكون التيار I_D يساوي صفراً .

نختار تيارى الشبكة I_1 و I_2 كما هو موضح في الرسم . إذا كان $I_D = 0$ فإن الجهد على المقاومتين R_2 و R_1 لابد أن يكون متساوياً :

$$(1) \quad I_1 R_1 = I_2 R_2$$

وبالمثل فإن الجهد على كل من $(R_4 + j\omega L_4)$ و $(R_3 + j\omega L_3)$ يكون أيضاً متساوياً . وعلى ذلك فإنه يظهر جهد تأثيري تبادلي عند L_4 ويكون التيار في الملف الآخر L_3 مساوياً للمجموع $I_1 + I_2$.

$$(٢) \quad I_1(R_4 + j\omega L_4) + j\omega M(I_1 + I_2) = I_2(R_3 + j\omega L_3)$$

بالتعويض في (٢) بالمعادلة $I_2 = (R_1/R_2)I_1$ نجد أن

$$(٣) \quad I_1(R_4 + j\omega L_4 + j\omega M) + (R_1/R_2)I_1(j\omega M) = (R_1/R_2)I_1(R_3 + j\omega L_3)$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية في المعادلة (٣) نجد أن

$$M = \frac{R_1 L_3 - R_2 L_4}{R_1 + R_2} \quad \text{نجد } j\omega \left(L_4 + M + \frac{R_1 M}{R_2} \right) = j\omega \frac{R_1 L_3}{R_2} \quad \text{و} \quad R_4 R_2 = R_1 R_3$$

١٣-١٣ أهدل الشبكة الكهربائية المترابطة والموضحة في الشكل

١٣-٢٢ بدائرة ثنتين المكافئة بين الطرفين AB .

جهد ثنتين المكافئ V' هو جهد الدائرة المفتوحة

بين الطرفين AB . باختيار تيارى الشبكة I_1 و I_2

كما هو موضح في الشكل والحصول على I_2 نجد أن

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 10 \\ -2 + j3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -2 + j3 \\ -2 + j3 & 6 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{20 - j30}{10 + j67} = 0.533 \angle -137.8^\circ \text{ A}$$

$$\text{والآن } V' = V_{AB} = I_2(4) = 2.13 \angle -137.8^\circ \text{ V}$$

ولتعيين معاوقة ثنتين المكافئة Z' اعتبر تيار الشبكة

الثالث I_3 ثم احسب المعاوق Z_{input} بين الطرفين AB

وذلك مع وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر .

$$Z' = Z_{\text{input } 3} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -2 + j3 & 0 \\ -2 + j3 & 6 + j5 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -2 + j3 \\ -2 + j3 & 6 + j5 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{j456}{10 - j67} = 6.74 \angle 8.5^\circ \Omega$$

والشكل ١٣-٢٢ يوضع دائرة ثنتين المكافئة .

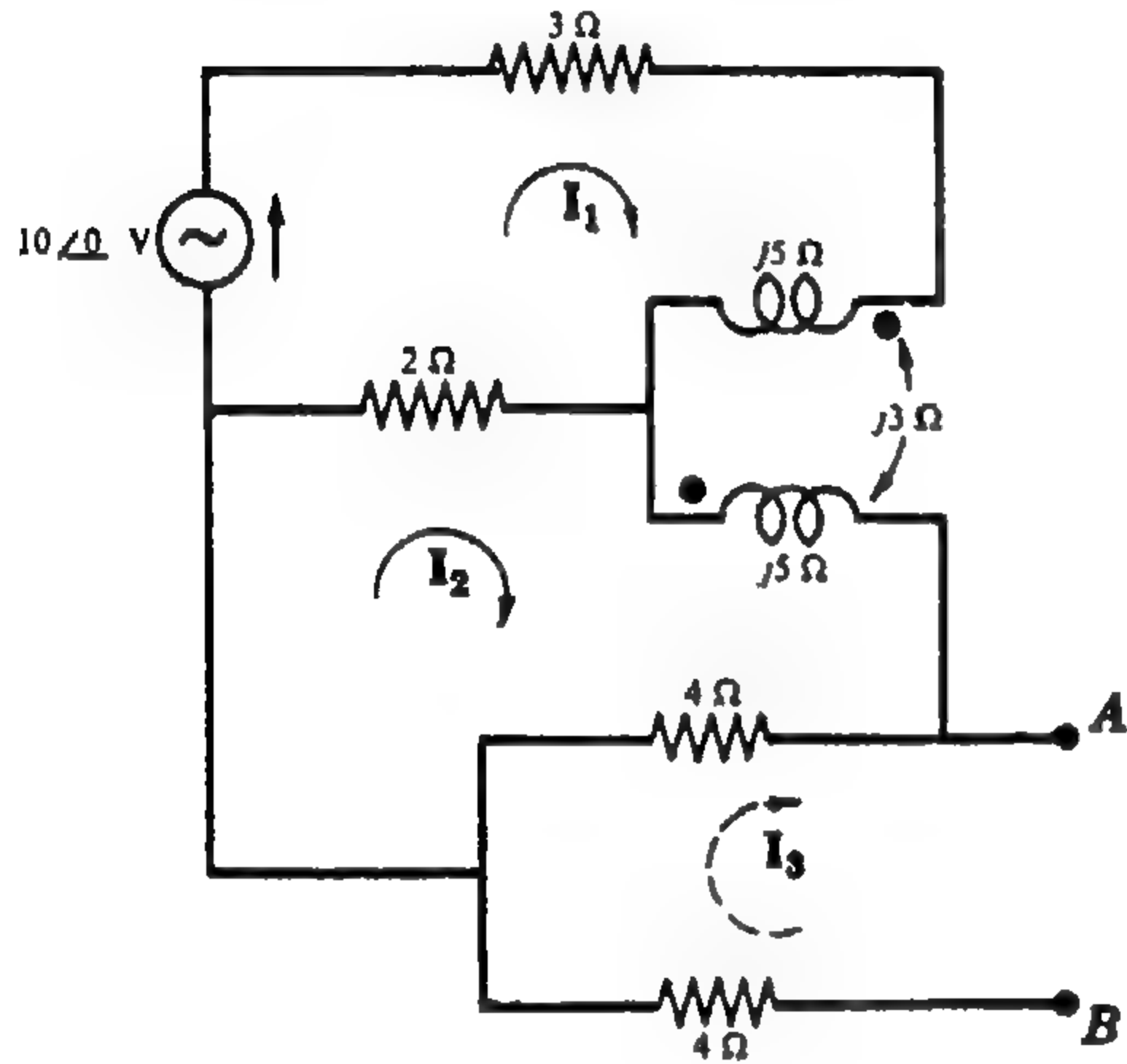
١٣-١٤ في دائرة المسارين المغلقين المرتبطين والموضحة في

الشكل ١٣-٢٤ ، بين أن الترميز النقطة ليس

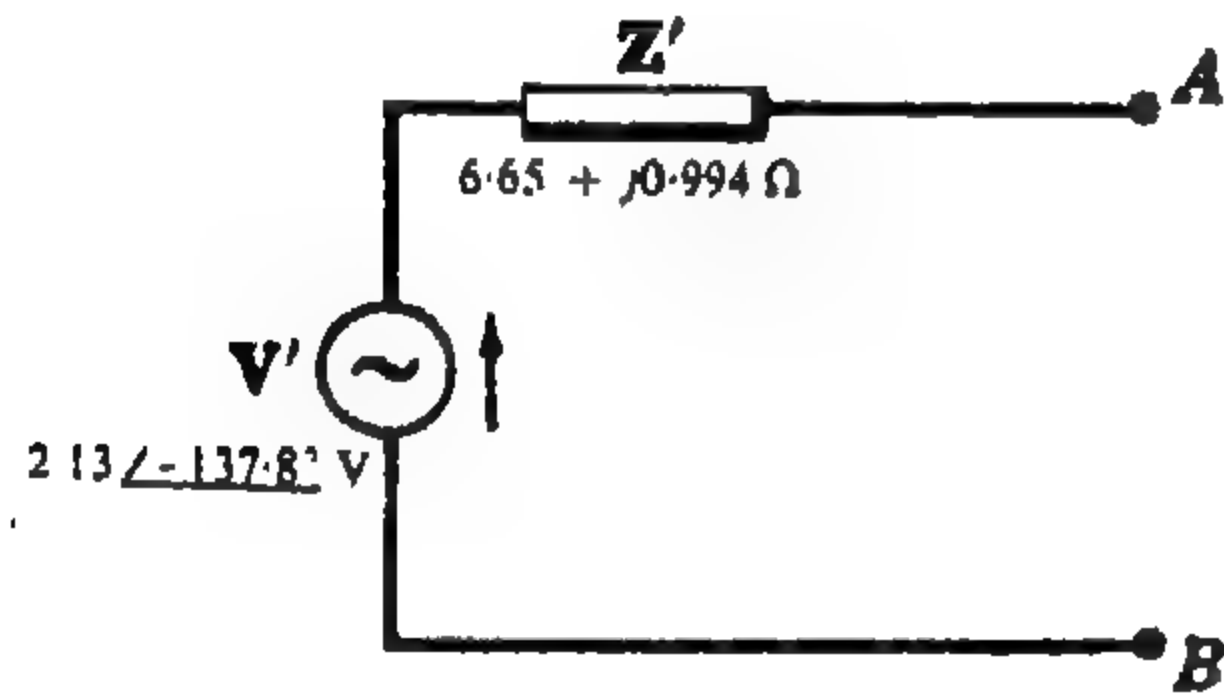
ضروريا طالما أن المسار المغلق الثاني مسار خامل .

نختار تيارات الشبكة كما هو موضح في الشكل

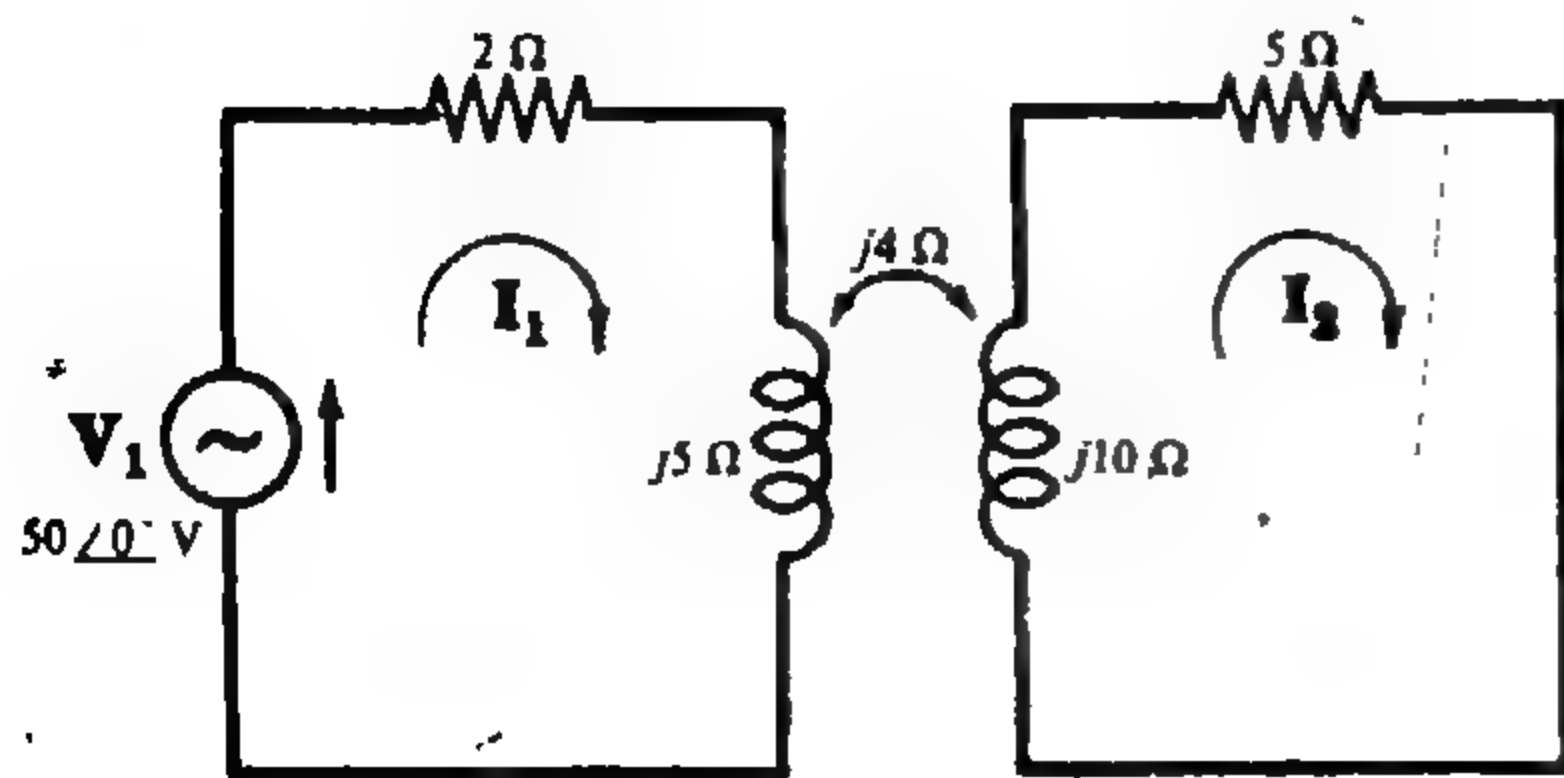
ثم نحصل للحصول على I_2 .



شكل ١٣-٢٢



شكل ١٣-٢٢



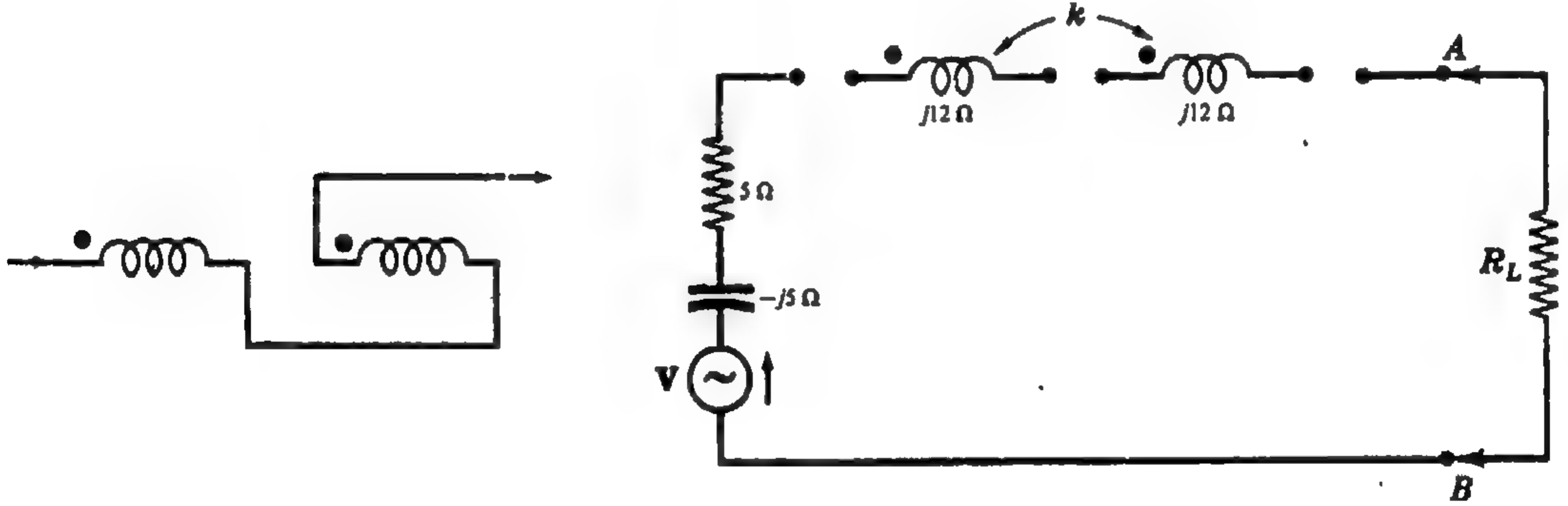
شكل ١٣-٢٤

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j5 & 50 \\ \pm j4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j5 & \pm j4 \\ \pm j4 & 5 + j10 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-50(\pm j4)}{-24 + j45} = 3.92 \angle 61.9^\circ \pm 90^\circ \text{ A}$$

لا تتأثر قيمة ΔZ بإشارة M ، وعلى ذلك فالتيار I_2 له زاوية طور إما 151.9° أو -28.1° . حيث أنه لا يوجد مصدر للجهد في المسار المغلق فإنه ليس ضرورياً معرفة قطبيه الجهد التأثيري المتبادلي . والمربوط في الجهد على معاوقات المسار المغلق يجب أن يكون متساوياً في المقدار ومختلفاً بزاوية طور مقدارها 180° ، ولا تتأثر القدرة في المعاوقة ، ومن الثابت أيضاً أن I_1 متطابق لكلا إشارتي التأثير المتبادلي .

١٣ - ١٥ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ٢٥ ، أوجد R_L التي ينتج عندها أكبر قدرة وذلك بعد الاختيار المناسب لتوصيل الملفين وأوجد k .



شكل ١٣ - ٢٥

شكل ١٣ - ٢٦

إن معاوقة الدائرة على يسار AB يجب أن تكون أقل ما يمكن . وبالتعبير عن معاوقة هذا الجزء في الدائرة نحصل على

$$Z = 5 - j5 + j12 + j12 \pm j2X_M = 5 + j19 \pm j2\sqrt{12(12)} \Omega$$

ولكي تكون قيمة المعاوقة أقل ما يمكن فإن الممانعة يجب أن تكون مساوية للصفر . وعلى ذلك فإن الإشارة الصحيحة للحث المتبادلي سالبة

$$k = 19/24 = 0.792 \quad , \quad 19 - 2k\sqrt{12(12)} = 0$$

والتوصيل الموضح في الشكل ١٣ - ٢٦ ينتج عنه إشارة سالبة للجهد التأثيري المتبادلي كما هو المطلوب .

إذن معاوقة الدائرة على يسار الطرفين AB هي مقاومة نقية قيمتها 5Ω ، وينتج لدينا أكبر قدرة عندما

$$R_L = R_g = 5 \text{ ohms}$$

١٣ - ١٦ الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ٢٥ لها مقاومة حمل $R_L = 10 \Omega$ ومصدر $V = 50 \angle 0^\circ$ مع اعتبار احتمالي توصيل الملفين وأن k تتغير من $0 \rightarrow 1$ أوجد مدى تغير القدرة المعطاة لمقاومة الحمل .

باعتبار التوصيل الموضح في الشكل ١٣ - ٢٦ فإن الحث التبادلي يكون سالبا وتكون معاوقة الدائرة الكلية

مما فيها الحمل هي $Z_T = 5 - j5 + j12 + j12 - j24k + 10 \Omega$. وبوضع $k = 1$ ، إذن

$$Z_T = 15 - j5 = 15.8 \angle -18.45^\circ \Omega, I = \frac{V}{Z_T} = \frac{50 \angle 0^\circ}{15.8 \angle -18.45^\circ} = 3.16 \angle 18.45^\circ \text{ A}$$

والقدرة في مقاومة 10Ω هي $P = P_R = (3.16)^2(10) = 100 \text{ W}$

والآن بوضع $k = 0$ ، إذن

$$Z_T = 15 + j19 = 24.2 \angle 51.7^\circ \Omega, I = 50 \angle 0^\circ / (24.2 \angle 51.7^\circ) = 2.06 \angle -51.7^\circ \text{ A}$$

والقدرة في المقاومة 10Ω هي $(2.06)^2(10) = 42.4 \text{ watts}$ وعندما $k = 0.792$ فإن $P_{\max} = 111 \text{ W}$.

بتغيير توصيل الملفين ينتج لدينا إشارة موجبة للحث التبادلي . إذن المعاوقة تصبح $Z_T = 15 + j19 + jk24 \Omega$

بوضع $K = 1$ ، إذن

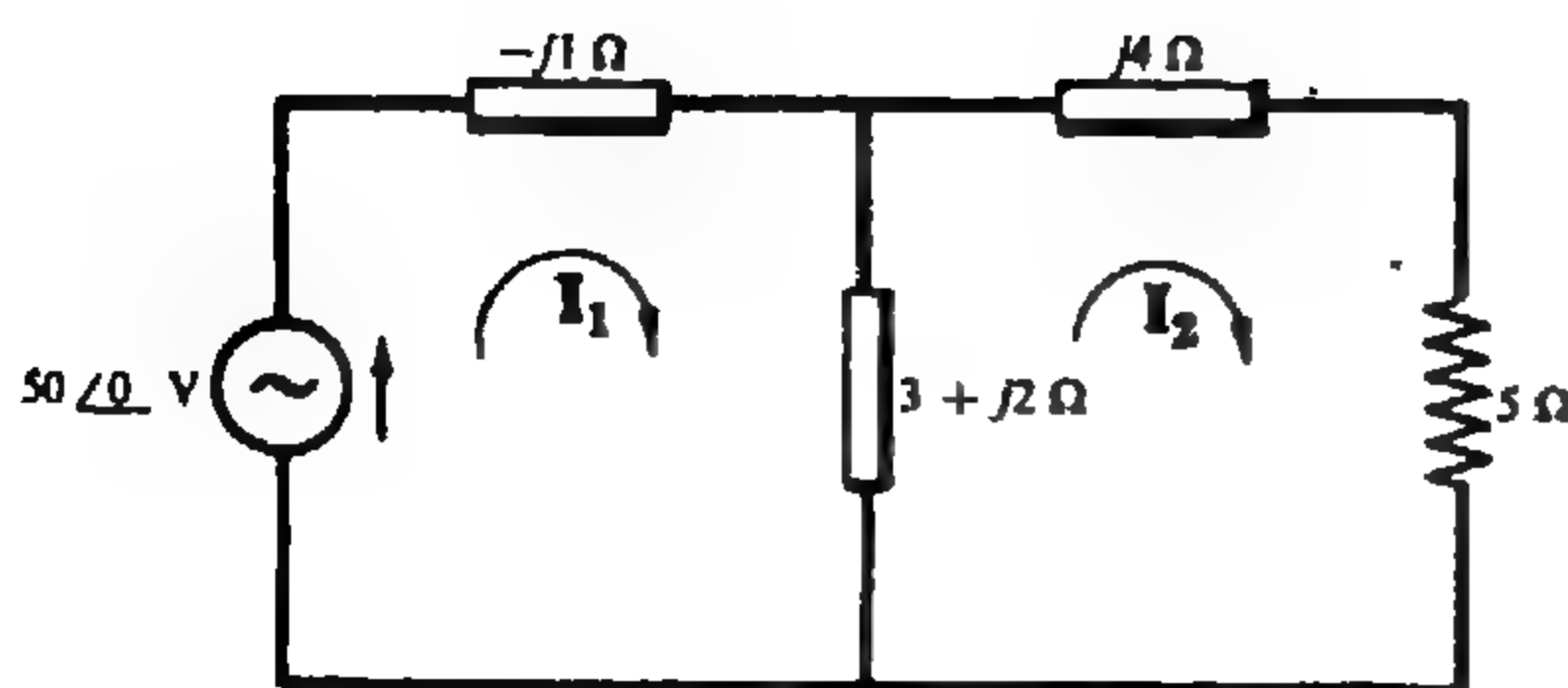
$$Z_T = 15 + j43 = 45.6 \angle 70.8^\circ \Omega, I = 50 \angle 0^\circ / (45.6 \angle 70.8^\circ) = 1.095 \angle -70.8^\circ \text{ A}$$

والقدرة المناظرة هي $P = P_R = (1.095)^2(10) = 12 \text{ W}$

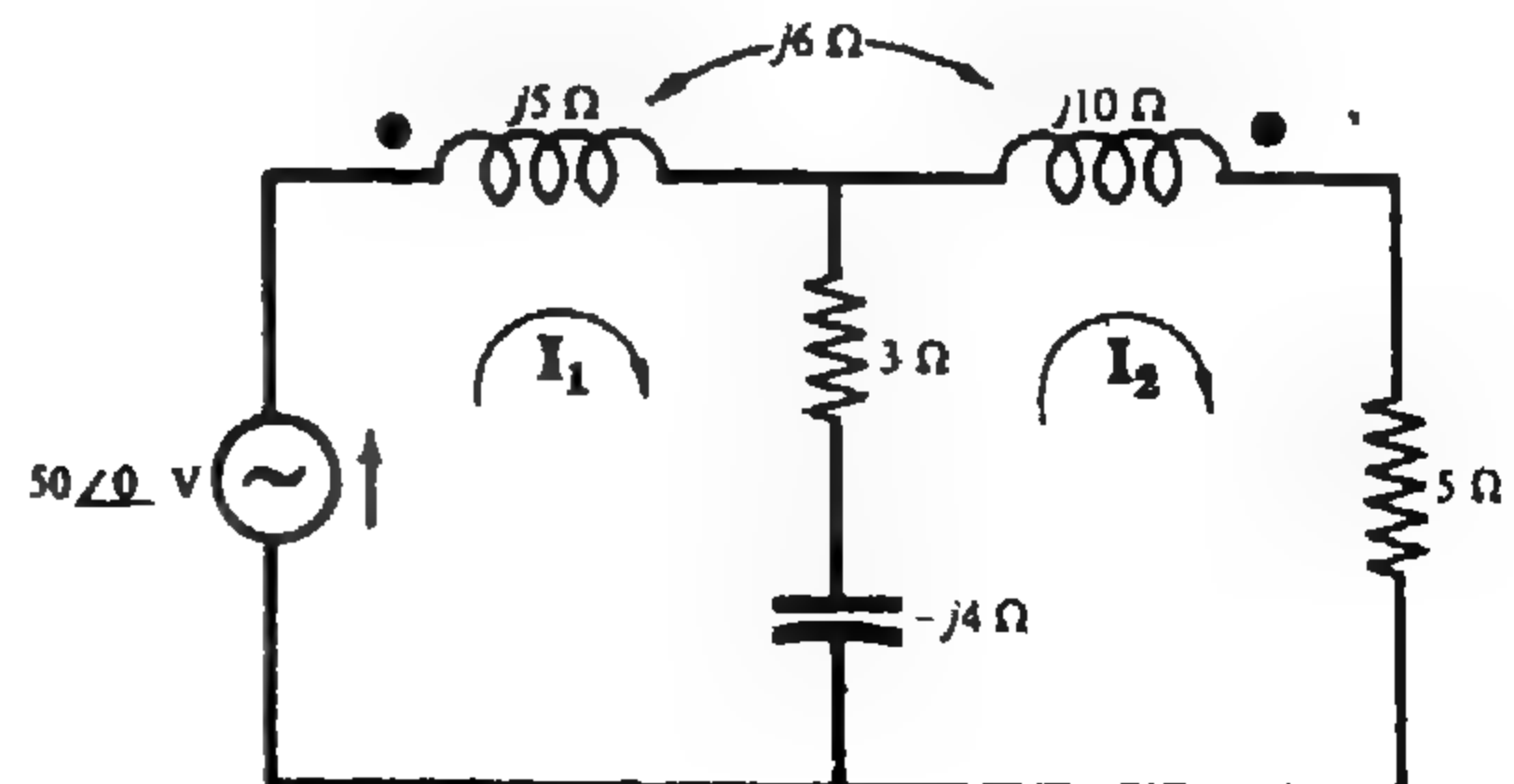
وعلى ذلك فإنه من المتوقع أن تكون القدرة في المقاومة 10Ω في المدى من 12 W إلى 100 W .

١٣ - ١٧ أوجد الدائرة المكافئة المرتبطة توصيليا للدائرة المرتبطة تبادليا والموضحة بالشكل ١٣ - ٢٧ نختار تيارى الشبكة I_1 و I_2 كما هو موضح ثم نكتب المعادلة في الصيغة المصفوفية .

$$\begin{bmatrix} 3 + j1 & -3 - j2 \\ -3 - j2 & 8 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$



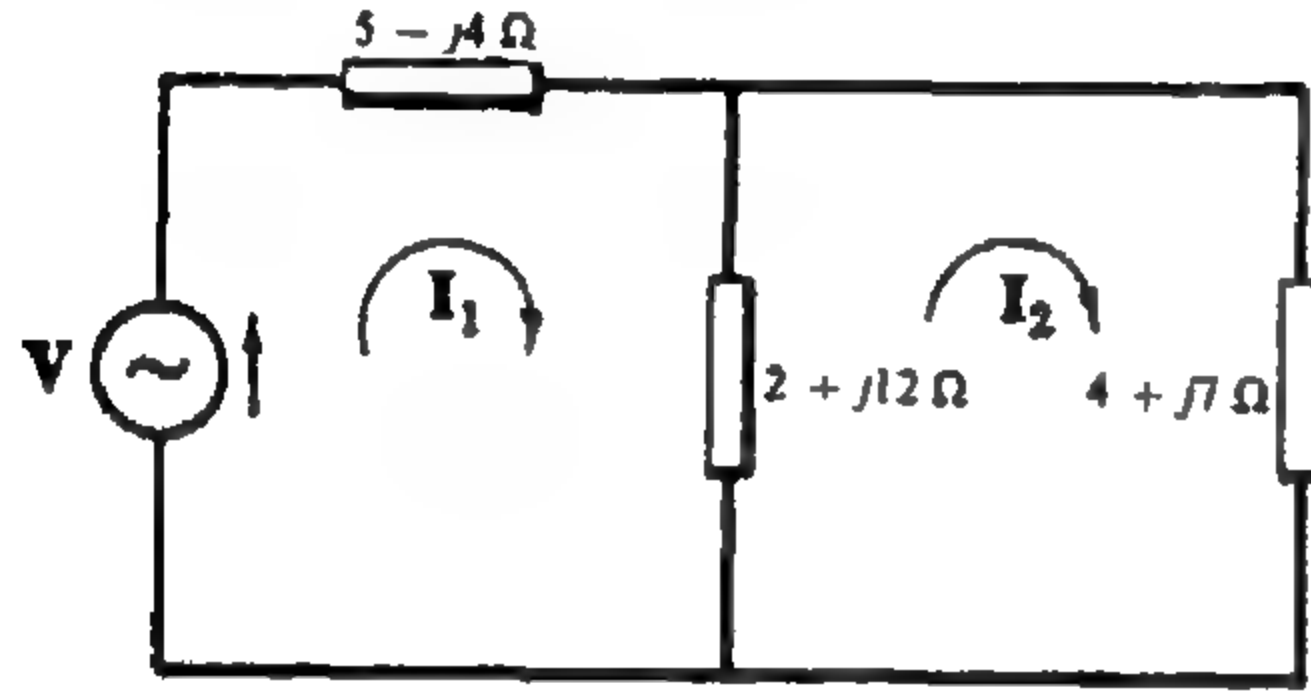
شكل ١٣ - ٢٨



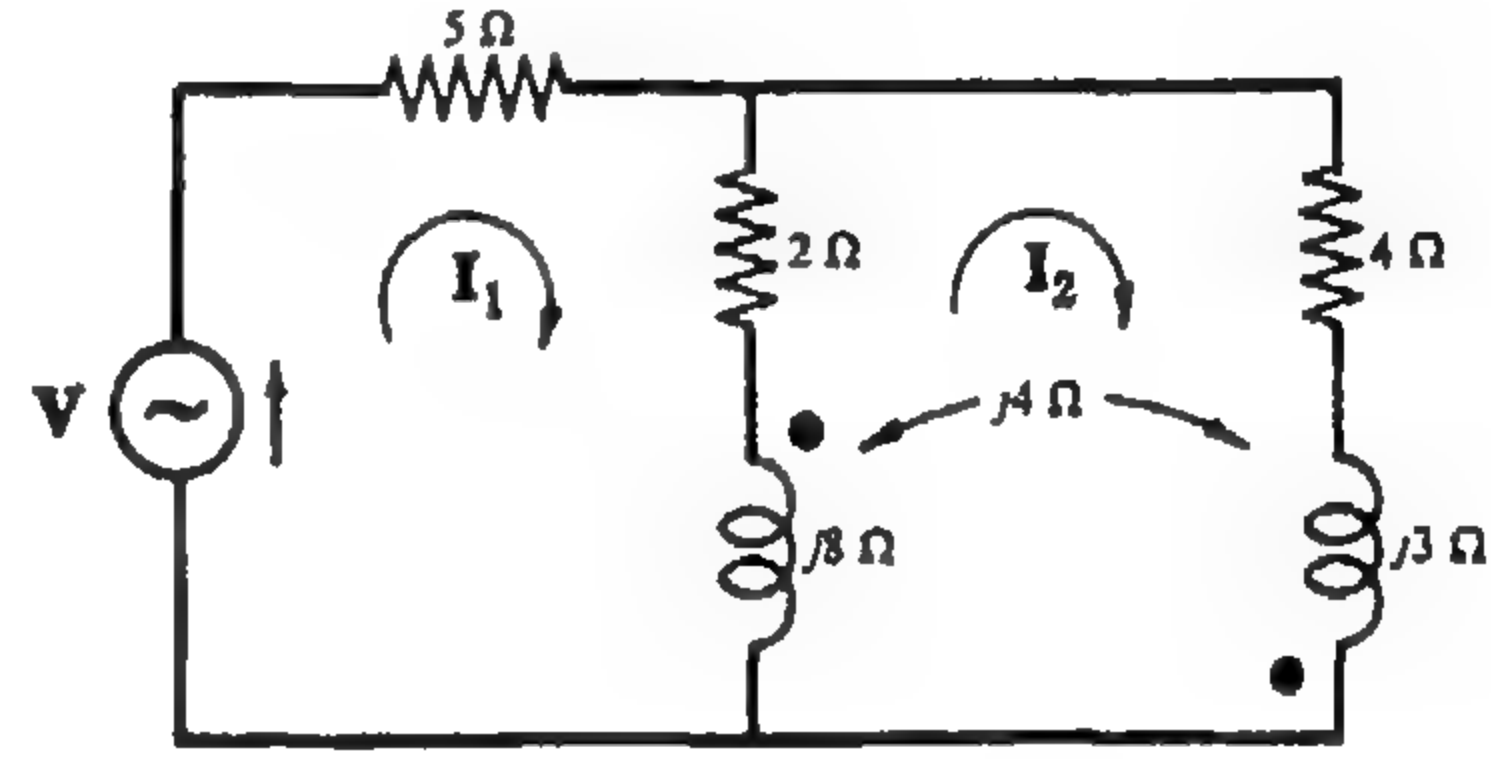
شكل ١٣ - ٢٧

. نختار تيارات للشبكة في الدائرة المرتبطة توصيليا بنفس الاتجاه في الدائرة المرتبطة تبادليا. من مصفوفة المعاوقة نجد أن $Z_{12} = -3 - j2 \Omega$ وحيث أن التيارين المارين في الفرع المشترك في اتجاهين متعاكسين فإن معاوقة الفرع المطلوبة هي $3 + j2 \Omega$. والآن فإن المعاوقة الذاتية للمسار الأول هي $Z_{11} = 3 + j1 \Omega$. وعلى ذلك فإننا نحتاج إلى معاوقة $-j1 \Omega$ في هذا المسار المغلق. وبالمثل نجد أن $Z_{22} = 8 + j6 \Omega$ فإن المسار المغلق يحتاج إلى المعاوقة $5 + j4 \Omega$ وذلك بالإضافة إلى عناصر الفرع المشترك كما هو موضح في الشكل ١٣-٢٨.

١٣-٢٨ أوجد الدائرة المكافئة المرتبطة توصيليا للشبكة الكهربائية المرتبطة تبادليا والموضحة في الشكل ١٣-٢٩.



شكل ١٣ - ٢٨



شكل ١٣ - ٢٩

نختار تيارى الشبكة I_1 و I_2 ونكتب معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية .

$$\begin{bmatrix} 7 + j8 & -2 - j12 \\ -2 - j12 & 6 + j19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

في الدائرة المرتبطة توصيليا يمر تيارى الشبكة في الفرع المشترك في اتجاهين متعاكسين وحيث أن Z_{12} في مصفوفة المعاوقة هي $-2 - j12 \Omega$ ، فإن معاوقة هذا الفرع يجب أن تكون $2 + j12 \Omega$. وبالمثل نجد من مصفوفة المعاوقة أن $Z_{11} = 7 + j8 \Omega$ و $Z_{22} = 6 + j19 \Omega$ وعلى ذلك فإن المعاوقات الباقية في المسارين المغلقين 1 و 2 في الدائرة المكافئة هي على الترتيب .

$$Z_2 = (6 + j19) - (2 + j12) = 4 + j7 \Omega \quad , \quad Z_1 = (7 + j8) - (2 + j12) = 5 - j4 \Omega$$

والشكل ١٣-٣٠ يوضح الدائرة المكافئة المرتبطة توصيليا .

مسائل إضافية

١٣-١٩ ملفان معامل الربط لهما $k = 0.85$ وعدد لفات الملف الأول 250 لفة . وعندما كان التيار في الملف الأول $i_1 = 2 \text{ A}$ كان الفيض الكلي ϕ_1 يساوى 0.3 mWb . وعند انقاص التيار i_1 خطيا إلى الصفر في 2 m sec كان الجهد التأثيرى في الملف الثانى يساوى 63.75 V ، أوجد L_2 و L_1 و M و N_2 . الجواب 500 mH , 63.8 mH , 150 mH , 37.5 mH .

١٣-٢٠ ملفان مترابطان عدد لفاتهما $N_1 = 100$ و $N_2 = 800$ ومعامل الربط لهما هو 0.85 ، وعندما كان الملف الأول مفتوحا ومر تيار قيمته 5 A في الملف الثانى كان الفيض ϕ_2 يساوى 0.35 mWb ، أوجد L_2 و L_1 و M . الجواب : 0.875 mH , 56 mH , 5.95 mH .

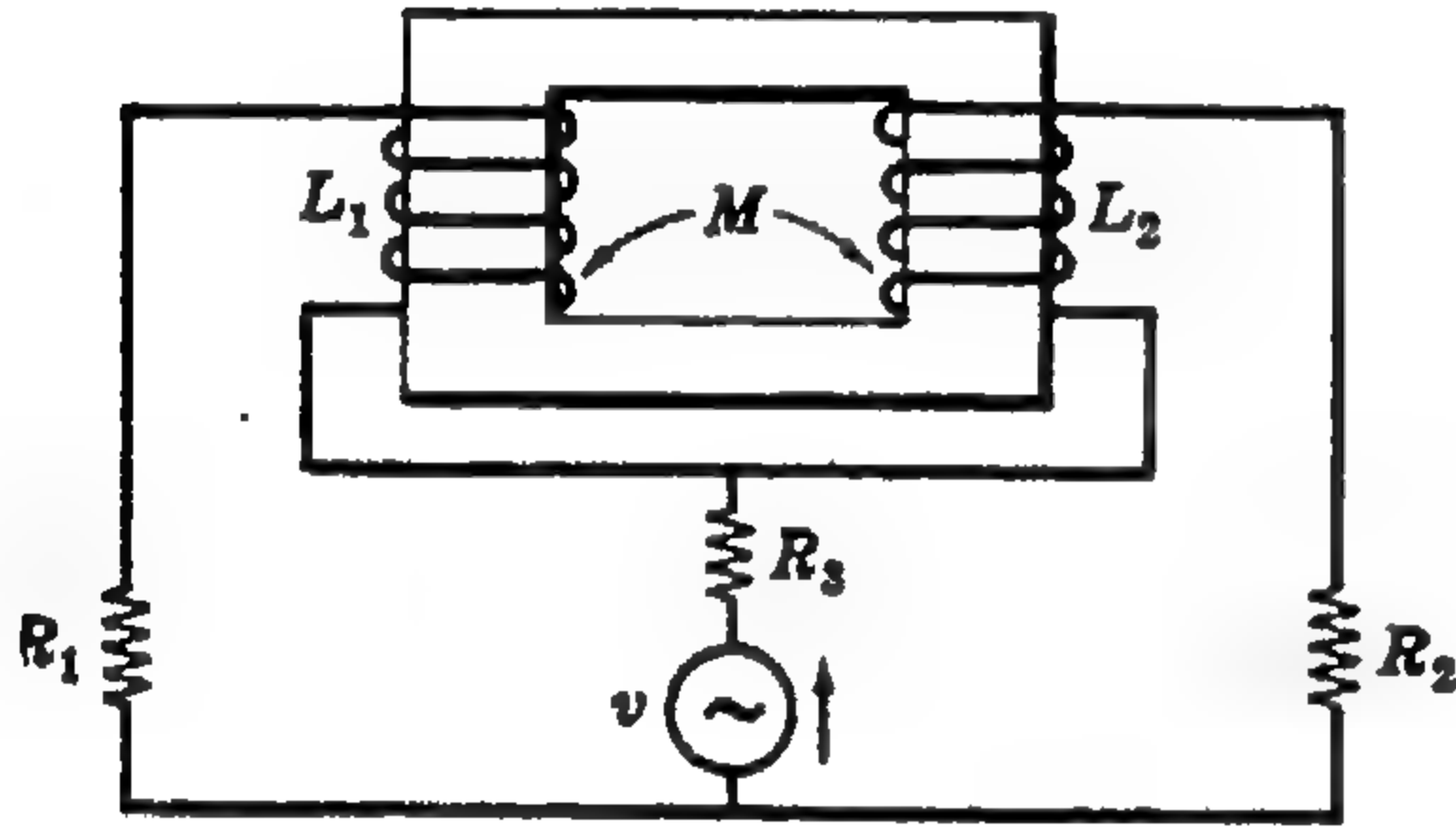
٢١-١٣ إذا كان الحث المكافئ للملفين متماثلين في حالة توصيلهما على التوالي بحيث يساعد كل منهما الآخر هو 0.080 H ، وفي حالة توصيلهما على التوالي بحيث يعاكس كل منهما الآخر هو 0.035 H ، أوجد قيم L_1 و L_2 و M و K .

الجواب : $L_1 = 28.8 \text{ mH}$, $L_2 = 28.8 \text{ mH}$, $M = 11.25 \text{ mH}$, 0.392

٢٢-١٣ ملفان مترابطان لهما $L_1 = 0.02 \text{ H}$ و $L_2 = 0.01 \text{ H}$ و $k = 0.5$. وصلا بأربع طرق مختلفة ؛ على التوالي ويساعد كل منهما الآخر ؛ على التوالي ويعاكس كل منهما الآخر ؛ على التوازي بالترتيبين المحتملين لاتجاه الملف . أوجد القيم الأربع للحث المكافئ . الجواب : 15.9 mH , 44.1 mH , 9.47 mH , 3.39 mH

٢٣-١٣ ملفان متماثلان لهما $L = 0.02 \text{ H}$ ومعامل الربط لهما $k = 0.8$. أوجد M وقيمتي الحث المكافئ عند توصيل الملفين على التوالي ويساعد كل منهما الآخر أو على التوالي ويعاكس كل منهما الآخر . الجواب : 16 mH , 72 mH , 8 mH

٢٤-١٣ ملفان حثهما كنسبة 4 إلى 1 ومعامل الربط لهما $k = 0.6$. وعند توصيل هذين الملفين على التوالي بحيث يساعد كل منهما الآخر كان الحث المكافئ لهما هو 44.4 mH أوجد L_1 و L_2 و M الجواب : 6 mH , 24 mH , 7.2 mH

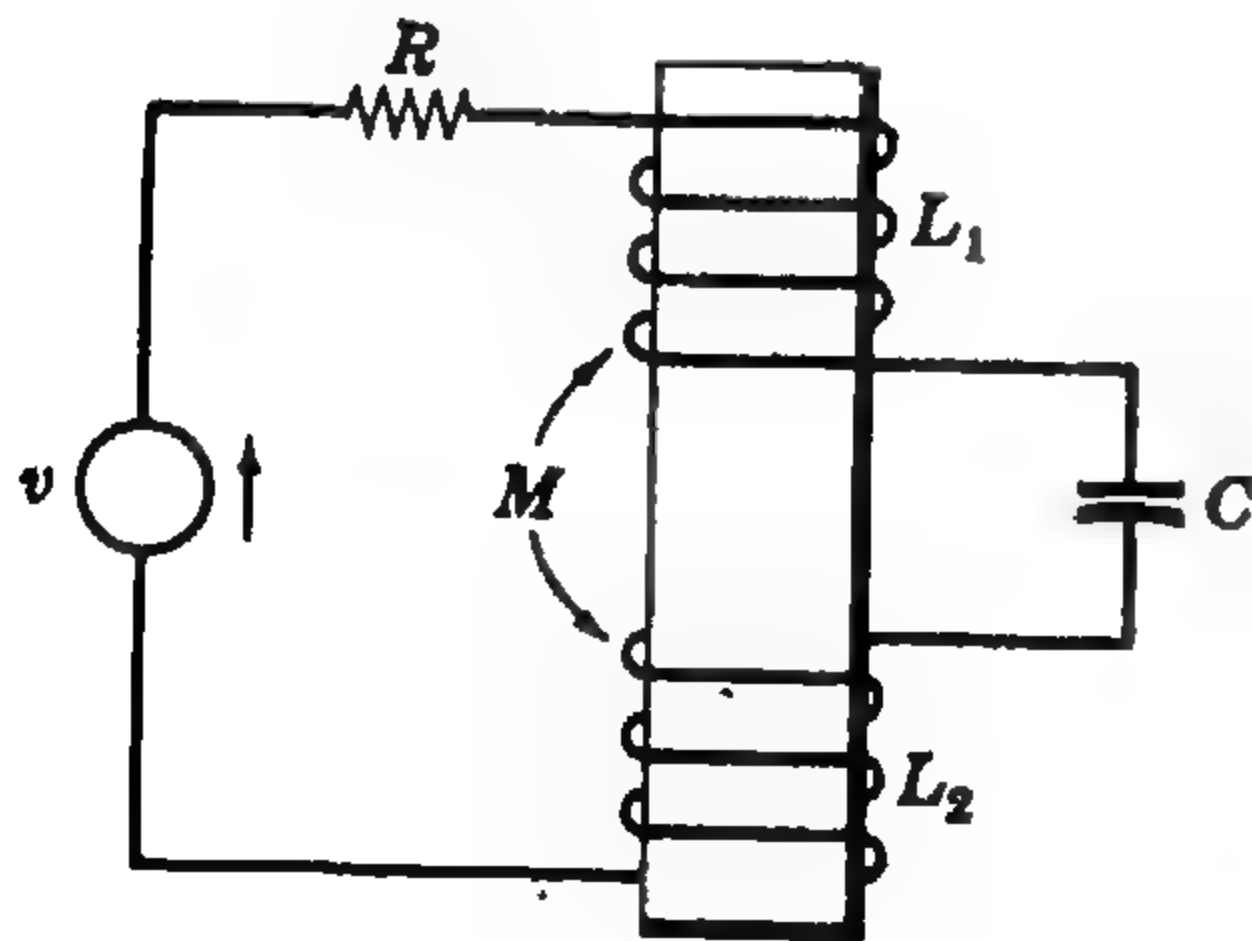


شكل ١٣ - ٣١

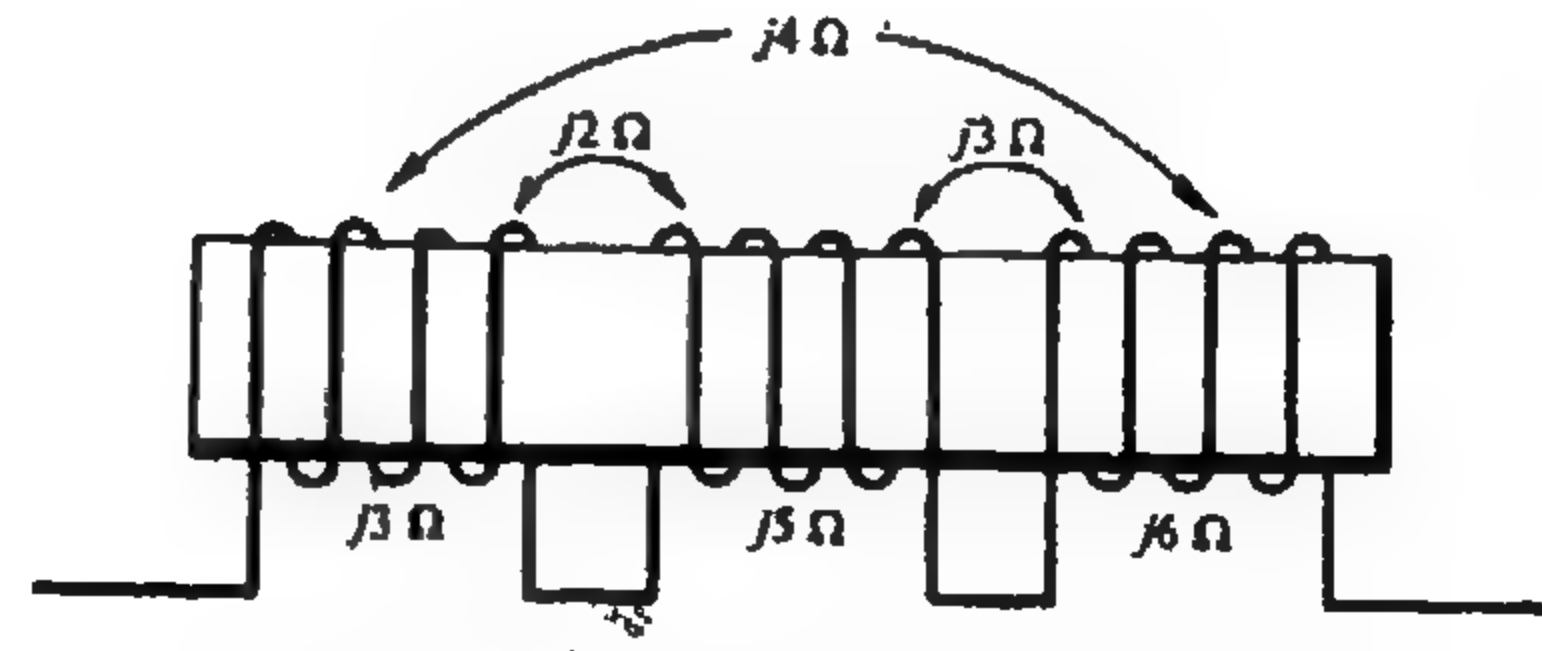
٢٥-١٣ ملفان حثهما $L_1 = 6.8 \text{ mH}$ و $L_2 = 4.5 \text{ mH}$ وصلا على التوالي بحيث يساعد كل منهما الآخر ثم وصلا على التوالي بحيث يعاكس كل منهما الآخر . فإذا كان الحث المكافئ في الحالتين هو 19.6 mH و 3 mH على الترتيب أوجد M و k . الجواب : 4.15 mH , 0.75

٢٦-١٣ اختر تيارات الشبكة للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ٣١-١٣ ثم اكتب المعادلات في الصيغة النقطية . أوجد الدائرة المكافئة في الترميز النقطي ثم اكتب معادلتها وقارن بين النتيجةين .

٢٧-١٣ ارسم الدائرة المكافئة بالترميز النقطي للملفات المترابطة والموضحة في الشكل ٣٢-١٣ . ثم أوجد الممانعة الحثية المكافئة لهما . الجواب : $j12 \Omega$



شكل ١٣ - ٣٣

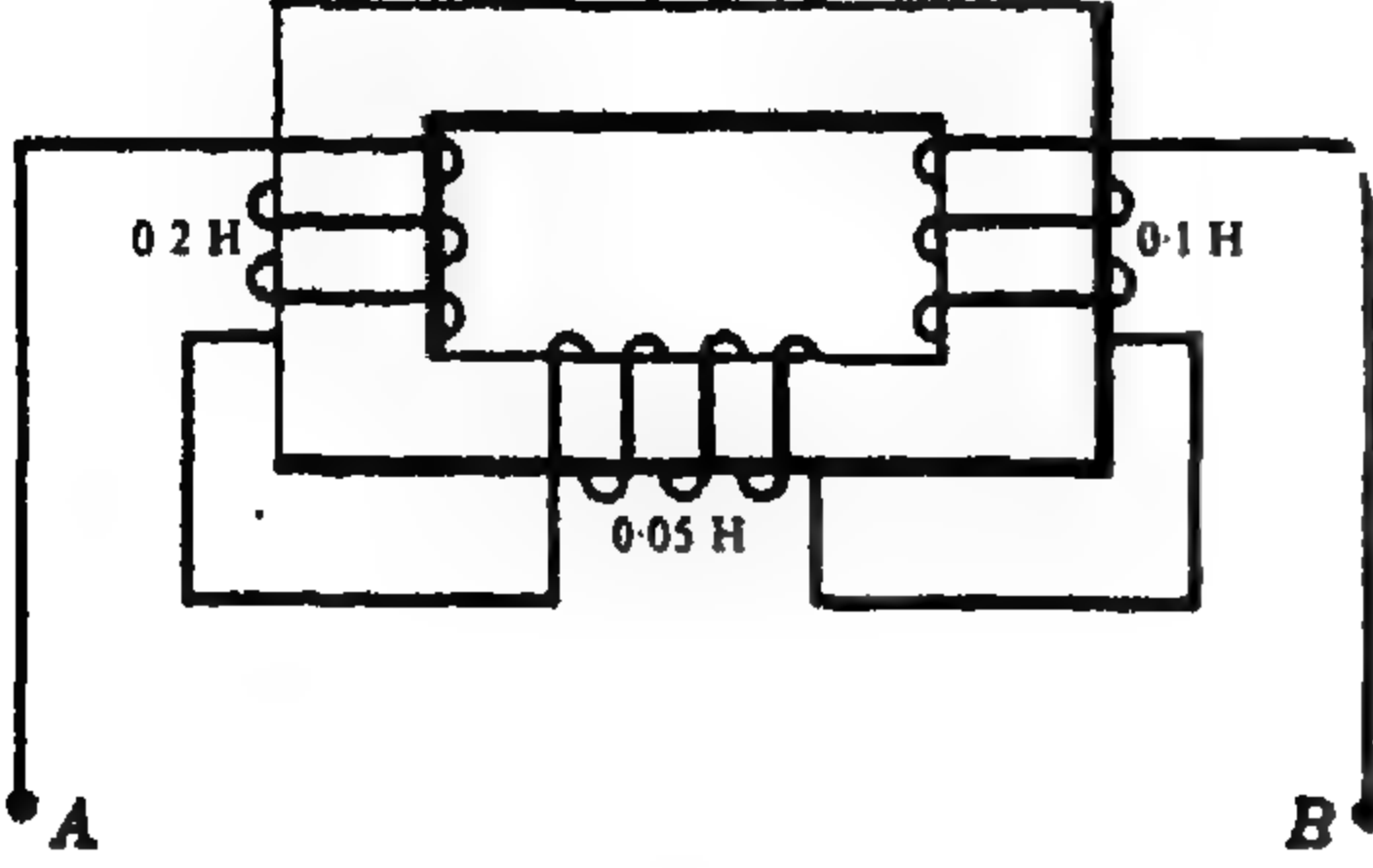


شكل ١٣ - ٣٢

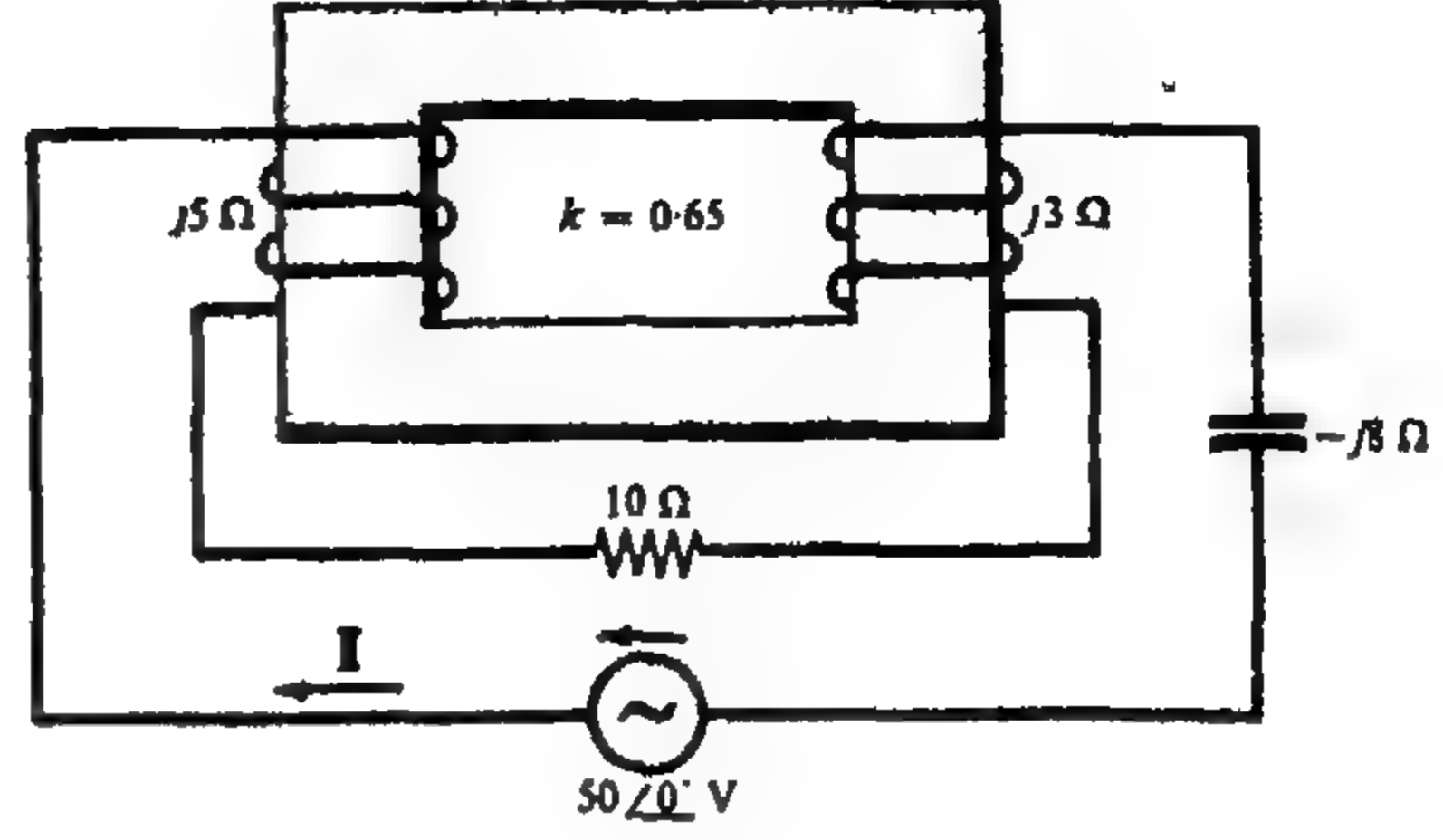
٢٨-١٣ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز النقطي للملفين المترابطين الموضحين في الشكل ٣٣-١٣ واكتب المعادلة في الصيغة النقطية .

٢٩-١٣ ارسم الدائرة المكافئة بالترميز النقطي للملفين المترابطين الموضحين في الشكل ١٣-٣٤ ثم أوجد التيار I .

الجواب : $4.47 \angle 26.7^\circ \text{ A}$



شكل ١٣ - ٣٥



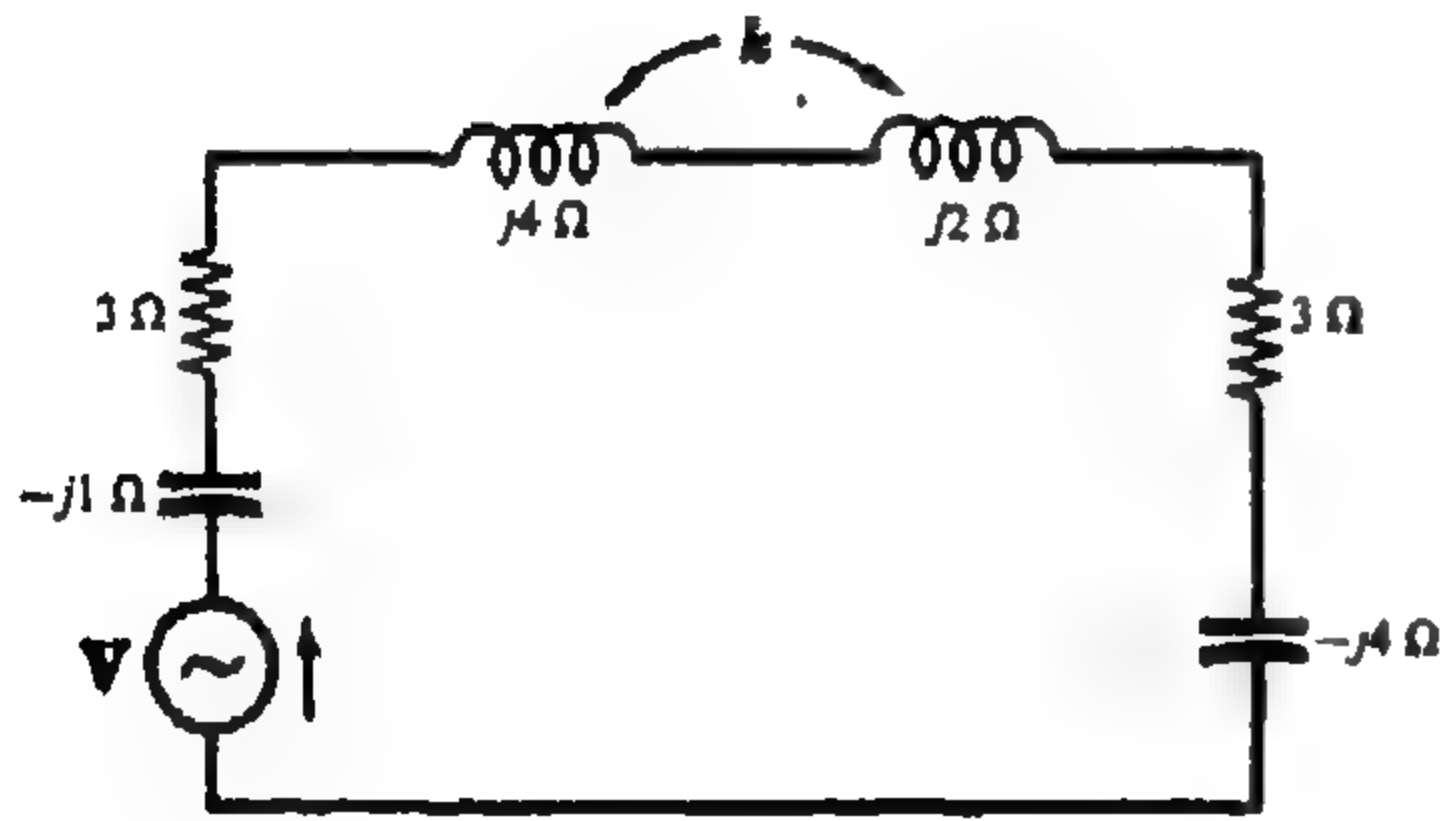
شكل ١٣ - ٣٤

٣٥-١٣ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز النقطي للملفات الثلاثة الموضحة في الشكل ١٣-٣٥ ، ثم أوجد الحث المكافئ لها عند الطرفين AB . اعتبر جميع معاملات الربط تساوي 0.5 . الجواب : 0.239 H

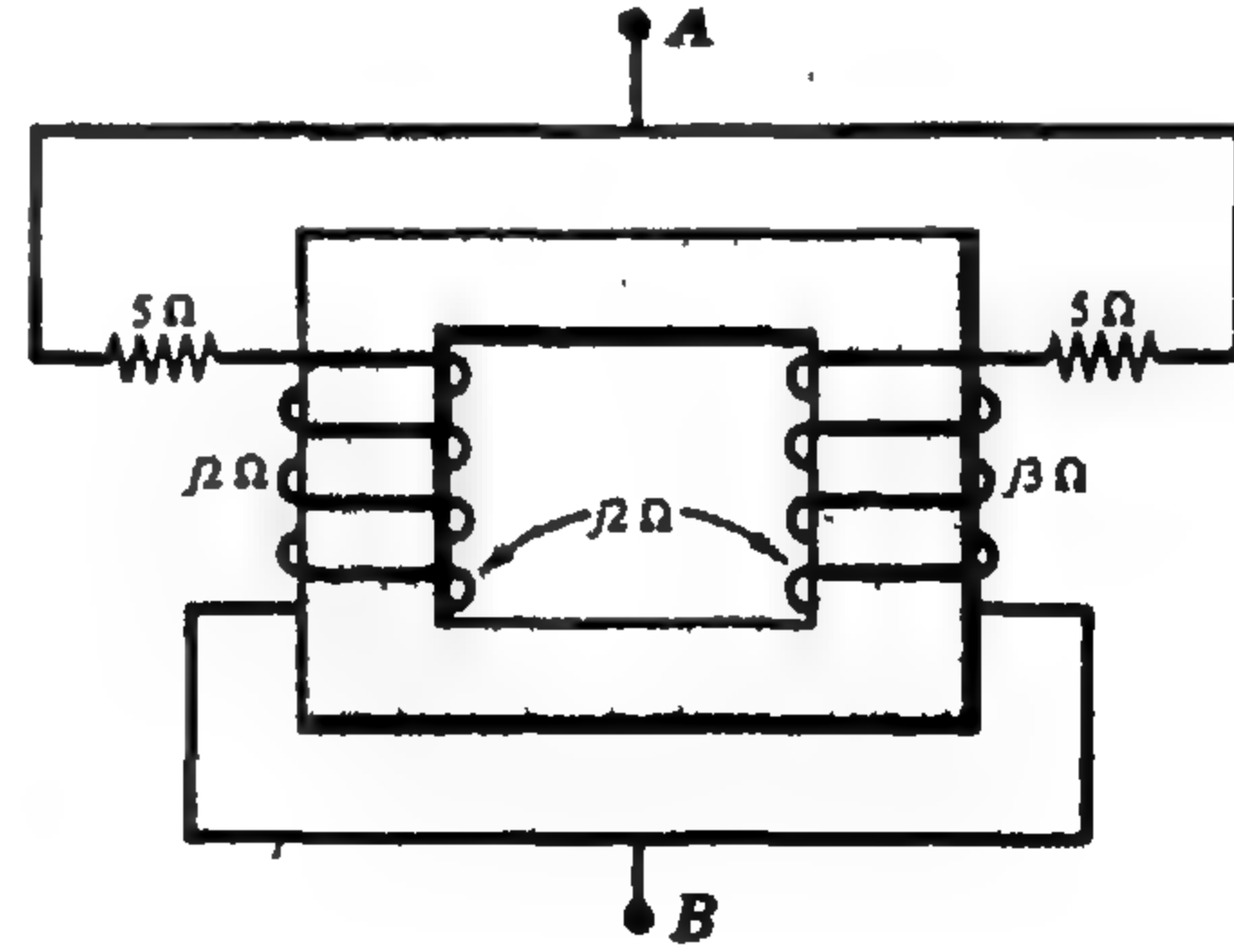
٣٦-١٣ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز النقطي للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٣٦ ، ثم أوجد المعاوقة المكافئة بين الطرفين AB . الجواب : $2.54 + j2.26 \Omega$

٣٧-١٣ في الدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٣٦ أوجد المعاوقة المكافئة بعد عكس اتجاه لف ملف واحد .

الجواب : $2.53 + j0.238 \Omega$



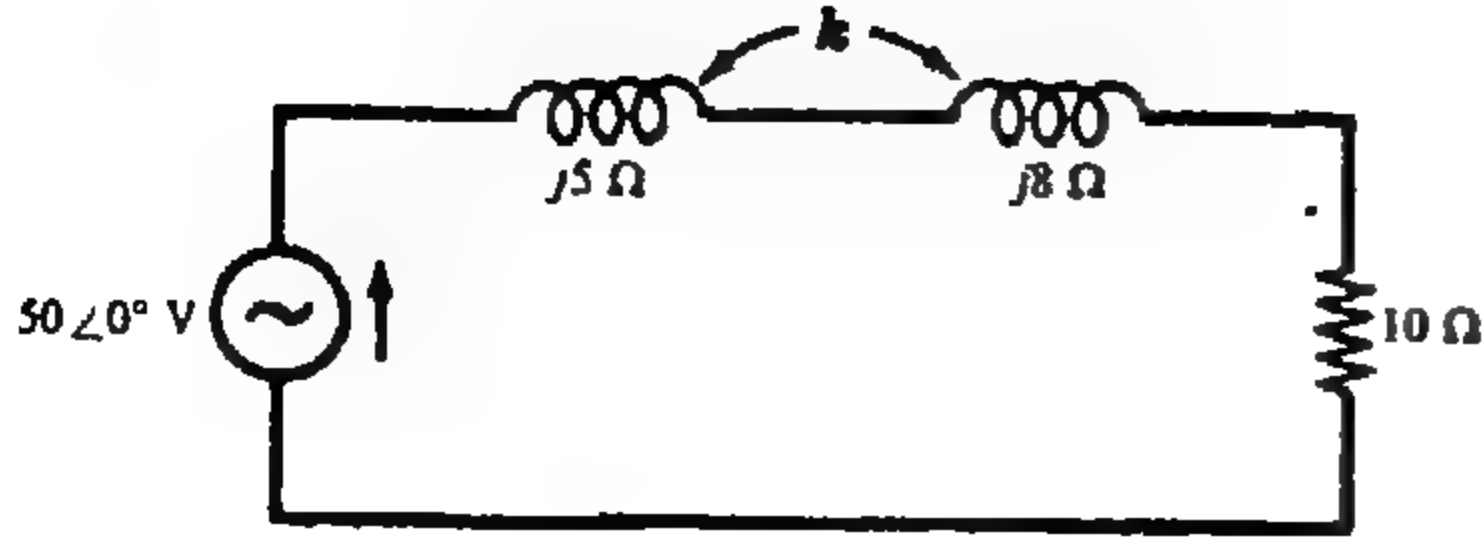
شكل ١٣ - ٣٧



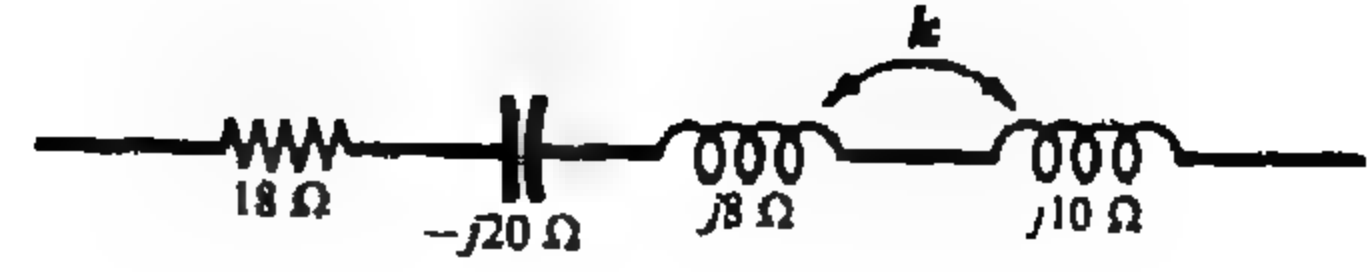
شكل ١٣ - ٣٦

٣٨-١٣ أوجد قيمة k للدائرة المتصلة على التوالي والموضحة في الشكل ١٣-٣٧ ، ثم ضع النقط على الملفين المترابطين بحيث تكون الدائرة في حالة رنين على التوالي . الجواب : $k = 0.177$

٣٩-١٣ أوجد قيمة k لدائرة التوالي الموضحة في الشكل ١٣-٣٨ ، ثم ضع النقط بحيث تكون الدائرة في حالة رنين على التوالي . الجواب : $k = 0.112$



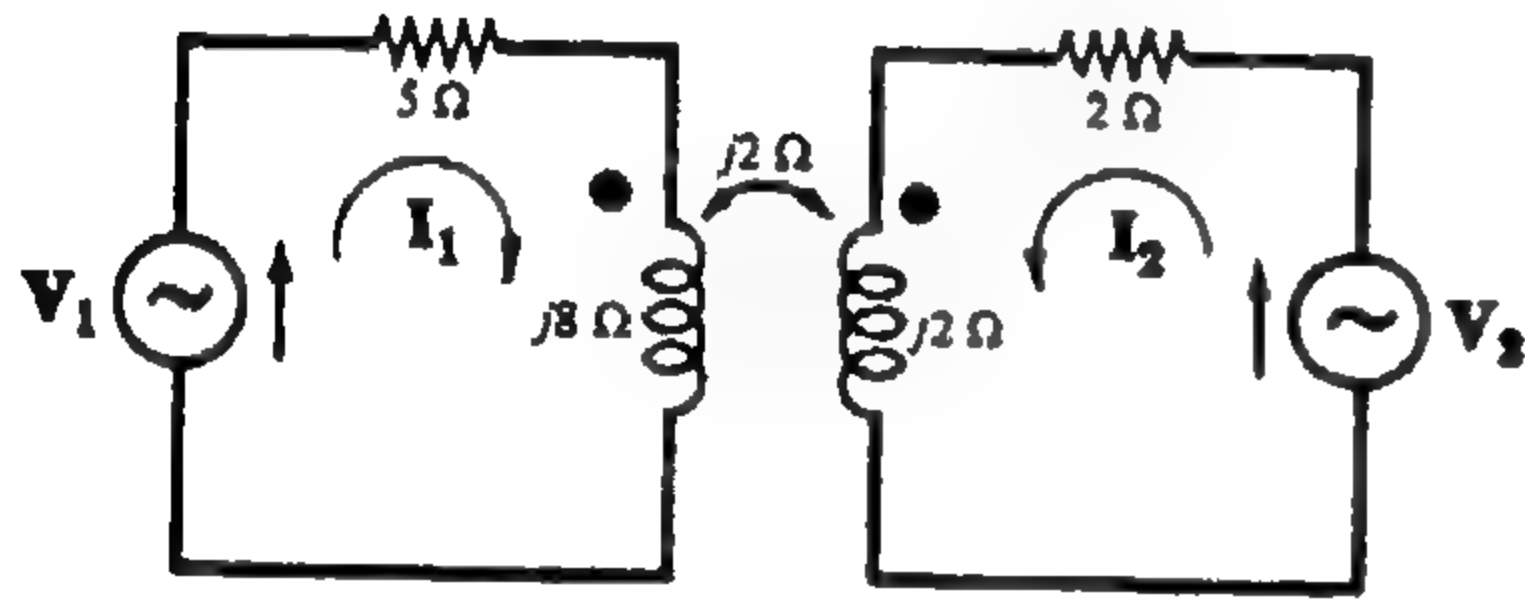
شكل ١٣ - ٣٩



شكل ١٣ - ٣٨

١٣-٣٥ أوجد قيمة k للدائرة الموضحة في الشكل ١٣-٣٩ . ثم ضع النقط بحيث تكون القدرة الخارجة من المصدر $50\angle 0^\circ V$ هي $168W$. الجواب : $k = 0.475$

١٣-٣٦ في المسألة ١٣-٣٥ أوجد القدرة الخارجة من المصدر وذلك عند عكس النقط . استخدم قيمة k الموجودة في المسألة ١٣-٣٥ . الجواب : $54.2 W$.



شكل ١٣ - ٤٠

١٣-٣٧ أوجد نسبة الجهد V_2/V_1 للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ٤٠ بحيث يكون التيار الناتج I_1 يساوى صفراً . كرر نفس الشيء بحيث يكون التيار I_2 يساوى صفراً .

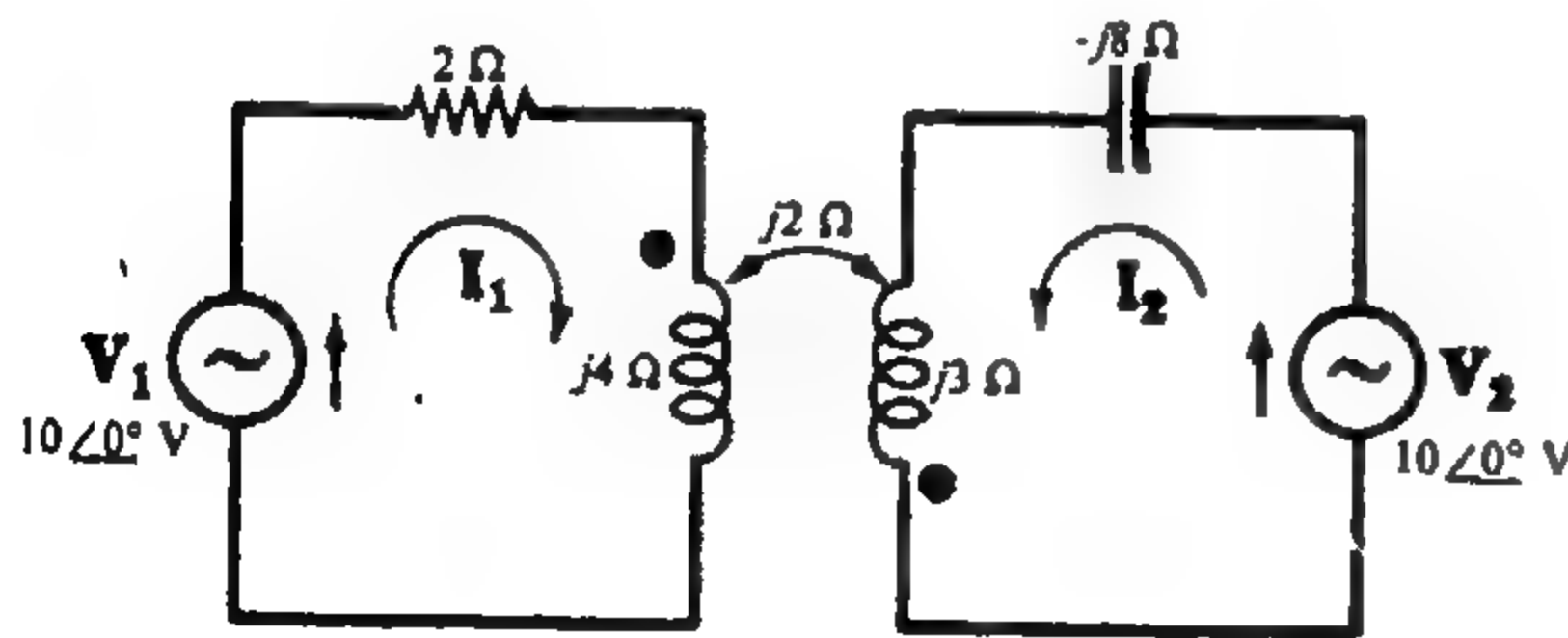
الجواب $1.414\angle -45^\circ, 0.212\angle 32^\circ$

١٣-٣٨ في المسألة ١٣-٣٧ أوجد الجهد الذي يظهر على الممانعة

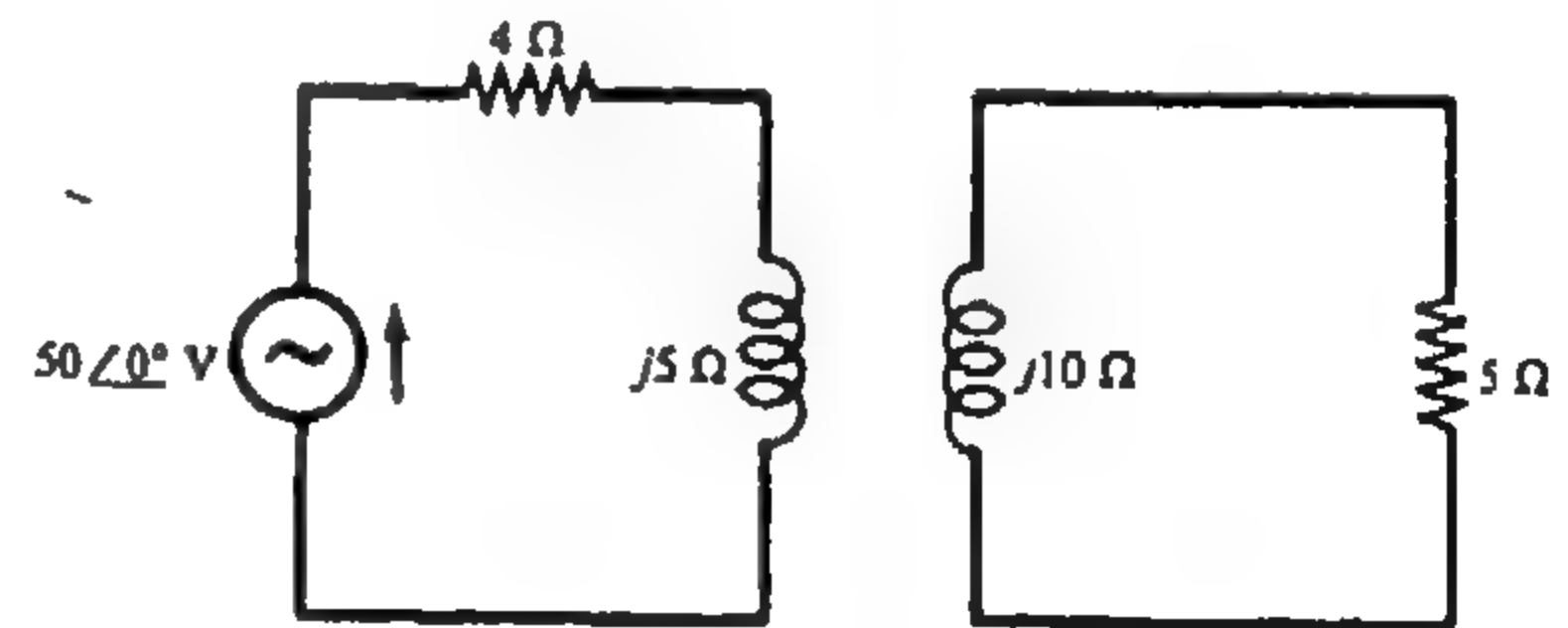
$j8\Omega$ عندما $V_1 = 100\angle 0^\circ V$ و $I_1 = 0$

الجواب : $100\angle 0^\circ V$ (+ عند النقطة)

١٣-٣٩ في الدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٤١ أوجد الممانعة الحثية المتبادلية $j\omega M$ إذا كانت القدرة في المقاومة 5Ω هي $45.2 W$. الجواب : $j4\Omega$



شكل ١٣ - ٤٢



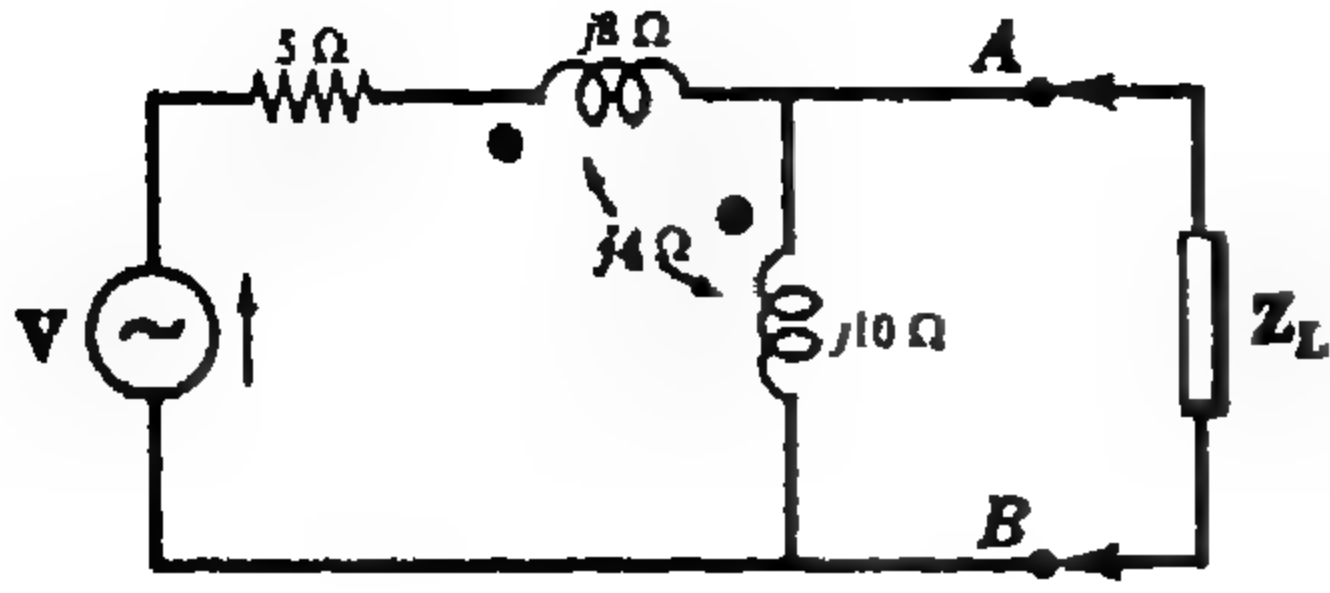
شكل ١٣ - ٤١

١٣-٤٠ في الدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٤٢ أوجد مركبتى التيار I_2 الناتجتين عن المصدرين V_1 و V_2

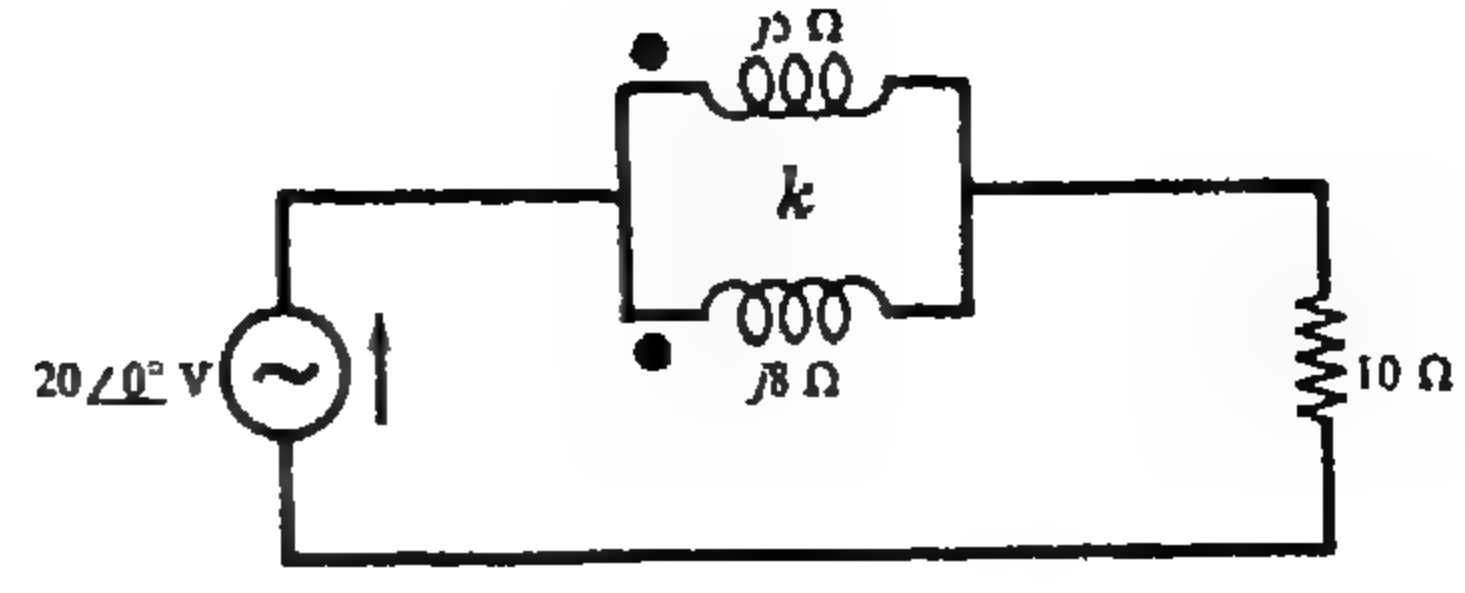
الجواب : $0.77\angle 112.6^\circ A, 1.72\angle 86^\circ A$

١٣-٤١ عين قيمة k للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٤٣ علماً بأن القدرة في المقاومة 10Ω هي $32 W$.

الجواب : 0.791



شكل ١٣ - ٤٤

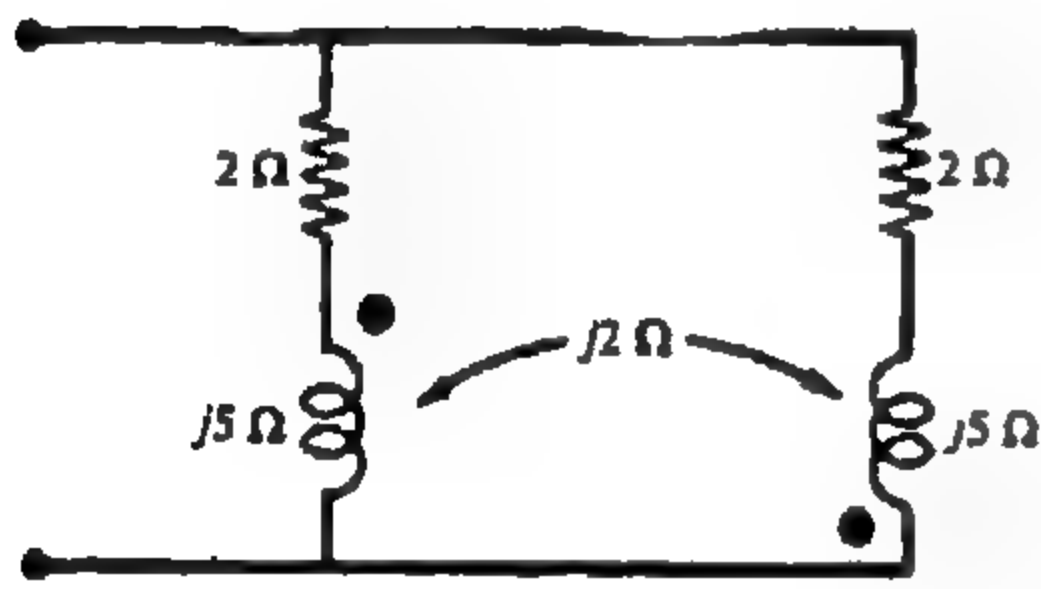


شكل ١٣ - ٤٣

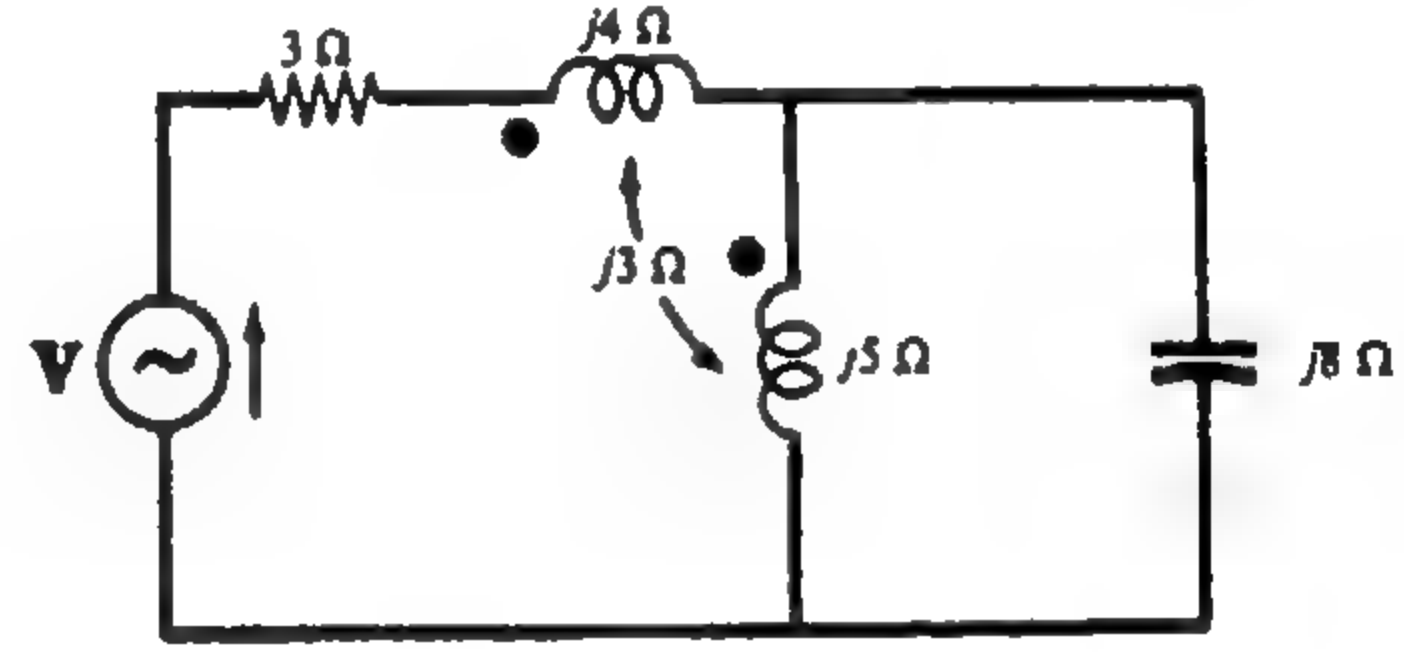
١٣-٤٢ : للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ٤٤ ، أوجد معاوقة الحمل Z_L التي ينتج عنها انتقال أكبر قدرة عند الطرفين AB .
الجواب : $1.4 - j2.74 \Omega$

١٣-٤٣ : للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ٤٥ ، أوجد المعاوقة الداخلة عند طرفي المصدر .
الجواب : $3 + j36.3 \Omega$

١٣-٤٤ : في الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ٤٥ ، أوجد الجهد على الممانعة $j5 \Omega$ علماً بأن $V = 50 \angle 45^\circ V$.
الجواب : $25.2 \angle 49.74^\circ V$



شكل ١٣ - ٤٦

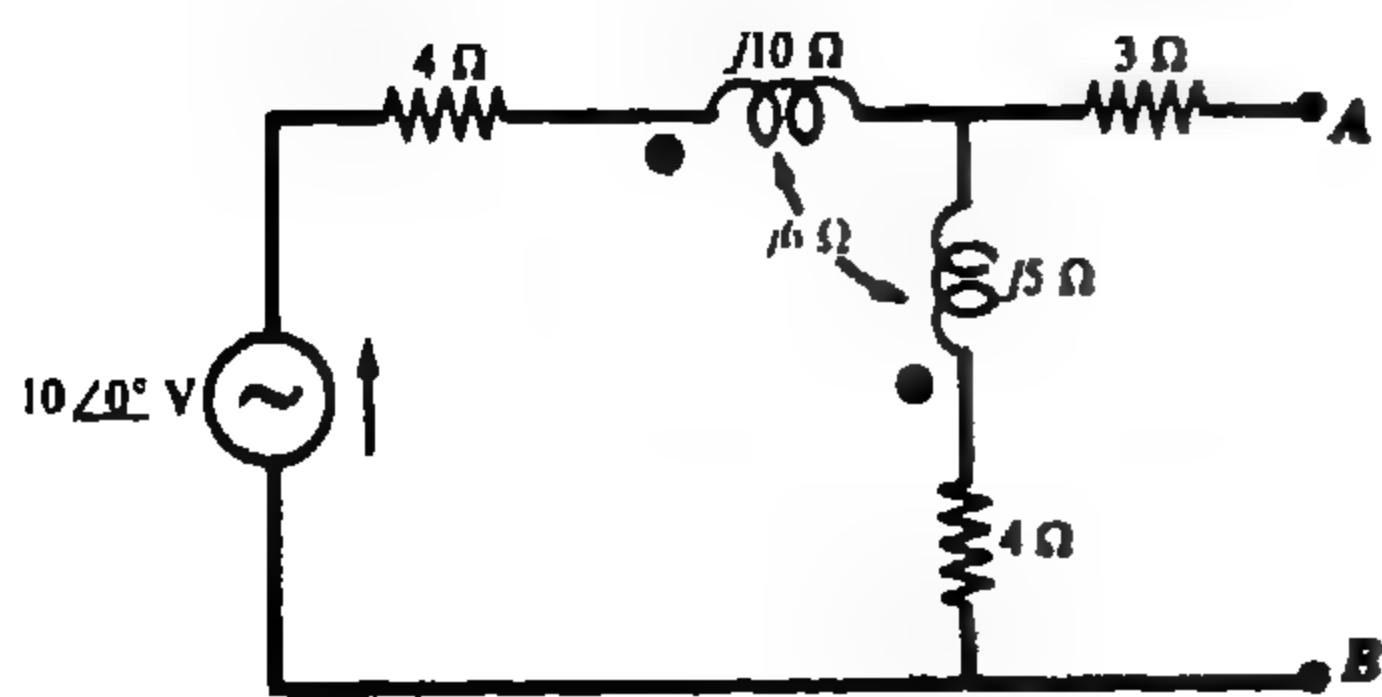


شكل ١٣ - ٤٥

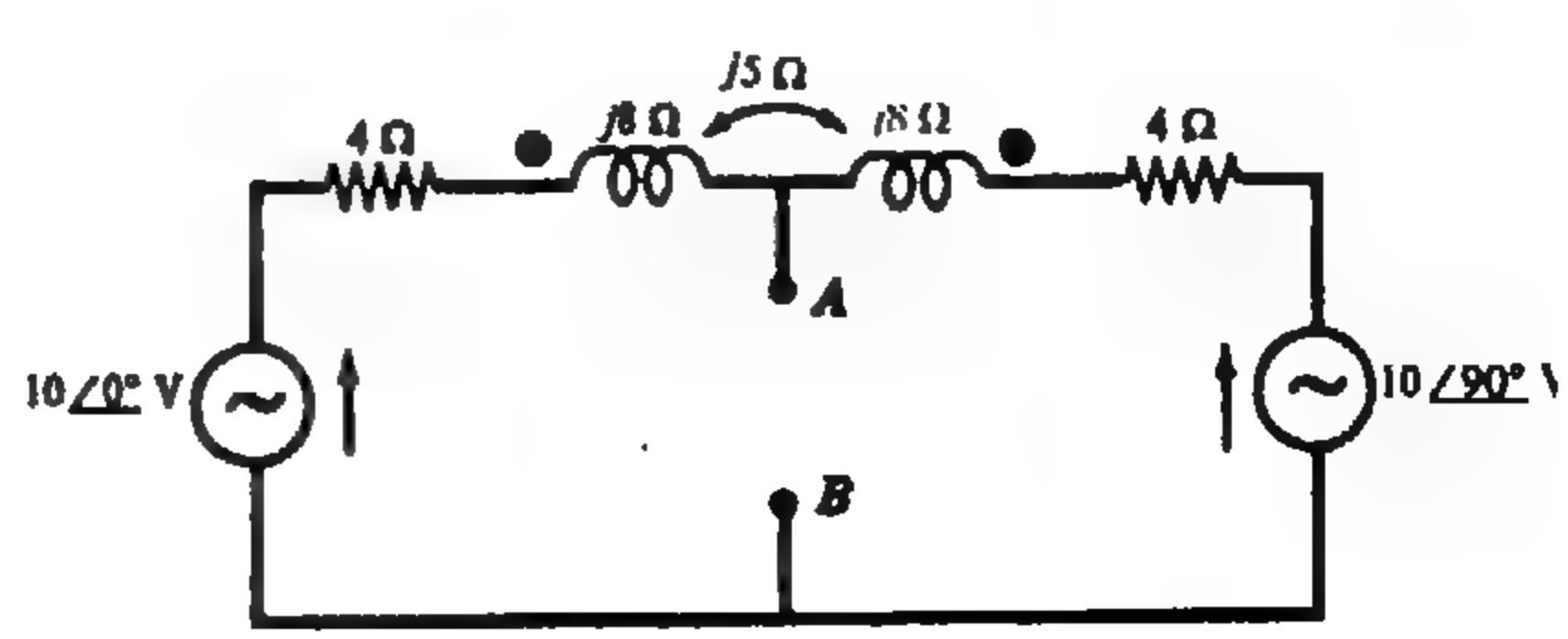
١٣-٤٥ : أوجد المعاوقة المكافئة للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ٤٦ .
الجواب : $1 + j1.5 \Omega$

١٣-٤٦ : أوجد دائرة ثنتين المكافئة للدائرة المترابطة المغطاة في الشكل ١٣ - ٤٧ وذلك عند الطرفين AB .
الجواب : $Z' = 2 + j6.5 \Omega, V' = 5 + j5 V$

١٣-٤٧ : أوجد دائرة نورتن المكافئة للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ٤٧ وذلك عند الطرفين AB .
الجواب : $Z' = 2 + j6.5 \Omega, I' = 1.04 \angle -27.9^\circ A$



شكل ١٣ - ٤٨



شكل ١٣ - ٤٧

٤٨-١٣ أوجد دائرة ثنتين المكافئة للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٨ ؛ وذلك عند الطرفين AB .

الجواب

$$Z' = 8.63 \angle 48.75^\circ \Omega, V' = 4.84 \angle -34.7^\circ V$$

٤٩-١٣ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٨ ؛ .

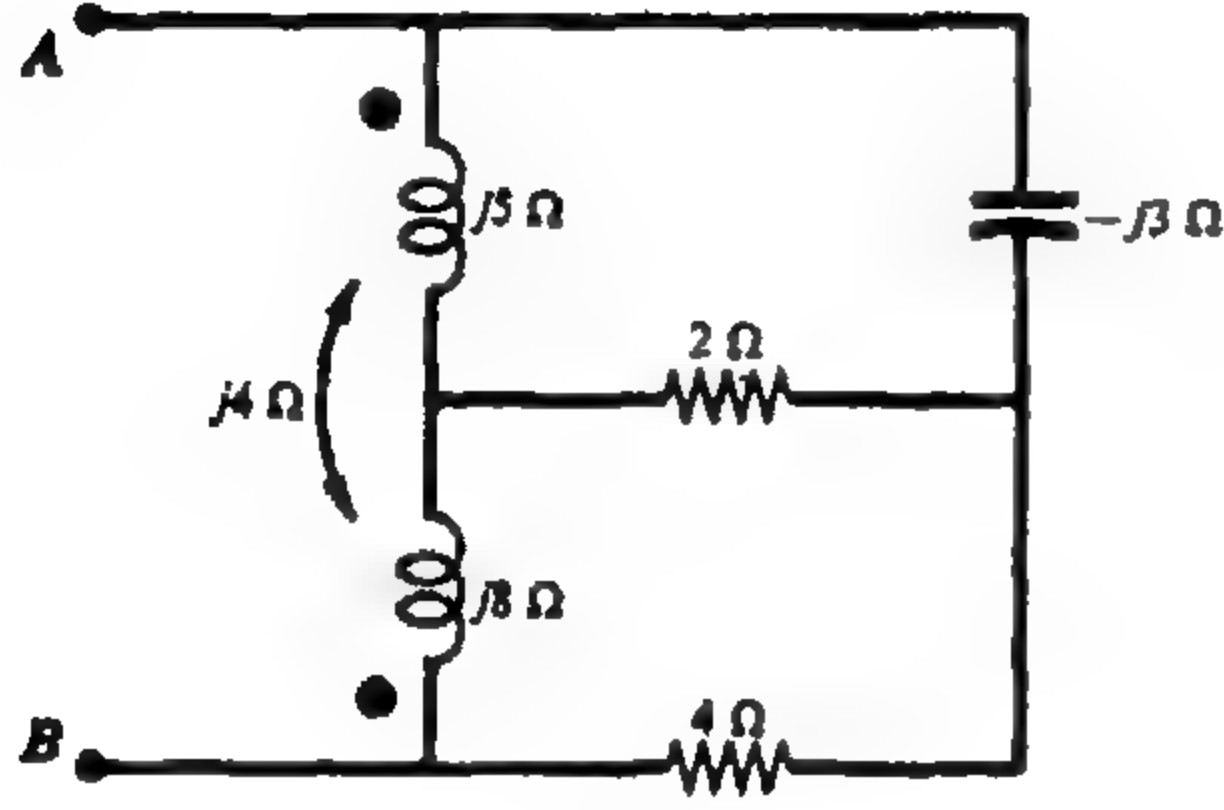
الجواب

$$Z' = 8.63 \angle 48.75^\circ \Omega, I' = 0.560 \angle -83.4^\circ A$$

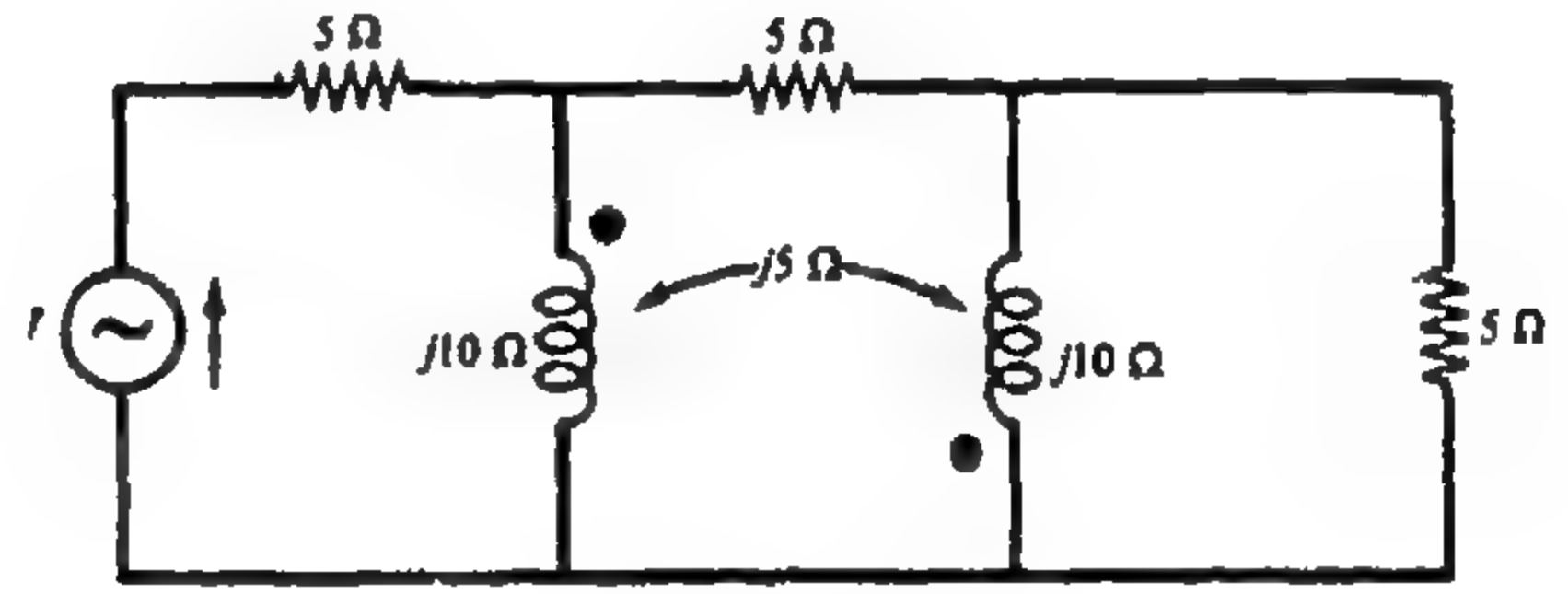
٥٠-١٣ للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٩ أوجد المعاوقة الداخلة عند طرفي مصدر الجهد V

الجواب :

$$6.22 + j4.65 \Omega$$



شكل ١٣ - ٥٠



شكل ١٣ - ٤٩

٥١-١٣ أوجد المعاوقة المكافئة عند الطرفين AB للشبكة الكهربائية المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٥٠

الجواب :

$$7.06 + j3.22 \Omega$$

الفصل الرابع عشر

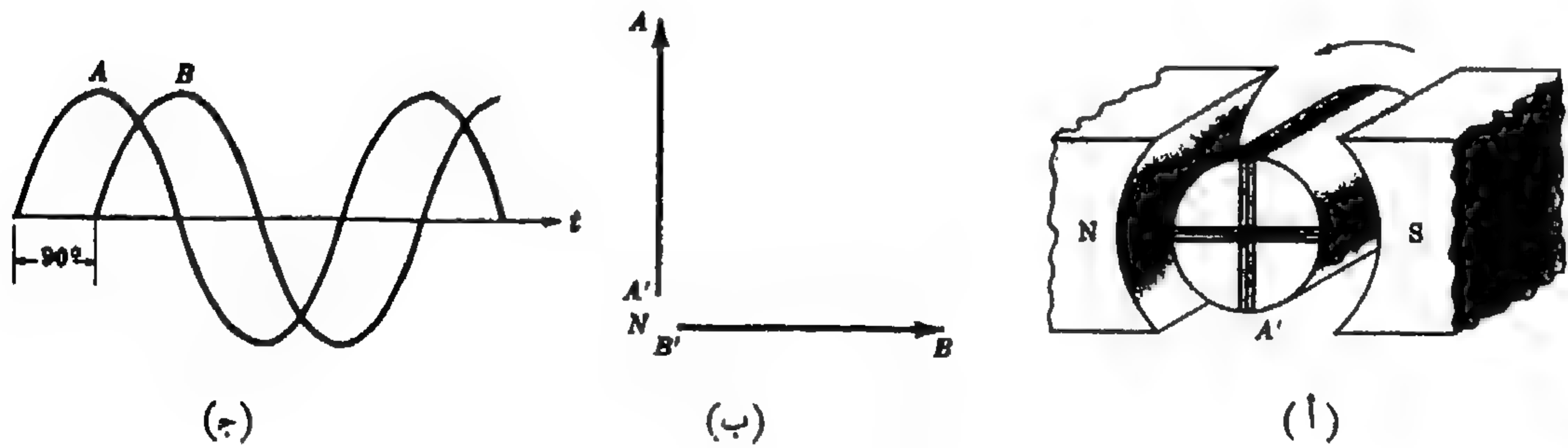
الانظمة المتعددة الاطوار

مقدمة :

يتكون النظام المتعدد الأطوار الذي يمد الأحمال المتصلة في الأفرع بالقدرة من جهدين متساويين أو أكثر بينها زوايا طور ثابتة . وفي النظام ذي الطورين لدينا جهدان متساويان يختلفان في الطور بزاوية 90° ، بينما في النظام ذي الأطوار الثلاثة تبلغ زاوية فرق الطور 120° . وفي التقويم المتعدد الأطوار تستخدم نظم من ستة أطوار أو أكثر وذلك للحصول على جهد مقوم قليل التموج ، والنظام الشائع الاستخدام في توليد وإرسال القدرة الكهربائية هو النظام ذو الأطوار الثلاثة .

النظام ذو الطورين :

ينتج عن دوران زوج الملفات المتعامدة المبينة في الشكل ١٤ - ١ (أ) في مجال مغناطيسي ثابت ، جهدان تأثيريان زاوية فرق الطور بينهما ثابتة وتساوي 90° . وإذا كان عدد اللفات في الملفين متساو فإن الجهد المطاوع والجهد اللحظي يكون لهما نفس المقدار كما هو موضح في رسمهما شكل ١٤ - ١ (ب) و (ج) على الترتيب .



شكل ١٤ - ١ نظام ذو طورين

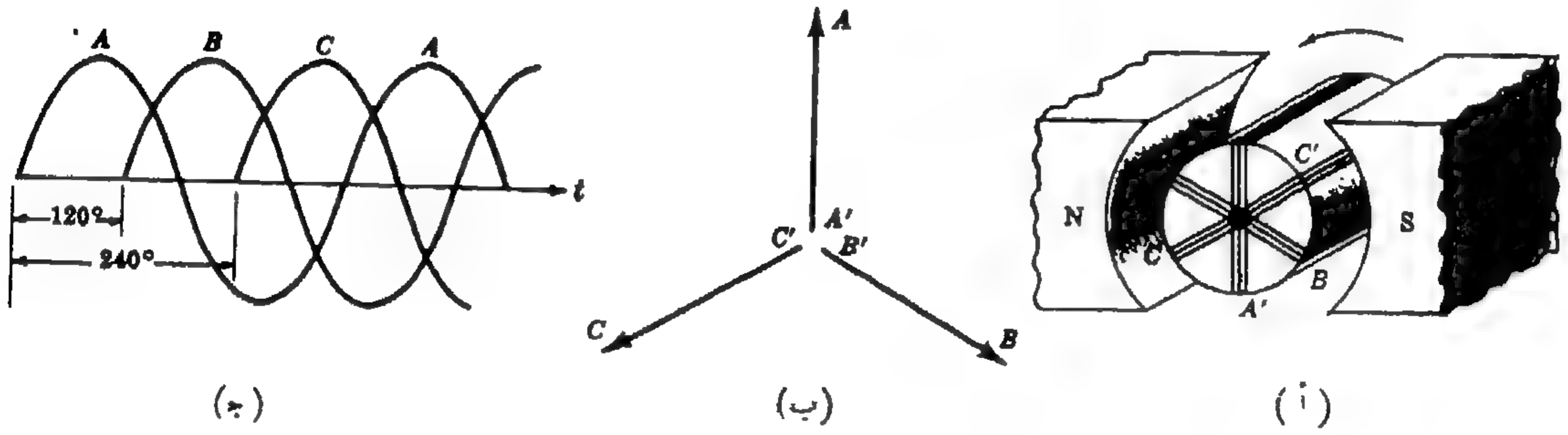
والشكل البياني للجهد المطاوع شكل ١٤ - ١ (ب) له $V_{BN} = V_{coll} / 0^\circ$ كحور إسناد وجهد $V_{AN} = V_{coll} / 90^\circ$

وإذا وصل طرفا A' و B' كفرع N ، فإن النظام ذا الطورين يتكون من الأفرع الثلاثة A و B و N فرق الجهد بين الفرعين A و B يزيد عن جهد الفرع المتبادل بمقدار $\sqrt{2}$ ويعطى بالمجموع .

$$V_{AB} = V_{AN} + V_{NB} = V_{coll} / 90^\circ + V_{coll} / 180^\circ = \sqrt{2} V_{coll} / 135^\circ$$

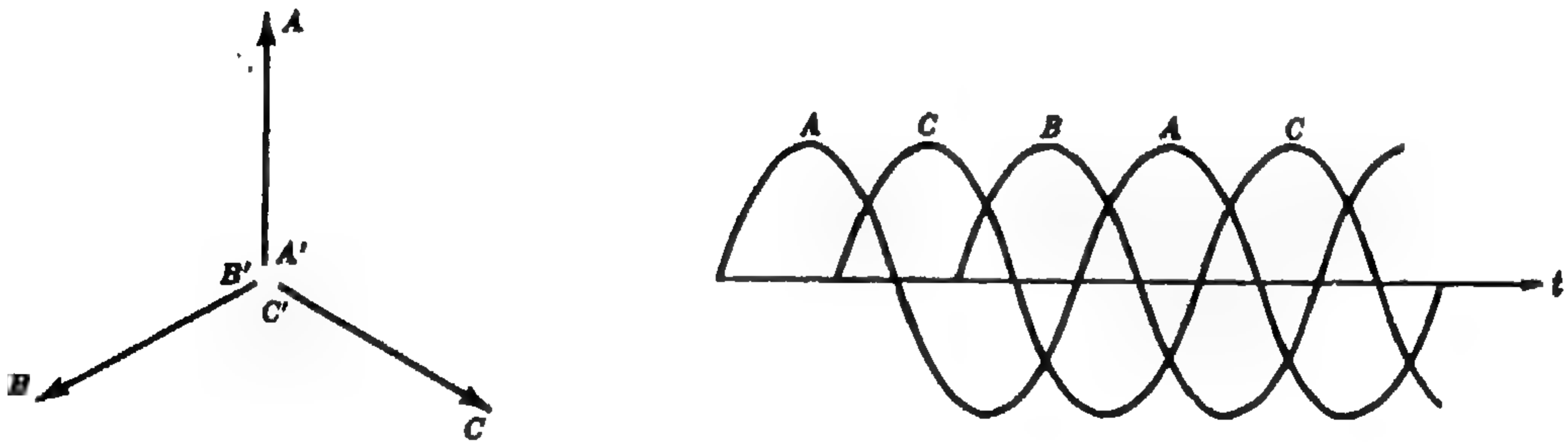
نظام الاطوار الثلاثة :

الجهود التأثيرية الناتجة في الملفات الثلاثة المتساوية البعد عن بعضهما والميمنة في الشكل ١٤ - ٢ (أ) لها فرق طور مقداره 120° . ويصل الجهد في الملف A إلى نهاية العظمى أولاً ، ثم يتبعه جهد الملف B ثم C وذلك على حسب التتابع ABC وتتضح هذه المتتابعة من الشكل المطاور وذلك مع اعتبار الاتجاه الموجب للدوران في عكس حركة عقارب الساعة ، وعلى ذلك فإن الجهد المطاور يمر بنقط ثابتة هي على الترتيب من اليسار $A-B-C-A-B-C$ ، كما يتضح أيضاً من رسم الجهد اللحظي الموضح في الشكل ١٤ - ٢ (ج) حيث يصل الجهد للقمّة بنفس الترتيب .



شكل ١٤ - ٢ نظام الاطوار الثلاثة

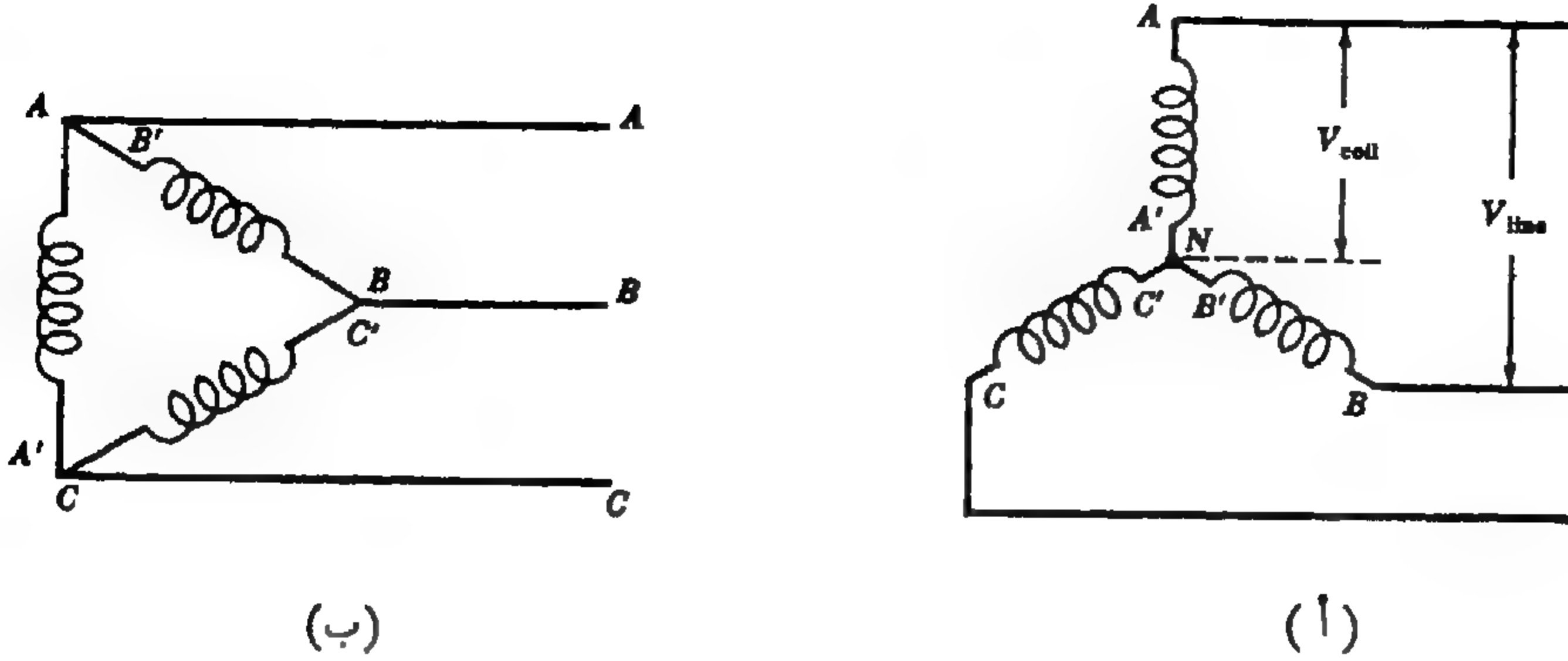
ينتج عن دوران الملفات في الإتجاه المماكس المتتابعة CBA الميمنة في الشكل ١٤ - ٣ .



شكل ١٤ - ٣ المتتابعة CBA

وبالرغم من أن نظرية عمل الآلة الموضحة في الشكل ١٤ - ٢ (أ) معروفة جيداً إلا أنه توجد عدة عوامل عملية تمنع استخدامها . والأجهزة العملية المستخدمة حالياً يدور فيها المجال بينما تبقى الملفات الثلاثة الطورية ثابتة .

بتوصيل نهايات الملفات A' و B' و C' في الشكل ١٤ - ٢ (أ) تنتج جهود متصلة على شكل نجمة بينما بتوصيل A و B' ؛ B و C' ؛ C و A' في الشكل ١٤ - ٤ (ب) تنتج عنه جهود مترددة متصلة على شكل دلتا .

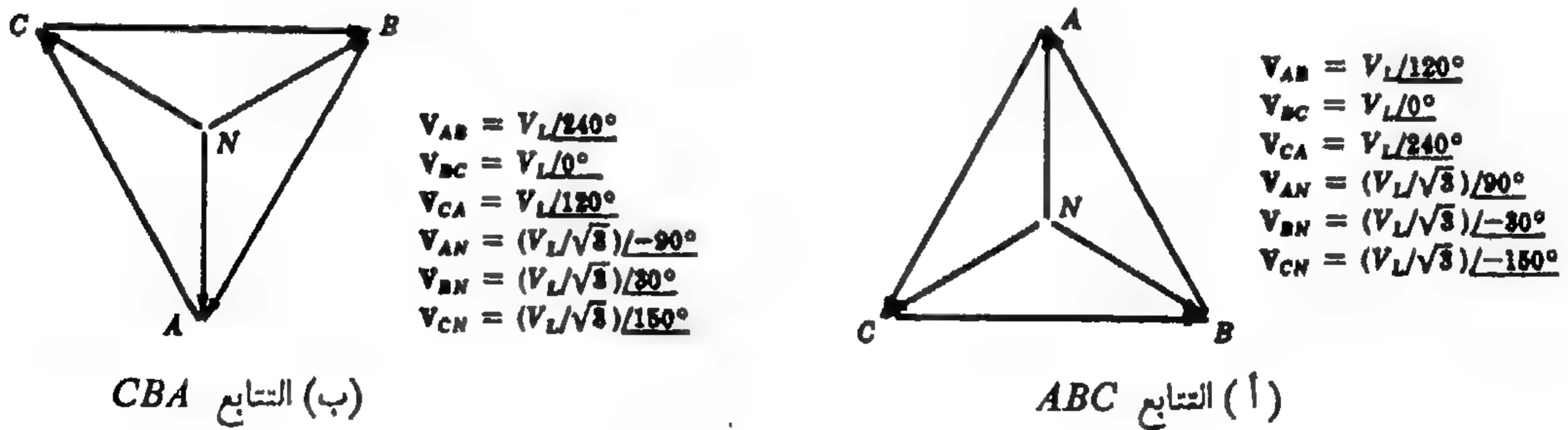


شكل ١٤ - ٤

في توصيلات النجمة يتساوى تيارات الملفات والأفرع والجهد بين فرعين يساوى ($\sqrt{3}$ جهد الملف). أما في توصيلات دلتا فإنه يتساوى جهد الملفات والأفرع ولكن تيارات الملفات تساوى ($1/\sqrt{3}$ تيار الفرع) أنظر المسألة ١٤ - ٢ .
وفي كلا الاتصاليين فإن الأفرع A و B و C تمثل نظام جهد ذي ثلاثة أطوار . ونقطة التعادل في توصيلات النجمة هي نقطة التوصيل الرابعة للأطوار الثلاثة (نظام أربعة أسلاك) .

جهود نظام الأطوار الثلاثة :

باختيار أحد الجهود كجهد اسناد بزاوية طور تساوى صفر يمكننا تعيين زوايا الطور للجهود الأخرى في هذا النظام . سنأخذ في هذا الفصل V_{BC} كجهد اسناد وبين المثلثان في الشكلين ١٤ - ٥ (أ) ، (ب) جميع الجهود في التتابعين CBA و ABC على الترتيب .



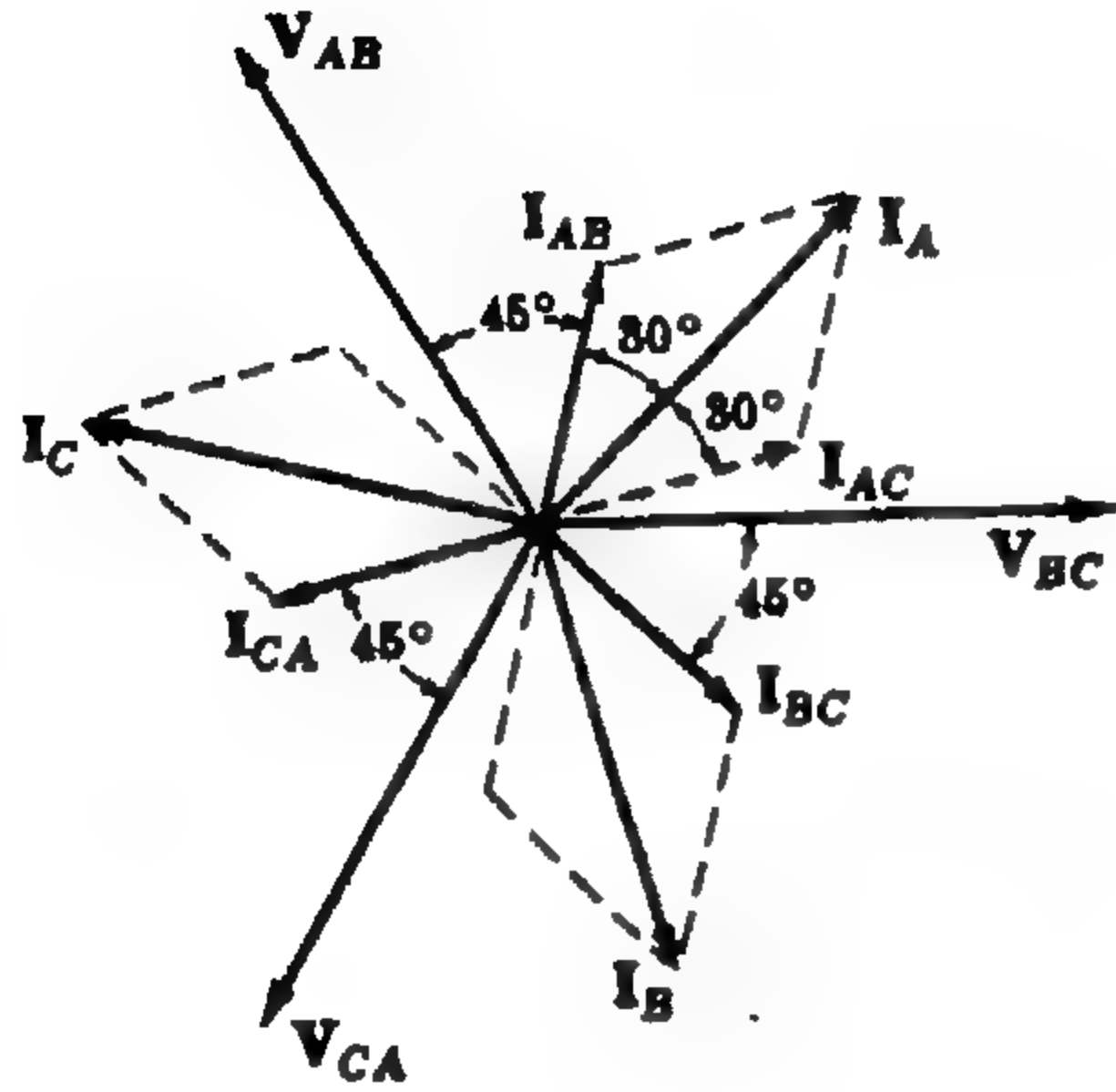
شكل ١٤ - ٥

« ونظام الجهود » هو الجهد بين أى زوج من الأفرع A و B أو B و C أو C و A وفي نظام الأسلاك الأربعة تكون قيمة جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل هو $1/\sqrt{3} \times$ جهد هذا الفرع . فمثلا في نظام الأطوار الثلاثة وأربعة أسلاك بجهد 208 V يكون للنظام CBA جهود أفرع 208 V وجهد الفرع الجهد المتعادل هو $208/\sqrt{3}$ أو 120 V . وبالإشارة إلى الشكل ١٤ - ٥ (ب) يمكن تعيين زوايا الطور للجهود . وعلى ذلك فإن $V_{AB} = 208/240^\circ$ V ، $V_{BC} = 208/0^\circ$ V ،

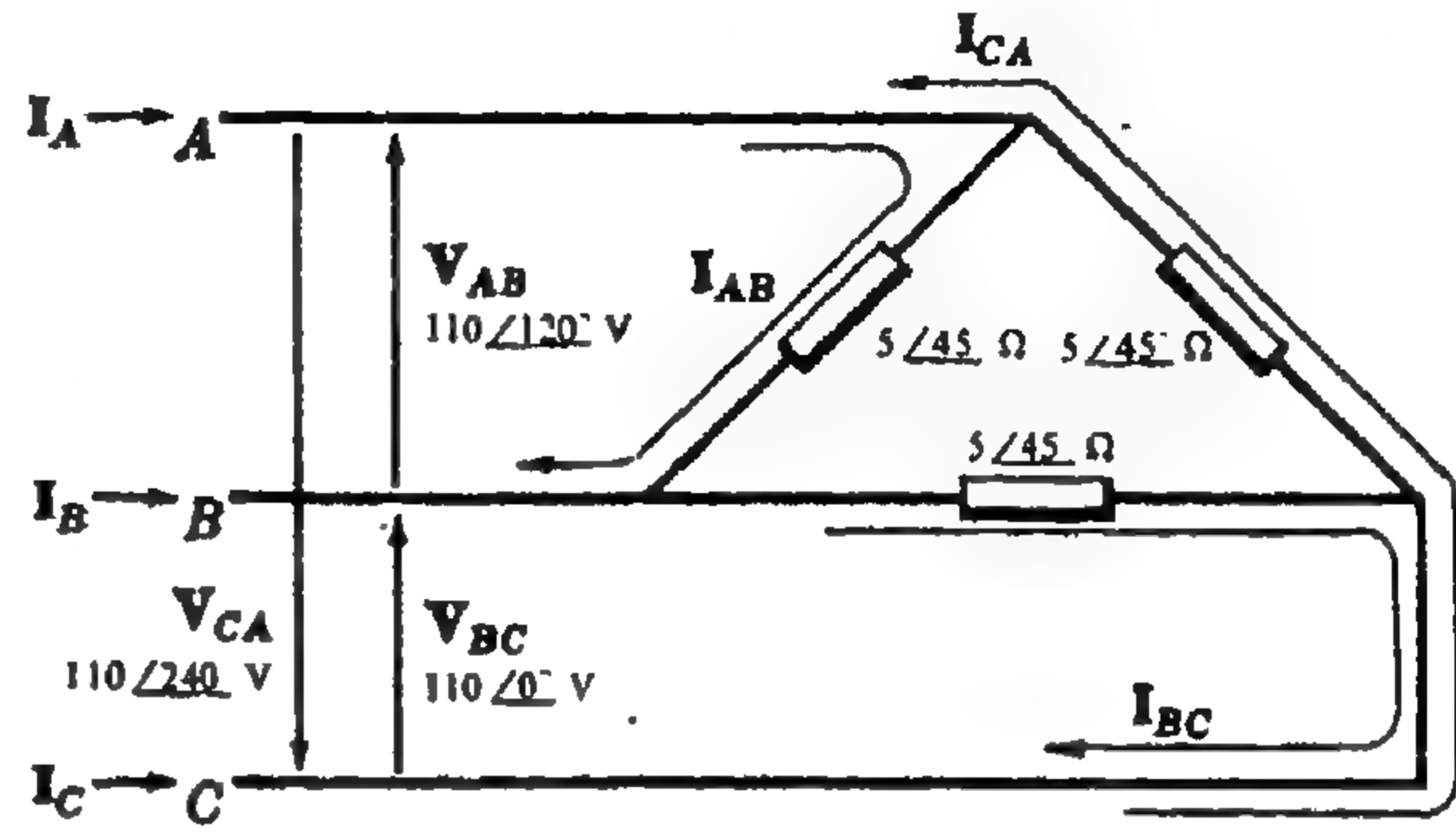
$$V_{CN} = 120/150^\circ \text{ V} , V_{BN} = 120/30^\circ \text{ V} , V_{AN} = 120/-90^\circ \text{ V} , V_{CA} = 208/120^\circ \text{ V} ,$$

اتزان أحمال نظام الأطوار الثلاثة :

مثال ١ : في نظام الأطوار الثلاثة بثلاثة أسلاك وجهد 110V وصلت المجموعة ABC بثلاث معاوقات متساوية $5/45^\circ \Omega$ متصلة على شكل دلتا . عين تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C . ثم ارسم الشكل المطاور .



شكل ١٤ - ٧



شكل ١٤ - ٦

نرسم الدائرة ونؤثر عليها بالجهود كما في الشكل ١٤ - ٦ . يوضح الشكل الاتجاهات الموجبة لتيارات الأفرع والتيارات المطاورة . إذن :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{110/120^\circ}{5/45^\circ} = 22/75^\circ = 5.7 + j21.2 \text{ A}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z} = \frac{110/0^\circ}{5/45^\circ} = 22/-45^\circ = 15.55 - j15.55 \text{ A}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z} = \frac{110/240^\circ}{5/45^\circ} = 22/195^\circ = -21.2 - j5.7 \text{ A}$$

بتطبيق قانون كيرشوف للتيار عند كل ركن من أركان الأحمال ينتج ،

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 22/75^\circ - 22/195^\circ = 38.1/45^\circ \text{ A}$$

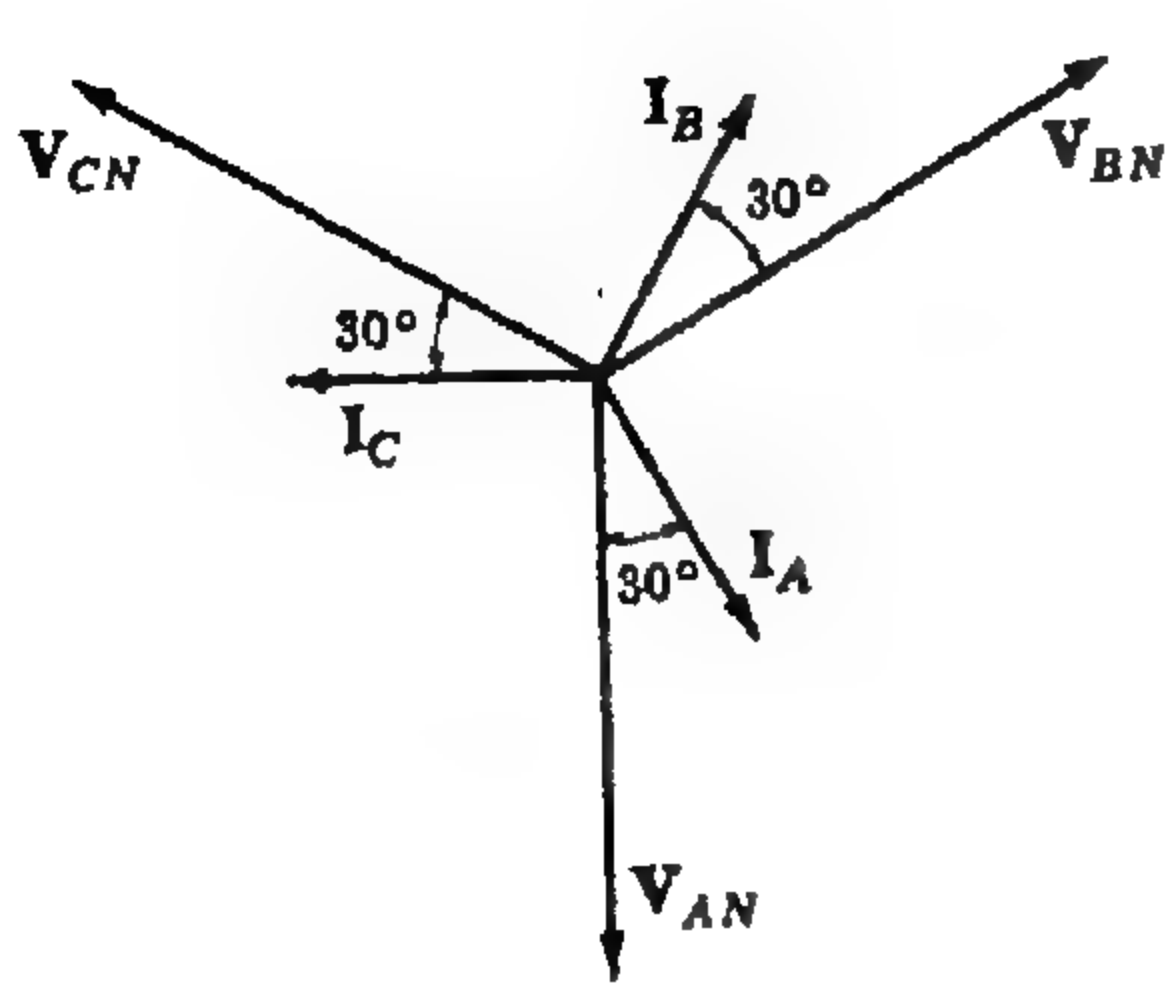
$$I_B = I_{BA} + I_{BC} = -22/75^\circ + 22/-45^\circ = 38.1/-75^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} = 22/195^\circ - 22/-45^\circ = 38.1/165^\circ \text{ A}$$

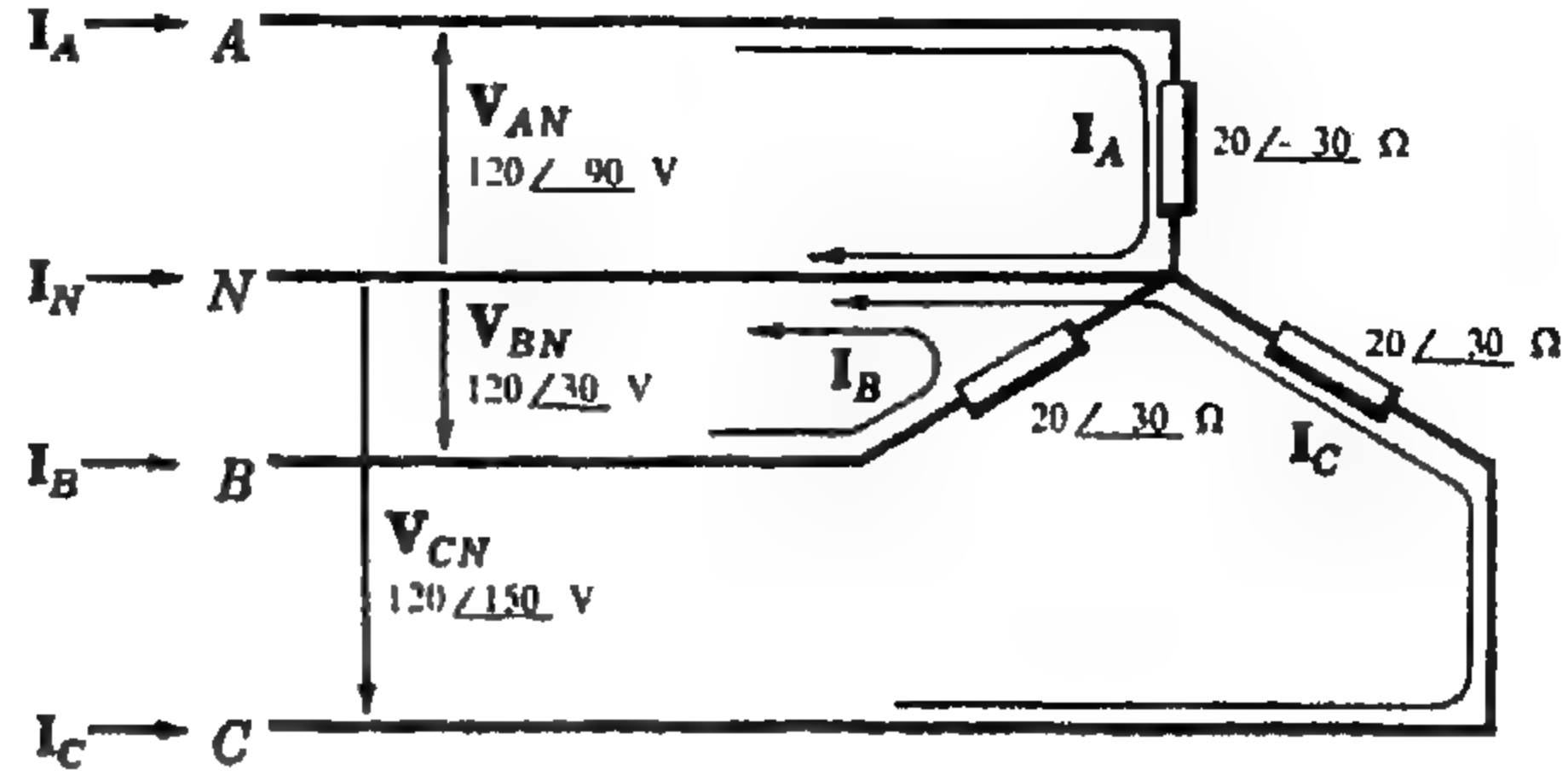
والرسم المطاور المبين في الشكل ١٤ - ٧ يوضح أن التيارات المتزنة للأفرع هي 38.1A وإن زوايا الطور بينهما هي 120° .

في نظام اتزان الأحمال المتصلة على شكل دلتا يكون جهد الفرع مساوياً للجهد المطاور ويكون تيار الفرع مساوياً $\sqrt{3}$ التيار المطاور .

مثال ٢ : في نظام ثلاثة أطوار بأربعة أسلاك وجهد 208V وصلت المجموعة CBA بحمل متصل على شكل دلتا معاوقاته $20 \angle 30^\circ \Omega$ أوجد تيارات الأفرع . ثم ارسم الشكل المطاور .



شكل ١٤ - ٩



شكل ١٤ - ٨

نرسم الدائرة ونطبق جهود الأفرع بالنسبة للجهد المتبادل وذلك باستخدام الشكل ١٤ - ٥ (ب) . نختار تيارات الأفرع كما في الرسم ١٤ - ٨ حيث تعود كل التيارات خلال نقطة التعادل . إذن :

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{120 \angle -90^\circ}{20 \angle -30^\circ} = 6.0 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$I_B = \frac{V_{BN}}{Z} = \frac{120 \angle 30^\circ}{20 \angle -30^\circ} = 6.0 \angle 60^\circ \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V_{CN}}{Z} = \frac{120 \angle 150^\circ}{20 \angle -30^\circ} = 6.0 \angle 180^\circ \text{ A}$$

وبفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه التيار المتبادل إلى الحمل نحصل على :

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -(6.0 \angle -60^\circ + 6.0 \angle 60^\circ + 6.0 \angle 180^\circ) = 0$$

ويوضح الشكل المطاور ١٤ - ٩ تيارات الأفرع المترفة وفيه نجد أن كل تيار سابق لجهد الفرع المناظر بالنسبة للجهد المتبادل بزاوية المعاوقة .

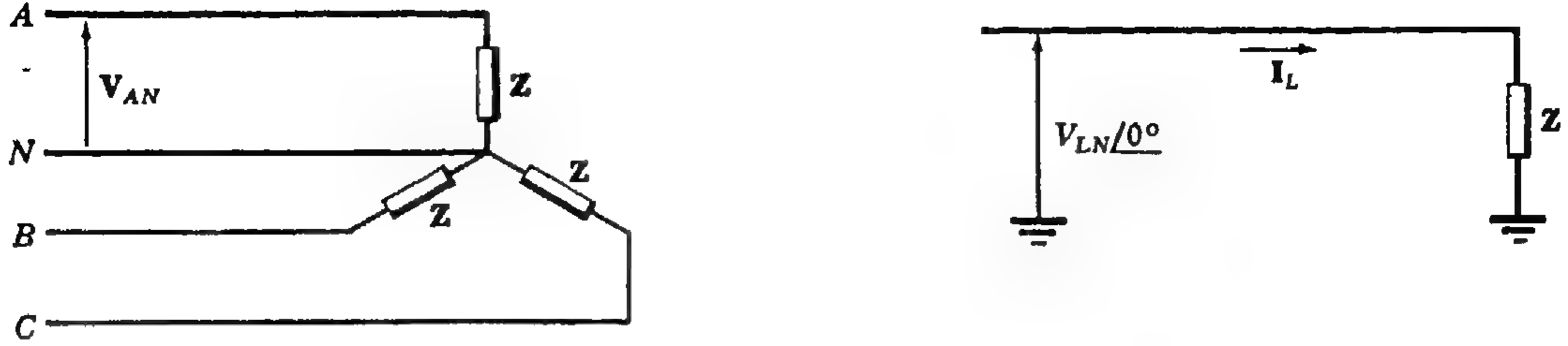
« في نظام اتزان الأحمال المتصلة على شكل النجمة تتساوى تيارات الأفرع والتيارات المطاورة والتيار المتبادل يساوى صفراً ، وجهد الفرع هو $\sqrt{3} V_P$ الجهد المطاور ، أى أن $V_L = \sqrt{3} V_P$.

الدائرة ذات الفرع الواحد المكافئة للأحمال المترفة :

باستخدام تحويلات Y-Δ الموضحة في الفصل الثاني عشر نجد أن مجموعة من ثلاث معاوقات متساوية Z_Δ متصلة على شكل دلتا تكافئ مجموعة من ثلاث معاوقات متساوية Z_Y متصلة على شكل النجمة ، حيث $Z_Y = (1/3)Z_\Delta$. وعلى ذلك فإنه يمكن إجراء مزيد من الحسابات المباشرة على دائرة النجمة لنظام الأحمال المترفة ذي الثلاثة أطوار بنوعية .

إن الدائرة المكافئة ذات الفرع الواحد هي دائرة بطور واحد للدائرة ذات الأطوار الثلاثة وأربعة أسلاك متصلة على شكل نجمة والموضحة في الشكل ١٤ - ١٠ ، فيما عدا أن الجهد المستخدم له قيمة جهد الفرع بالنسبة للجهد المتبادل وزاوية طور تساوى

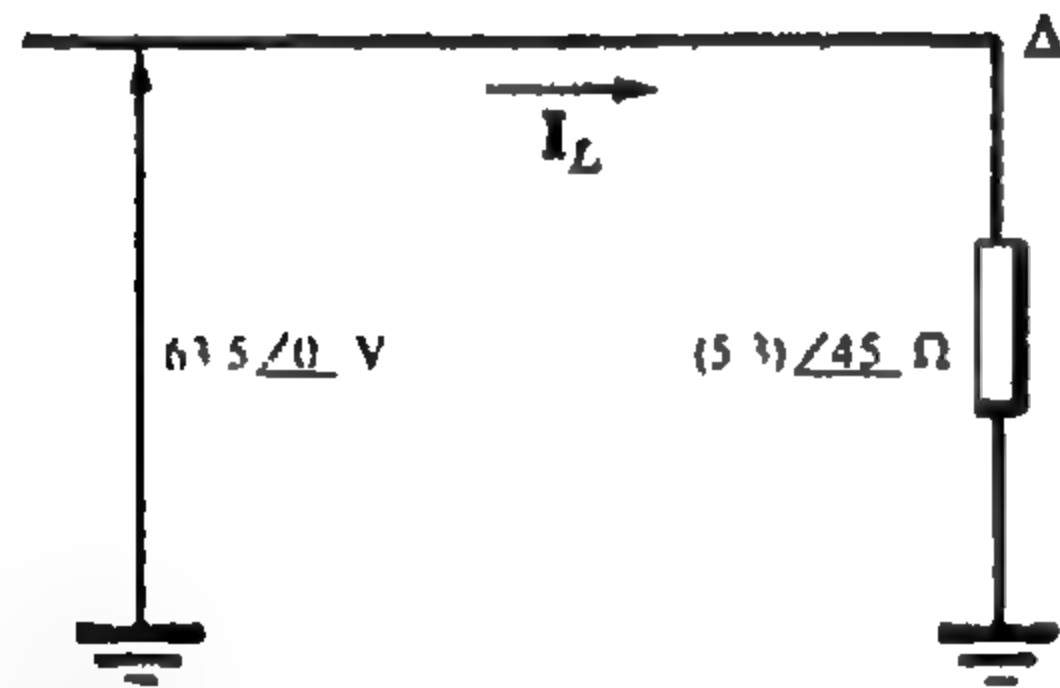
صفرًا . و تيار الفرع المحسوب لهذه الدائرة له زاوية طور بالنسبة لزاوية طور الجهد المساوية للصفر . وعلى ذلك فإن تيارات الأفرع الفعلية I_A و I_B و I_C تكون إما سابقة أو لاحقة لجهود الأفرع المناظرة لها بالنسبة للجهد المتعادل بنفس زاوية الطور .



شكل ١٤ - ١٠ الدائرة المكافئة ذات الفرع الواحد

مثال ٣ : احسب تيارات الأفرع في المثال ١ ، باستخدام طريقة الدائرة المكافئة ذات الفرع الواحد .

إرسم الدائرة ذات الفرع الواحد وارمز بالرمز Δ عند الحمل لتبين أن المعاوقات الفعلية كانت متصلة على شكل دلتا . المعاوقة المكافئة للمجموعة المتصلة على شكل النجمة هي .



$$Z_Y = Z_{\Delta}/3 = (5/3)/45^{\circ} \Omega$$

و جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل هو

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 110/\sqrt{3} = 63.5 \text{ V}$$

إذن تيار الفرع هو .

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z} = \frac{63.5/0^{\circ}}{(5/3)/45^{\circ}} = 38.1/-45^{\circ} \text{ A}$$

شكل ١٤ - ١١

بما أن التيار لاحق للجهد بزاوية 45° ، فإن تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C تكون لاحقة للجهود المناظرة لها V_{AN} و V_{BN} و V_{CN} بزاوية 45° . وقد حصلنا على الزوايا في هذه الجهود من المثلث ABC في الشكل ١٤ - ٥ (أ) . وفيما يلي جهود الأفرع بالنسبة للجهد المتعادل و تيارات الأفرع المناظرة لها .

$$V_{AN} = 63.5/90^{\circ} \text{ V}$$

$$I_A = 38.1/90^{\circ} - 45^{\circ} = 38.1/45^{\circ} \text{ A}$$

$$V_{BN} = 63.5/-30^{\circ} \text{ V}$$

$$I_B = 38.1/-30^{\circ} - 45^{\circ} = 38.1/-75^{\circ} \text{ A}$$

$$V_{CN} = 63.5/-150^{\circ} \text{ V}$$

$$I_C = 38.1/-150^{\circ} - 45^{\circ} = 38.1/-195^{\circ} \text{ A}$$

وهذه التيارات مطابقة لتلك التي حصلنا عليها في المثال ١ . إذا كان المطلوب حساب التيارات المطاوعة في المعاوقات المتصلة على شكل دلتا فإنه يمكن إيجادها من العلاقة $I_p = I_L/\sqrt{3} = 38.1/\sqrt{3} = 22 \text{ A}$. ويمكن الحصول على زوايا الطور لهذه التيارات أولاً بوضع زوايا الطور لجهود الأفرع بالنسبة لبعضها ثم تعيين التيارات اللاحقة لها بزاوية 45° . أي أن

$$V_{AB} = 110/120^\circ \text{ V}$$

$$V_{BC} = 110/0^\circ \text{ V}$$

$$V_{CA} = 110/240^\circ \text{ V}$$

$$I_{AB} = 22/120^\circ - 45^\circ = 22/75^\circ \text{ A}$$

$$I_{BC} = 22/0^\circ - 45^\circ = 22/-45^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = 22/240^\circ - 45^\circ = 22/195^\circ \text{ A}$$

الاحمال غير المتزنة المتصلة على شكل دلتا :

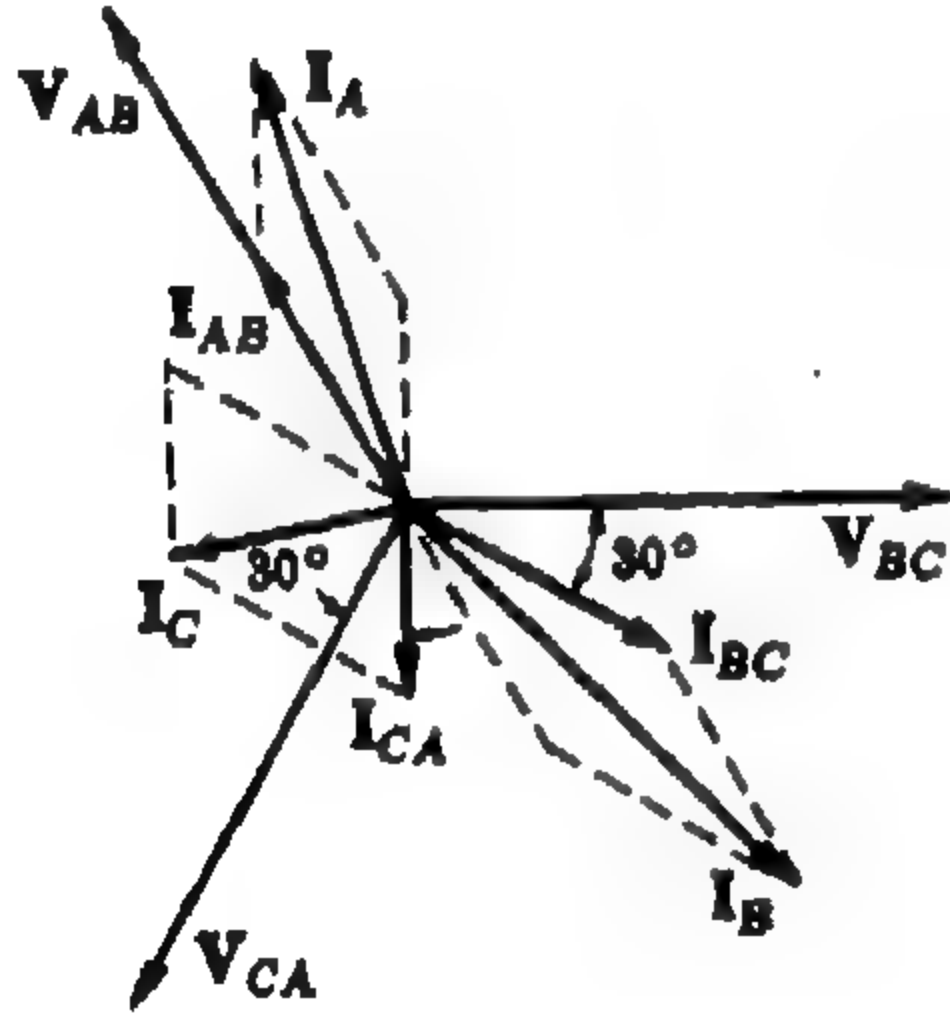
يتكون حل مجموعة الأحمال غير المتزنة المتصلة على شكل دلتا من حساب زوايا الطور للتيارات ثم تطبيق قانون كيرشوف للتيار على نقط الاتصال للحصول على تيارات الأفرع الثلاثة . وتيارات الأفرع في هذه الحالة ليست متساوية وليس لها زاوية اختلاف طور 120° بعكس الحالة التي فيها أحمال متزنة .

مثال ٤ :

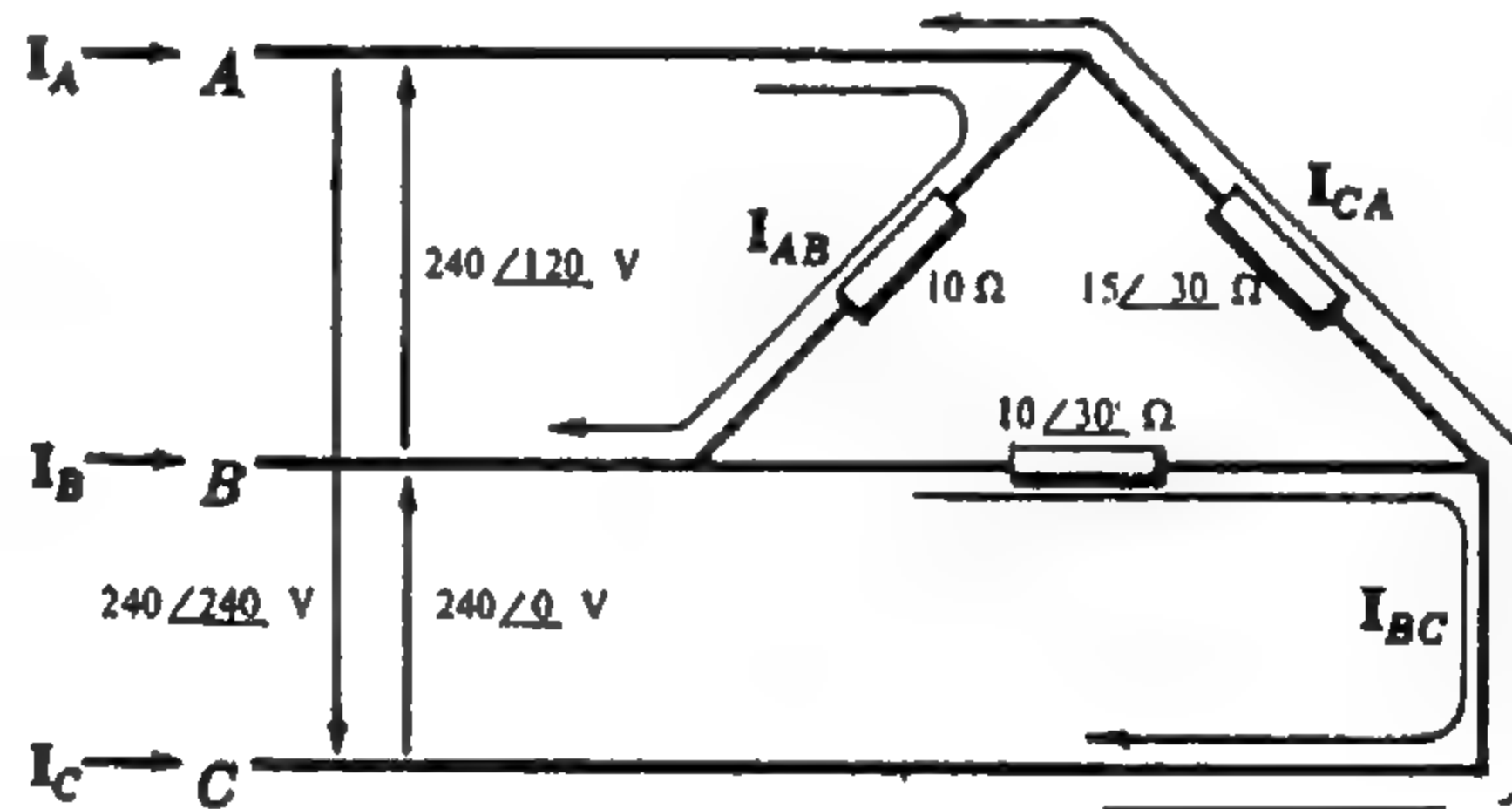
نظام ذو ثلاثة أطوار بثلاثة أسلاك وجهد 240 V . فإذا وصلنا المجموعة ABC بأحمال على شكل دلتا بحيث .

$Z_{AB} = 10/0^\circ \Omega$ ، $Z_{BC} = 10/30^\circ \Omega$ ، $Z_{CA} = 15/-30^\circ \Omega$. فأوجد تيارات الأفرع الثلاثة

ورسم الشكل المطاور .



شكل ١٤ - ١٣



شكل ١٤ - ١٢

نصمم الدائرة الموضحة في الشكل ١٢ - ١٤ ونؤثر عليها بالجهود المطاوعة . وعلى ذلك فإن التيارات المطاوعة الموضحة في الرسم مستقلة وتعطى بالعلاقات :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{240/120^\circ}{10/0^\circ} = 24/120^\circ \text{ A}, I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{BC}} = \frac{240/0^\circ}{10/30^\circ} = 24/-30^\circ \text{ A}, I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{CA}} = \frac{240/240^\circ}{15/-30^\circ} = 16/270^\circ \text{ A}$$

نطبق قانون كيرشوف للتيار عند نقط اتصال الأحمال فينتج :

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 24/120^\circ - 16/270^\circ = 38.7/108.1^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_{BA} + I_{BC} = -24/120^\circ + 24/-30^\circ = 46.4/-45^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} = 16/270^\circ - 24/-30^\circ = 21.2/190.9^\circ \text{ A}$$

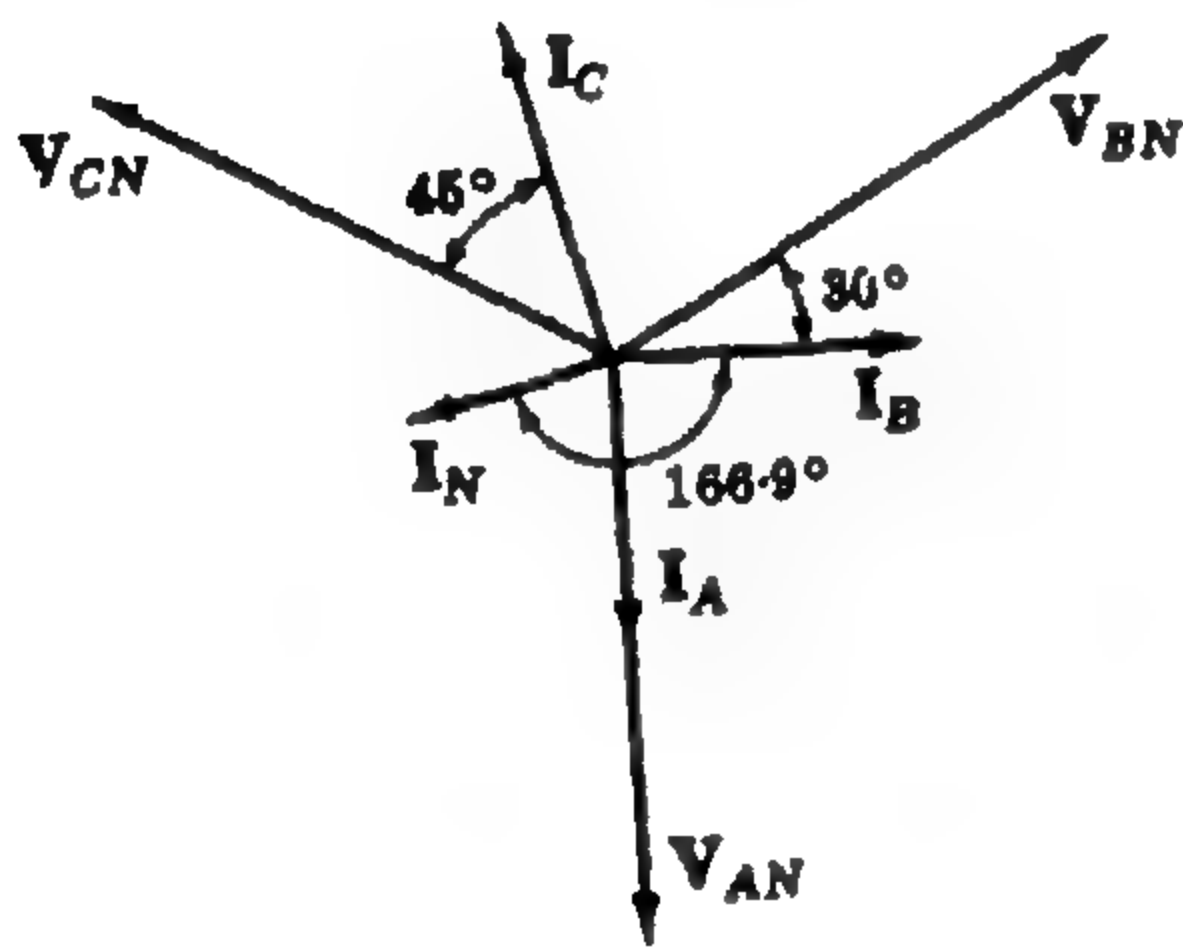
يوضح الشكل ١٤ - ١٣ الرسم المطاور المناظر .

الأحمال غير المتزنة على شكل نجمة ، أربعة أسلاك :

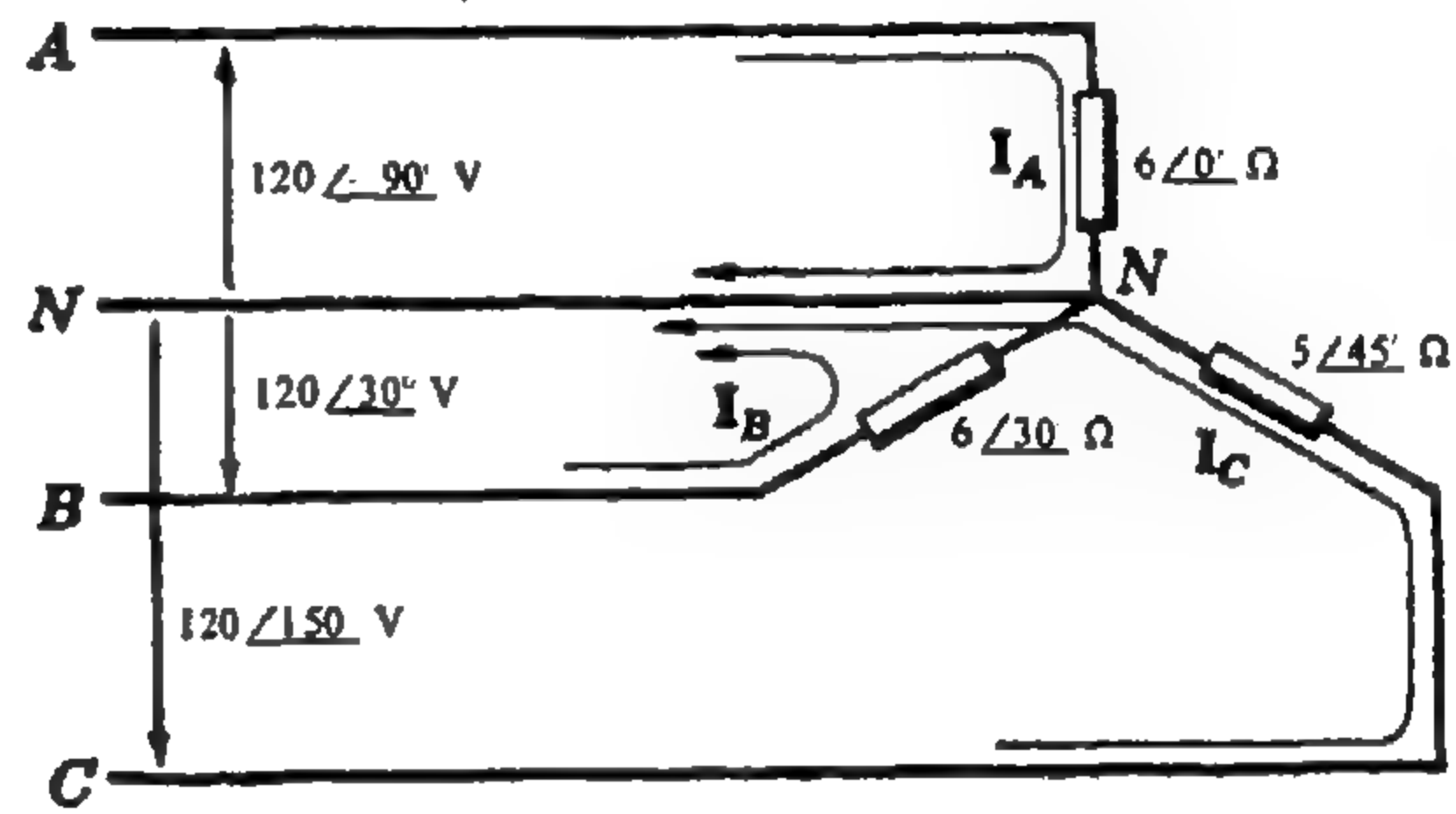
في نظام الأسلاك الأربعة عندما تكون الأحمال غير متزنة فإنه يمر تيار بنقطة التعادل ويظل الجهد عبر كل معاوقة حمل ثابتاً بنفس قيمة جهد الفرع بالنسبة لجهد التعادل . وتيارات الأفرع غير متساوية وليس لها زاوية طور 120°

مثال ٥ :

نظام ذو ثلاثة أطوار بأربعة أسلاك وجهد 208 V . وصلت فيه المجموعة CBA بأحمال على شكل النجمة بحيث $Z_A = 6 \angle 0^\circ \Omega$ و $Z_B = 6 \angle 30^\circ \Omega$ و $Z_C = 5 \angle 45^\circ \Omega$ أوجد تيارات الأفرع الثلاثة وتيار نقطة التعادل ، ارسم الشكل المطاور .



شكل ١٤ - ١٥



شكل ١٤ - ١٤

نصم الدائرة كما هو موضح في الشكل ١٤ - ١٤ ، ونؤثر عليها بالجهود المطاورة ونختار تيارات الأفرع كما هو موضح . وتكون التيارات مستقلة وتعطى بالمعادلات :

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z_A} = \frac{120 \angle -90^\circ}{6 \angle 0^\circ} = 20 \angle -90^\circ \text{ A}, I_B = \frac{V_{BN}}{Z_B} = 20 \angle 0^\circ \text{ A}, I_C = \frac{V_{CN}}{Z_C} = 24 \angle 105^\circ \text{ A}$$

والتيار المار بنقطة التعادل هو مجموع تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C . وبفرض ان الاتجاه الموجب للتيار I_N هو في اتجاه الحمل فإن

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -(20 \angle -90^\circ + 20 \angle 0^\circ + 24 \angle 105^\circ) = 14.1 \angle -166.9^\circ \text{ A}$$

ويوضح الشكل ١٤ - ١٥ الرسم المطاور المناظر .

الأحمال غير المتزنة على شكل نجمة ، ثلاث أسلاك :

عند اتصال ثلاثة أفرع فقط A و B و C بأحمال غير متزنة متصلة على شكل نجمة فإن جهد النقطة المشتركة بين معاوقات الأحمال الثلاثة لا يساوى الجهد المتعادل ويرمز لها بالرمز « O » بدلا من N . ويتغير الجهد عبر المعاوقات تغيراً كبيراً من قيمة جهد الفرع إلى قيمة الجهد المتعادل ، كما هو موضح في مثلث الجهد الذي يربط جميع الجهود في الدائرة . وإزاحة « O » عن V والمعروفة « بإزاحة الجهد المتعادل » لها أهمية خاصة .

مثال ٦ :

نظام ذو ثلاثة أطوار بثلاثة أسلاك وجهد 208V وصلت فيه المجموعة CBA بمعاوقات على شكل نجمة بحيث

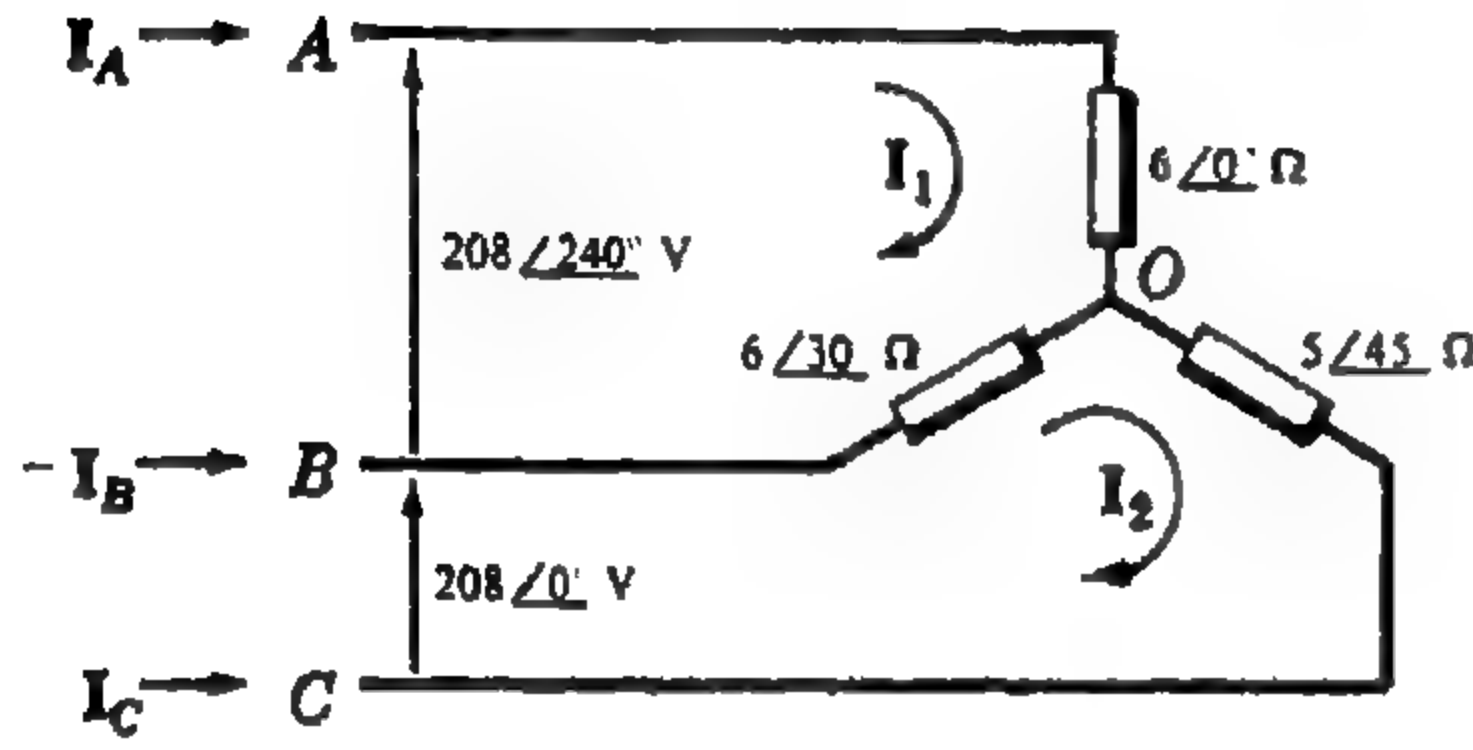
أوجد تيارات الأفرع $Z_C = 5 \angle 45^\circ \Omega$ و $Z_B = 6 \angle 30^\circ \Omega$ و $Z_A = 6 \angle 0^\circ \Omega$.

والجهود المطورة عبر كل معاوقة . رسم مثلث الجهد وأوجد إزاحة الجهد المتعادل V_{ON}

نرسم الدائرة ونختار تيارى الشبكة I_1 و I_2

كما هو موضح في الشكل ١٤ - ١٦ . نكتب المعادلات

المصفوفية للتيارين I_1 و I_2 كما يلي :



شكل ١٤ - ١٦

$$\begin{bmatrix} 6/0^\circ + 6/30^\circ & -6/30^\circ \\ -6/30^\circ & 6/30^\circ + 5/45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208/240^\circ \\ 208/0^\circ \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن $I_1 = 23.3 \angle 261.1^\circ \text{ A}$ و $I_2 = 26.5 \angle -63.4^\circ \text{ A}$

إذن تكون تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C بالاتجاهات الموضحة هي

$$I_A = I_1 = 23.3 \angle 261.1^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_2 - I_1 = 26.5 \angle -63.4^\circ - 23.3 \angle 261.1^\circ = 15.45 \angle -2.5^\circ \text{ A}$$

$$I_C = -I_2 = 26.5 \angle 116.6^\circ \text{ A}$$

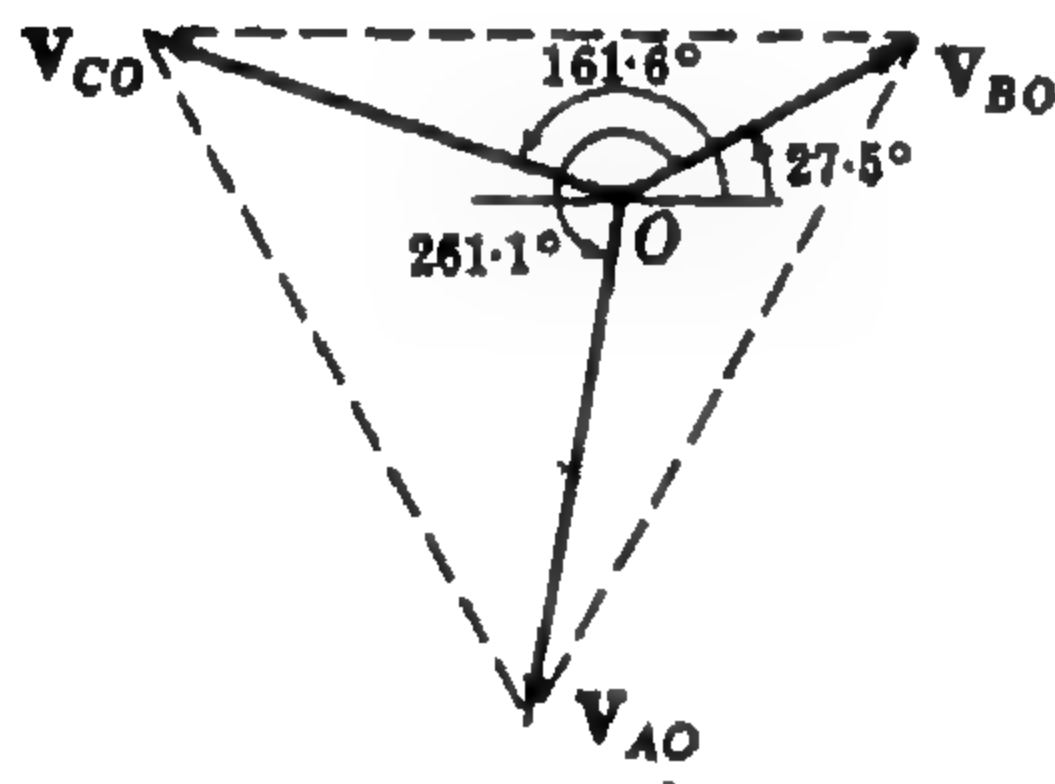
والآن تعطى الجهود عبر المعاوقات الثلاثة بحاصل

ضرب التيارات الخطية في المعاوقات المناظرة .

$$V_{AO} = I_A Z_A = 23.3 \angle 261.1^\circ (6 \angle 0^\circ) = 139.8 \angle 261.1^\circ \text{ V}$$

$$V_{BO} = I_B Z_B = 15.45 \angle -2.5^\circ (6 \angle 30^\circ) = 92.7 \angle 27.5^\circ \text{ V}$$

$$V_{CO} = I_C Z_C = 26.5 \angle 116.6^\circ (5 \angle 45^\circ) = 132.5 \angle 161.6^\circ \text{ V}$$



شكل ١٤ - ١٧

ويكون الشكل المطاور لهذه الجهود الثلاثة الموضح

في الشكل ١٤ - ١٧ مثلثاً متساوي الأضلاع . في الشكل

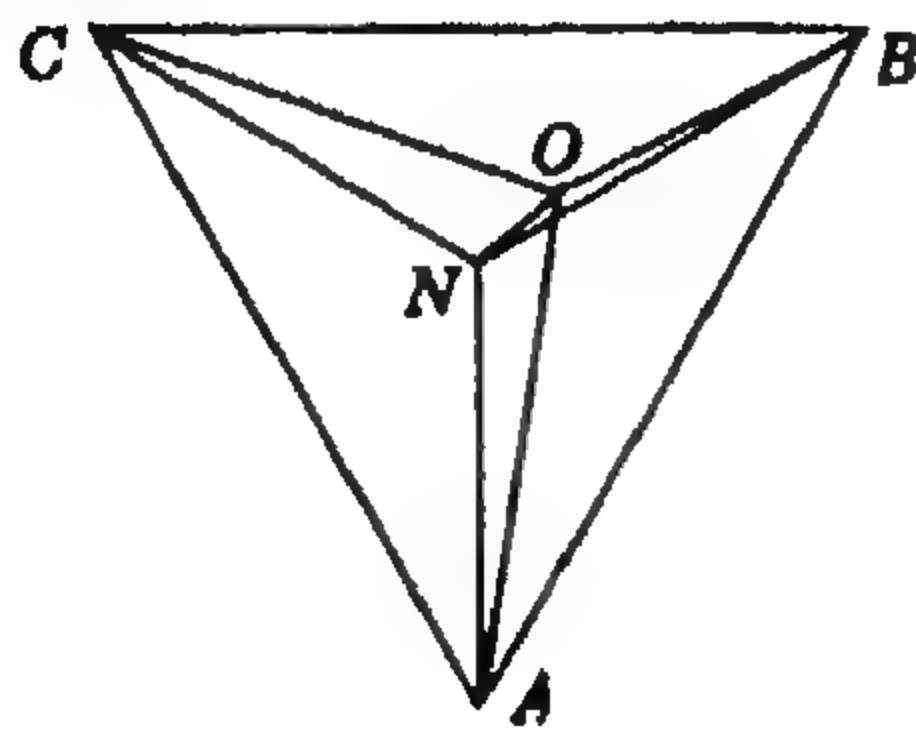
١٤ - ١٨ أعيد رسم هذا المثلث وأضيفت إليه نقطة التعادل

وذلك لتوضيح إزاحة الجهد المتعادل V_{ON} . ويمكن حساب

هذا الجهد باستخدام أى نقطة من النقط الثلاثة A أو B أو C

تم اتباعها بالدليل المناسب لتكون ترميزاً زوجياً للدليل ،

وباستخدام النقطة A نحصل على



شكل ١٤ - ١٨

$$V_{ON} = V_{OA} + V_{AN} = -139.8 \angle 261.1^\circ + 120 \angle -90^\circ = 28.1 \angle 39.8^\circ \text{ V}$$

طريقة إزاحة نقطة التعادل لأحمال غير متزنة على شكل نجمة ، ثلاثة أسلاك

حصلنا في المثال ٦ على إزاحة الجهد المتعادل V_{ON} بدلالة جهود الأحمال أما إذا عينا علاقة للجهد V_{ON} مستقلة عن جهود الأحمال فإن التيارات والجهود المطلوبة في المثال ٦ يمكن الحصول عليها مباشرة كما هو موضح في المثال ٧ .

للحصول على إزاحة الجهد المتعادل نكتب تيارات الأفرع بدلالة جهود الأحمال ومساحاتها

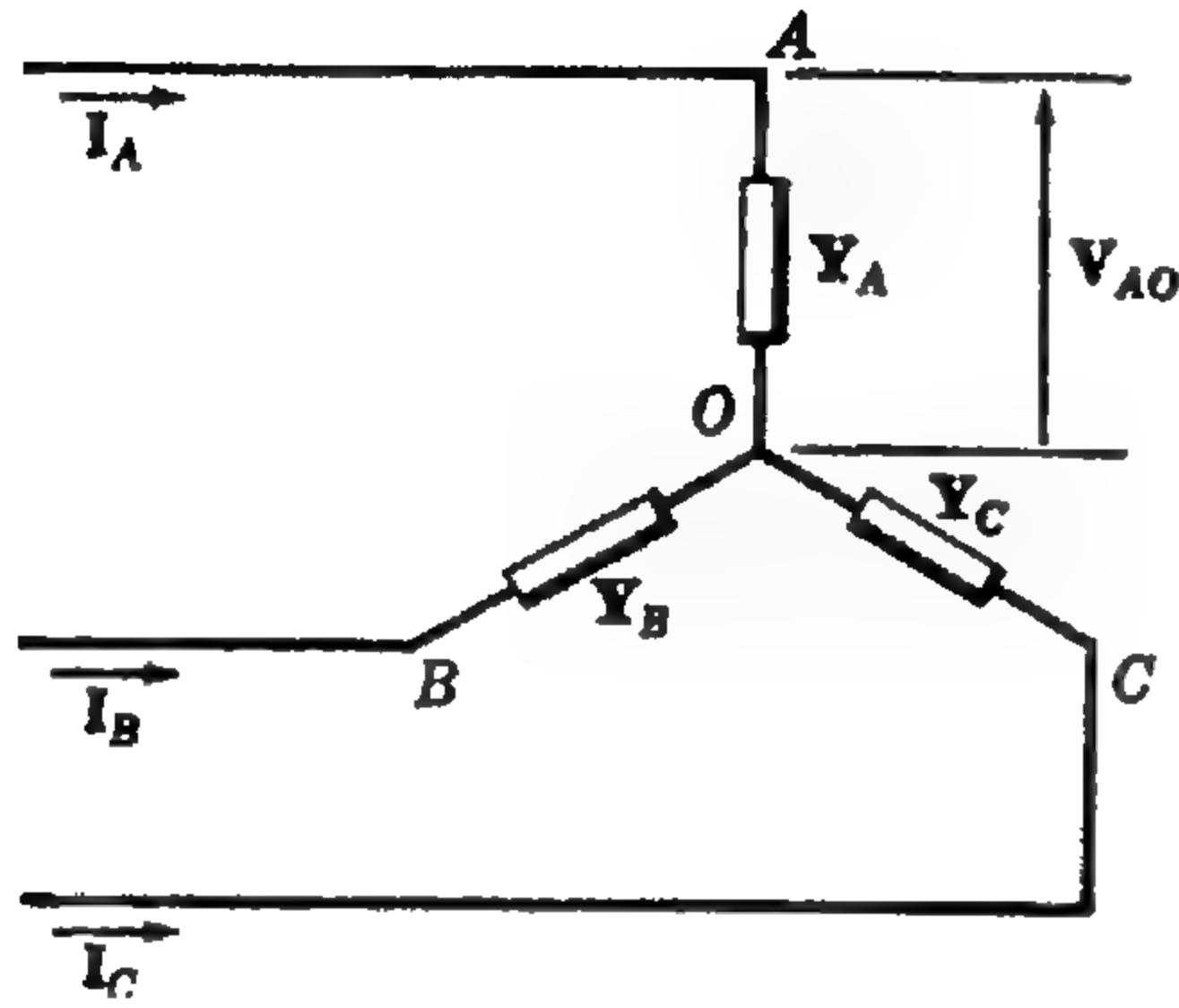
$$(١) \quad I_A = V_{AO} Y_A, I_B = V_{BO} Y_B, I_C = V_{CO} Y_C$$

والآن بتطبيق قانون كيرشوف للتيار عند النقطة O في الشكل ١٤ - ١٩ نجد

$$(٢) \quad I_A + I_B + I_C = 0$$

$$(٣) \quad V_{AO} Y_A + V_{BO} Y_B + V_{CO} Y_C = 0$$

وبالإشارة إلى الشكل ١٤ - ١٨ والتعبير عن الجهود V_{AO} و V_{BO} و V_{CO} بدلالة مركبتى كل منهما ، أى أن



شكل ١٤ - ١٩

$$(٤) \quad V_{AO} = V_{AN} + V_{NO} \quad V_{BO} = V_{BN} + V_{NO} \quad V_{CO} = V_{CN} + V_{NO}$$

وبالتعويض بالمعادلة (٤) في المعادلة (٣) نحصل على

$$(٥) \quad (V_{AN} + V_{NO}) Y_A + (V_{BN} + V_{NO}) Y_B + (V_{CN} + V_{NO}) Y_C = 0$$

ومن هنا نجد أن

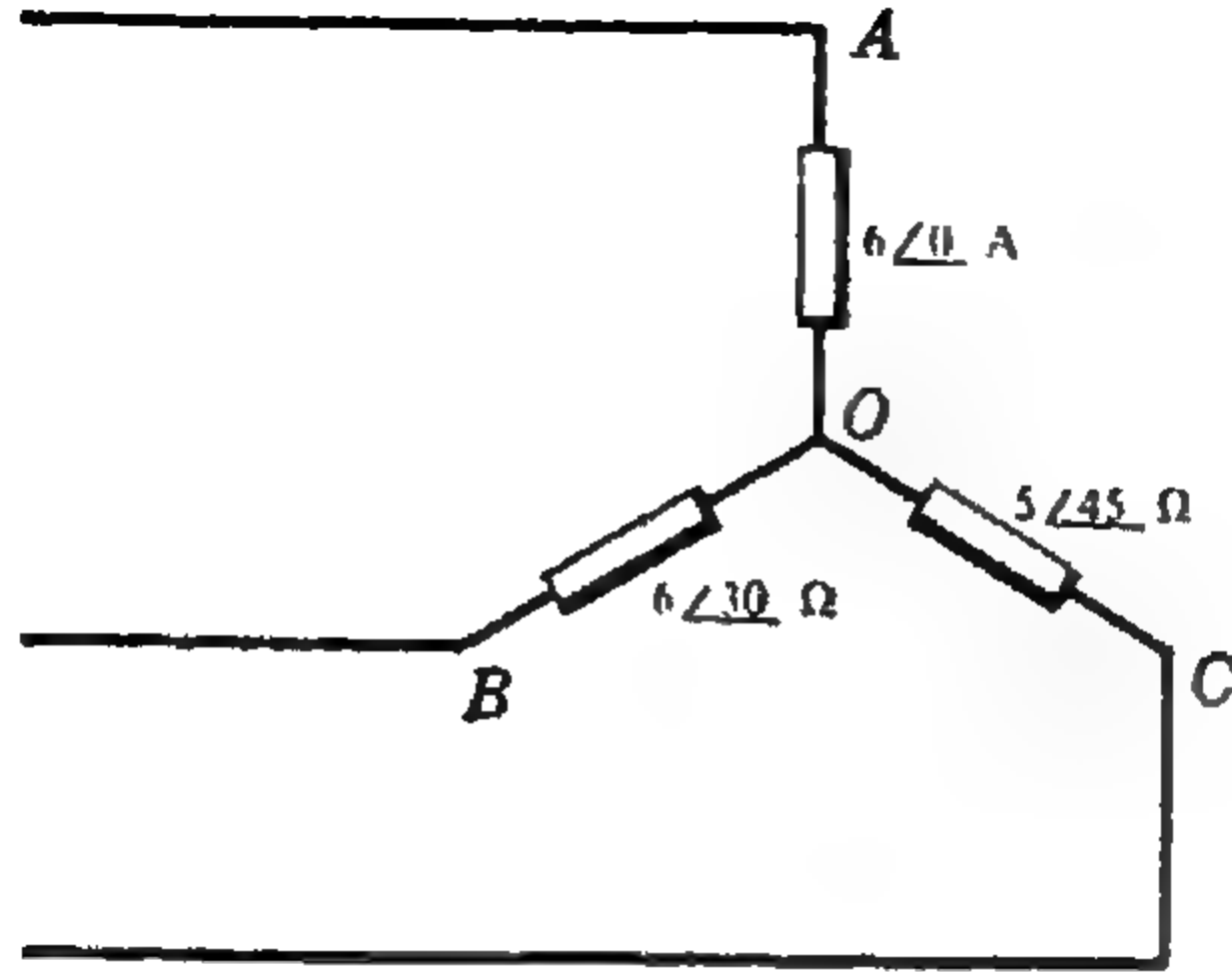
$$(٦) \quad V_{ON} = \frac{V_{AN} Y_A + V_{BN} Y_B + V_{CN} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

وقد حصلنا على الجهود V_{AN} و V_{BN} و V_{CN} في المعادلة (٦) من مثلث الشكل ١٤ - ٥ واستخدام المتتابعة المعطاة في المسألة . والمساحات Y_A و Y_B و Y_C هي مقلوبات معاوقات الأحمال Z_A و Z_B و Z_C . وبما أن كل الحدود في المعادلة (٦) إما أنها معطاة أو يمكن الحصول عليها مباشرة فإن إزاحة الجهد المتعادل يمكن حسابها ثم استخدامها في تعيين تيارات الأفرع .

مثال ٧ :

أوجد تيارات الأفرع والجهود على الأحمال في المثال ٦ باستخدام طريقة إزاحة نقطة التعادل .

بالإشارة إلى الشكل ١٤ - ٢٠ تكون معادلة إزاحة جهد التعادل هي :



شكل ١٤ - ٢٠

$$V_{ON} = \frac{V_{AN}Y_A + V_{BN}Y_B + V_{CN}Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

حيث

$$\begin{aligned} Y_A &= 1/(6 \angle 0^\circ) = 0.1667 \angle 0^\circ = 0.1667 \text{ S} \\ Y_B &= 1/(6 \angle 30^\circ) = 0.1667 \angle -30^\circ = 0.1443 - j0.0833 \text{ S} \\ Y_C &= 1/(5 \angle 45^\circ) = 0.20 \angle -45^\circ = 0.1414 - j0.1414 \text{ S} \\ Y_A + Y_B + Y_C &= 0.4524 - j0.2247 \text{ S} \\ &= 0.504 \angle -26.5^\circ \text{ S} \end{aligned}$$

$$V_{AN}Y_A = 120 \angle -90^\circ (0.1667 \angle 0^\circ) = 20 \angle -90^\circ = -j20 \text{ A}$$

$$V_{BN}Y_B = 120 \angle 30^\circ (0.1667 \angle -30^\circ) = 20 \angle 0^\circ = 20 \text{ A}$$

$$V_{CN}Y_C = 120 \angle 150^\circ (0.20 \angle -45^\circ) = 24 \angle 105^\circ = -6.2 + j23.2 \text{ A}$$

$$V_{AN}Y_A + V_{BN}Y_B + V_{CN}Y_C = 13.8 + j3.2 = 14.1 \angle 13.1^\circ \text{ A}$$

إذن

$$V_{ON} = 14.1 \angle 13.1^\circ / 0.504 \angle -26.5^\circ = 28.0 \angle 39.6^\circ \text{ V}$$

ونحصل على الجهود V_{AO} و V_{BO} و V_{CO} باستخدام V_{NO} وجهد الفرع الملائم بالنسبة للجهود المتعادل

$$V_{AO} = V_{AN} + V_{NO} = 120 \angle -90^\circ - 28.0 \angle 39.6^\circ = 139.5 \angle 261.1^\circ \text{ V}$$

$$V_{BO} = V_{BN} + V_{NO} = 120 \angle 30^\circ - 28.0 \angle 39.6^\circ = 92.5 \angle 27.1^\circ \text{ V}$$

$$V_{CO} = V_{CN} + V_{NO} = 120 \angle 150^\circ - 28.0 \angle 39.6^\circ = 132.5 \angle 161.45^\circ \text{ V}$$

ونحصل على تيارات الأفرع مباشرة من الجهود ومساحات الأحمال المناظرة لها .

$$I_A = V_{AO}Y_A = 139.5 \angle 261.1^\circ (0.1667 \angle 0^\circ) = 23.2 \angle 261.1^\circ \text{ A}$$

$$I_B = V_{BO}Y_B = 92.5 \angle 27.1^\circ (0.1667 \angle -30^\circ) = 15.4 \angle -2.9^\circ \text{ A}$$

$$I_C = V_{CO}Y_C = 132.5 \angle 161.45^\circ (0.20 \angle -45^\circ) = 26.5 \angle 116.45^\circ \text{ A}$$

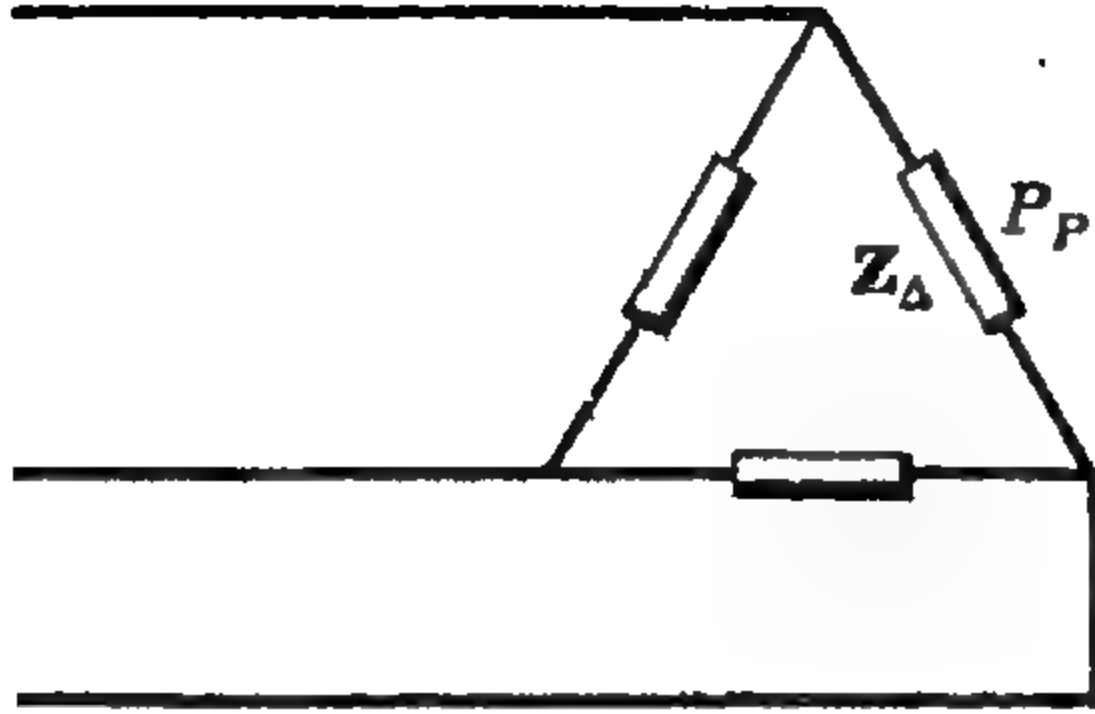
التيارات والجهود السابقة مطابقة تماماً لنتائج المثال ٦ .

قدرة احمال متزنة ذات ثلاثة اطوار :

بما أن المعاوقات المتزنة المتصلة على شكل نجمة أو دلتا يمر بها تيارات متساوية فإن القدرة المطاوعة تكون ثلث القدرة الكلية . في الشكل ١٤ - ٢١ (أ) نجد أن الجهد على المعاوقة Z_{Δ} هو جهد الفرع وأن التيار تيار معاورة . والزاوية بين الجهد والتيار هي زاوية المعاوقة . إذن القدرة المطاوعة هي

$$(٧) \quad P_P = V_L I_P \cos \theta$$

والقدرة الكلية هي



(أ)

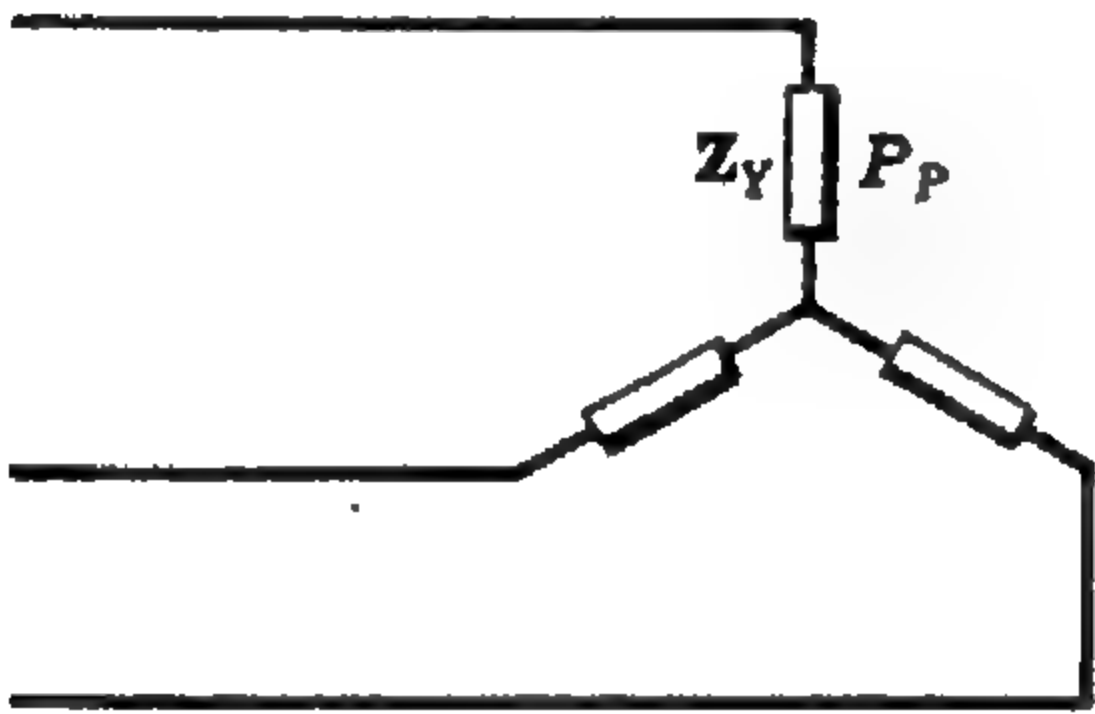
$$(٨) \quad P_T = 3 V_L I_P \cos \theta$$

بما أن $I_L = \sqrt{3} I_P$ إذن قدرة الأحمال المتزنة المتصلة

على شكل دلتا هي

$$(٩) \quad P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

يمر في معاوقات الشكل ١٤ - ٢١ (ب) المتصلة على شكل نجمة ، تيارات الأفرع والجهد على Z_Y هو جهد مطاور . والزاوية بين هذا الجهد والتيار هي زاوية المعاوقة . إذن القدرة المطاورة هي



(ب)

$$(١٠) \quad P_P = V_P I_L \cos \theta$$

والقدرة الكلية هي

$$(١١) \quad P_T = 3 V_P I_L \cos \theta$$

بما أن $V_L = \sqrt{3} V_P$ إذن

شكل ١٤ - ٢١

$$(١٢) \quad P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

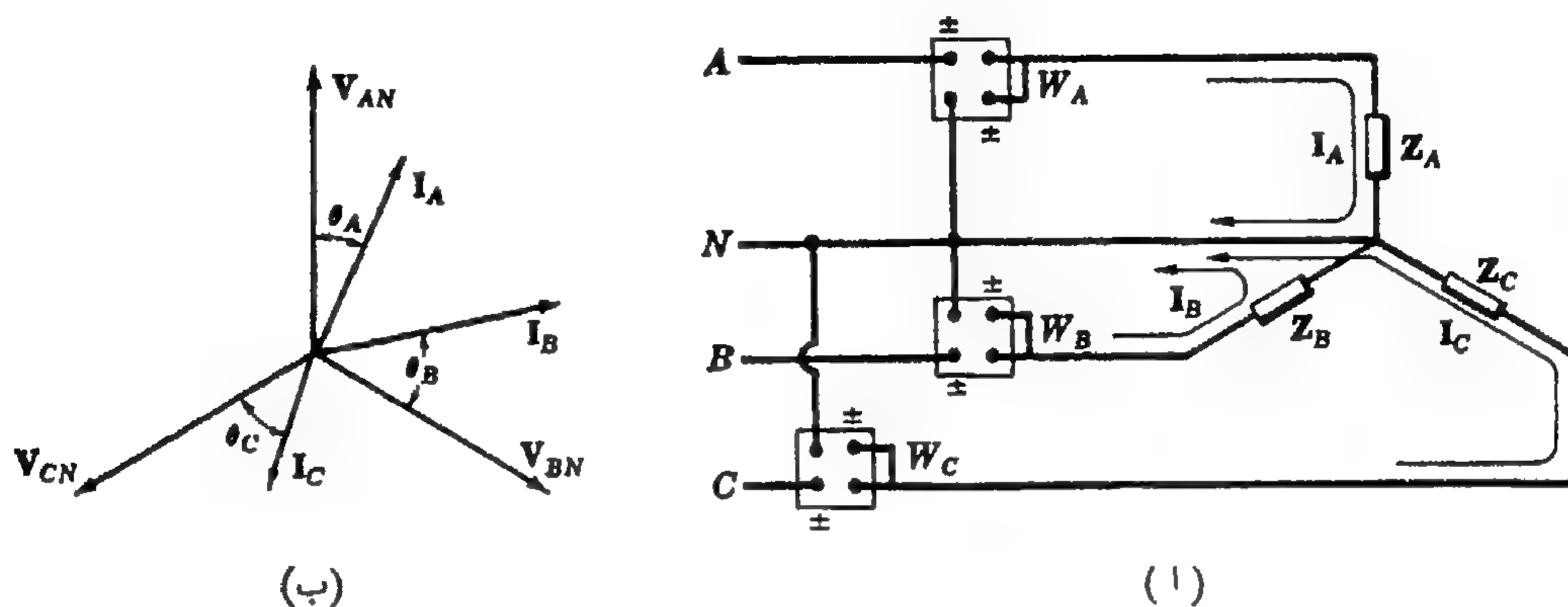
بما أن المعادلتين (٩) و (١٢) متطابقتان ، فإن القدرة الكلية في نظام الأحمال المتزنة ذا الأطوار الثلاثة تعطى $\sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$ ، حيث θ هي زاوية معاوقة الحمل أو هي زاوية المعاوقة المكافئة في حالة اتصال عديد من الأحمال المتزنة لتكوين نفس النظام .

وبما أن القدرة الظاهرية « فولت - أمبير » S_T والقدرة الكلية المفاعلية Q_T متعلقتان بالقدرة الكلية P_T (الفصل السابع) . إذن فإنه في نظام الأحمال المتزنة ذي الأطوار الثلاثة تعطى القدرة والقدرة المفاعلية بالمعادلات^١

$$(١٣) \quad P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad S_T = \sqrt{3} V_L I_L \quad Q_T = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta$$

الواتميتر والاحمال على شكل نجمة ، أربعة أسلاك :

الواتميتر هو جهاز به ملف لقراءة الجهد والتيار وعلى ذلك فإن انحرافه يتناسب مع $V I \cos \theta$ حيث θ هي الزاوية بين الجهد والتيار . ويحتاج نظام الأحمال المتصل على شكل نجمة وأربعة أسلاك لثلاثة واتميتر يوصل كل واحد منهما في فرع من الأفرع الثلاثة كما في الشكل ١٤ - ٢٢ (أ) .



شكل ١٤ - ٢٢

يفترض في الشكل المطاوع ١٤ - ٢٢ (ب) أن التيار في الطور A لاحق وتيارا الطورين B و C سابقان وزوايا الأطوار هي θ_A و θ_B و θ_C على الترتيب . إذن فقراءات الواتميتر هي

$$(١٤) \quad W_A = V_{AN} I_A \cos \angle_{+A}^{AN}, \quad W_B = V_{BN} I_B \cos \angle_{+B}^{BN}, \quad W_C = V_{CN} I_C \cos \angle_{+C}^{CN}$$

حيث تعبر \angle_{+A}^{AN} عن الزاوية بين V_{AN} و I_A . ويقرأ الواتميتر W_A القدرة في الطور A بينما يقرأ W_B و W_C القدرة في الطورين B و C على الترتيب . والقدرة الكلية هي

$$(١٥) \quad P_T = W_A + W_B + W_C$$

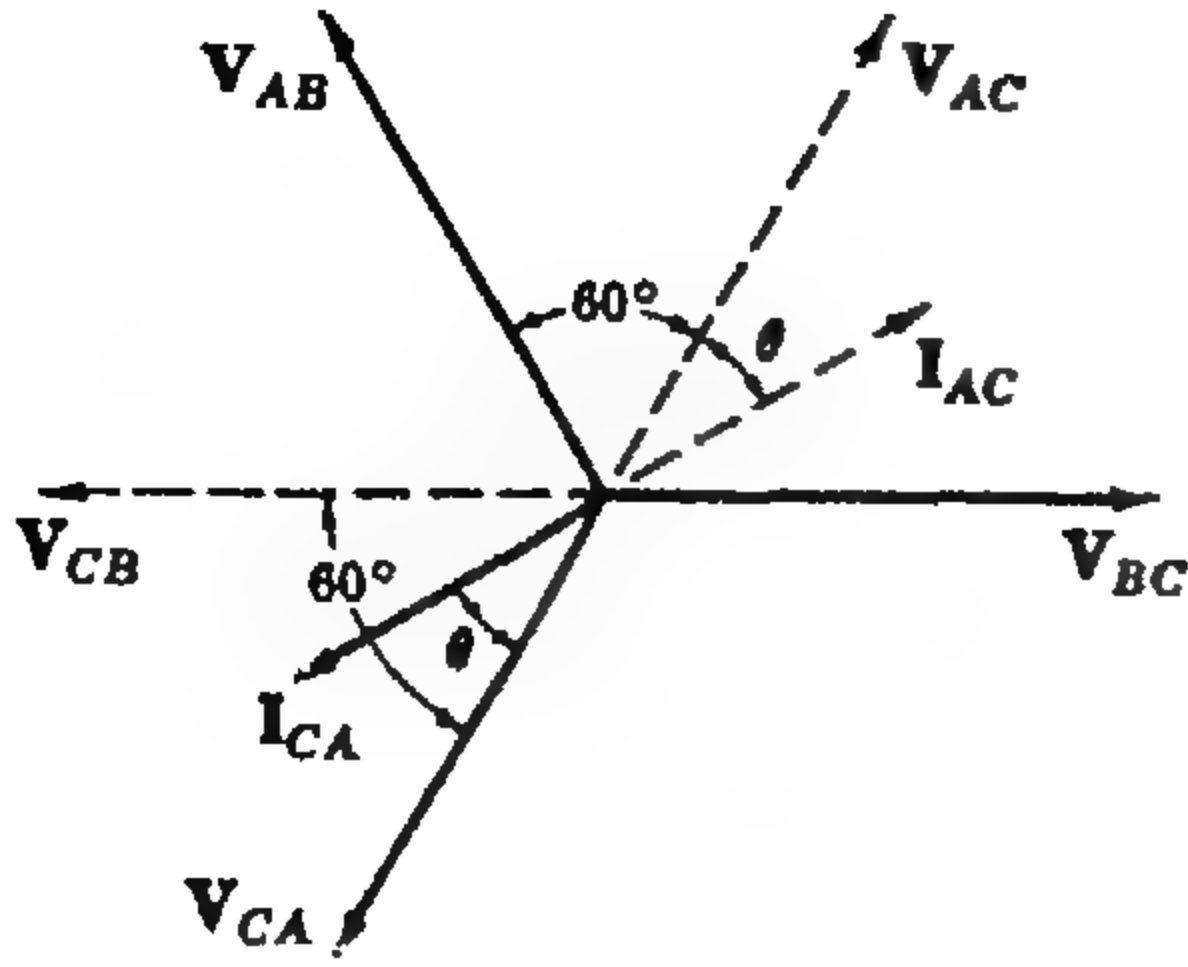
الطريقة باستخدام اثنين من الواتميتر :

تعطى القدرة الكلية في نظام الأطوار الثلاثة وثلاثة أسلاك بمجموع قراءات جهازى الواتميتر المتصلين في أى فرعين مع توصيل ملفي الجهد بهما بالفرع الثالث كما هو موضح في الشكل ١٤ - ٢٣ . وتكون قراءات الأجهزة هي

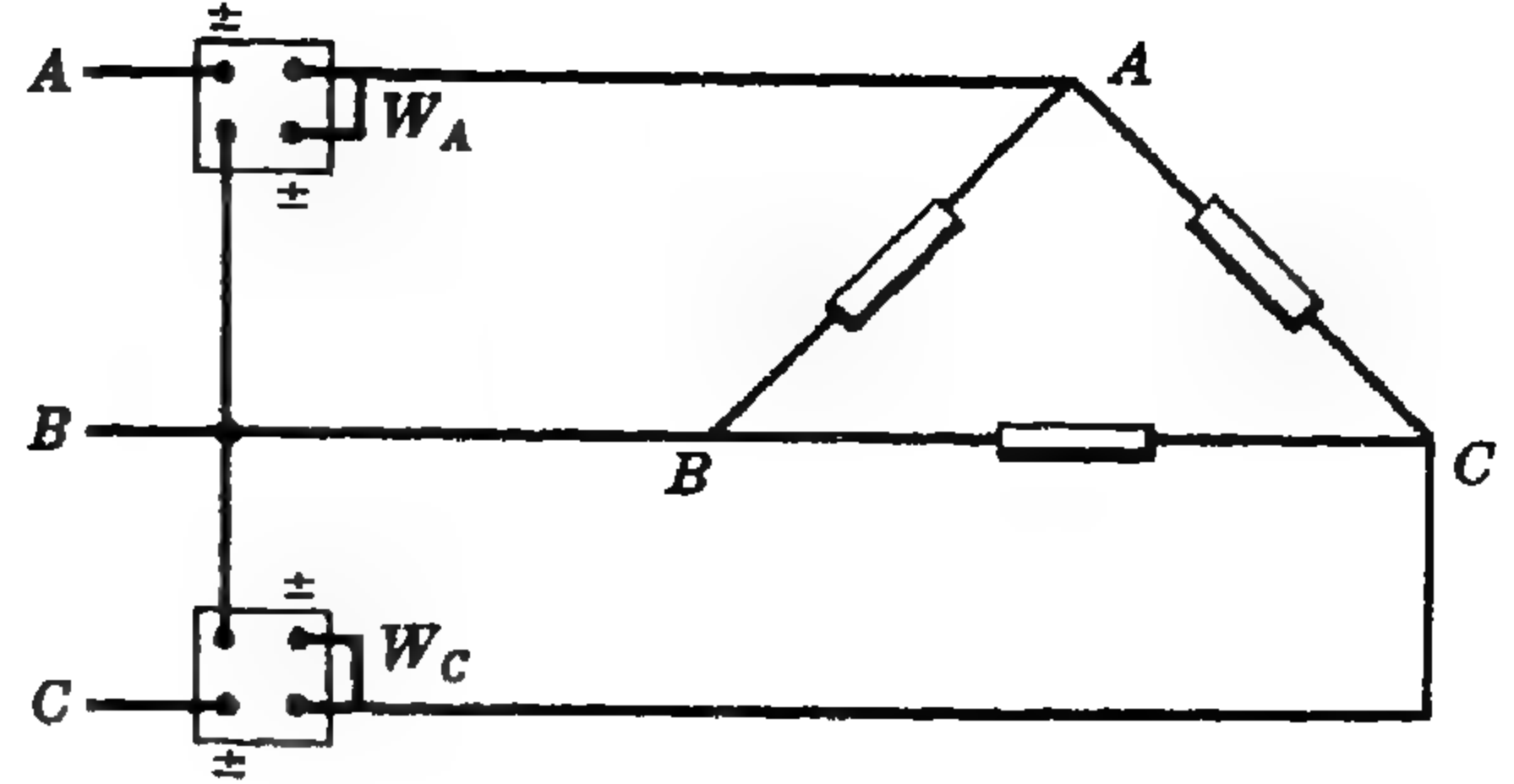
$$(١٦) \quad W_C = V_{CB} I_C \cos \angle_{+C}^{CB}, \quad W_A = V_{AB} I_A \cos \angle_{+A}^{AB}$$

بتطبيق قانون كيرشوف للتيار على نقطتي الاتصال A و C في الأحمال المتصلة على شكل دلتا نحصل على

$$(١٧) \quad I_C = I_{CA} + I_{CB} \quad \text{و} \quad I_A = I_{AB} + I_{AC}$$



شكل ١٤ - ٢٤



شكل ١٤ - ٢٣

دالتمويض عن I_C و I_A من المعادلة (١٧) في المعادلة (١٦) نحصل على

$$\begin{aligned} W_A &= V_{AB} I_{AB} \cos \angle_{AB}^{AB} + V_{AB} I_{AC} \cos \angle_{AC}^{AB} \\ W_C &= V_{CB} I_{CA} \cos \angle_{CA}^{CB} + V_{CB} I_{CB} \cos \angle_{CB}^{CB} \end{aligned} \quad (١٨)$$

ونعبر الحدود $V_{AB} I_{AB} \cos \angle_{AB}^{AB}$ ، $V_{CB} I_{CB} \cos \angle_{CB}^{CB}$ مباشرة القدرة في الطورين AB و CB لنحسب والحدان الباقيان يحتويان على $V_{AB} I_{AC}$ ، $V_{CB} I_{CA}$ والذي يمكن كتابتهما الآن $V_L I_{AC}$ حيث أن كلا من V_{AB} و V_{CB} هو جهد فروع و I_{AC} و I_{CA} وتتميز هذين الحدين نرسم الشكل ١٤ - ٢٤ المطاور وفيه التيار I_{AC} لاحق للجهد V_{AC} بزاوية θ .

من الشكل المطاور نجد أن

$$\angle_{CA}^{CB} = 60^\circ - \theta \quad \angle_{AC}^{AB} = 60^\circ + \theta \quad (١٩)$$

والآن بإضافة الحدين الباقيين في المعادلة (١٨) والتعويض $(60^\circ + \theta)$ و $(60^\circ - \theta)$ بدلا من \angle_{AC}^{AB} و \angle_{CA}^{CB} على الترتيب نجد أن

$$V_L I_{AC} \cos (60^\circ + \theta) + V_L I_{AC} \cos (60^\circ - \theta) \quad (٢٠)$$

وبما أن $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ فإن

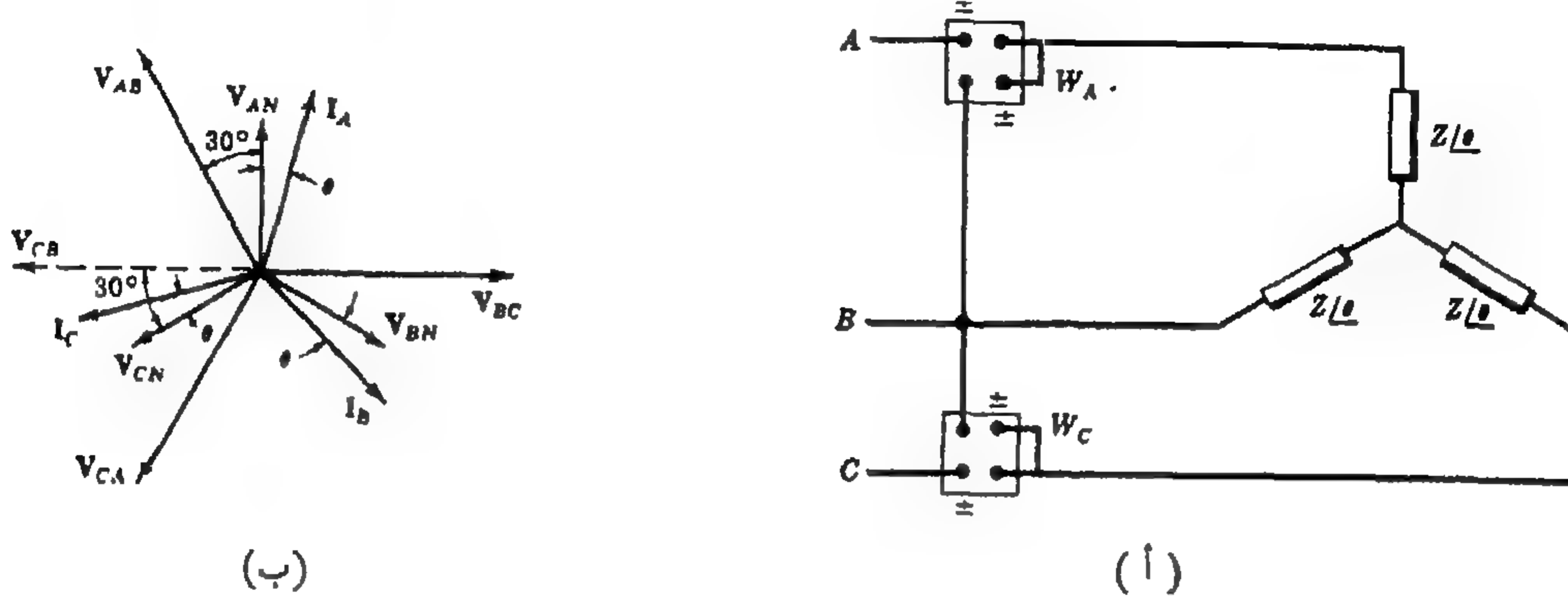
$$V_L I_{AC} (\cos 60^\circ \cos \theta - \sin 60^\circ \sin \theta + \cos 60^\circ \cos \theta + \sin 60^\circ \sin \theta) \quad (٢١)$$

$$V_L I_{AC} \cos \theta \quad \text{أو} \quad (٢٢)$$

وهي القدرة في الطور الباقي AC للأحمال . ونرى من هذا أن جهازين من الواتميتير يمكن أن يعبرا عن القدرة الكلية في الأحمال المتصلة على شكل دلتا . تترك طريقة استخدام جهازين من الواتميتير في حالة أحمال متصلة على شكل نجمة كنمرين للقارىء .

تطبيق طريقة اثنين من الواتميتر على احمال متزنة :

لتوضح تطبيق طريقة اثنين من الواتميتر على احمال متزنة ، نعتبر الثلاثة معاوقات المتساوية المتصلة على شكل النجمة والموضحة في الشكل ١٤ - ٢٥ (أ) يوضح الشكل ١٤ - ٢٥ (ب) الشكل المطاور للتتابع ABC بفرض أن التيار لاحق بزاوية طور مقدارها θ .



شكل ١٤ - ٢٥

والآن بتوصيل الجهازين في الفرعين A و C فإن قراءتهما

$$(٢٣) \quad W_C = V_{CB} I_C \cos \angle_{CB}^{CB} \quad , \quad W_A = V_{AB} I_A \cos \angle_{AB}^{AB}$$

من الشكل المطاور نجد أن

$$(٢٤) \quad \angle_{CB}^{CB} = 30^\circ - \theta \quad \angle_{AB}^{AB} = 30^\circ + \theta$$

بالتعويض من المعادلة (٢٤) في المعادلة (٢٣) نحصل على

$$(٢٥) \quad W_C = V_{CB} I_C \cos (30^\circ - \theta) \quad , \quad W_A = V_{AB} I_A \cos (30^\circ + \theta)$$

عند استخدام طريقة جهازين للواتميتر على احمال متزنة فإن قراءتي الجهازين هما $V_L I_L \cos (30^\circ - \theta)$ و $V_L I_L \cos (30^\circ + \theta)$ حيث θ هي زاوية المعاوقة . ويمكن استخدام القراءتين للحصول على الزاوية θ .

بكتابة معادلة W_1 واستخدام جيب تمام مجموع زاويتين نحصل على

$$(٢٦) \quad W_1 = V_L I_L (\cos 30^\circ \cos \theta - \sin 30^\circ \sin \theta)$$

$$(٢٧) \quad W_2 = V_L I_L (\cos 30^\circ \cos \theta + \sin 30^\circ \sin \theta) \quad \text{وبالمثل}$$

ومجموعهما هو $W_1 + W_2 = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$ والفرق بينهما هو $W_2 - W_1 = V_L I_L \sin \theta$ وبذلك نجد أن

$$(٢٨) \quad \tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2} \right)$$

إذن ظل زاوية المعاوقة Z يساوى $\sqrt{3}$ × النسبة بين الفرق بين قراءتي الجهازين إلى مجموع القراءتين . وبدون معرفة الأفرع التي يوصل فيها الجهازين وكذلك مجموعة المتتابة فإنة لا يمكن التمييز بين $+\theta$ و $-\theta$ وعلى ذلك فعند معرفة كل من المتتابة وموضعي الجهازين فإنه يمكن تثبيت الإشارة بالعلاقتين التاليتين . فنجد للمتتابة ABC :

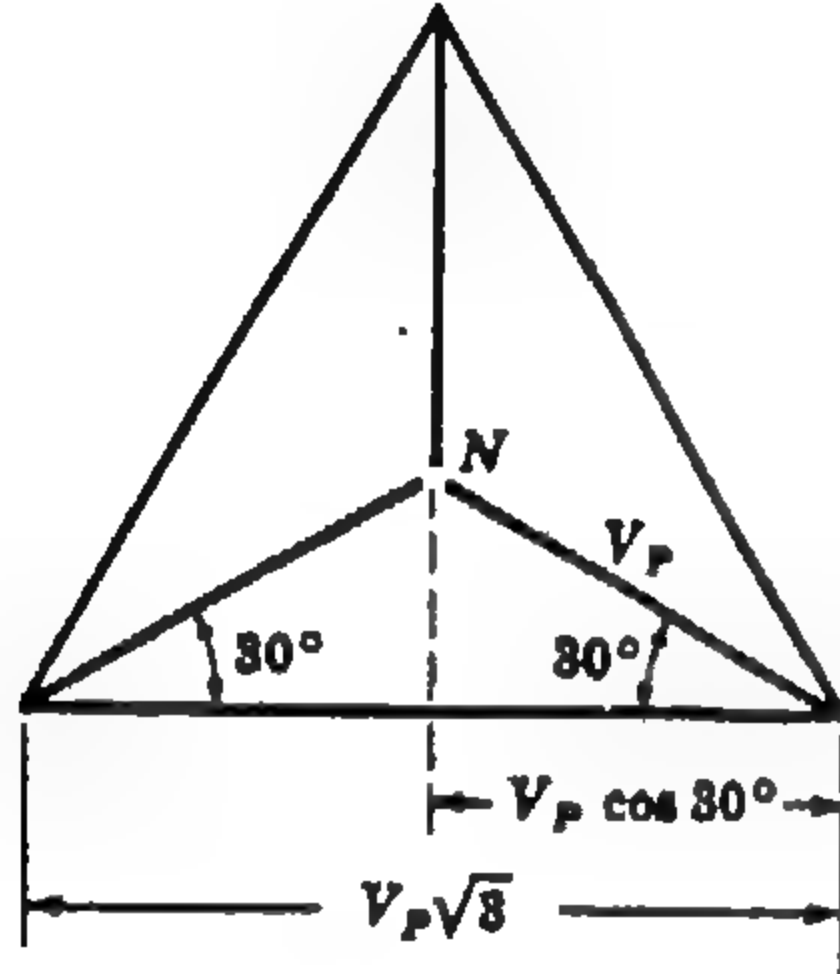
$$(٢٩) \quad \tan \theta = \sqrt{3} \frac{W_A - W_B}{W_A + W_B} = \sqrt{3} \frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3} \frac{W_C - W_A}{W_C + W_A}$$

للمتتابة CBA

$$(٣٠) \quad \tan \theta = \sqrt{3} \frac{W_B - W_A}{W_B + W_A} = \sqrt{3} \frac{W_C - W_B}{W_C + W_B} = \sqrt{3} \frac{W_A - W_C}{W_A + W_C}$$

مسائل محلولة

١٤ - ١ بين أن جهد الفرع V_L في نظام الأطوار الثلاثة يساوى $\sqrt{3}$ جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل V_P .



شكل ١٤ - ٢٦

يمثل المثلث المتساوي الأضلاع الموضح في الشكل ١٤ - ٢٦ جهود الأطوار الثلاثة وفيه يتناسب طول الضلع مع جهد الفرع V_L ونقطة التعادل N في مركز المثلث .

المسقط الأفقي لجهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل هو $V_P \cos 30^\circ$ أو $V_P \sqrt{3}/2$. وحيث أن القاعدة هي مجموع مسقطين فإنه ينتج أن

$$V_L = 2(V_P \sqrt{3}/2) = \sqrt{3} V_P$$

١٤ - ٢ احسب تيار أقصى تحميل للملف في كل من النظامين دلتا والنجمة بفرض جهد ذى ثلاثة أطوار بمعدل 25 kVA وجهد 480 V .

في حالة توصيلات النجمة يكون تيار الفرع وتيار الملف لهما نفس القيمة ولنظام الثلاثة أطوار المتزن يكون

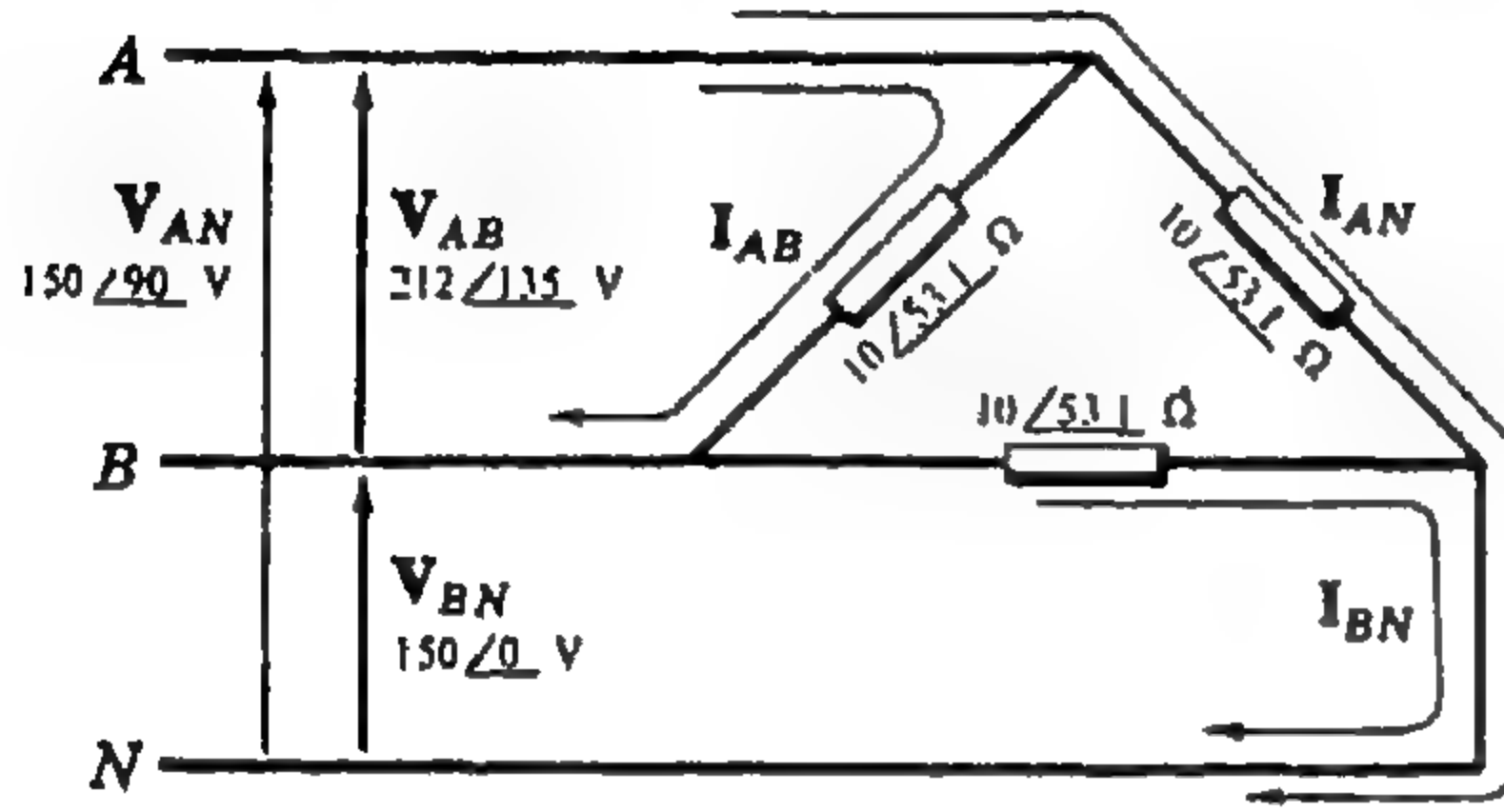
$$I_L = \frac{\text{kVA}}{\sqrt{3} V_L \times 10^{-3}} = \frac{25}{\sqrt{3}(480 \times 10^{-3})} = 30.1 \text{ A} \quad \text{و} \quad \text{kVA} = \sqrt{3} V_L I_L \times 10^{-3}$$

وفي حالة توصيلات - دلتا جهد متردد له نفس معدل kVA فإن تيار أقصى تحميل للفرع هو 30.1 A

$$I_{\text{coil}} = 30.1/\sqrt{3} = 17.35 \text{ A} \quad \text{إذن} \quad I_L/\sqrt{3}$$

١٤ - ٣ نظام ذو طورين فيه جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل 150 v ، يؤثر على أحمال متزنة متصلة على شكل دلتا . معاوقها متساوية $10/53.1^\circ \Omega$. أوجد تيار الفرع والقدرة الكلية .

في حالة نظام ذي طورين فإن جهدي الفرع بالنسبة للجهود المتبادل لها زاوية فرق طور 90° . إذن إذا كان V_{BN} هو جهد الإسناد فإن V_{AN} يصنع زاوية 90° كما في الشكل ١٤-٢٧ . وجهد الفرع بالنسبة لفرع آخر يساوي $\sqrt{2} \times$ جهد الفرع بالنسبة إلى الجهد المتبادل . إذن $V_{AB} = \sqrt{2}(150) = 212 \text{ V}$



شكل ١٤-٢٧

والتيارات المطاوعة هي :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{212 \angle 135^\circ}{10 \angle 53.1^\circ} = 21.2 \angle 81.9^\circ \text{ A}$$

$$I_{AN} = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{150 \angle 90^\circ}{10 \angle 53.1^\circ} = 15.0 \angle 36.9^\circ \text{ A}$$

$$I_{BN} = \frac{V_{BN}}{Z} = \frac{150 \angle 0^\circ}{10 \angle 53.1^\circ} = 15.0 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

وتعطي تيارات الأفرع بدلالة التيارات المطاوعة بتطبيق قانون كيرشوف للتيار على نقط اتصال الأحمال في الشكل دلتا . وإذا فرضنا أن الاتجاه الموجب لهذه التيارات هو في الاتجاه إلى الأحمال ، إذن

$$I_A = I_{AN} + I_{AB} = 15.0 \angle 36.9^\circ + 21.2 \angle 81.9^\circ = 33.5 \angle 63.4^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_{BN} + I_{BA} = 15.0 \angle -53.1^\circ - 21.2 \angle 81.9^\circ = 33.6 \angle -79.7^\circ \text{ A}$$

$$I_N = I_{NA} + I_{NB} = 15.0 \angle 36.9^\circ - 15.0 \angle -53.1^\circ = 21.2 \angle 171.86^\circ \text{ A}$$

ونحصل على القدرة الكلية باستخدام القيمة الفعالة للتيار المار في معاوقة الحمل . إذن

$$P_{AB} = I_{AB}^2 R = (21.2)^2 6 = 2700 \text{ W}$$

$$P_{AN} = I_{AN}^2 R = (15.0)^2 6 = 1350 \text{ W}$$

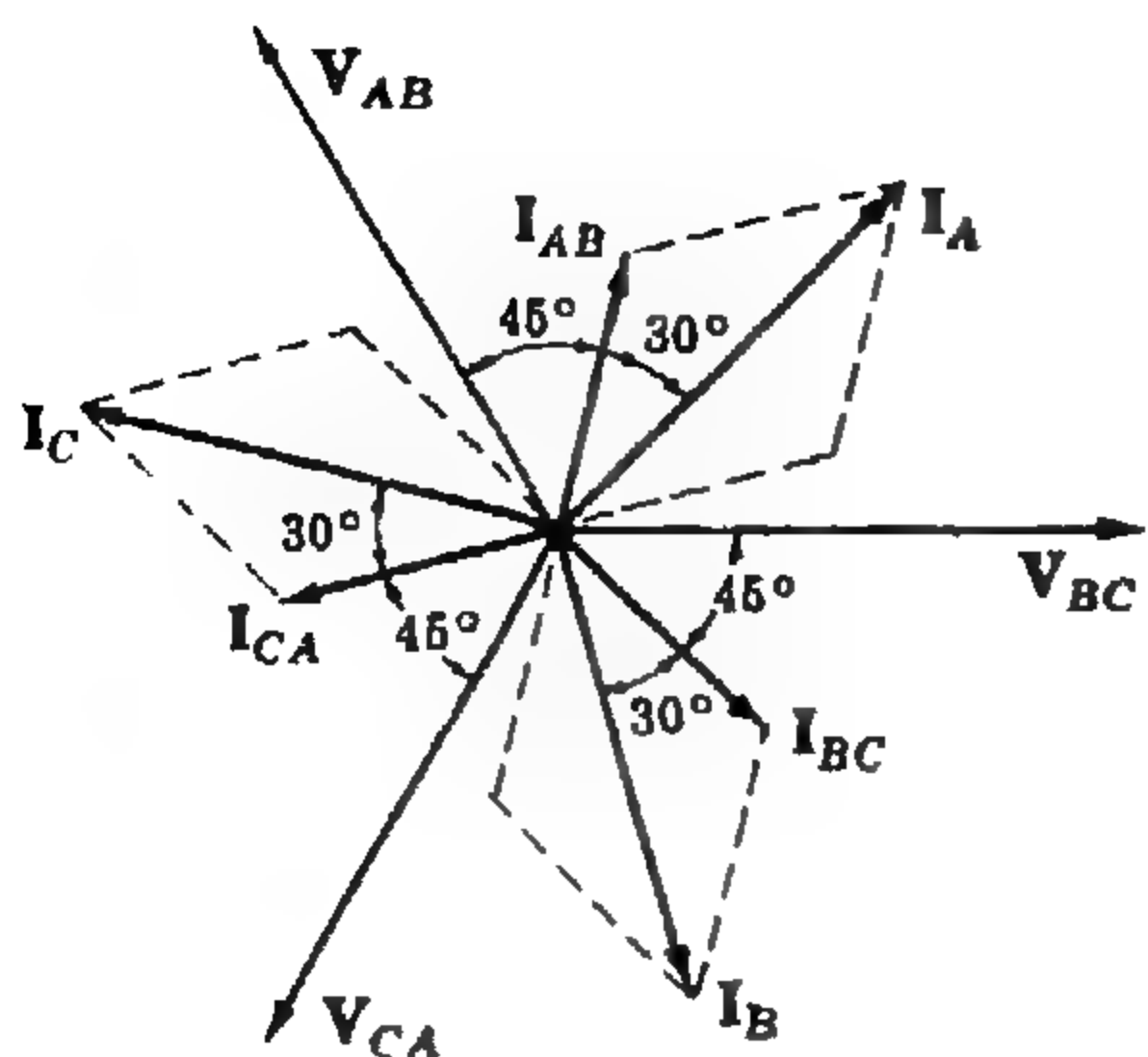
$$P_{BN} = I_{BN}^2 R = (15.0)^2 6 = 1350 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي 5400 W

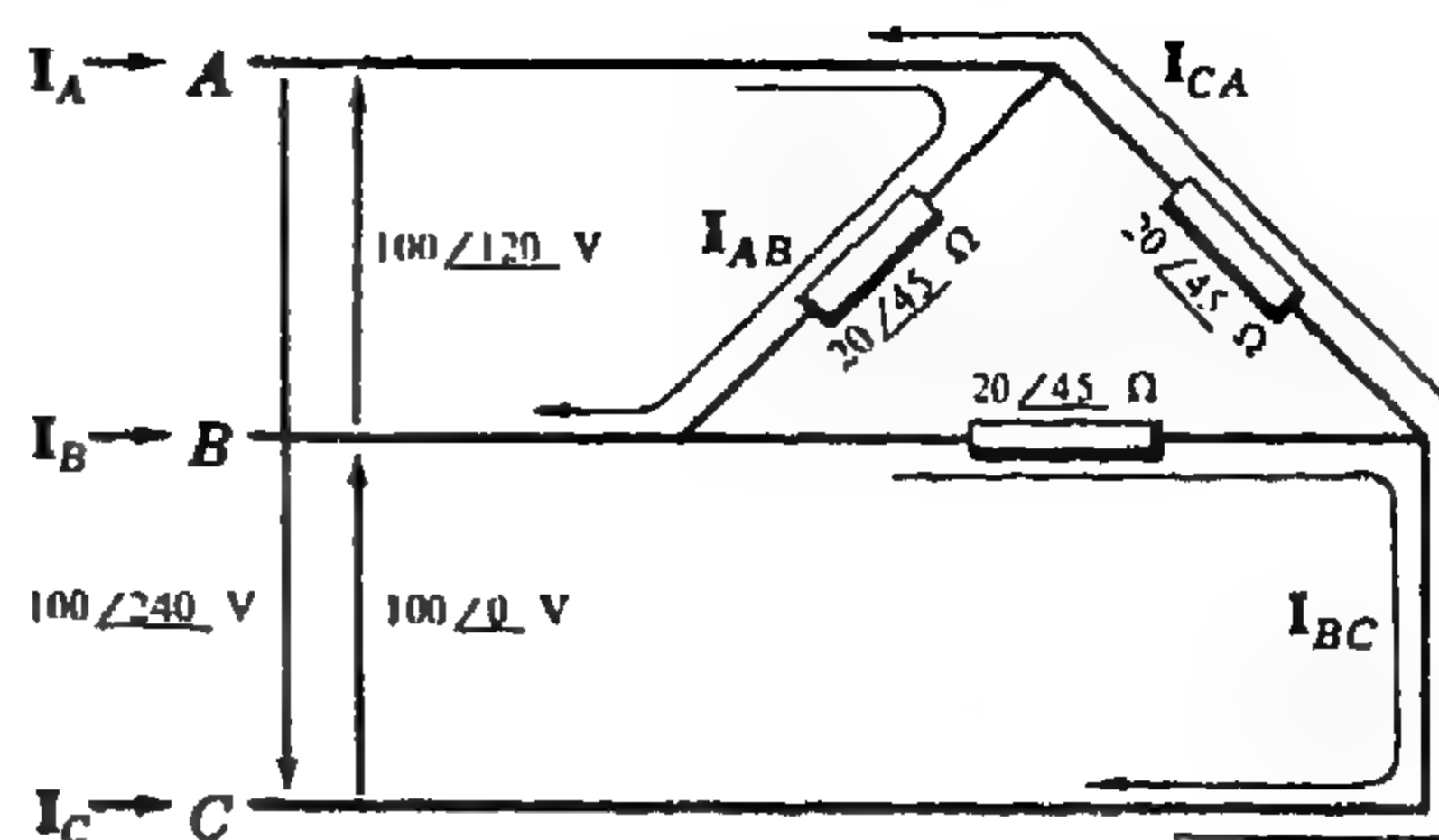
١٤-٤ نظام ذو ثلاثة أطوار وثلاثة أسلاك وجهد 100 V يؤثر بالمجموعة ABC على أحمال متزنة متساوية على شكل دلتا معاوقتها $20 \angle 45^\circ \Omega$. عين تيارات الأفرع وارسم الشكل المطاوعة .

نؤثر بجهود الأفرع لمتتابة ABC على الدائرة المعطاة في الشكل ١٤-٢٨ . إذن التيارات المطاوعة المختارة هي :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{100 \angle 120^\circ}{20 \angle 45^\circ} = 5.0 \angle 75^\circ \text{ A}, I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z} = 5.0 \angle 45^\circ \text{ A}, I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z} = 5.0 \angle 195^\circ \text{ A}$$



شكل ١٤ - ٢٩



شكل ١٤ - ٢٨

لتحصول على تيارات الأفرع كما في شكل الدائرة ، فإننا نطبق قانون كيرشوف للتيار عند كل نقطة اتصال للأحمال . إذن

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 5.0 \angle 75^\circ - 5.0 \angle 195^\circ = 8.66 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_{BA} + I_{BC} = -5.0 \angle 75^\circ + 5.0 \angle -45^\circ = 8.66 \angle -75^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} = 5.0 \angle 195^\circ - 5.0 \angle -45^\circ = 8.66 \angle 165^\circ \text{ A}$$

الشكل ١٤ - ٢٩ يوضح الرسم المطاور لتيارات الأفرع والتيارات المطورة .

١٤ - ٥ أوجد قراءات الواتمتر وذلك عند تطبيق طريقة جهازى الواتمتر على دائرة المسألة ١٤ - ٤ . قراءات الواتمتر في حالة أحمال متزنة بثلاثة أطوار وثلاثة أسلاك هي :

$$(١) \quad W_2 = V_L I_L \cos(30^\circ - \theta) \quad \text{و} \quad W_1 = V_L I_L \cos(30^\circ + \theta)$$

حيث θ هي زاوية معاوقة الحمل . لدينا من المسألة ١٤ - ٤ ، $V_L = 100$, $I_L = 8.66$ ، وزاوية الحمل هي 45° . بالتعويض بهذه القيم في المعادلة (١) نحصل على

$$W_1 = 100(8.66) \cos(30^\circ + 45^\circ) = 866 \cos 75^\circ = 224 \text{ W}$$

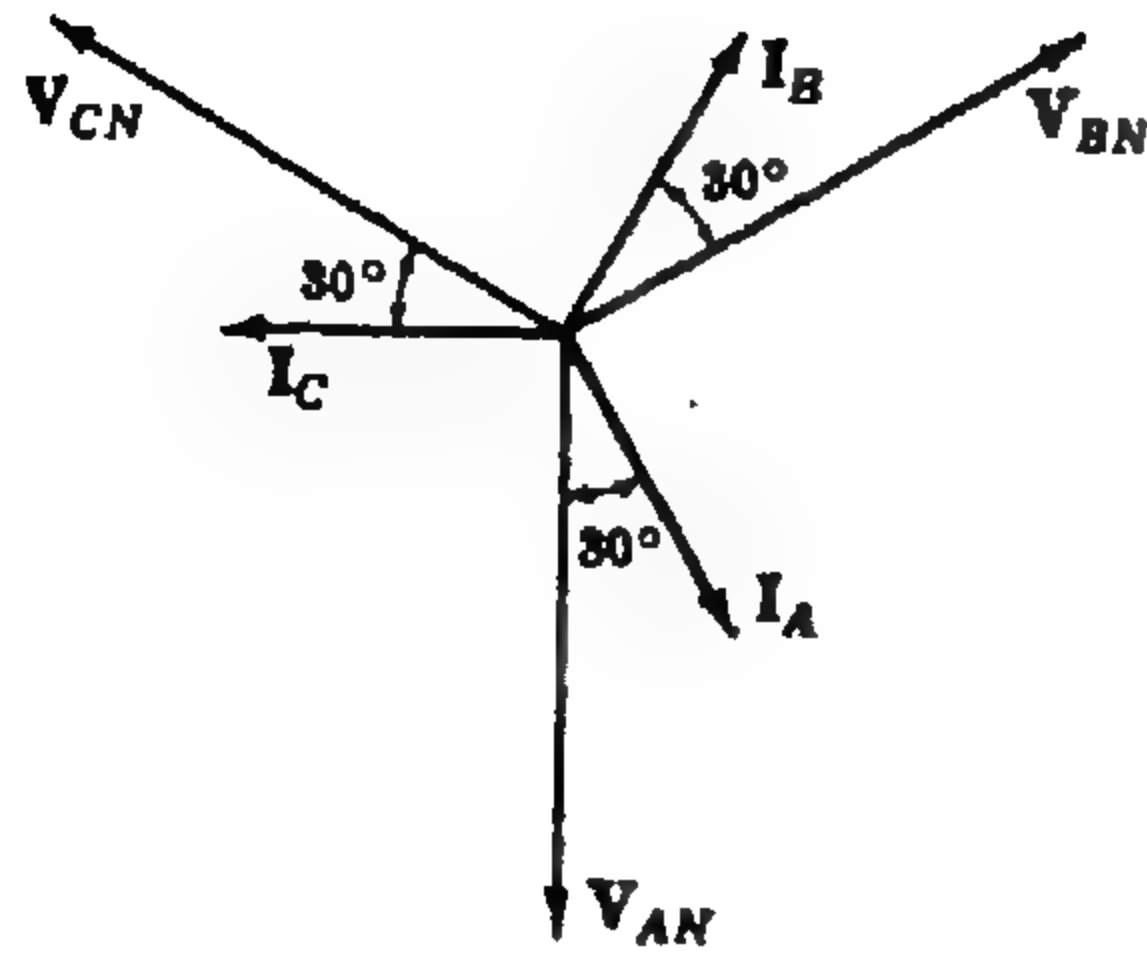
$$W_2 = 100(8.66) \cos(30^\circ - 45^\circ) = 866 \cos(-15^\circ) = 836 \text{ W}$$

$$P_T = W_1 + W_2 = 1060 \text{ W} \quad \text{والقدرة الكلية هي}$$

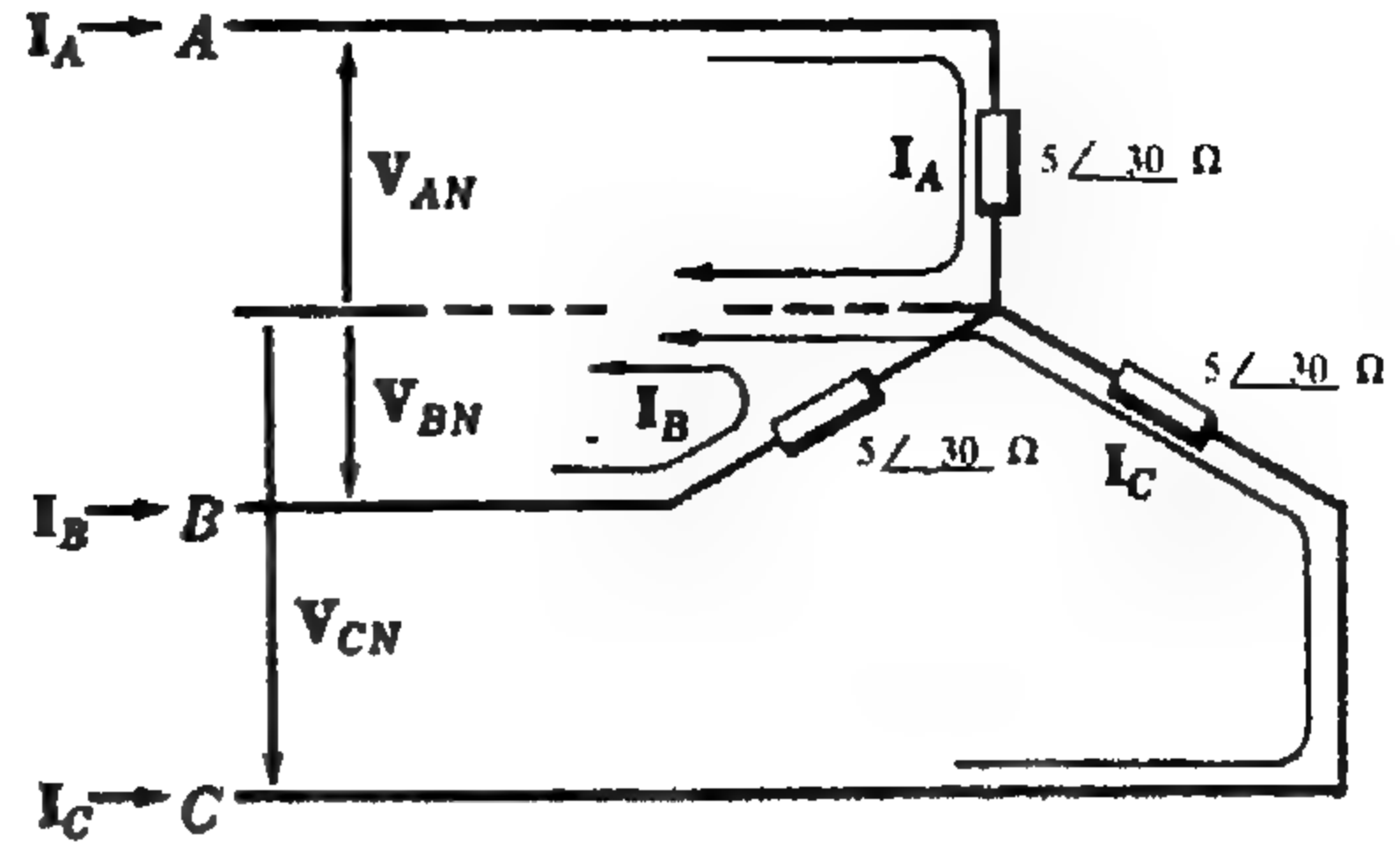
وكإختبار للنتيجة فإنه يمكننا حساب القدرة الكلية في أى معاوقات متزنة ذا ثلاثة أطوار من العلاقة :

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta = \sqrt{3} 100(8.66) \cos 45^\circ = 1060 \text{ W}$$

١٤ - ٦ وصلت ثلاثة معاوقات متساوية قيمة كل منها $5 \angle 30^\circ \Omega$ ومتصلة على شكل نجمة بالمجموعة CBA لثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 150 V . أوجد تيارات الأفرع وارسم الشكل المطاور .



شكل ١٤ - ٣١



شكل ١٤ - ٣٠

يمكننا في نظام متزن ذي ثلاثة أسلاك على شكل نجمة إضافة نقطة التعادل كما في شكل ١٤ - ٣٠ . إذن بتطبيق جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل الذي قيمته

$$V_{LN} = V_L / \sqrt{3} = 150 / \sqrt{3} = 86.6 \text{ V}$$

بنفس زاوية طور المتتابعة CBA . وتيارات الأفرع هي :

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{86.6 \angle -90^\circ}{5 \angle -30^\circ} = 17.32 \angle -60^\circ \text{ A}, I_B = \frac{V_{BN}}{Z} = 17.32 \angle 60^\circ \text{ A}, I_C = \frac{V_{CN}}{Z} = 17.32 \angle 180^\circ \text{ A}$$

يوضح الرسم المطاور ١٤ - ٣١ أن مجموعة تيارات الأفرع المتزنة سابقة لجهد الأفرع بالنسبة للجهد المتعادل بزاوية 30° ، وهي زاوية معاوقة الحمل .

١٤ - ٧ أوجد قراءات الواتميتر وذلك عند تطبيق طريقة جهازى الواتميتر على دائرة المسألة ١٤ - ٦ .
في حالة أحمال متزنة ذي ثلاثة أطوار نجد أن

$$W_1 = V_L I_L \cos (30^\circ + \theta) = 150(17.32) \cos (30^\circ + 30^\circ) = 1300 \text{ W}$$

$$W_2 = V_L I_L \cos (30^\circ - \theta) = 150(17.32) \cos (30^\circ - 30^\circ) = 2600 \text{ W}$$

$$P_T = W_1 + W_2 = 3900 \text{ W} \quad \text{والقدرة الكلية هي}$$

وكإختبار للنتيجة يمكننا حساب القدرة المطاورة $P_p = I_L^2 R = (17.32)^2 4.33 = 1300 \text{ W}$ ثم حساب القدرة الكلية

$$P_T = 3P_p = 3(1300) = 3900 \text{ W}$$

أو في حالة أحمال متزنة ذي ثلاثة أطوار فإن القدرة الكلية هي

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta = \sqrt{3} (150) (17.32) \cos (-30^\circ) = 3900 \text{ W}$$

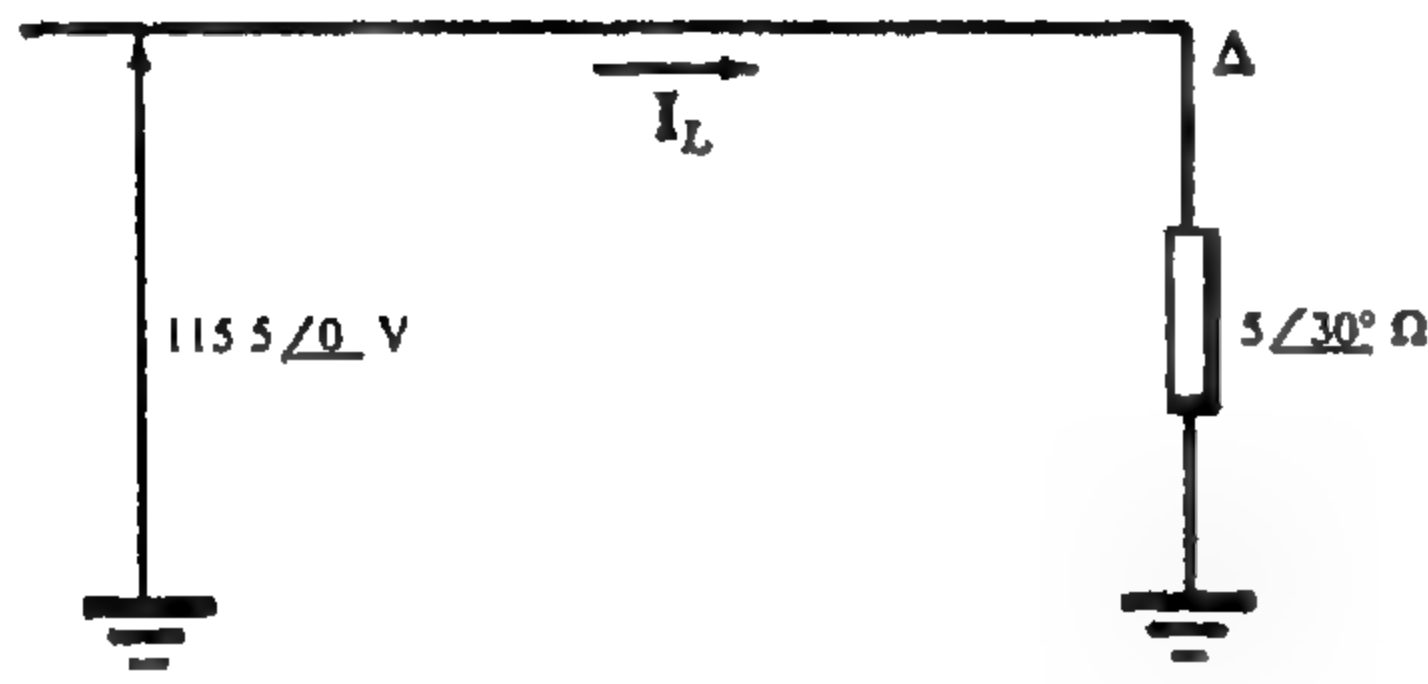
١٤ - ٨ وصلت ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها $15/30^\circ \Omega$ متصلة على شكل دلتا بمجموعة ABC لنظام ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 200 V . أوجد تيارات الأفرع باستخدام طريقة دائر - الفرع الواحد المكافئة .

بما أن الحمل متصل على شكل دلتا فإننا نحصل أولاً على المعاوقات المكافئة للحمل والمتصلة على شكل نجمة :

$$Z_Y = Z_\Delta/3 = 15/30^\circ/3 = 5/30^\circ \Omega$$

وقبة جهد الفرع بالنسبة لجهد التعادل هي

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 200/\sqrt{3} = 115.5\text{ V}$$



شكل ١٤ - ٣٢

والآن فإن الجهد المؤثر على دائرة الفرع الواحد المكافئ الموضحة في الشكل ١٤ - ٣٢ هو $115.5/0^\circ\text{ V}$ والتيار الناتج هو

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z} = \frac{115.5/0^\circ}{5/30^\circ} = 23.1/-30^\circ\text{ A}$$

وللحصول على تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C فإننا نعين أولاً زاوية الطور في جهد الفرع المناظر بالنسبة للجهد المتعادل في المتتابة ABC . وبما أن زاوية طور V_{AN} هي 90° .

$$I_A = 23.1/90^\circ - 30^\circ = 23.1/60^\circ\text{ A} \quad , \quad I_B = 23.1/-60^\circ\text{ A} \quad , \quad I_C = 23.1/180^\circ\text{ A}$$

وترتبط تيارات المعاوقات المتصلة على شكل دلتا بتيارات الأفرع بالعلاقة $I_L = \sqrt{3}I_p$ ومنها نجد أن

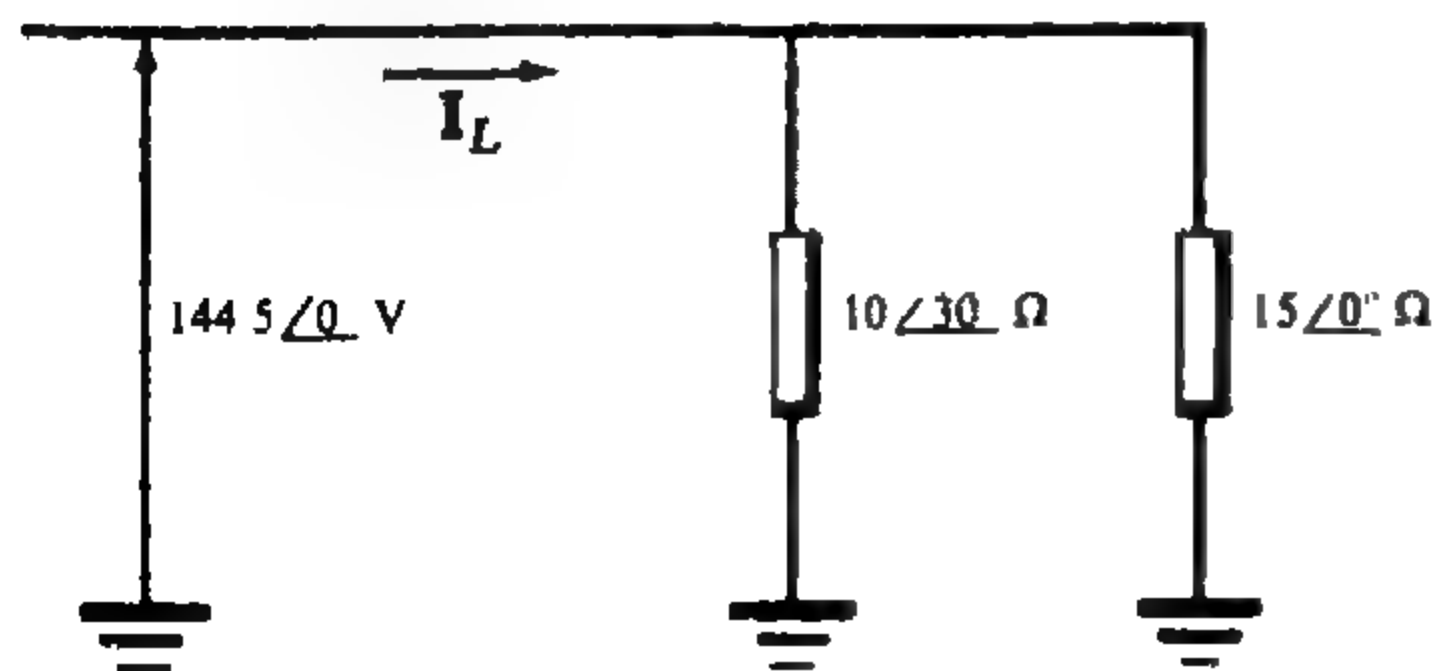
$$I_p = 23.1/\sqrt{3} = 13.3\text{ A}$$

وزاوية طور V_{AB} في المتتابة ABC هي 120° ، إذن ، $I_{AB} = 13.3/120^\circ - 30^\circ = 13.3/90^\circ\text{ A}$.

$$I_{CA} = 13.3/210^\circ\text{ A} \quad , \quad I_{BC} = 13.3/-30^\circ\text{ A}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

١٤ - ٩ وصلت مجموعتان إحداهما متصلة على شكل نجمة وتتكون من ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها $10/30^\circ \Omega$ ، والثانية متصلة على شكل نجمة أيضاً وتتكون من ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها $5/0^\circ \Omega$ ، بنظام واحد ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك - وجهد 250 V أوجد القدرة الكلية



شكل ١٤ - ٣٣

بما أن كلتا المجموعتين متصلتين على شكل نجمة فإنه يمكن استبدال معاوقتهما المطاوعة مباشرة بدائرة مكافئة ذات فرع واحد كما في الشكل ١٤ - ٣٣ . والجهد المطلوب في دائرة الفرع الواحد المكافئة هو

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 250/\sqrt{3} = 144.5\text{ V}$$

إذن التيار هو

$$I_L = \frac{144.5 \angle 0}{10 \angle 30} + \frac{144.5 \angle 0}{15 \angle 0} \\ = 14.45 \angle -30 + 9.62 \angle 0 = 23.2 \angle -18.1^\circ \text{ A}$$

في معادلة القدرة $P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$ الزاوية θ هي زاوية المعاوقة في حالة وجود مجموعة واحدة .

أما في حالة عدة مجموعات متصلة بنفس النظام فإن θ هي زاوية معاوقة الحمل المكافئ . في حالة حساب التيار I_L فإننا اعتبرنا مجموعتي الأحمال ووجدنا أن التيار لاحق للجهد بزاوية 18.1° . وعلى هذا يتضح لنا أن المعاوقة المكافئة حثية ولها زاوية 18.1° . إذن

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta = \sqrt{3} 250(23.2) \cos 18.1^\circ = 9530 \text{ W}$$

١٤ - ١٥ إذا أثرنا بالمجموعة ABC لنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 208 V على ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها $12 \angle 30^\circ \Omega$ متصلة على شكل دلتا وعلى ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها $5 \angle 45^\circ \Omega$ متصلة على شكل نجمة . فأوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

حيث أن المجموعة الأولى للأحمال متصلة على شكل دلتا فإننا نحصل على شكل نجمة المكافئ لها

$$Z_Y = Z_\Delta / 3 = 12 \angle 30^\circ / 3 = 4 \angle 30^\circ \Omega$$

وحيث أن جهد الفرع هو 208 V فإن جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل هو $208/\sqrt{3} \text{ V}$ أو 120 V .

يوضح الشكل ١٤ - ٢٤ دائرة الفرع الواحد المكافئة وفيها معاوقتا الحمل هما $4 \angle 30^\circ \Omega$ ، $5 \angle 45^\circ \Omega$ ويمكن استبدال هاتين المعاوقتين بمعاوقة مكافئة هي

$$Z_{eq} = \frac{4 \angle 30^\circ (5 \angle 45^\circ)}{4 \angle 30^\circ + 5 \angle 45^\circ} = 2.24 \angle 36.6^\circ \Omega$$

إذن التيار هو

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z_{eq}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{2.24 \angle 36.6^\circ} = 53.6 \angle -36.6^\circ \text{ A}$$

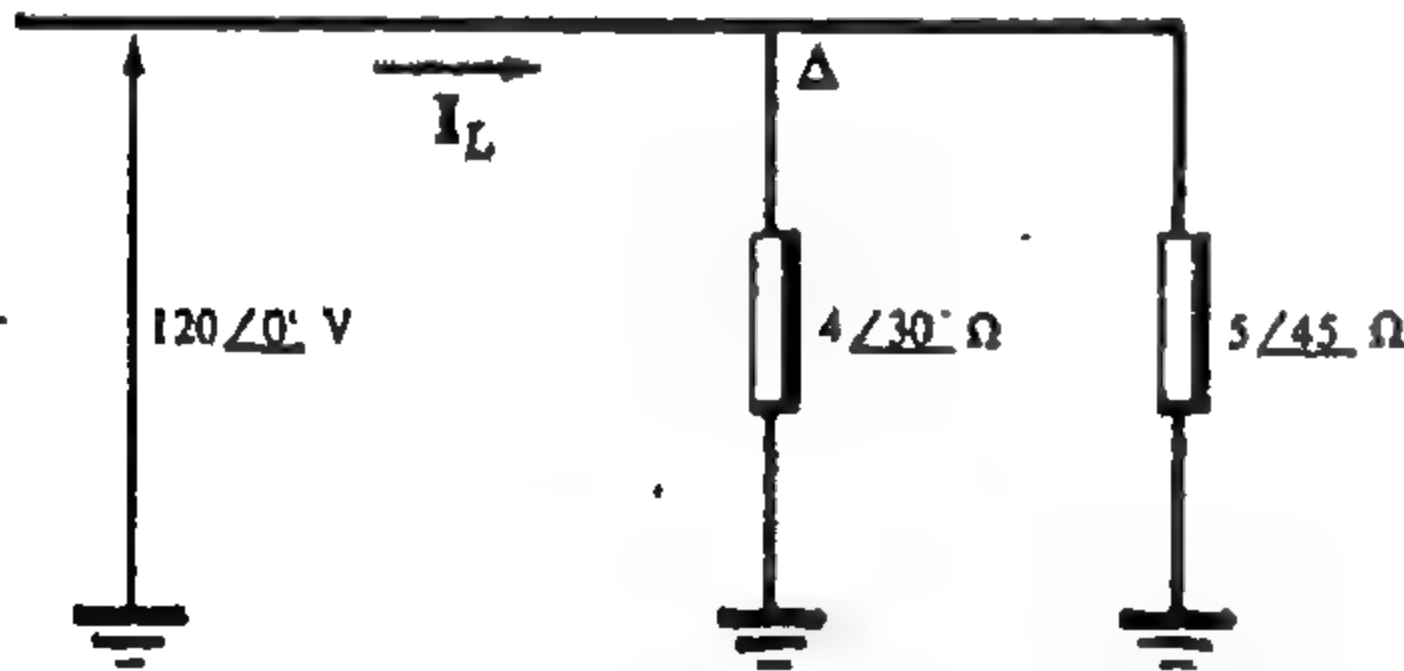
والجهد V_{AN} في المتتابة ABC له زاوية طور 90° وعلى هذا فإن

$$I_B = 53.6 \angle -66.6^\circ \text{ A} \quad \text{وبالمثل نجد أن} \quad I_A = 53.6 \angle (90 - 36.6^\circ) = 53.6 \angle 53.4^\circ \text{ A}$$

$$I_C = 53.6 \angle -186.6^\circ \text{ A}$$

القدرة الكلية هي

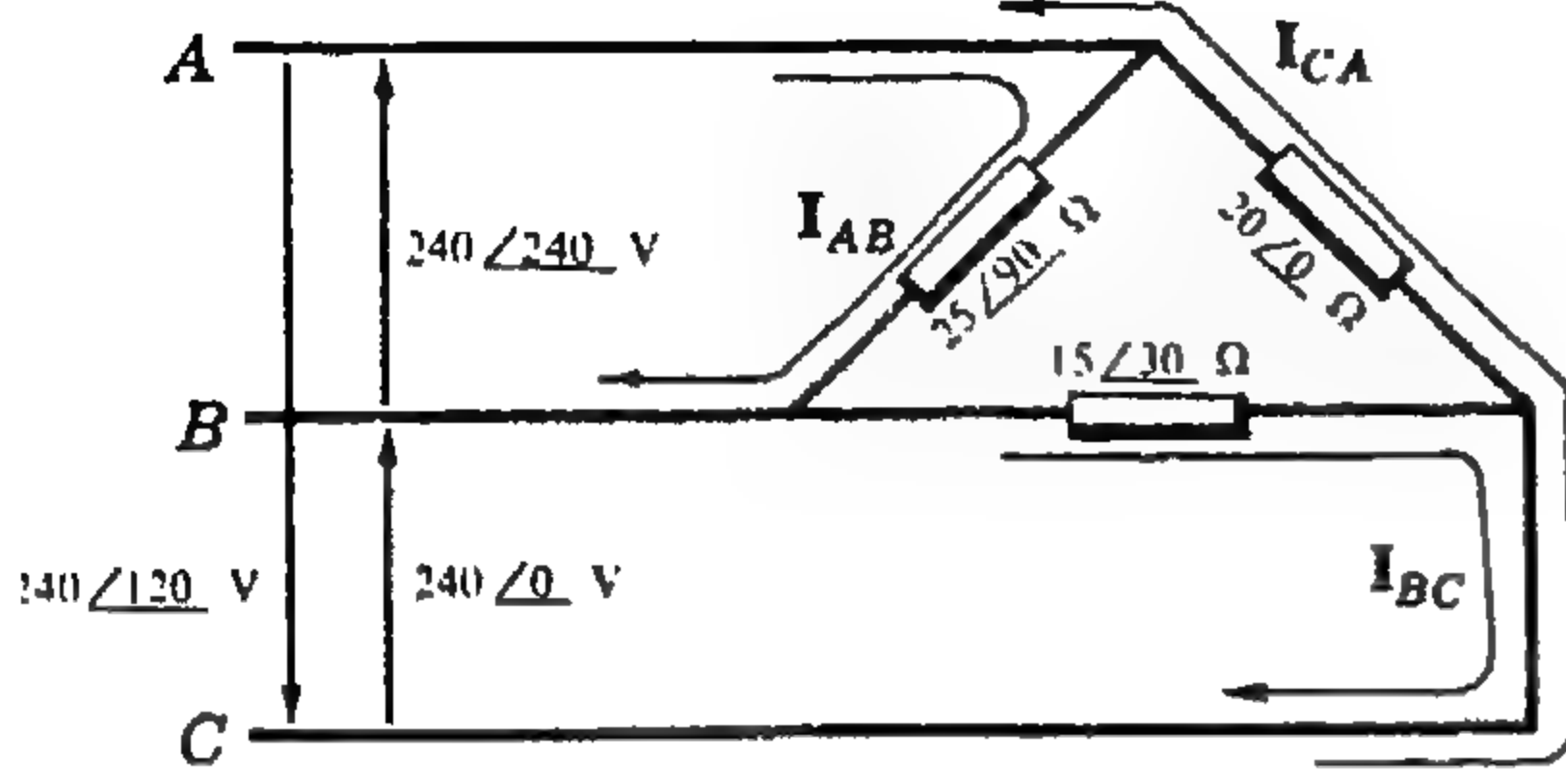
$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta = \sqrt{3} 208(53.6) \cos 36.6^\circ = 15500 \text{ W}$$



شكل ١٤ - ٢٤

١٤ - ١١ تؤثر المجموعة CBA لنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أحمال وجهد 240 V على أحمال متصلة على شكل دلتا فيها $Z_{AB} = 25/90^\circ \Omega$ و $Z_{BC} = 15/30^\circ \Omega$ و $Z_{CA} = 20/0^\circ \Omega$ أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

تؤثر بجهد الأفرع للمتتابعة CBA على الأحمال المتصلة على شكل دلتا والموضحة في الشكل ١٤ - ٣٥ ، ونختار التيارات المطاوعة كما هو موضح في الشكل . إذن



شكل ١٤ - ٣٥

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{240 \angle 240^\circ}{25 \angle 90^\circ} = 9.6 \angle 150^\circ \text{ A}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{BC}} = \frac{240 \angle 0^\circ}{15 \angle 30^\circ} = 16.0 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{CA}} = \frac{240 \angle 120^\circ}{20 \angle 0^\circ} = 12.0 \angle 120^\circ \text{ A}$$

والآن نحسب تيارات الأفرع بدلالة التيارات المطاوعة

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 9.6 \angle 150^\circ - 12 \angle 120^\circ = 6.06 \angle 247^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_{BA} + I_{BC} = -9.6 \angle 150^\circ + 16 \angle -30^\circ = 25.6 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} = 12 \angle 120^\circ - 16 \angle -30^\circ = 27.1 \angle 137.2^\circ \text{ A}$$

وكما هو متوقع في حالة الأحمال غير المتزنة فإن تيارات الأفرع غير متساوية .

ونحسب القدرة في كل طور كما يلي

المعاوقة $Z_{AB} = 25 \angle 90^\circ = 0 + j25 \text{ ohms}$ ، أي أن $R_{AB} = 0$ و $I_{AB} = 9.6 \text{ A}$. إذن

$$P_{AB} = I_{AB}^2 R_{AB} = (9.6)^2 (0) = 0$$

المعاوقة $Z_{BC} = 15 \angle 30^\circ = 13 + j7.5 \text{ ohms}$ ، أي أن $R_{BC} = 13 \Omega$ و $I_{BC} = 16 \text{ A}$. إذن

$$P_{BC} = I_{BC}^2 R_{BC} = (16)^2 (13) = 3330 \text{ W}$$

المعاوقة $Z_{CA} = 20 \angle 0^\circ = 20 + j0 \text{ ohms}$ ، أي أن $R_{CA} = 20 \Omega$ و $I_{CA} = 12 \text{ A}$. إذن

$$P_{CA} = I_{CA}^2 R_{CA} = (12)^2 (20) = 2880 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي مجموع القدرات المطاوعة ،

$$P_T = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 0 + 3330 + 2880 = 6210 \text{ W}$$

١٤ - ١٢ أوجد قراءات الواتمتر عند استخدام طريقة جهازى الواتمتر في دائرة المسألة ١٤ - ١١ إذا كان الجهازان متصلين في الفرعين (أ) A و B ، (ب) A و C .

(أ) في حالة توصيل الجهازين في الفرعين A و B فإن

$$W_B = V_{BC} I_B \cos \phi_B^{BC} \quad (٢) \quad , \quad W_A = V_{AC} I_A \cos \phi_A^{AC} \quad (١)$$

لدينا من المسألة ١٤ - ١١ ، $V_{AC} = 240 \angle -60^\circ$ V ، $I_A = 6.06 \angle 247.7^\circ$ A . إذن الزاوية

ϕ_A^{AC} هي الزاوية بين 247.7° و 60° — أو 52.3° . بالتعويض في (١) نجد أن

$$W_A = 240(6.06) \cos 52.3^\circ = 890 \text{ W}$$

لدينا أيضاً من المسألة ١٤ - ١١ أن $V_{BC} = 240 \angle 0^\circ$ V ، $I_B = 25.6 \angle -30^\circ$ A . إذن $\phi_B^{BC} = 30^\circ$. وبالتعويض في (٢) نجد أن

$$W_B = 240(25.6) \cos 30^\circ = 5320 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي $P_T = W_A + W_B = 890 + 5320 = 6210 \text{ W}$

(ب) في حالة توصيل الجهازين في الفرعين A و C فإن

$$W_C = V_{CB} I_C \cos \phi_C^{CB} \quad (٤) \quad , \quad W_A = V_{AB} I_A \cos \phi_A^{AB} \quad (٣)$$

لدينا من المسألة ١٤ - ١١ أن $V_{AB} = 240 \angle 240^\circ$ V . وبما أن $I_A = 6.06 \angle 247.7^\circ$ A إذن

وبالتعويض في (٣) نجد أن $\phi_A^{AB} = 7.7^\circ$

$$W_A = 240(6.06) \cos 7.7^\circ = 1440 \text{ W}$$

وأيضاً $V_{CB} = 240 \angle 180^\circ$ V ، $I_C = 27.1 \angle 132.2^\circ$ A . ومنها نجد أن $\phi_C^{CB} = 42.8^\circ$. وبالتعويض في (٤) نجد أن

$$W_C = 240(27.1) \cos 42.8^\circ = 4770 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي $P_T = W_A + W_C = 1440 + 4770 = 6210 \text{ W}$

١٤ - ١٣ تؤثر المجموعة CBA لنظام ذى ثلاثة أطوار —
أربعة أسلاك بجهد 208 V على مجموعة أحمال متصلة

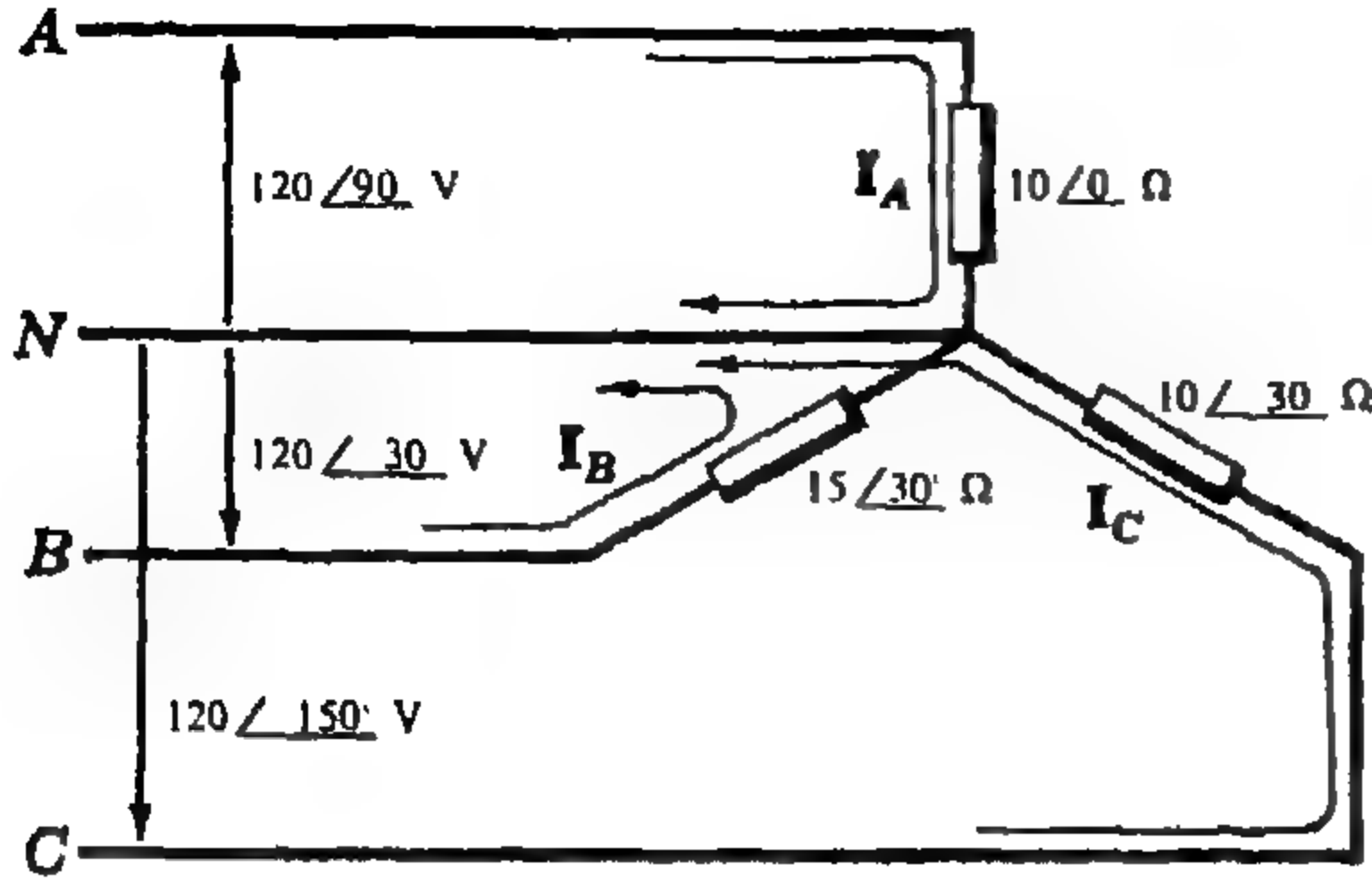
على شكل نجمة فيها $Z_A = 10 \angle 0^\circ \text{ ohms}$

$$Z_B = 15 \angle 30^\circ \text{ ohms}$$

و $Z_C = 10 \angle -30^\circ \text{ ohms}$. أوجد تيارات

الأفرع والتيار المتعادل والقدرة الكلية .

بالتأثير بجهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل للمتتابعة
 ABC على الدائرة الموضحة في الشكل ١٤ - ٣٦ ،
وحساب تيارات الأفرع بفرض الاتجاه الموجب هو
الاتجاه إلى الأحمال ، نجد أن



شكل ١٤ - ٣٦

$$I_A = V_{AN}/Z_A = (120 \angle 90^\circ)/(10 \angle 0^\circ) = 12 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_B = V_{BN}/Z_B = (120 \angle -30^\circ)/(15 \angle 30^\circ) = 8 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$I_C = V_{CN}/Z_C = (120 \angle -150^\circ)/(10 \angle -30^\circ) = 12 \angle -120^\circ \text{ A}$$

تحتوى نقطة التعادل على مجموع تيارات الأفرع المطاوعة وبفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الأحمال فإن

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -(12 \angle 90^\circ + 8 \angle -60^\circ + 12 \angle -120^\circ) = 5.69 \angle 69.4^\circ \text{ A}$$

ويمر في المصاوعة $Z_A = 10 + j0 \text{ ohms}$ التيار $I_A = 12 \angle 90^\circ \text{ A}$. القدرة في حمل هذا الطور هو

$$P_A = (12)^2(10) = 1440 \text{ W}$$

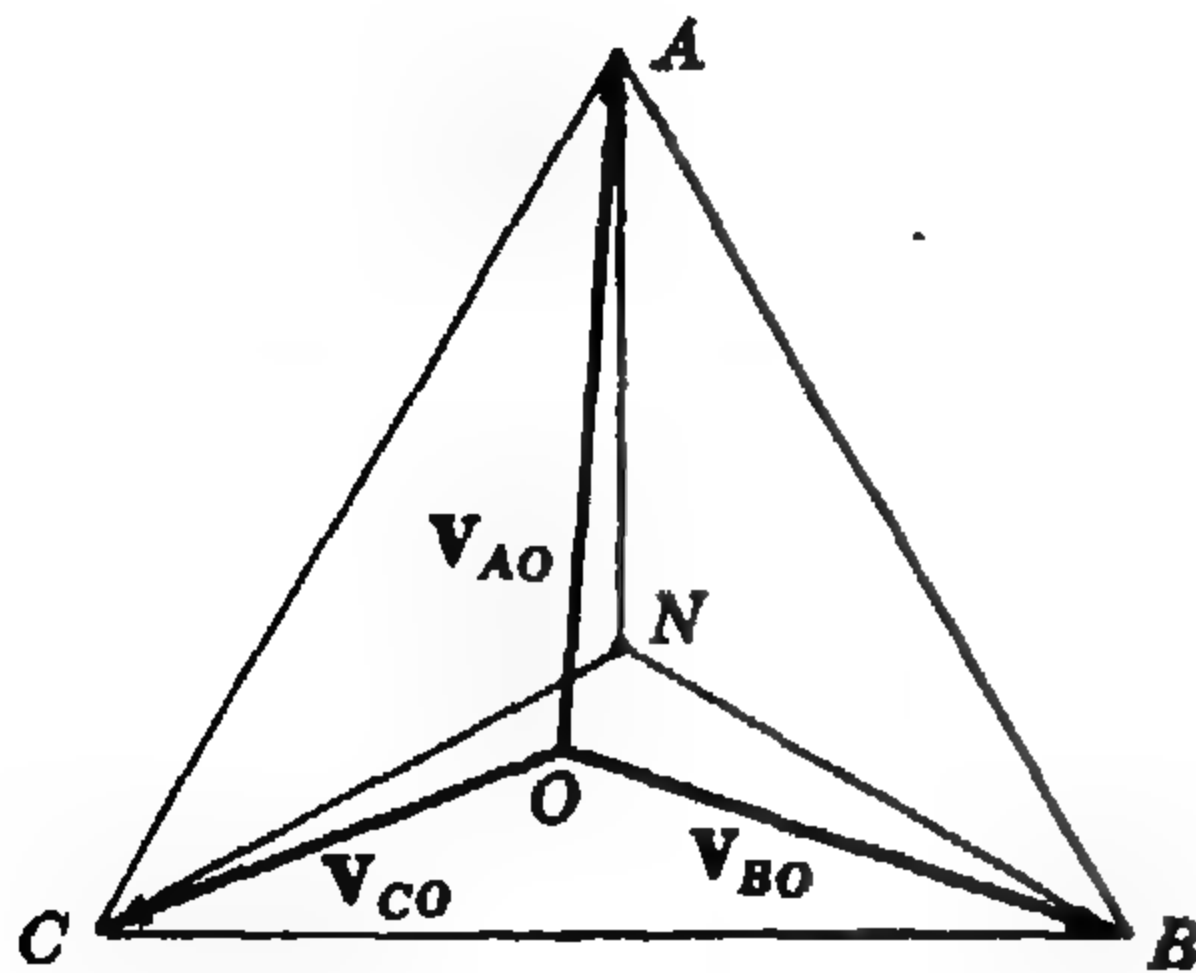
والقدرة المطاوعة هي $P_B = (8)^2(13) = 832 \text{ W}$. وبالمثل فإن $Z_C = 10 \angle -30^\circ = 8.66 - j5 \text{ ohms}$ تحتوى على

$$P_C = (12)^2(8.66) = 1247 \text{ W}$$

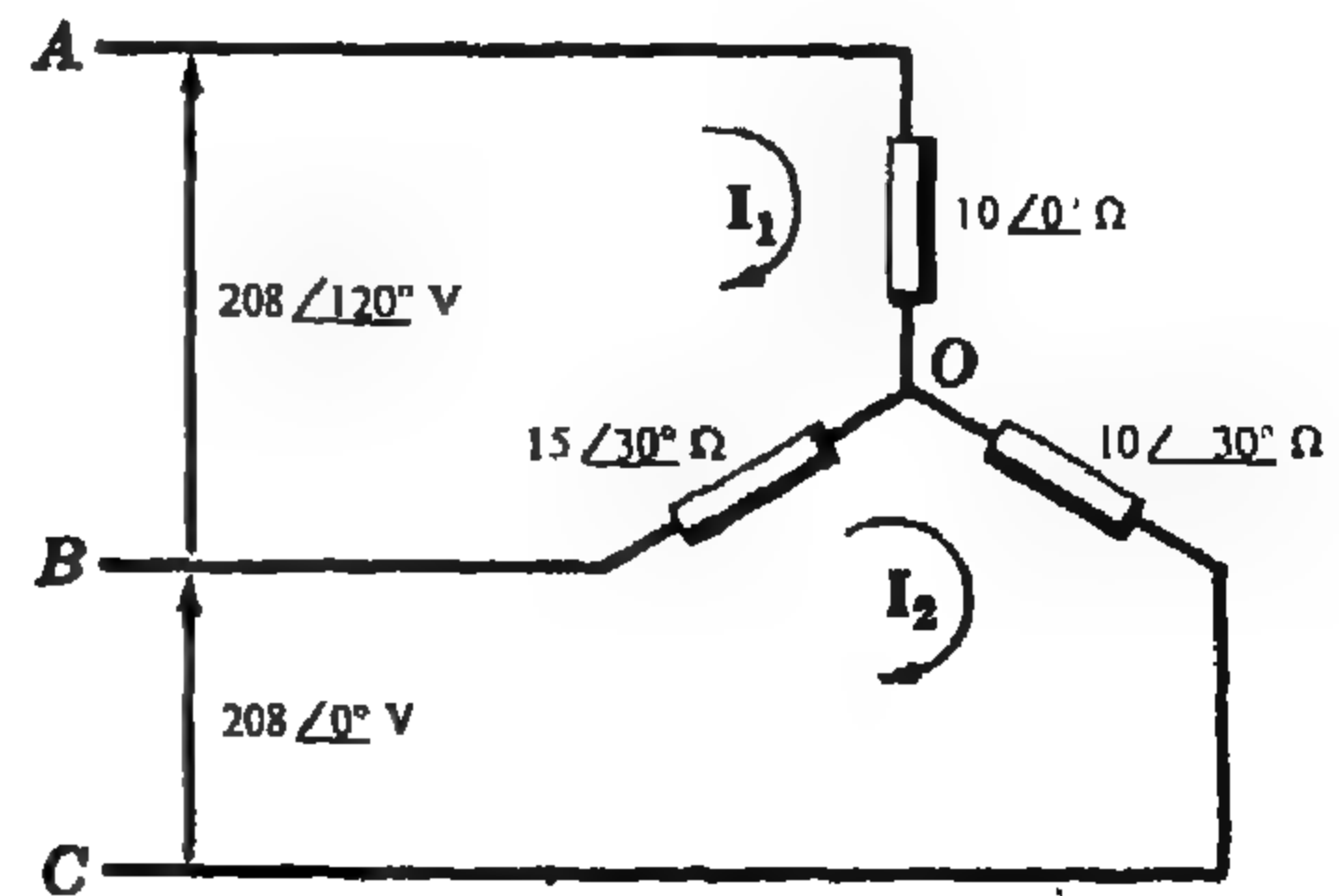
$$P_T = P_A + P_B + P_C = 1440 + 832 + 1247 = 3519 \text{ W}$$

القدرة الكلية هي

١٤ - ١٤ إذا وصلت معاوقات المسألة ١٤ - ١٣ بالمجموعة ABC لثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 208 V . فأوجد
تيارات الأفرع والجهود عبر المعاوقات .



٣٨ - ١٤



شكل ١٤ - ٣٧

توضح دائرة الشكل ١٤ - ٣٧ جهدي الفرعين V_{AB} و V_{BC} وبالاختيار الموضح لتيارى الشبكة I_1 و I_2 فإن الصيغة المصفوفية لمعادلات تيارى الشبكة هى

$$\begin{bmatrix} 10/0^\circ + 15/30^\circ & -15/30^\circ \\ -15/30^\circ & 15/30^\circ + 10/-30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208/120^\circ \\ 208/0^\circ \end{bmatrix}$$

ومن هنا نجد أن

$$I_1 = \frac{5210 \angle 90^\circ}{367.5 \angle 3.9^\circ} = 14.15 \angle 86.1^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{3730 \angle 56.6^\circ}{367.5 \angle 3.9^\circ} = 10.15 \angle 52.7^\circ \text{ A}$$

ويعطى تيارات الأفرع بدلالة I_1 و I_2 بفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الاحمال بالمعادلات

$$I_A = I_1 = 14.15 \angle 86.1^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_2 - I_1 = 10.15 \angle 52.7^\circ - 14.15 \angle 86.1^\circ = 8.0 \angle -49.5^\circ \text{ A}$$

$$I_C = -I_2 = 10.15 \angle (52.7^\circ - 180^\circ) = 10.15 \angle -127.3^\circ \text{ A}$$

والآن فإن الجهد على المعاوقات هو

$$V_{AO} = I_A Z_A = 14.15 \angle 86.1^\circ (10 \angle 0^\circ) = 141.5 \angle 86.1^\circ \text{ V}$$

$$V_{BO} = I_B Z_B = 8.0 \angle -49.5^\circ (15 \angle 30^\circ) = 120 \angle -19.5^\circ \text{ V}$$

$$V_{CO} = I_C Z_C = 10.15 \angle -127.3^\circ (10 \angle -30^\circ) = 101.5 \angle -157.3^\circ \text{ V}$$

عند توصيل نهايات الجهود المطاورة الثلاثة V_{AO} و V_{BO} و V_{CO} بخطوط مستقيمة ينتج لدينا مثلث المتتامة ABC . إذن النقطة N يمكن إضافتها إلى الشكل ١٤ - ٣٨ .

١٤ - ١٥ كرر حل المسألة ١٤ - ١٤ باستخدام طريقة إزاحة نقطة التعادل .

يحسب الجهد V_{ON} في طريقة إزاحة نقطة التعادل من العلاقة

$$V_{ON} = \frac{V_{AN} Y_A + V_{BN} Y_B + V_{CN} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

لدينا من المسألة ١٤ - ١٤ $Y_A = 1/10 = 0.1 \text{ S}$, $Y_B = 1/(15 \angle 30^\circ) = 0.0577 - j0.033 \text{ S}$

و $Y_C = 1/(10 \angle -30^\circ) = 0.0866 + j0.050 \text{ S}$. إذن

$$Y_A + Y_B + Y_C = 0.244 + j0.0167 = 0.244 \angle 3.93^\circ \text{ S}$$

$$\begin{aligned} V_{AN}Y_A &= 120 \angle 90^\circ (0.1) = 12 \angle 90^\circ = j12 \text{ A} \\ V_{BN}Y_B &= 120 \angle -30^\circ (0.0667 \angle -30^\circ) = 8.0 \angle -60^\circ = 4.0 - j6.93 \text{ A} \\ V_{CN}Y_C &= 120 \angle -150^\circ (0.1 \angle 30^\circ) = 12 \angle -120^\circ = -6.0 - j10.4 \text{ A} \\ V_{AN}Y_A + V_{BN}Y_B + V_{CN}Y_C &= -2.0 - j5.33 = 5.69 \angle 249.4^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$V_{ON} = (5.69 \angle 249.4^\circ) / (0.244 \angle 3.93^\circ) = 23.3 \angle 245.5^\circ = -9.66 - j21.2$$

ويمكن التعبير عن معاوقات الحمل بدلالة جهد الفرع المناظر بالنسبة للجهد المتعادل ، وذلك عن إزاحة الجهد المتعادل بمائلي :

$$\begin{aligned} V_{AO} &= V_{AN} + V_{NO} = 120 \angle 90^\circ + (9.66 + j21.2) = 141.2 \angle 86.08^\circ \text{ V} \\ V_{BO} &= V_{BN} + V_{NO} = 120 \angle -30^\circ + (9.66 + j21.2) = 120 \angle -18.9^\circ \text{ V} \\ V_{CO} &= V_{CN} + V_{NO} = 120 \angle -150^\circ + (9.66 + j21.2) = 102 \angle 202.4^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

والحصول على تيارات الأفرع فإننا نأخذ حاصل ضرب هذه الجهود في المساحات المناظرة

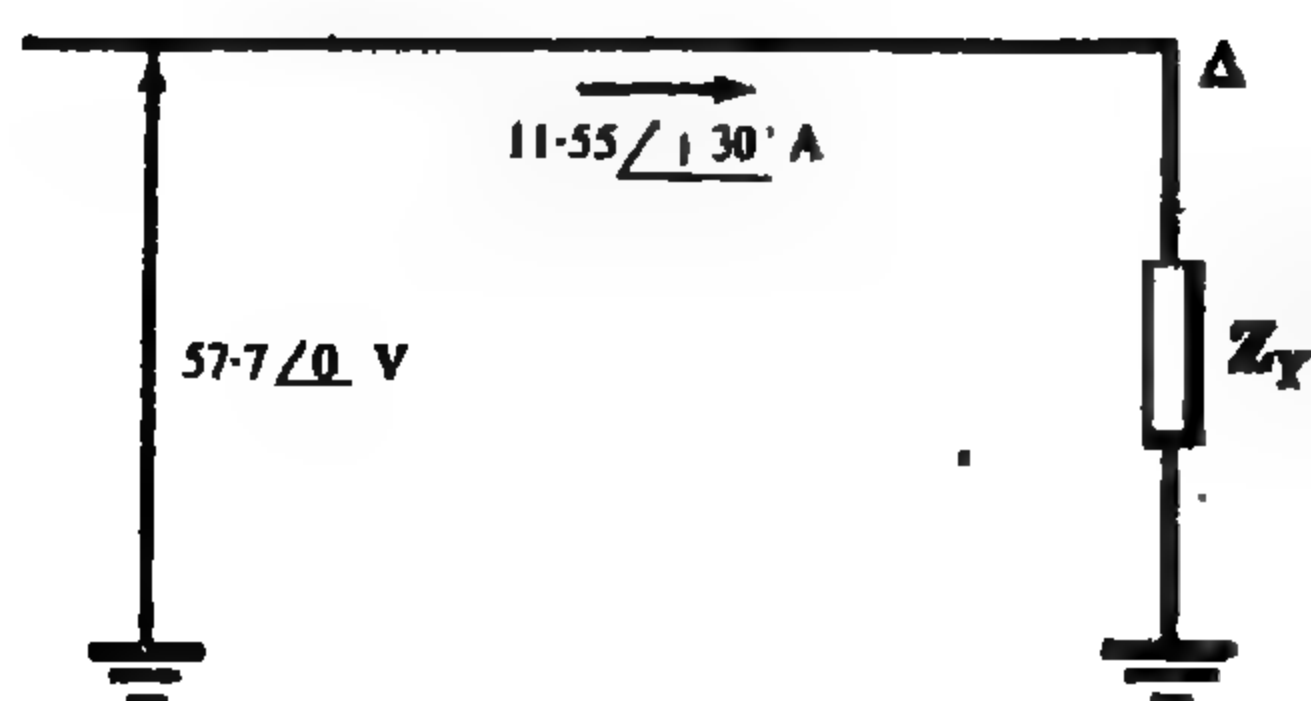
$$\begin{aligned} I_A &= V_{AO}Y_A = 141.2 \angle 86.08^\circ (0.1 \angle 0^\circ) = 14.12 \angle 86.08^\circ \text{ A} \\ I_B &= V_{BO}Y_B = 120 \angle -18.9^\circ (0.0667 \angle -30^\circ) = 8.0 \angle -48.9^\circ \text{ A} \\ I_C &= V_{CO}Y_C = 102 \angle 202.4^\circ (0.1 \angle 30^\circ) = 10.2 \angle 232.4^\circ \text{ or } 10.2 \angle -127.6^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

والنتائج السابقة تطابق المسألة ١٤ - ١٤ وذلك في حدود الدقة التي تسمح بها المسطرة الحاسبة .

١٤ - ١٦ إذا حصلنا على القراءتين 1154 V ، 577 W عند استخدام طريقة جهازى وإتميتر في أحمال متزنة . فأوجد معاوقات الحمل المتصلة على شكل دلتا إذا كان جهد النظام 100 V .

لدينا في حالة أحمال متزنة بثلاثة أطوار

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = \pm \sqrt{3} \frac{1154 - 577}{1154 + 577} = \pm 0.577$$



حيث $\theta = \pm 30^\circ$. (لعدم معرفتنا كل من المتتابعة وموضعى الجهازين فإنه لا يمكن تحديد الإشارة ولذلك فإننا نكتب \pm) .

القدرة الكلية هي

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

$$I_L = \frac{P}{\sqrt{3} V_L \cos \theta} = \frac{1731}{\sqrt{3}(100)(0.866)} = 11.55 \text{ A}$$

شكل ١٤ - ٢٩

نرسم دائرة الفرع الواحد المكافئة ونؤثر عليها بالجهد $V = 57.7 \angle 0^\circ = (100/\sqrt{3}) \angle 0^\circ$ كما في الشكل ١٤ - ٣٩ . وعلى هذا فإن معاوقات الشكل النجمي هي .

$$Z_Y = \frac{V}{I} = \frac{57.7 \angle 0^\circ}{11.55 \angle -30^\circ} = 5.0 \angle +30^\circ \Omega$$

$$Z_\Delta = 3Z_Y = 15 \angle +30^\circ \Omega$$

و

١٤ - ١٧ عند تطبيق طريقة جهازى واتمير على نظام ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك بجهد $100 V$ ومتتابة ABC كان

$$W_C = 224 W \quad \text{و} \quad W_B = 836 W \quad \text{هما} \quad C \quad \text{و} \quad B \quad \text{الفرعين في الموصلين}$$

أوجد المعاوقات المتزنة للشكل دلتا .

بما أن كلا من المتتابة وموضعى الجهازين معروف فإنه يمكن تحديد إشارة θ . وعلى هذا فإن

$$\theta = 45^\circ \quad , \quad \tan \theta = \sqrt{3} \frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3} \frac{836 - 224}{836 + 224} = 1$$

$$\text{بما أن} \quad P = \sqrt{3} I_L I_L \cos \theta, \quad I_L = \frac{P}{\sqrt{3} I_L \cos \theta} = \frac{1060}{\sqrt{3}(100)(0.707)} = 8.66 A.$$

ذات الفرع الواحد لها جهد $57.7 \angle 0^\circ V$ ومعاوقات الشكل النجمي هي

$$Z_Y = V/I = (57.7 \angle 0^\circ)/(8.66 \angle -45^\circ) = 6.67 \angle 45^\circ \Omega$$

$$Z_\Delta = 3Z_Y = 20 \angle 45^\circ \Omega$$

١٤ - ١٨ وصلت وحدة تسخين $1500 W$ ذات ثلاثة أطوار وعامل القدرة لها يساوى الوحدة ومحرك تأثيرى $5hp$ كفاءة أقصى تحمل له 80% وعامل القدرة له 0.85 بنظام واحد ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد $208 V$. أوجد قيمة تيار الفرع لمعدل عطاء من المحرك قيمته $5hp$.

$$\text{بما أن} \quad 746 W = 1 hp, \quad \text{فإن عطاء المحرك} \quad (5 hp)(746 W/hp) = 3730 W. \quad \text{إذن القدرة}$$

$$\text{الداخلية للمحرك هي} \quad 3730/0.80 = 4662 W$$

وحيث أن المحرك هو حمل متزن بثلاثة أطوار ، إذن

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta, \quad 4662 = \sqrt{3}(208 I_L)(0.85), \quad I_L = 15.25 A$$

التيار المطاور في دائرة الفرع الواحد المكافئة لاحق للجهد بزاوية θ حيث $\theta = \cos^{-1} 0.85 = 31.7^\circ$

$$\text{إذن تيار الفرع للمحرك هو} \quad I_L = 15.25 \angle -31.7^\circ A.$$

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \text{ where } \theta = 0^\circ \text{ لدينا الآن حمل التسخين}$$

حيث $\theta = 0^\circ$ وبالتعويض نجد أن

$$1500 = \sqrt{3}(208)I_L, I_L = 4.16 \text{ A}, I_L = 4.16 \angle 0^\circ \text{ A}$$

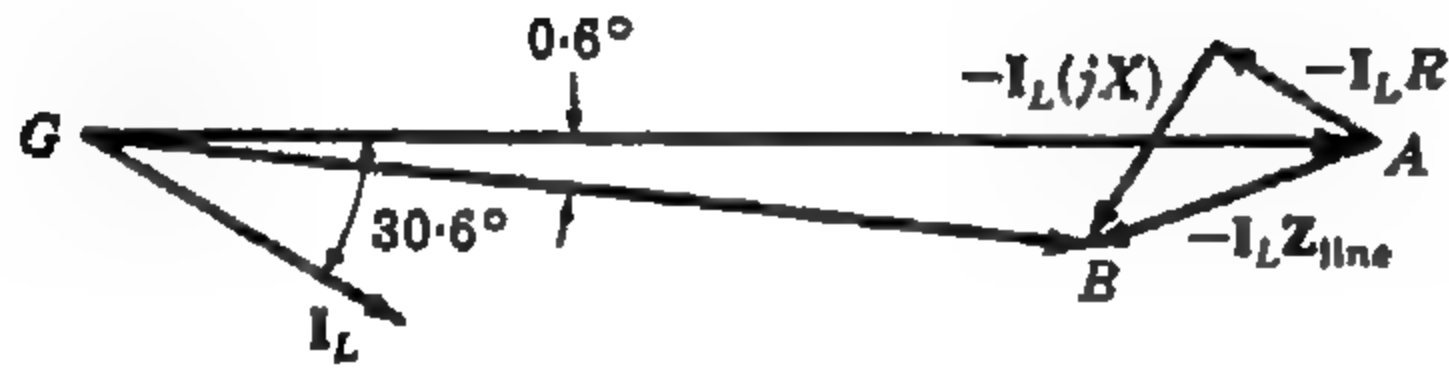
والتيار الكلي للفرع هو المجموع المطاور لتياري المحرك وحمل التسخين :

$$I_L = 15.25 \angle 31.7^\circ + 4.17 \angle 0^\circ = 18.9 \angle 25.1^\circ \text{ A}$$

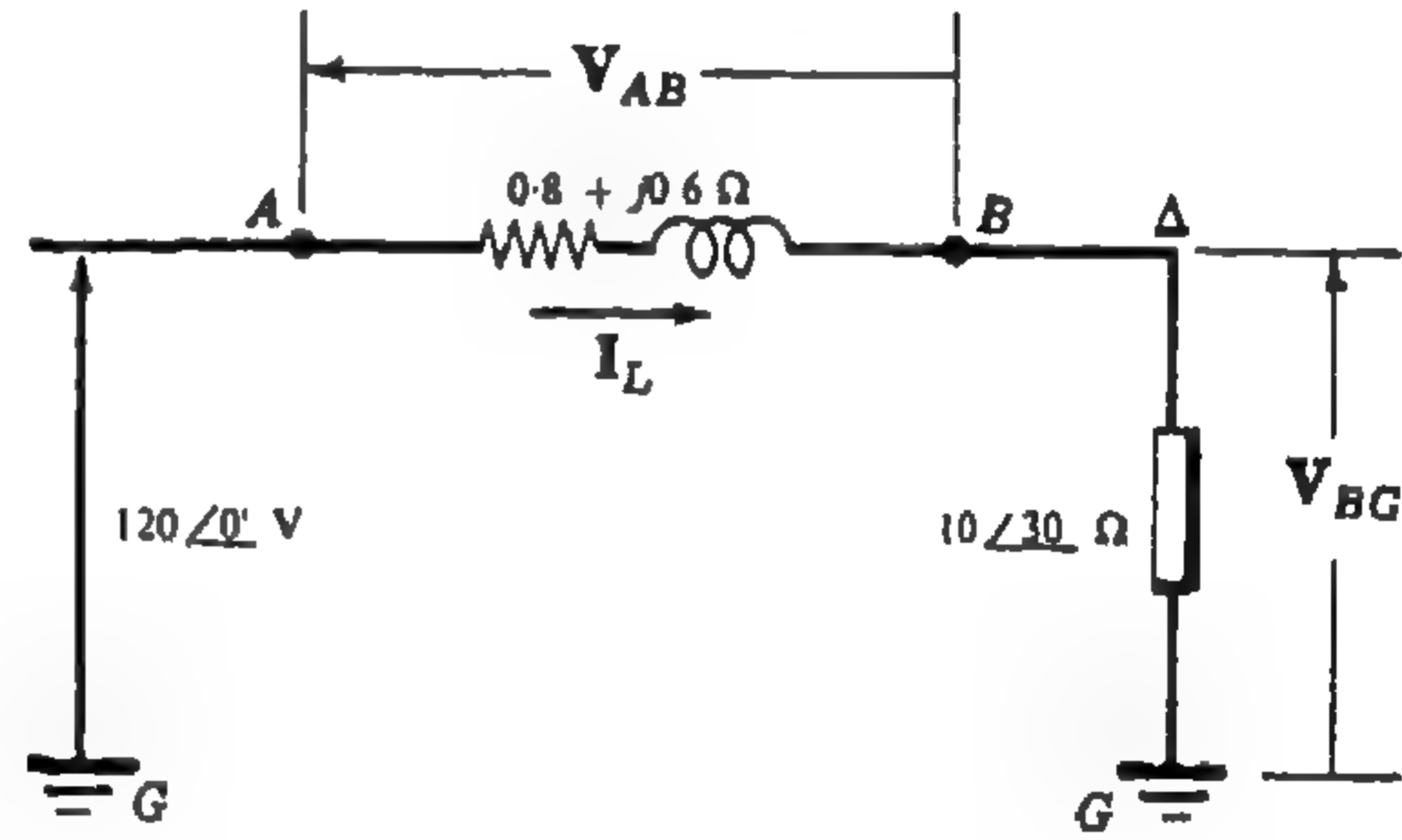
وعلى هذا فإن التيار في كل فرع هو 18.9 A لمعدل عطاء 5 hp من المحرك التأثيري .

شكل ١٤ - ٤٠

١٤ - ١٩ إذا وصلت ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منهما $30 \angle 30^\circ \Omega$ على شكل دلتا بنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 208 V وذلك عن طريق معاوقات قيمتها $0.8 + j0.6 \Omega$ فأوجد قيمة جهد الفرع عند كل حمل .



شكل ١٤ - ٤٢



شكل ١٤ - ٤١

الدائرة موضحة في الشكل ١٤ - ٤١ مع شكل نجمي ذي معاوقة مكافئة قدرها $\frac{1}{3} Z_\Delta$ أو $10 \angle 30^\circ \Omega$ ومعاوقة الفرع متصلة على التوالي مع الحمل ، أي أن

$$Z_{eq} = Z_{line} + Z_{load} = 0.8 + j0.6 + 8.66 + j5.0 = 9.46 + j5.6 = 11.0 \angle 30.6^\circ \Omega$$

إذن

$$I_L = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{11.0 \angle 30.6^\circ} = 10.9 \angle -30.6^\circ \text{ A}$$

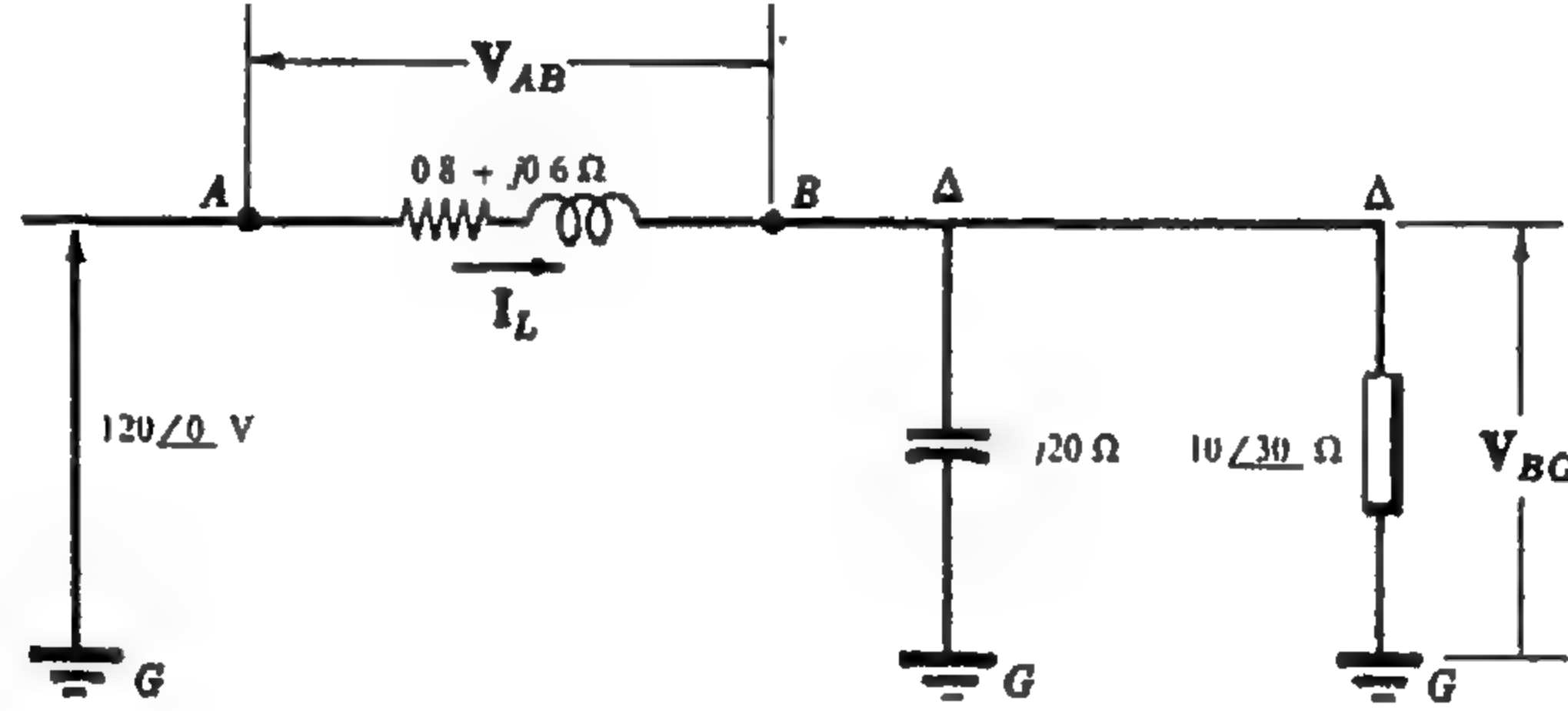
$$V_{BG} = I_L Z_{load} = 10.9 \angle -30.6^\circ (10 \angle 30^\circ) = 109 \angle -0.6^\circ \text{ V} \text{ وجهد الحمل هو}$$

$$V_L = \sqrt{3}(109) = 189 \text{ V} \text{ وجهد الفرع المطلوب هو}$$

وعلى ذلك فإن جهد النظام 208 V يهبط إلى 189 V على الحمل نتيجة لوجود معاوقة في الفرع .
الشكل ١٤ - ٤٢ يوضح الرسم المطاور وفيه المهبوط في جهد الفرع هو

$$V_{AG} = V_{AB} + V_{BG} \text{ و } V_{AB} = I_L Z_{line} = (10.9 \angle -30.6^\circ)(0.8 + j0.6) = 10.9 \angle 6.3^\circ \text{ V}$$

١٤ - ٢٠ أوجد في المسألة ١٤ - ١٩ جهد الفرع عند الحمل وذلك عند توصيل مجموعة من المكثفات بمانعاتها $60 \Omega -j$ على التوازي مع الاحمال .



شكل ١٤ - ٤٣

في دائرة الفرع الواحد المكافئة الموضحة في الشكل ١٤ - ٤٣ يتصل كل من $20 \Omega -j$ و $10 \angle 30^\circ \Omega$ على التوازي .

$$Z_p = \frac{10 \angle 30^\circ (-j20)}{(8.66 + j5) - j20} = 11.55 \angle 0^\circ \Omega$$

والمعاوقة Z_p متصلة على التوالي مع معاوقة الفرع . إذن

$$Z_{eq} = Z_{line} + Z_p = (0.8 + j0.6) + (11.55 \angle 0^\circ) = 12.35 \angle 2.78^\circ \Omega$$

والآن تيار الفرع هو

$$I_L = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{12.35 \angle 2.78^\circ} = 9.73 \angle -2.78^\circ \text{ A}$$

، الجهد على الحمل هو

$$V_{BG} = I_L Z_p = (9.73 \angle -2.78^\circ)(11.55 \angle 0^\circ) = 112 \angle -2.78^\circ \text{ V}$$

$$V_L = \sqrt{3}(112) = 194 \text{ volts}$$

وكما في الفصل السابع فإننا نلاحظ أن عامل القدرة قد تحسن بتوصيل مكثفات على التوازي مع الحمل وينتج عن هذا هبوط في الجهد على معاوقة الفرع . وعلى هذا فإنه في هذه المسألة يهبط جهد النظام من 208 V إلى 194 V بدلا من 189 V كما في المسألة ١٤ - ١٩ .

مسائل اضافية

٢١ - ١ وصلت ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها $10 \angle 53.1^\circ \Omega$ بالمتتابة CBA لنظام ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 240 V . أوجد تيارات الأفرع .

الجواب : $41.6 \angle 96.9^\circ \text{ A}$ ، $41.6 \angle -143.1^\circ \text{ A}$ ، $41.6 \angle -23.1^\circ \text{ A}$.

٢٢ - ١ وصلت ثلاثة معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها $15.9 \angle 70^\circ \Omega$ بالمتتابة CBA لنظام ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 100 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

الجواب : $10.9 \angle -160^\circ \text{ A}$ ، $10.9 \angle -40^\circ \text{ A}$ ، $10.9 \angle 80^\circ \text{ A}$; 646 W .

٢٣ - ١ وصلت ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها $42 \angle -35^\circ \Omega$ بالمتتابة ABC لنظام ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 350 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

الجواب : $14.4 \angle 125^\circ \text{ A}$ ، $14.4 \angle 5^\circ \text{ A}$ ، $14.4 \angle -115^\circ \text{ A}$ ، 7130 W .

٢٤ - ١ وصل حمل متزن على شكل النجمة معاوقاته $6 \angle 45^\circ \Omega$ بالمتتابة CBA لنظام ذى ثلاثة أطوار - أربعة أسلاك جهد 208 V . أوجد تيارات الأفرع بما فى ذلك تيار نقطة التعادل .

الجواب : $20 \angle -135^\circ \text{ A}$ ، $20 \angle -15^\circ \text{ A}$ ، $20 \angle 105^\circ \text{ A}$ و صفر

٢٥ - ١ وصل حمل متزن على شكل النجمة معاوقاته $65 \angle -20^\circ \Omega$ بالمتتابة CBA نظام ذو ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 480 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

الجواب : $4.26 \angle -70^\circ \text{ A}$ ، $4.26 \angle 50^\circ \text{ A}$ ، $4.26 \angle 170^\circ \text{ A}$; 3320 W .

٢٦ - ١ وصل محرك تأثيرى 50 hp وكفاءة تحميله الكلية 85% وعامل القدرة له 0.8 بنظام ذى ثلاثة أطوار وجهد 480 V . أوجد معاوقات النجمة المكافئة التى يمكن إبدال المحرك بها .

الجواب : $4.2 \angle 36.9^\circ \Omega$.

٢٧ - ١ وصل محرك تأثيرى 25 hp ذو ثلاثة أطوار كفاءة تحميله الكلية 82% وعامل القدرة له 0.75 بنظام جهد 208 V . أوجد معاوقات دلتا المكافئة التى يمكن إبدال المحرك بها ثم أوجد القراءتين اللتين تحصل عليهما باستخدام طريقة

جهازى واتميتر

الجواب : $4.28 \angle 41.4^\circ \Omega$; 5.58 kW ، 17.15 kW .

٢٨ - ١ وصلت ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها $9 \angle -30^\circ \Omega$ ، وكذلك ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل النجمة قيمة كل منها $5 \angle 45^\circ \Omega$ ، بالمتتابة ABC لنظام ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 480 V . أوجد قيمة الفرع والقدرة الكلية .

الجواب : 119.2 A و 99 kW .

٢٩ - ١ وصل حمل متزن على شكل دلتا معاوقاته $27 \angle -25^\circ \Omega$ وحمل آخر متزن على شكل نجمة ومعاوقاته $10 \angle -30^\circ \Omega$ بالمتتابة ABC لنظام ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 208 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة فى كل حمل .

الجواب : $25.3 \angle 117.4^\circ \text{ A}$ ، $25.3 \angle -2.6^\circ \text{ A}$ ، $25.3 \angle -122.6^\circ \text{ A}$; 4340 W و 3740 W .

١٤ - ٣٠ نظام ذو ثلاثة أطوار بجهد 100 V يغذى حمل متزن على شكل دلتا معاوقاته $\Omega \angle -36.9^\circ / 10$. وكذلك حمل متزن على شكل النجمة معاوقاته $\Omega \angle 51.1^\circ / 5$. أوجد القدرة في كل حمل وقيمة التيار الفرعى الكلى .

الجواب $2400\text{ W}, 1200\text{ W}; 20.8\text{ A}$

١٤ - ٣١ وصل حملين متزنين كل منهما على شكل دلتا ومعاوقتهما $\Omega \angle -60^\circ / 20$ و $\Omega \angle 45^\circ / 18$ على الترتيب بنظام ذى ثلاثة أطوار بجهد 150 V . أوجد القدرة في كل حمل . الجواب : 1690 W و 2650 W

١٤ - ٣٢ نظام ذو ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 173.2 V وصلت مجموعة CBA بثلاثة أحمال متزنة أشكال توصيلها ومعاوقاتها كما يلي : شكل نجمة معاوقاته $\Omega \angle 0^\circ / 10$ وشكل دلتا معاوقاته $\Omega \angle 90^\circ / 24$ وشكل دلتا ثالث معاوقاته مجهولة . أوجد هذه المعاوقة علماً بأن تيار الفرع A هو $\text{A} \angle -138.1^\circ / 32.7$ وذلك بفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الحمل . الجواب : $\Omega \angle 45^\circ / 18$

١٤ - ٣٣ إذا كانت قراءتى جهازى واتميتر المتصلين في الفرعين A و B لنظام CBA جهده 120 V هما 1500 W و 500 W على الترتيب . فأوجد معاوقة الحمل المتزن الذى على شكل دلتا الجواب : $\Omega \angle -41^\circ / 16.3$

١٤ - ٣٤ إذا كانت قراءتى جهازى واتميتر المتصلين في الفرعين A و B لنظام ABC جهده 173.2 V هما 301 W - و $1327\text{ W} +$ على الترتيب . فأوجد معاوقة الحمل المتزن ذى شكل نجمة . الجواب : $\Omega \angle -70^\circ / 10$

١٤ - ٣٥ أوجد قراءتى جهازى الواتميتر المستخدمين في نظام ذى ثلاثة أسلاك وجهد 240 V ويؤثر على حمل متزن على شكل دلتا معاوقاته $\Omega \angle 80^\circ / 20$ الجواب : 3210 W و $1710\text{ W} -$

١٤ - ٣٦ وصل جهازا واتميتر في الفرعين B و C للنظام CBA - ثلاثة أسلاك وجهد 173.2 V الذى يؤثر على حمل متزن . أوجد قراءتى الجهازين علماً بأن تيار الفرع دو $\text{A} \angle -41.9^\circ / 32.7 = I_A$ الجواب : 5370 W و 1170 W

١٤ - ٣٧ يغذى النظام CBA الذى جهده 100 V حمل متزن ومتصل فيه جهازا واتميتر في الفرعين A و B فإذا كان $\text{A} \angle -40^\circ / 10.9 = I_B$ هو تيار الفرع B فأوجد قراءتى الواتميتر . الجواب : 835 W . $189\text{ W} -$

١٤ - ٣٨ وصل حمل على شكل دلتا معاوقاته $\text{ohms} \angle 30^\circ / 10 = Z_{AB}$ و $\text{ohms} \angle 0^\circ / 25 = Z_{BC}$ و $\text{ohms} \angle -30^\circ / 20 = Z_{CA}$ بالنظام ABC ذى الثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 500 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

الجواب : $75 \angle 90^\circ\text{ A}, 53.9 \angle -68.2^\circ\text{ A}, 32 \angle 231.3^\circ\text{ A}; 42.4\text{ kW}$

١٤ - ٣٩ يتغذى حمل على شكل دلتا معاوقاته $\text{ohms} \angle 0^\circ / 5 = Z_{AB}$ و $\text{ohms} \angle 30^\circ / 4 = Z_{BC}$ من النظام ABC ذى الثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 208 V .

أوجد تيارات الأفرع وقراءتى جهازى الواتميتر في الفرعين A و C .

الجواب : $70.5 \angle 99.65^\circ\text{ A}, 90.5 \angle -43.3^\circ\text{ A}, 54.6 \angle 187.9^\circ\text{ A}; 13.7\text{ kW}, 11.25\text{ kW}$

١٤ - ٤٠ يتغذى حمل على شكل النجمة معاوقاته $\text{ohms} \angle 0^\circ / 3 = Z_A$ و $\text{ohms} \angle 0^\circ / 2 = Z_B$ و $\text{ohms} \angle 0^\circ / 2 = Z_C$ من النظام CBA ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 100 V . أوجد تيارات الأفرع بما في ذلك تيار الفرع المتعادل بفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الحمل .

الجواب : $19.25 \angle -90^\circ\text{ A}, 16 \angle -26.3^\circ\text{ A}, 25.8 \angle 176.6^\circ\text{ A}, 27.3 \angle 65.3^\circ\text{ A}$

١٤ - ٤١ حمل على شكل النجمة ومعاوقات $Z_A = 12 \angle 45^\circ \text{ ohms}$ و $Z_B = 10 \angle 30^\circ \text{ ohms}$ و $Z_C = 8 \angle 0^\circ \text{ ohms}$ متصل بنظام جهده 208 V وبه أربعة أسلاك . أوجد القدرة الكلية .

الجواب : 3898 W

١٤ - ٤٢ إذا كانت تيارات الأفرع في النظام ABC ذي الثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 220 V هي

$$I_A = 43.5 \angle 116.6^\circ \text{ A} \quad ; \quad I_B = 43.3 \angle -48^\circ \text{ A} \quad \text{و} \quad I_C = 11.39 \angle 218^\circ \text{ A} \quad \text{فأوجد قراءتي جهازى}$$

الواتميتر في الأفرع (أ) A و B ، (ب) B و C ، (ج) A و C .

الجواب : (أ) 6370 W و 5270 W ، (ب) 2330 W و 9310 W ، (ج) 1980 W ، 9550 W

١٤ - ٤٣ إذا كانت تيارات الأفرع في النظام ABC ذي الثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 440 V هي

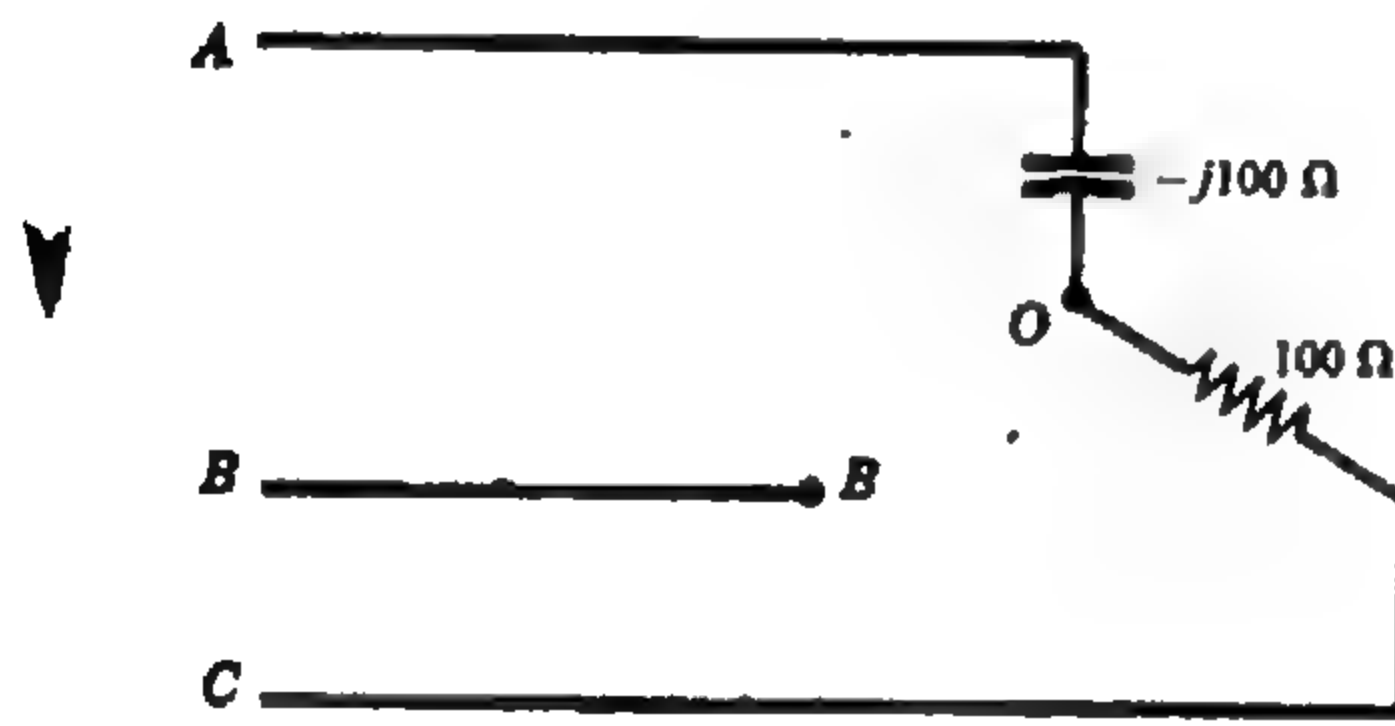
$$I_A = 19.72 \angle 90^\circ \text{ A} \quad \text{و} \quad I_B = 57.3 \angle -9.9^\circ \text{ A} \quad \text{و} \quad I_C = 57.3 \angle 189.9^\circ \text{ A} \quad \text{فأوجد قراءتي جهازى}$$

الواتميتر في الفرعين (أ) A و B ، (ب) B و C .

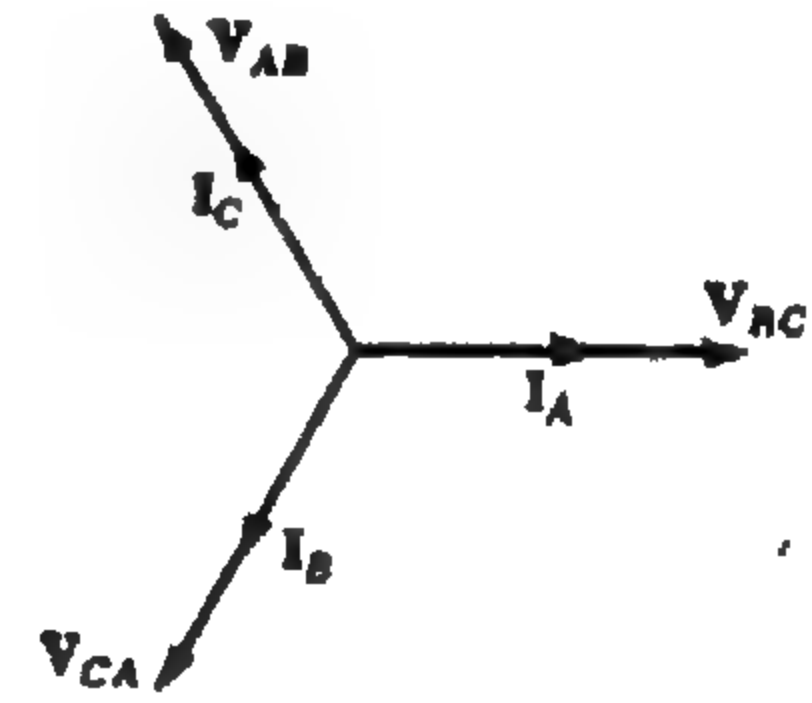
الجواب (أ) : 7.52 kW و 24.8 kW (ب) 16.15 kW و 16.15 kW

١٤ - ٤٤ يوضح الشكل المطاور ١٤ - ٤٤ تيارات الأفرع وجهود الأفرع بالنسبة لبعضها وذلك للنظام ABC ذي الثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 346 V . فإذا كان تيار الفرع يساوى 10 A . فأوجد معاوقة الحمل الذى على شكل النجمة والمتصل بهذا النظام .

الجواب : $20 \angle 90^\circ \Omega$



شكل ١٤ - ٤٥



شكل ١٤ - ٤٦

١٤ - ٤٥ توضع دائرة الشكل ١٤ - ٤٥ وجود معاوقة لانهاية (دائرة مفتوحة) متصلة في الطور B للحمل الذى على شكل نجمة . أوجد الجهد المطاور V_{OB} علماً بأن جهد النظام ABC هو 208 V الجواب : $284 \angle 150^\circ \text{ V}$

١٤ - ٤٦ حمل على شكل نجمة متصل بنظام ذي ثلاثة أطوار جهده المطاور 400 V فإذا كان الحد الأقصى للتيار في كل ملف هو 35 A ، (أ) فاهو معدل القدرة kVA لهذه الآلة ؟ (ب) إذا كان النظام يمد الأفرع بتيار 20 A بعامل قدرة 0.65 فاهي kVA لكل طور في الآلة ؟ . الجواب : 26.6 kVA و 5.08 kVA

١٤ - ٤٧ إذا كانت قيمة التيار في مجموع التيارات المتزنة في الشكل المطاور ١٤ - ٤٦ هي 10 A وجهد الفرع هو 120 V . فأوجد القدرة الكلية والقدرة الظاهرية VA المناظرتين .

الجواب : 1.47 kW و 2.08 kVA

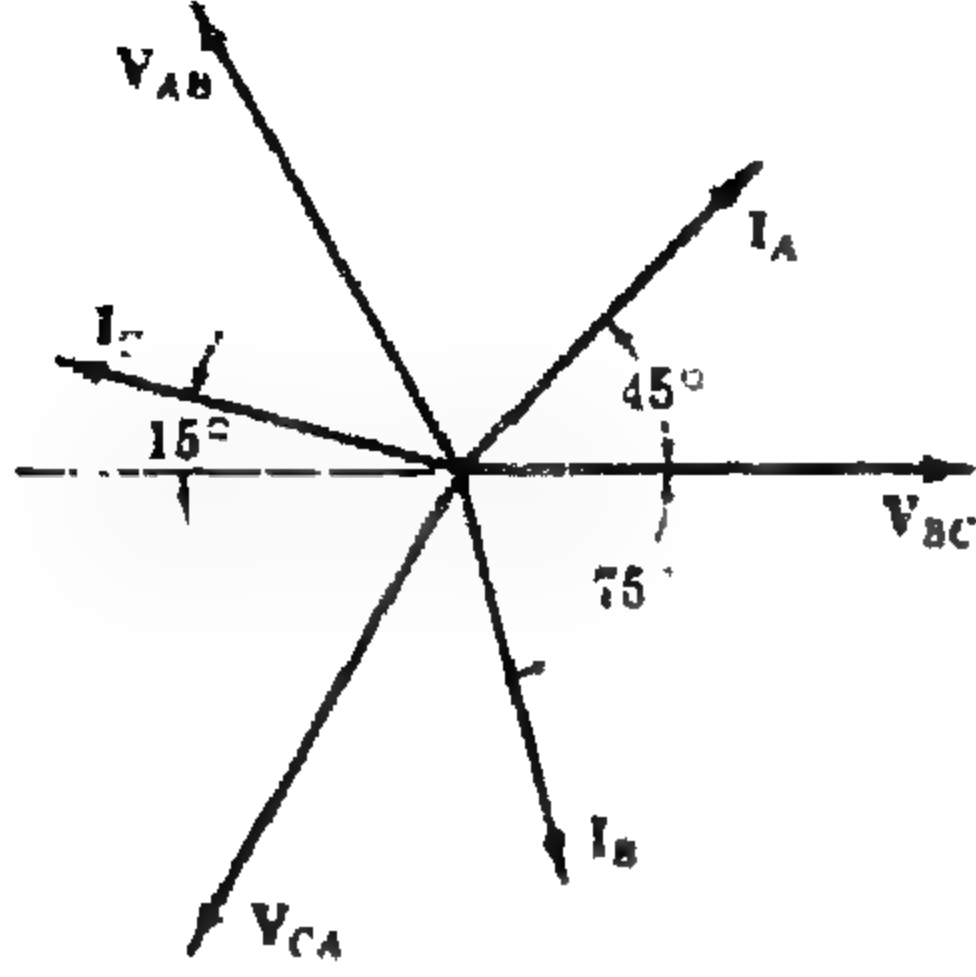
١٤ - ٤٨ وصل حمل على شكل نجمة معاوقاته $Z_A = 10 \angle 0^\circ \text{ ohms}$

و $Z_B = 10 \angle 60^\circ \text{ ohms}$ و $Z_C = 10 \angle -60^\circ \text{ ohms}$

بنظام ABC ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 200 V ،

أوجد الجهود عبر معاوقات الحمل V_{AO} و V_{BO} و V_{CO}

الجواب : $173 \angle 90^\circ \text{ V}$, $100 \angle 0^\circ \text{ V}$, $100 \angle 180^\circ \text{ V}$



١٤ - ٤٩ وصل حمل على شكل النجمة معاوقاته $Z_A = 10 \angle -60^\circ \text{ ohms}$

و $Z_B = 10 \angle 0^\circ \text{ ohms}$ و $Z_C = 10 \angle 60^\circ \text{ ohms}$

بنظام CBA ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 208 V

أوجد الجهود عبر معاوقات الحمل .

الجواب : $208 \angle -120^\circ \text{ V}$, 0 , $208 \angle 180^\circ \text{ V}$

شكل ١٤ - ٤٦

١٤ - ٥٠ يغذى نظام ABC ذو ثلاثة أسلاك وجهد 480 V حمل على شكل نجمة معاوقاته $Z_A = 10 \angle 0^\circ \Omega$

و $Z_B = 5 \angle -30^\circ \Omega$ و $Z_C = 5 \angle 30^\circ \Omega$ أوجد قراءتي الواتميتر في الفرعين A و B .

الجواب : 8.92 kW و 29.6 kW

١٤ - ٥١ يغذى نظام CBA ذو ثلاثة أسلاك وجهد 100 V حمل على شكل نجمة معاوقاته $Z_A = 3 + j0 \text{ ohms}$

و $Z_B = 2 + j3 \text{ ohms}$ و $Z_C = 2 - j1 \text{ ohms}$ أوجد الجهود عبر معاوقات الحمل .

الجواب : $31.6 \angle -67.9^\circ \text{ V}$, $84.3 \angle 42.7^\circ \text{ V}$, $68.6 \angle 123.8^\circ \text{ V}$

١٤ - ٥٢ يتصل نظام ذو ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 240 V بثلاث معاوقات متساوية على شكل نجمة قيمة كل منها

$15 \angle 60^\circ \Omega$ فإذا كانت معاوقة كل فرع بين المصدر والحمل هي $2 + j1 \Omega$ فأوجد قيمة جهد الفرع عند الحمل .

الجواب : 213 V

١٤ - ٥٣ كرر المسألة ١٤ - ٥٢ مع اعتبار أن معاوقات الحمل نجمة الشكل قيمة كل منها $15 \angle -60^\circ \Omega$ ثم قارن بين

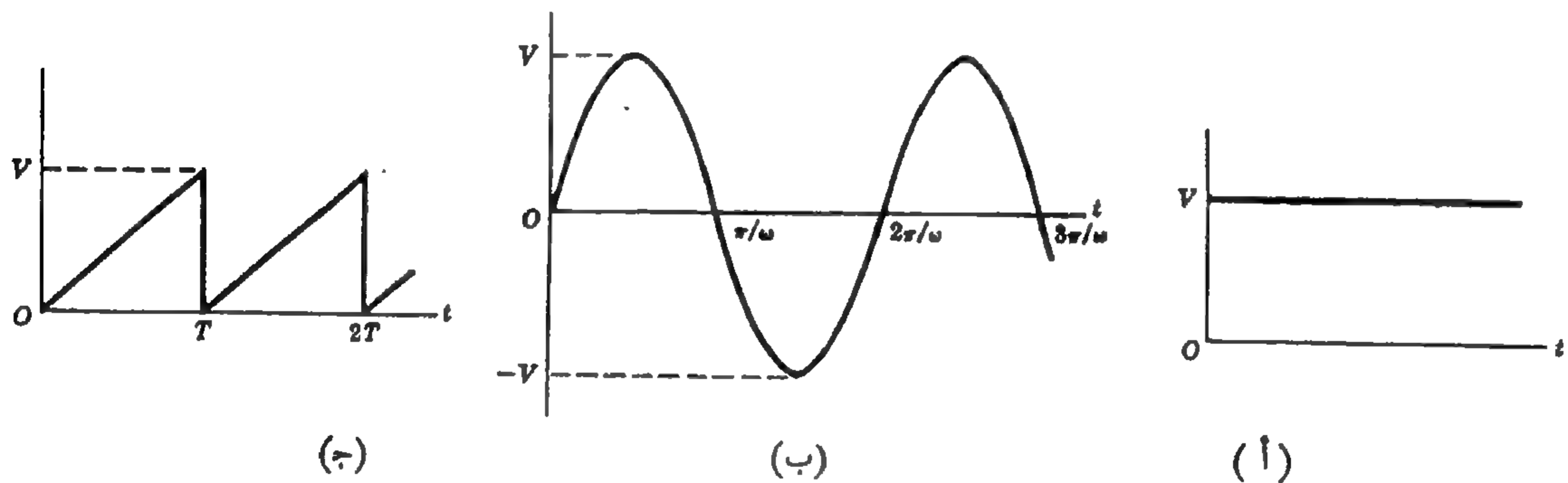
النتيجتين برسم الأشكال المطاوعة للجهود . الجواب : 235 V

الفصل الخامس عشر

طريقة فوريير لتحليل الشكل الموجي

مقدمة :

اعتبرنا في الدوائر التي سبقت دراستها حالة الاستجابة المستقرة الناتجة عن إثارة لها شكل ثابت أو شكل جيبي . وفي مثل هذه الحالات يطبق تعبير واحد للدوال المؤثرة عند جميع قيم الزمن ، مثال ذلك : لدينا المعادلة ، ثابت $v = V_{\max} \sin \omega t$ ، في حالة التيار المستمر $v = V_{\max} \sin \omega t$ في حالة التيار المتردد وذلك لجميع قيم t كما في الشكل ١٥-١ (أ) ، (ب) .



شكل ١٥ - ١

في الشكل ١٥-١ (ج) الشكل الموجي الدوري المسمى بمن المنشار وهو مثال لذلك النوع الموجي الذي يمكن وصفه بدالة وحيدة في فترة ما . وعلى ذلك فإن سن المنشار يعبر عنه بالدالة $f(t) = (V/T)t$ في الفترة الزمنية $0 < t < T$ وبالدالة $f(t) = (V/T)(t - T)$ في الفترة الزمنية $T < t < 2T$. وبالرغم من أن هذه المعادلات تصف الشكل الموجي بطريقة مرضية تدريجياً فإنها لا تسمح بتعيين استجابة الدائرة . والآن إذا أمكن التعبير عن الدالة الدورية بمجموع محدود أو غير محدود لدوال جيبيية ، فإنه يمكن تعيين استجابات الشبكات الكهربائية الخطية لإثارة جيبيية وذلك بتطبيق نظرية التراكب . وطريقة فوريير تعطينا حل مثل هذه المسائل .

متسلسلة فوريير المثلثية :

أي شكل موجي دوري يحقق المعادلة $f(t) = f(t + T)$ يمكن التعبير عنه بمتسلسلة فوريير طالما أن :

(١) إذا كان الشكل الموجي غير متصل فإن عدد الانقطاعات في الزمن الدوري T محدود .

(٢) له قيمة متوسطة محدودة في الزمن الدوري T .

(٣) له عدد محدود من القيم العظمى الموجبة والسالبة .

عندما تتحقق هذه الشروط المسماة بشروط دريشليت فإن متسلسلة فوريير تكون موجودة ويمكن كتابتها على الشكل المثلي .

$$(1) \quad f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots \\ + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots$$

وتعين معاملات فوريير a و b لشكل موجي معطى عن طريق حساب التكاملات . ونحصل على معامل جيب التمام في التكامل بضرب طرفي المعادلة (١) في $\cos n\omega t$ ثم إجراء التكامل على زمن دورى كامل . والزمن الدورى الأساسى $2\pi/\omega$ هو زمن المتسلسلة الدورى حيث أن كل حد في المتسلسلة له تردد عبارة عن مضاعفات صحيحة للتردد الأساسى .

$$(2) \quad \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t dt = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2}a_0 \cos n\omega t dt + \int_0^{2\pi/\omega} a_1 \cos \omega t \cos n\omega t dt + \dots \\ + \int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^2 n\omega t dt + \dots + \int_0^{2\pi/\omega} b_1 \sin \omega t \cos n\omega t dt \\ + \int_0^{2\pi/\omega} b_2 \sin 2\omega t \cos n\omega t dt + \dots$$

وجميع التكاملات المحدودة التى في الطرف الأيمن في المعادلة (٢) تساوى صفراً ما عدا الذى قيمته $\frac{\pi}{\omega} a_n$ إذن

$$(3) \quad a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$$

ونحصل على معاملات الجيب في التكامل بضرب طرفي المعادلة (١) في $\sin n\omega t$ ثم التكامل كما سبق .

$$(4) \quad b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

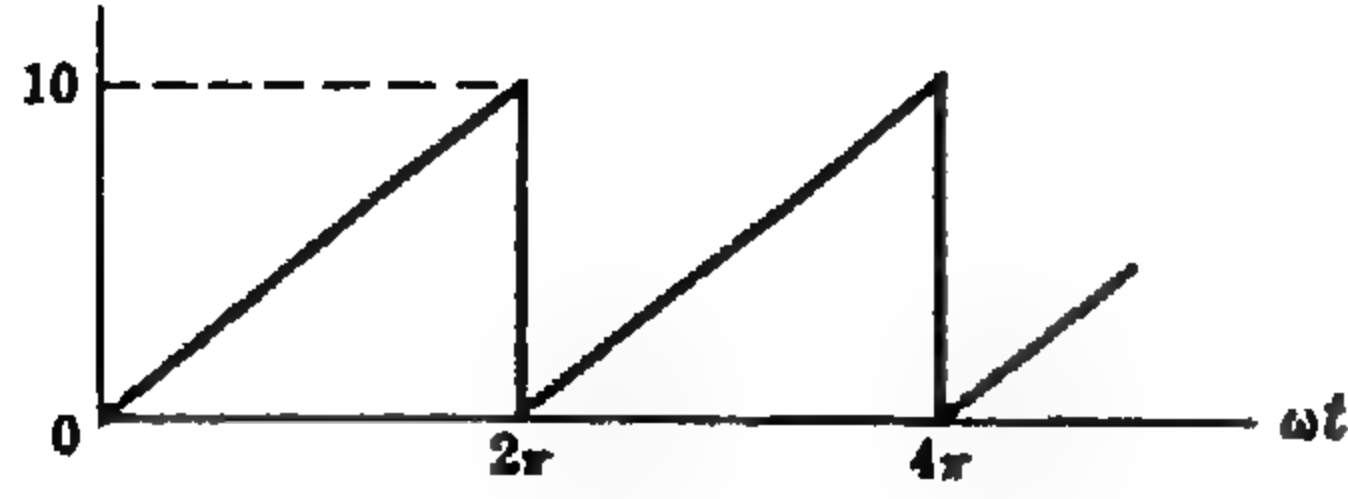
وهناك شكل آخر للتكاملات المحسوبة والتي لها متغير ωt يناظر دورة 2π radians وهو

$$(5) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n\omega t d(\omega t)$$

$$(6) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

ويجب أن تحتوى حدود التكامل على دورة كاملة وليس من الضروري أن تكون من 0 إلى T أو من 0 إلى 2π . وعلى ذلك فإنه يمكن إجراء التكامل من $-T/2$ إلى $T/2$ أو من $-\pi$ إلى $+\pi$ أو على دورة كاملة تبسط التكامل . ونحصل على الثابت a_0 من المعادلة (٣) أو المعادلة (٥) بوضع $n=0$ ، وحيث أن $\frac{1}{2}a_0$ هو القيمة المتوسطة للدالة فإنه يمكن تعيينها عادة بفحص الشكل الموجي . ومتسلسلة المعاملات التى حصلنا عليها من حساب التكاملات تتقارب بانتظام إلى شكل الدالة عند جميع النقط المتصلة وتتقارب إلى القيمة المتوسطة عند النقط غير المتصلة .

مثال ١ :



شكل ١٥ - ٢

أوجد متسلسلة فوريير الشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥ - ٢ .
الشكل الموجي متصل في الفترة $0 < \omega t < 2\pi$ ويعطى بالمعادلة $f(t) = (10/2\pi)\omega t$ ، وهي غير متصلة عند $\omega t = n2\pi$ حيث $n = 0, 1, 2, \dots$. إن شروط دريشايت متحققة وعلى ذلك فإن معاملات فوريير يمكن حسابها باستخدام المعادلتين (٥) و (٦) وبالفحص نجد أن القيمة المتوسطة للدالة هي 5 وعلى ذلك فإن $1/2 a_0 = 5$. والآن باستخدام المعادلة (٥) نجد أن

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi}\right) \omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2} \left[\frac{\omega t}{n} \sin n\omega t + \frac{1}{n^2} \cos n\omega t \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{10}{2\pi^2 n^2} (\cos n2\pi - \cos 0) = 0 \end{aligned}$$

وذلك لجميع قيم n الصحيحة .

وعلى هذا فإن المتسلسلة لا تحتوي على حدود جيب تمام . وباستخدام المعادلة (٦) نحصل على

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi}\right) \omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2} \left[-\frac{\omega t}{n} \cos n\omega t + \frac{1}{n^2} \sin n\omega t \right]_0^{2\pi} = -\frac{10}{\pi n}$$

وباستخدام معاملات حدود الجيب والحد المتوسط فإن المتسلسلة هي

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin \omega t - \frac{10}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots = 5 - \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}$$

يمكن تجميع حدود الجيب والجيب تمام التي لها نفس التردد في حد جيبى أو حد جيب تمام له زاوية طور . وينتج لدينا شكلان آخران للمتسلسلة :

$$(٧) \quad f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum c_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

$$(٨) \quad f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum c_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

حيث $\theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$ ، $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ و $\varphi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$ في المعادلتين (٧) و (٨) هما سعة التردد وزاوية طور التردد (θ_n أو φ_n) .

متسلسلة فوريير الأسية :

إذا عبرنا عن كل حد من حدود الجيب تمام في المتسلسلة ذات النسب المثلثية بقيمته الأسية المكافئة ينتج متسلسلة حدودها أسية على الشكل .

$$\begin{aligned} (٩) \quad f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) + a_2 \left(\frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} \right) + \dots \\ &+ b_1 \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) + b_2 \left(\frac{e^{j2\omega t} - e^{-j2\omega t}}{2j} \right) + \dots \end{aligned}$$

وبإعادة ترتيب الحدود

$$(10) \quad f(t) = \dots + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{b_2}{2j}\right) e^{-j2\omega t} + \left(\frac{a_1}{2} - \frac{b_1}{2j}\right) e^{-j\omega t} \\ + \frac{a_0}{2} + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{2j}\right) e^{j\omega t} + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2j}\right) e^{j2\omega t} + \dots$$

ونعرف الآن الثابت المركب A بالمعادلات

$$(11) \quad A_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad A_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (١٠) على الصورة

$$(12) \quad f(t) = \{\dots + A_{-2}e^{-j2\omega t} + A_{-1}e^{-j\omega t} + A_0 + A_1e^{j\omega t} + A_2e^{j2\omega t} + \dots\}$$

ولإجراء التكامل للحصول على معاملات A_n فإننا نضرب طرفي المعادلة (١٢) في $e^{-jn\omega t}$ ثم نكامل على دورة كاملة :

$$(13) \quad \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\omega t} d(\omega t) = \dots + \int_0^{2\pi} A_{-2} e^{-j2\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{2\pi} A_{-1} e^{-j\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) \\ + \int_0^{2\pi} A_0 e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{2\pi} A_1 e^{j\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \dots \\ + \int_0^{2\pi} A_n e^{jn\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \dots$$

وجميع التكاملات التي في الطرف الأيمن في المعادلة (١٣) تساوى صفراً ما عدا $\int_0^{2\pi} A_n d(\omega t)$ الذي قيمته $2\pi A_n$ إذن

$$(14) \quad A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\omega t} d(\omega t)$$

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad \text{أو مع اعتبار } t \text{ كمتغير}$$

وكما في حساب التكاملات للحصول على a_n و b_n ، فإن حدود التكامل في المعادلة (١٤) يجب أن تغطي أي دورة كاملة تسهل عملية التكامل ولا يشترط أن تكون من 0 إلى 2π أو من 0 إلى T .

يمكن اشتقاق معاملات المتسلسلة ذات النسب المثلثية من معاملات المتسلسلة كما يلي :

أولا نضيف ثم نطرح التعبيرات الدالة على A_n و A_{-n} من المعادلة (١١) . إذن

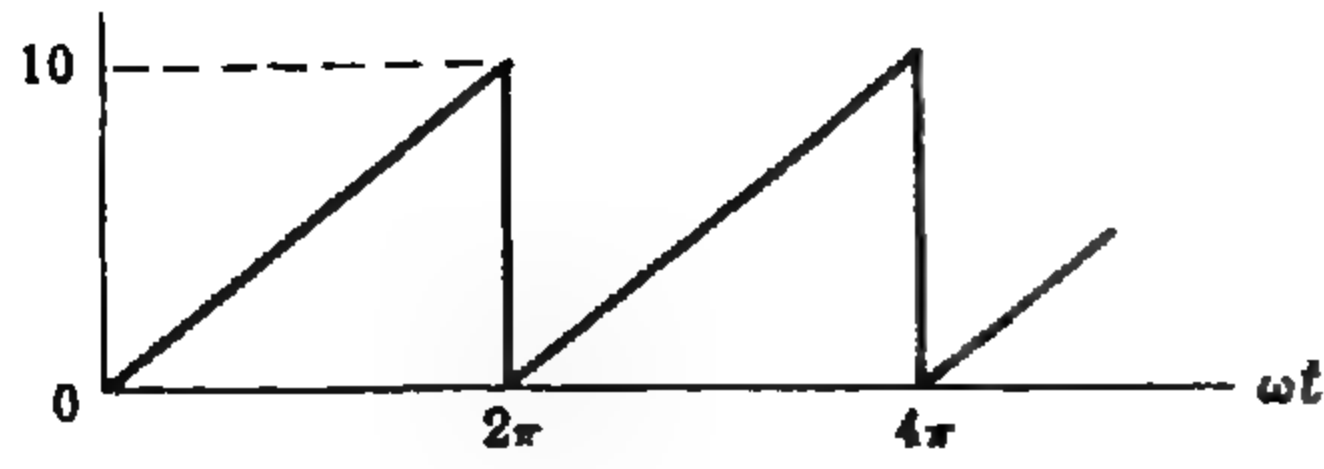
$$A_n + A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n + a_n + jb_n)$$

$$(15) \quad a_n = A_n + A_{-n} \quad \text{ومنها نجد أن}$$

$$A_n - A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n - a_n - jb_n) \quad \text{و}$$

$$(16) \quad b_n = j(A_n - A_{-n}) \quad \text{أو}$$

مثال ٢ :



شكل ١٥ — ٣

أوجد متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٣. استخدم معاملات هذه المتسلسلة الأسية لتحصل على a_n ، b_n للمتسلسلة ذات النسب المثلثية ثم قارن بالمثال ١. تعطى الدالة في الفترة $0 < \omega t < 2\pi$ بالمعادلة $f(t) = (10/2\pi)\omega t$. وبالفحص نلاحظ أن القيمة المتوسطة للدالة هي 5. وبالتعويض عن $f(t)$ في المعادلة (١٤) نحصل على المعاملات A_n .

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi}\right) \omega t e^{-jn\omega t} d(\omega t) = \frac{10}{(2\pi)^2} \left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2} (-jn\omega t - 1) \right]_0^{2\pi} = j \frac{10}{2\pi n}$$

وبادخال المعاملات A_n في المعادلة (١٢)، تكون متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي المعطى هي

$$(١٧) \quad f(t) = \dots - j \frac{10}{4\pi} e^{-j2\omega t} - j \frac{10}{2\pi} e^{-j\omega t} + 5 + j \frac{10}{2\pi} e^{j\omega t} + j \frac{10}{4\pi} e^{j2\omega t} + \dots$$

معاملات حدود الجيب تمام في المتسلسلة المثلثية هي

$$a_n = A_n + A_{-n} = j \frac{10}{2\pi n} + j \frac{10}{2\pi(-n)} = 0$$

ومعاملات حدود الجيب هي

$$b_n = j(A_n - A_{-n}) = j \left(j \frac{10}{2\pi n} - j \frac{10}{2\pi(-n)} \right) = -\frac{10}{\pi n}$$

وعلى ذلك فإن المتسلسلة ذات النسب المثلثية لا تحتوي على حدود جيب تمام لأن $a_n = 0$ لجميع قيم n ومعاملات الحد الجيبى هي $10/(\pi n)$. والقيمة المتوسطة هي 5 والمتسلسلة هي

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin \omega t - \frac{10}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots$$

وهي كما في المثال ١.

تمائل الشكل الموجي :

تحتوى المتسلسلة التي حصلنا عليها في المثال ١ على حدود جيبيية بالإضافة إلى حد ثابت. وهناك أشكال موجية تحتوي فقط على حدود جيب تمام، وفي بعض الأحيان تحتوي المتسلسلة على ترددات فردية سواء كانت تحتوي المتسلسلة على حدود جيبيية أو جيب تمامية أو الإثنين معاً. وهذا نتيجة لبعض أنواع التماثل الذي يتبع الشكل الموجي. وبمعرفة هذا التماثل فإنه يمكن اختصار الحسابات اللازمة لتحديد المتسلسلة. ولهذا الغرض فإنه من المهم كتابة التعريفات التالية :

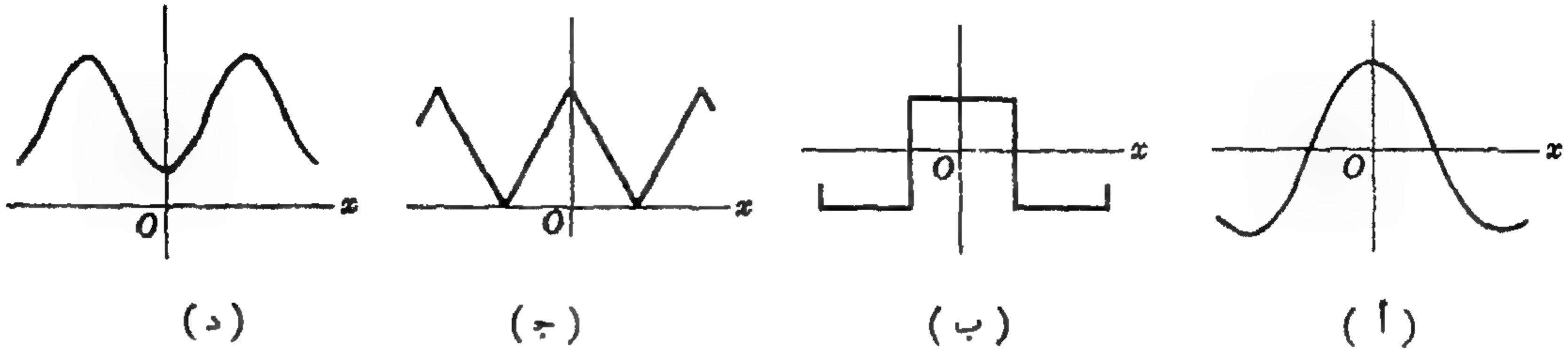
١ - يقال إن الدالة $f(x)$ زوجية إذا كان $f(x) = f(-x)$.

الدالة $f(x) = 2 + x^2 + x^4$ هي مثال الدوال الزوجية وذلك لتساوى قيم الدالة عند x و $-x$. الجيب تمام دالة زوجية حيث يمكن التعبير عنها بمتسلسلة على الشكل.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

مجموع دالتين زوجيتين أو أكثر هو دالة زوجية ، وبإضافة حد ثابت فإن زوجية الدالة لا تزال قائمة .

يوضح الشكل ١٥-٤ أشكال موجية لدوال زوجية وهي متماثلة بالنسبة للمحور الرأسى .



شكل ١٥ - ٤

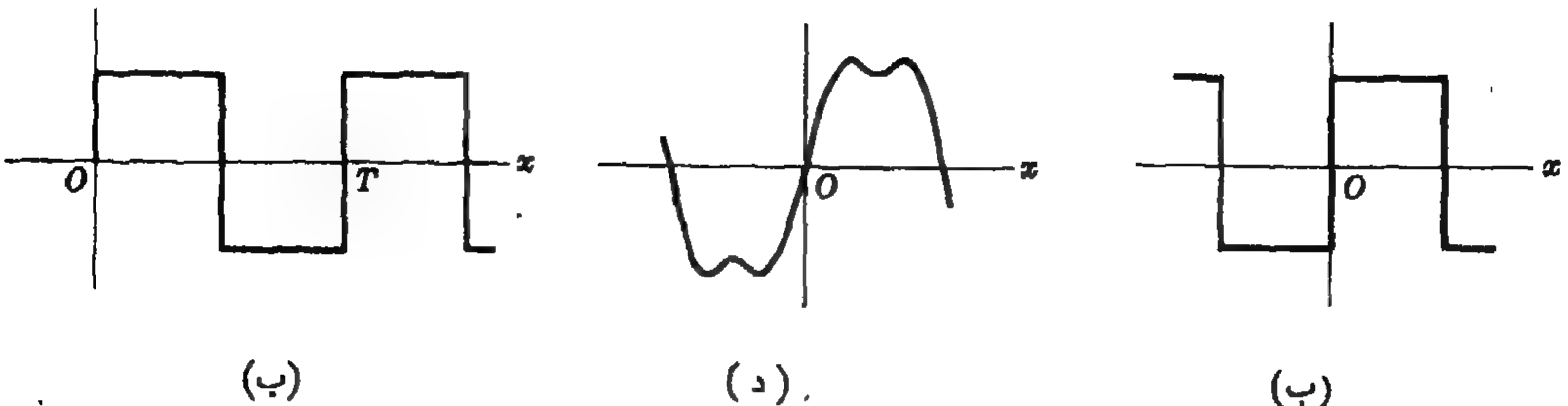
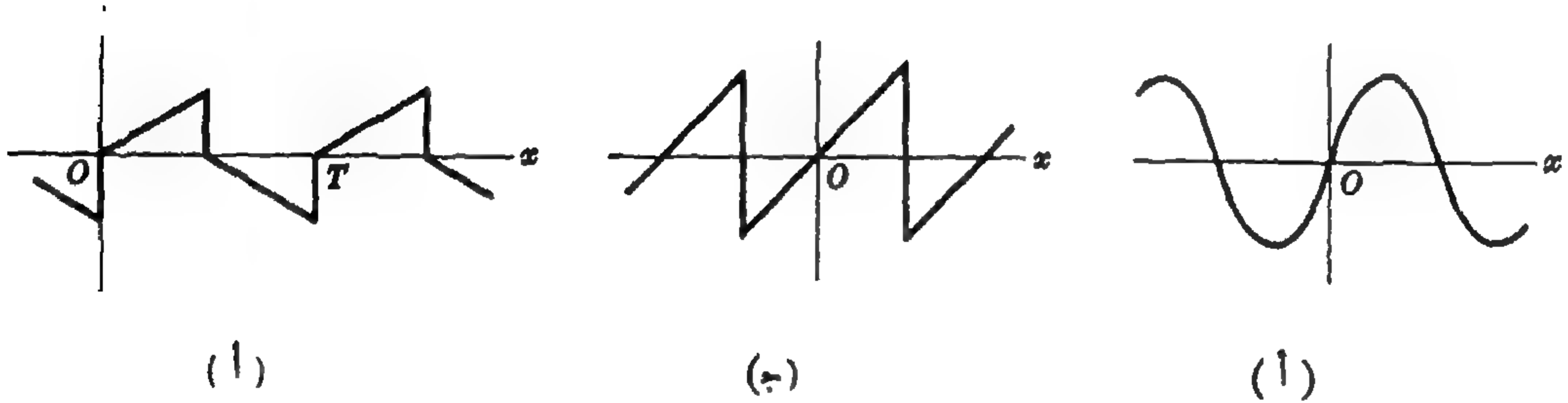
٢ - يقال إن الدالة $f(x)$ فردية إذا كان $f(x) = -f(-x)$.

الدالة $f(x) = x + x^3 - x^5$ هي مثال للدوال الفردية وذلك لأن قيم الدالة عند x ، $-x$ لها إشارات معاكسة .
والجيب دالة فردية حيث يمكن التعبير عنه على الشكل

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

مجموع دالتين فرديتين أو أكثر هو دالة فردية ، ولكن إضافة حد ثابت يزيل فردية الدالة حيث $f(x)$ لا تغل مساوية $-f(-x)$. إن حاصل ضرب دالتين فرديتين هو دالة زوجية .

يمثل الشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٥ دوال فردية .

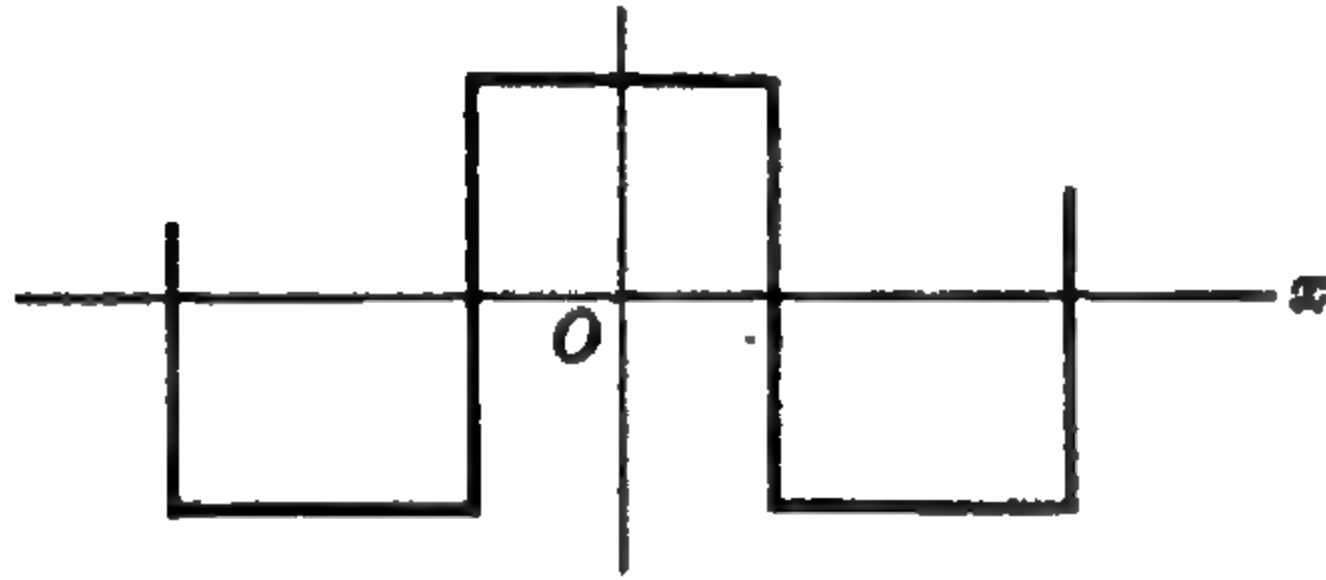


شكل ١٥ - ٦

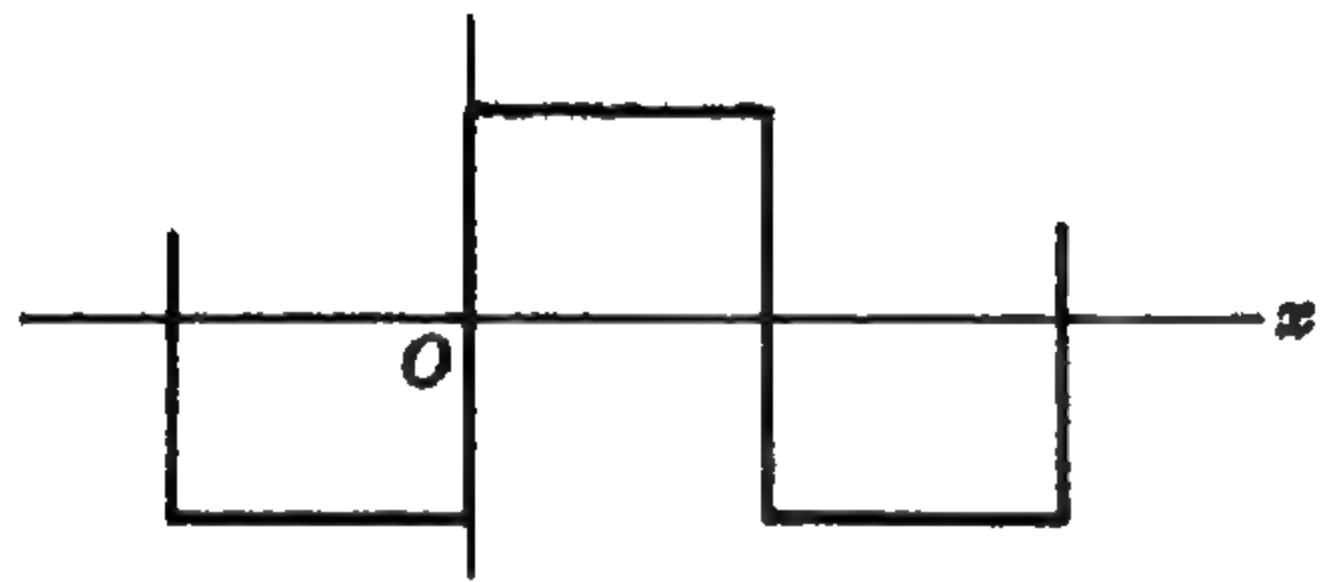
شكل ١٥ - ٥

٣- يقال إن الدالة الدورية $f(x)$ لها تماثل نصف موجي إذا كان $f(x) = -f(x + T/2)$ حيث T هو زمن الدورة . يوضح الشكل ١٥ - ٦ شكلين موجيين لهما تماثل نصف موجي . وبمعرفة نوع تماثل الشكل الموجي يمكن الوصول إلى الاستنتاجات التالية :

إذا كان الشكل الموجي زوجياً فإن جميع حدود المتسلسلة المناظرة له هي حدود جيوب تمام مع احتمال وجود ثابت إذا كان للشكل الموجي قيمة متوسطة . وعلى ذلك فإننا لا نحتاج إلى حساب قيمة التكامل للحصول على المعاملات b_n حيث لا يوجد حدود جيبية . وإذا كان فردياً فإن المتسلسلة تحتوى على حدود جيبية فقط . والدالة يمكن أن تكون فردية فقط بعد حذف الثابت ، وفي هذه الحالة فإن متسلسلة فوريير المناظرة لها تحتوى على هذا الثابت بالإضافة إلى متسلسلة من الحدود الجيبية . إذا كان الشكل الموجي تماثل نصف موجي فإنه يوجد في المتسلسلة ترددات فردية فقط . وهذه المتسلسلة تحتوى على حدود جيبية وجيب تمامية ما لم تكن الدالة فردية أو زوجية . وفي أي حالة فإن كلا من a_n و b_n يساوى صفراً عندما $n = 2, 4, 6, \dots$ وذلك لأي شكل موجي له تماثل نصف موجي .



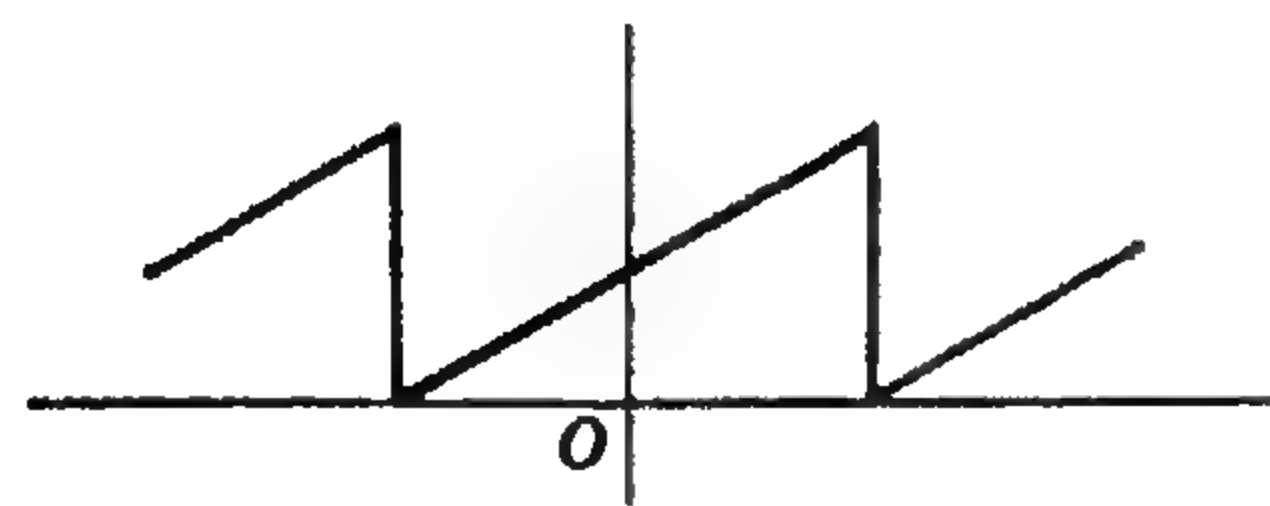
(أ)



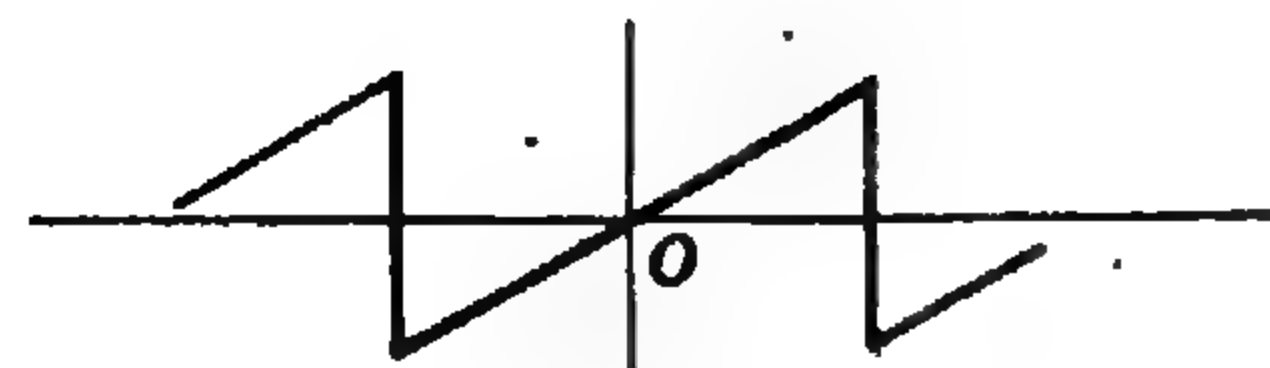
(ب)

شكل ١٥ - ٧

بعض الأشكال الموجية يمكن أن تكون فردية أو زوجية على حسب موضع المحور الرأسى . والموجة المربعة الموضحة في الشكل ١٥-٧ (أ) تحقق شرط الدالة الزوجية ، أى أن $f(x) = f(-x)$ وينتج عن إزاحة المحور الرأسى إلى الموضع الموضح في الشكل ١٥-٧ (ب) دالة فردية حيث $f(x) = -f(-x)$. وإذا وضع المحور الرأسى عند أى نقطة غير النقطتين الموضحتين في الشكل ١٥-٧ فإن الموجة المربعة تصبح لا فردية ولا زوجية - وتحتوى متسلسلتها في هذه الحالة على حدود جيبية وجيب تمامية معا . وعلى ذلك فإنه في تحليل الدوال الدورية يجب اختيار موضع مناسب للمحور الرأسى حتى ينتج لدينا دالة زوجية أو فردية وذلك طالما أن نوع الشكل الموجي يسمح بذلك .



(أ)



(ب)

شكل ١٥ - ٨

إن إزاحة المحور الأفقى يمكن أن تبسط المتسلسلة التى تمثل الدالة . وكثال على ذلك فإن الشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٨ (أ) لا يحقق شروط الدالة الفردية إلا إذا حذفنا القيمة المتوسطة كما هو موضح في الشكل ١٥-٨ (ب) . وعلى هذا فإن متسلسلته تحتوى على حد ثابت بالإضافة إلى جميع الحدود الجيبية .

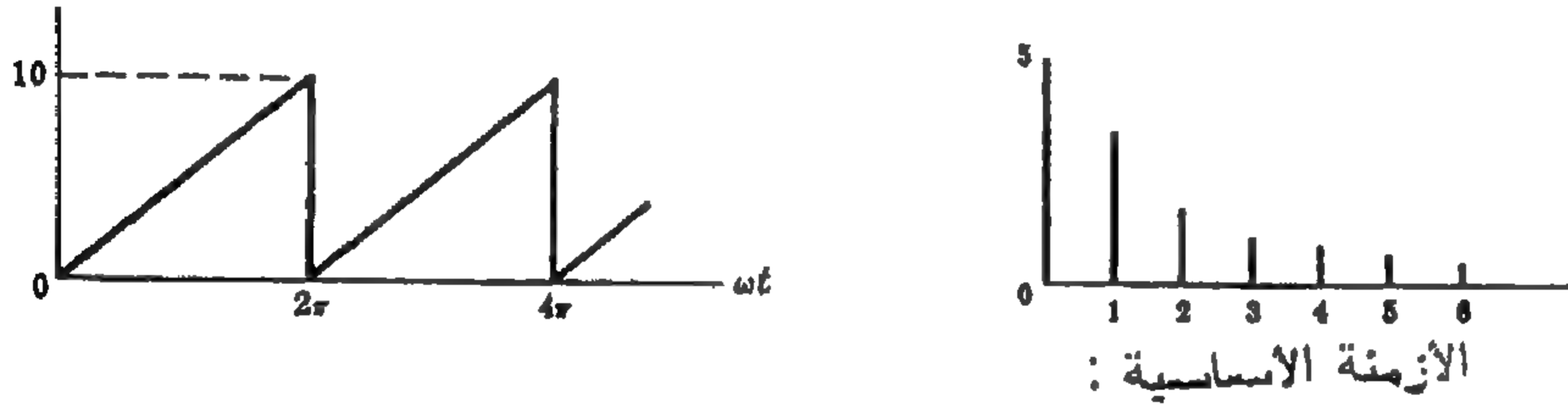
بما أن المتسلسلة الأسية المناظرة للجيوب هي متسلسلة تخيلية تماماً والمتسلسلة الأسية المناظرة للجيوب تمام هي متسلسلة حقيقية تماماً ، فإنه يمكن استخدام شروط التماثل السابقة لاختبار معاملات المتسلسلة الأسية . يحتوى الشكل الموجي الزوجي على حدود جيوب تمامية فقط وعلى ذلك فإن متسلسلته المثلثية . وبالتالي معاملات فوريير الأسية يجب أن تكون أعداد حقيقية تماماً . وبالمثل فإن الدوال الفردية التى تتكون متسلسلتها المثلثية من حدود جيبية تكون معاملات متسلسلتها الأسية تخيلية تماماً .

الطيف الخطي :

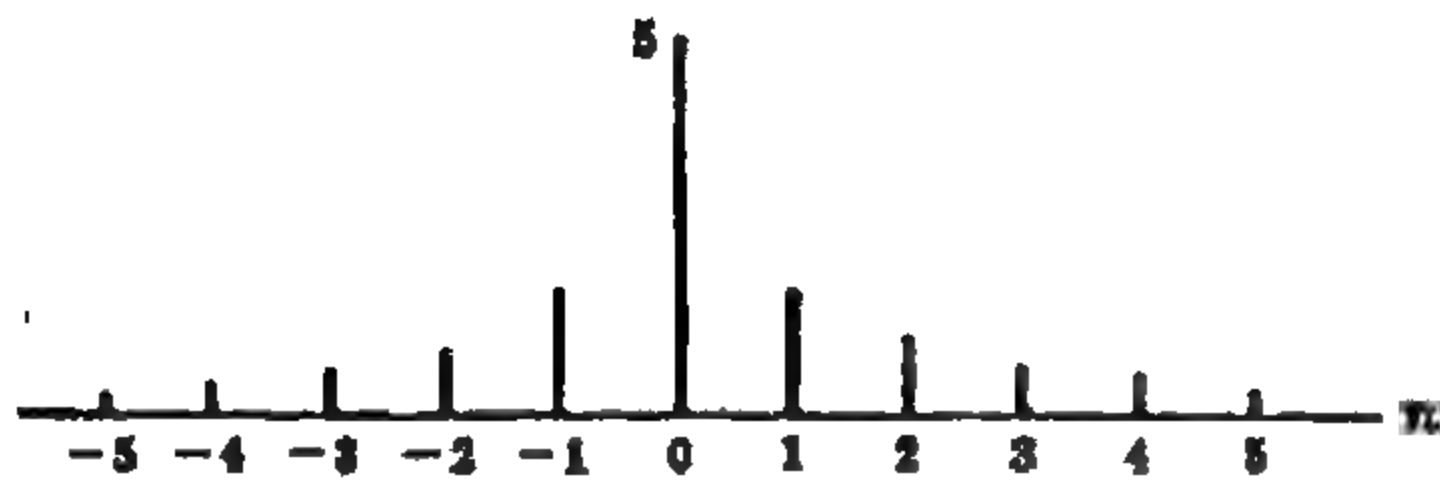
يسمى الرسم الذي يوضح كلا من السمات التوافقية في الموجة بالطيف الخطي . وتتناقص الخطوط سريعاً للموجات التي تقتارب متسلسلتها بسرعة . والموجات غير المتصلة مثل سن المنشار والموجة المربعة لها أطياف تتناقص سماتها ببطء وذلك لأن متسلسلتها لها توافقيات عالية قوية . وعادة تكون للترددات العترة الأولى قيم سمات ملحوظة بالمقارنة بالتردد الأساسي . وعلى العكس فإن متسلسلات الأشكال الموجية التي لا يوجد بها عدم اتصال والتي تمثل عادة بخط سلس تقتارب بسرعة إلى الدالة ونحتاج في هذه الحالة فقط إلى حدود قليلة لتمثيل الموجة . ويتضح هذا التقارب السريع من الطيف الخطي حيث تتناقص سعة الترددات بسرعة . وعلى ذلك فإن قيمة سعة التردد الخامس أو السادس تكون غير ملحوظة .

الترددات والطيف الخطي لأي موجة هما جزء من طبيعته الموجة نفسها لا يتغيران مهما تكن طريقة التحليل . وبإزاحة نقطة الأصل نحصل على متسلسلة نسب مثلثية تختلف تماماً في ظاهرها ، أيضاً تتغير كثير . وماتلات المتسلسلة الأسية باراحة نقطة الأصل ، ولكن يظهر دائماً نفس التردد في المتسلسلة وكذلك تظل سماتها التي تعطى بالمعادلة $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ أو $c_n = |A_n| + |A_{-n}|$ ثابتة .

يوضح الشكل ١٥ - ٩ موجة سن المنشار في المثال (١) وكذلك طيفها . و بما أنه يوجد حدود جيبيية فقط في المتسلسلة فإن : التردد C_n تعطى مباشرة من b_n .



شكل ١٥ - ٩



شكل ١٥ - ١٠

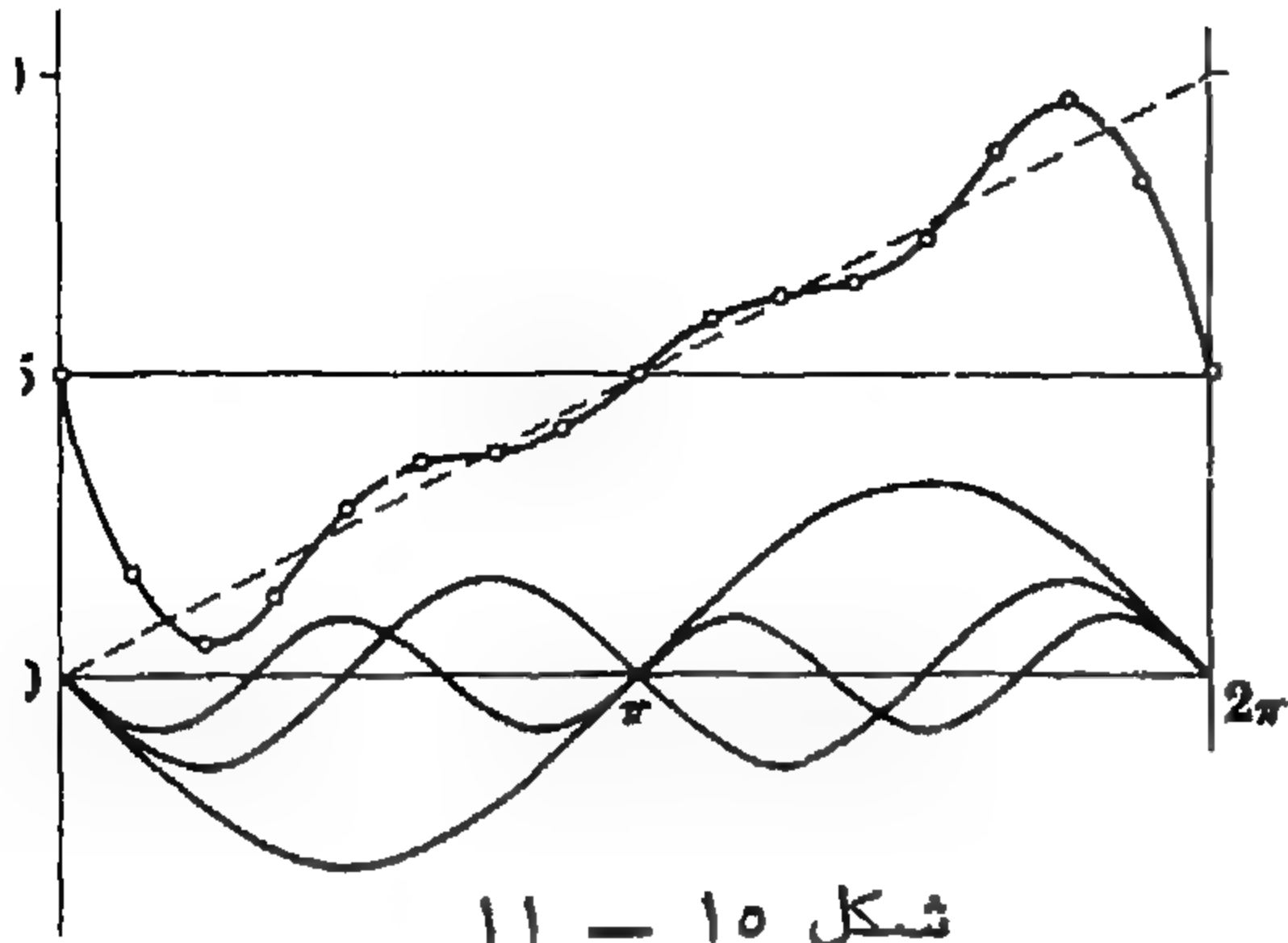
يوضح الشكل ١٥ - ١٠ متسلسلة أسية ترددات حدودها $n\omega + n\omega$ و $n\omega$ (أنظر المعادلة ١٧) وكذلك طيفها . والسعة الفعلية لتردد معين هو مجموع سميتين إحداهما عند $n\omega +$ والأخرى عند $n\omega -$. ونجد في الطيف الموضح في الشكل ١٥ - ١٠ خطوط سماتها $10/4\pi$ عند $n = +2$ و $n = -2$. وبجمعهما نحصل على $10/2\pi$ وهي السعة الفعلية لهذا التردد وهي تتفق مع الطيف الموضح في الشكل ١٥ - ٩ .

تركيب الشكل الموجي :

تركيب الشكل الموجي هو جمع الأجزاء التي يتكون منها الشكل الكلي . وهو في تحليل فوريير عبارة عن جمع حدود المتسلسلة ذات النسب المثلثية ، وعادة تكون الأربعة أو الخمسة الحدود الأولى . وبعد تركيب الموجة فإنه يمكن للطالب أن يقتنع أن متسلسلة فوريير تعبر في الواقع عن الموجة الدورية التي حصل عليها .

والمتسلسلة المثلثية لموجة سن المنشار في المثال (١) . والتي لها سعة عظمى 10 هي

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin \omega t - \frac{10}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots$$



شكل ١٥ - ١١

وفي الشكل ١٥ - ١١ رسمت هذه الحدود الأربعة بالإضافة إلى مجموعها وبالرغم من أن النتيجة ليست موجة سن منشار تماماً فإنه من الواضح أنه بإضافة حدود أخرى فإن الرسم يقترب من سن المنشار . بما أن هذه الموجة غير متصلة عند عدة نقاط فإن متسلسلتها لا تتقارب بسرعة وبالتالي فإن استخدام أربعة حدود لتركيب الشكل الموجي لا ينتج عنه نتيجة سليمة تماماً . وسعة الحد التالى الذى تردده 4ω هي $10/4\pi$ لها قيمة محسوسة بالنسبة للسعة الأساسية $10/\pi$. وكل حد يضاف فى تركيب الشكل الموجي يقلل من عدم الانتظام الناتج وبذلك يتحسن تقريب الشكل الموجي الأساسى . وهذا ما كنا نعينه عند قولنا سابقاً إن « المتسلسلة تتقارب إلى الدالة عند جميع نقاط الاتصال وتتقارب إلى القيمة المتوسطة عند نقاط عدم الاتصال » . يتضح من الشكل ١٥ - ١١ عند النقط 0 و 2π أن القيمة 5 تظل كما هي وذلك لأن جميع الحدود الجيبية تساوى صفراً عند هاتين النقطتين ، وهى نقط عدم الاتصال ، وقيمة الدالة عندما تقترب من جهة اليسار هي 10 وعندما تقترب من جهة اليمين 0 وقيمتها المتوسطة هي 5 .

القدرة والقيمة الفعالة :

ينتج عن تيار على شكل موجة دورية غير جيبية ومار فى مقاومة قدرة تعين بالقيمة الفعالة أو جذر متوسط مربع القيمة (rms) للموجة . وقد وجدنا فى الفصل الثانى أن القيمة الفعالة لدالة على الشكل

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

هى

$$(18) \quad F_{rms} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \dots + \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + \dots}$$

وبالتعبير عن سعة التردد بالمعادلة $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ وكتابة c_0 لمتوسط القيمة ، نجد من المعادلة (١٨) أن

$$F_{rms} = \sqrt{c_0^2 + \frac{1}{2}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2^2 + \frac{1}{2}c_3^2 + \dots}$$

وباعتبار شبكة كهربائية خطية يؤثر عليها جهد دورى ، يمكننا أن نتوقع أن التيار الناتج يحتوى على نفس الحدود الترددية كما فى الجهد ولكن بسعات توافقية تختلف قيمها النسبية وذلك لتغير المعاوقة مع $n\omega$. ومن المحتمل عدم ظهور بعض الترددات فى التيار حيث أنه فى حالة الرنين على التوازي ينتج معاوقة غير محدودة . وعموماً يمكننا كتابة

$$(19) \quad i = I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n) \quad \text{و} \quad v = V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

والقيم الفعالة المناظرة هى

$$(20) \quad I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}I_1^2 + \frac{1}{2}I_2^2 + \dots} \quad \text{و} \quad V_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{2}V_2^2 + \dots}$$

والقدرة المتوسطة P تنتج من تكامل القدرة اللحظية التى تعطى بحاصل الضرب vi .

$$(21) \quad p = vi = [V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \varphi_n)][I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n)]$$

بما أن كلا من i و v لهما دورة T sec فإن حاصل ضربهما له عدد صحيح من دوراتهما في T . (وإذا كان الجهد المؤثر دالة جيبية واحدة فإن حاصل الضرب vi له دورة تساوي نصف دورة موجه الجهد) . ومتوسط القدرة هو

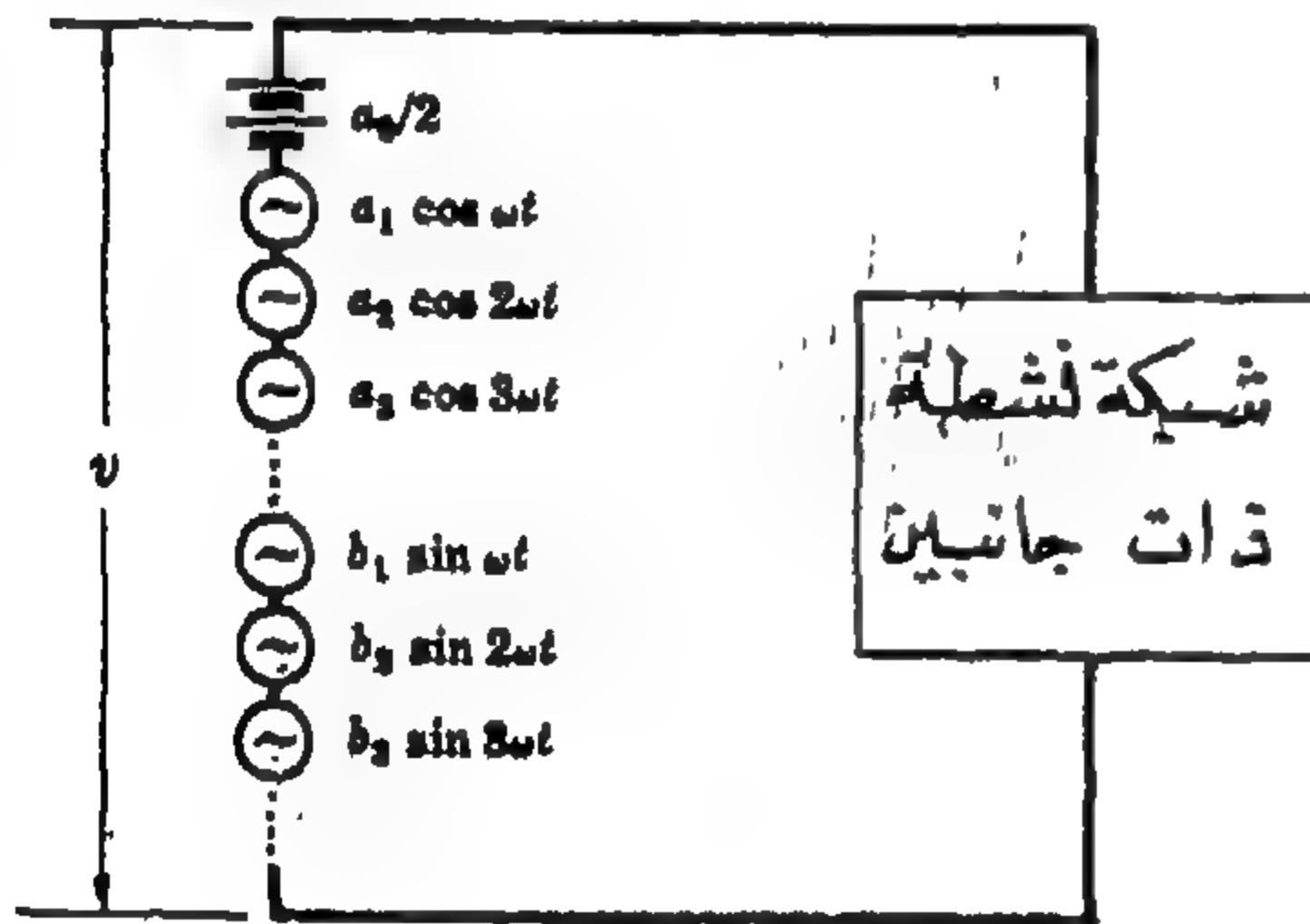
$$(22) \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T [V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n)] [I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n)] dt$$

واختبار الحدود الممكنة في حاصل ضرب المتسلسلتين اللانهائيتين يوضح أنهما يحتويان على الأنواع : حاصل ضرب الثابتين ، حاصل ضرب الثابت والدالة الجيبية ، حاصل ضرب دالتين جيبيتين بترددتين مختلفتين ، مربع دالة جيبية . ونجد بعد التكامل أن حاصل ضرب الثابتين لا يزال $V_0 I_0$ ويظهر مربع الدالة الجيبية بالحدود المطبقة على الصورة $(V_n I_n / 2) \cos(\phi_n - \psi_n)$ بينما تتحول جميع المضارب بعد التكامل على الدورة T إلى الصفر . إذن متوسط القدرة هو

$$(23) \quad P = V_0 I_0 + \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} V_2 I_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos \theta_3 + \dots$$

حيث $\theta_n = (\phi_n - \psi_n)$ هي زاوية المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية عند التردد $n\omega$ rad/sec ، V_n و I_n القيمتان العظميان لدالتى الجهد والتيار الجيبيتين . نجد في دوائر التيار المتردد وحيدة التردد أن متوسط القدرة هو $P = VI \cos \theta$ وهي محتواة في المعادلة (23) حيث V هي القيمة الفعالة للجهد . $V = V_{max}/\sqrt{2}$ و $I = I_{max}/\sqrt{2}$ أي أن $P = \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \cos \theta$. القدرة في دوائر التيار المستمر البسيطة هي VI وهي محتواة في المعادلة (23) بالحد $V_0 I_0$. وعلى ذلك فإن معادلة القدرة (23) هي معادلة عامة تماماً وتحتوى على التيار المستمر والتيار المتردد وحيد التردد وأيضاً على أوضاع دورية غير جيبية . ونلاحظ أيضاً في المعادلة (23) أنه لا يوجد أى إسهام في متوسط القدرة من الجهد والتيار المختلفين في التردد وعلى ذلك فإنه بالنسبة للقدرة يؤثر كل تردد على حدة .

تطبيقات على تحليل الدوائر :



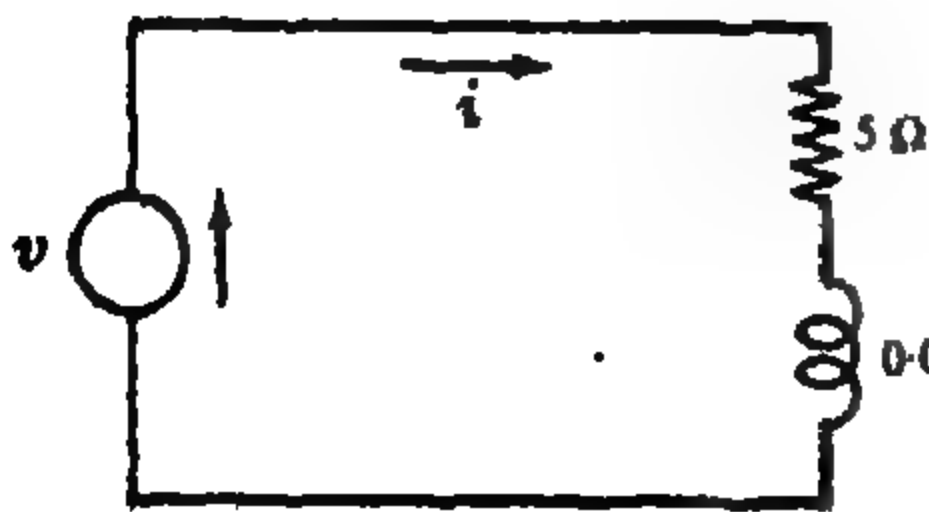
شكل ١٥ - ١٢

لقد اقترحنا فيما سبق أنه يمكننا تطبيق حدود متسلسلة الجهد على شبكة خطية للحصول على الحدود الترددية المناظرة لمتسلسلة التيار . وقد حصلنا على هذه النتيجة من التراكم . وعلى هذا فإننا نعتبر كل حد في متسلسلة فوريير يمثل جهداً ناتجاً عن مصدر واحد كما في الشكل ١٥ - ١٢ . والآن نستخدم المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية عند كل ذبذبة تردد $n\omega$ لحساب التيار عند ذلك التردد . مجموع هذه الاستجابات الفردية هي الاستجابة الكلية i على شكل متسلسلة والناتجة عن الجهد المؤثر .

مثال ٣ :

دائرة RL على التوالي فيها $R = 5 \Omega$ و $L = 0.02$ H يؤثر عليها

جهد $v = 100 + 50 \sin \omega t + 25 \sin 3\omega t$ volts حيث $\omega = 500$ rad/sec . أوجد التيار والقدرة المتوسطة .



شكل ١٥ - ١٣

نحسب المعاوقة المكافئة عند كل ذبذبة . وبذلك نحصل على التيارات المناظرة .

عند $\omega = 0$ فإن $Z = 5 \Omega$ و $I_0 = V_0/R = 100/5 = 20$ A

$$Z_1 = 5 + j(0.02)(500) = 5 + j10 \Omega \quad \text{عند } \omega = 500 \text{ rad/sec} \quad \text{فإن}$$

$$i_1 = \frac{V_{1\max}}{|Z_1|} \sin(\omega t - \theta_1) = \frac{50}{11.18} \sin(\omega t - 63.4^\circ) = 4.48 \sin(\omega t - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$

$$Z_3 = 5 + j30 \Omega \quad \text{عند } 3\omega = 1500 \text{ rad/sec} \quad \text{فإن}$$

$$i_3 = \frac{V_{3\max}}{|Z_3|} \sin(3\omega t - \theta_3) = \frac{25}{30.4} \sin(3\omega t - 80.54^\circ) = 0.823 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \text{ amperes}$$

ومجموع التيارات التوافقية هو الاستجابة الكلية المطلوبة

$$i = 20 + 4.48 \sin(\omega t - 63.4^\circ) + 0.823 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \text{ amperes}$$

والقيمة الفعالة لهذا التيار هي

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{20^2 + 4.48^2/2 + 0.823^2/2} = \sqrt{410.6} = 20.25 \text{ A}$$

والقدرة الناتجة عنها في المقاومة 5Ω هي

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = (410.6)5 = 2053 \text{ W}$$

وكاختبار للنتيجة فإننا نحسب متوسط القدرة الكلية بحساب القدرة الناتجة عن كل تردد ثم جمعها فينتج أن

$$P = I_0^2 R = 100(20)^2 = 2000 \text{ W} \quad \text{عند } \omega = 0$$

$$P = \frac{1}{2} I_1^2 R \cos \theta_1 = \frac{1}{2} (50)(4.48) \cos 63.4^\circ = 50.1 \text{ W} \quad \text{عند } \omega = 500 \text{ rad/sec}$$

$$P = \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos \theta_3 = \frac{1}{2} (25)(0.823) \cos 80.54^\circ = 1.69 \text{ W} \quad \text{عند } 3\omega = 1500 \text{ rad/sec}$$

$$P_p = 2000 + 50.1 + 1.69 = 2052 \text{ W} \quad \text{إذن}$$

طريقة أخرى :

متسلسلة الجهد المؤثر على المقاومة هي

$$v_R = Ri = 100 + 22.4 \sin(\omega t - 63.4^\circ) + 4.11 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \text{ volts}$$

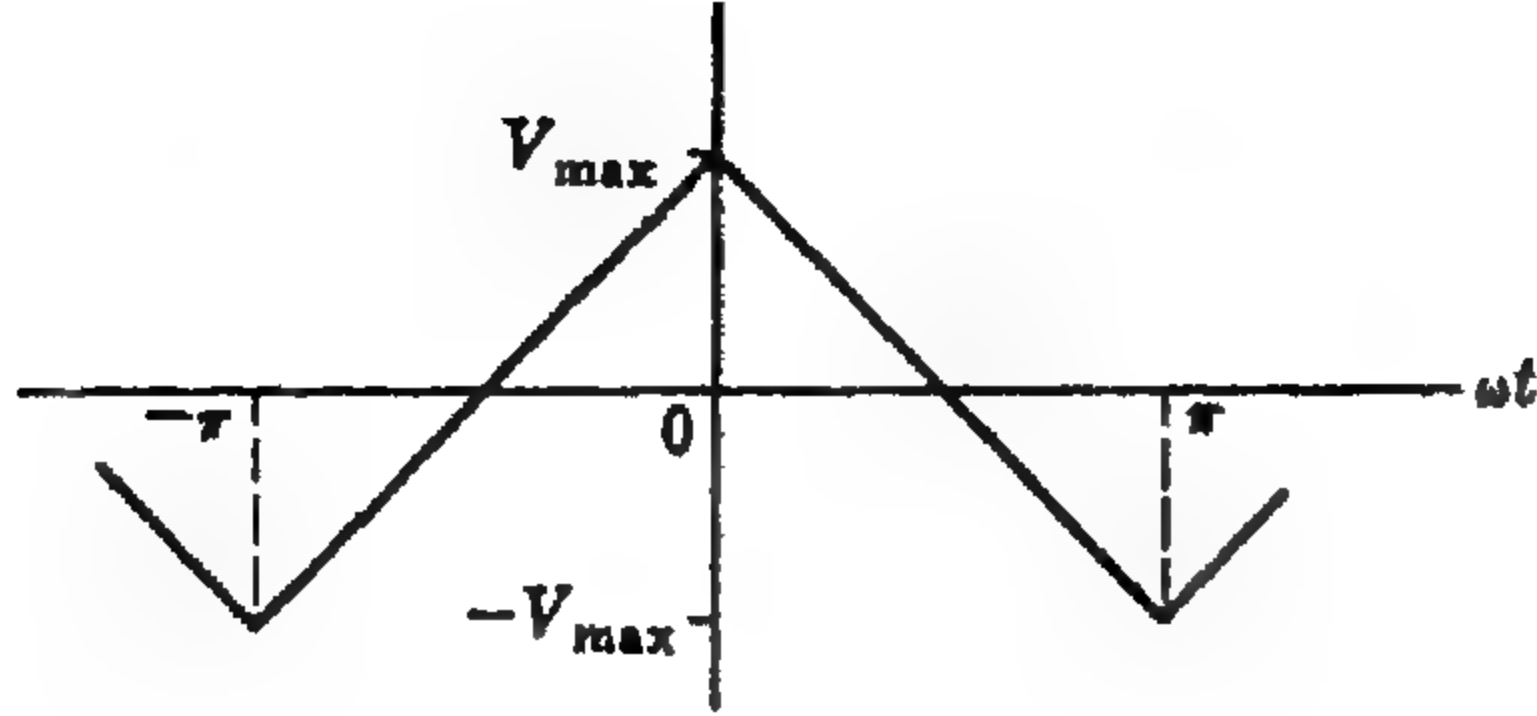
$$V_R = \sqrt{100^2 + \frac{1}{2}(22.4)^2 + \frac{1}{2}(4.11)^2} = \sqrt{10,259} = 101.3 \text{ V} \quad \text{و}$$

$$P = V_R^2/R = (101.3)^2/5 = 2052 \text{ W} \quad \text{إذن القدرة المعطاة بالمصدر هي}$$

وبنفس الطريقة تستخدم متسلسلة فوريير الأسية فيما عدا أن معارفة الدائرة يعبر عنها عادة بحدود في $n\omega$. ويمكن حساب معاملات متسلسلة التيار I_n من النسبة V_n/Z_n كما هو موضح في مثال (٤) التالي .

مثال ٤ :

يؤثر جهد على شكل الموجة المثلثية الموضحة في الشكل ١٥ - ١٤ على مكثف ذو سعته C farads . عين التيار الناتج .



شكل ١٥ - ١٤

دالة الجهد في الفترة $-\pi < \omega t < 0$ هي

$$v = V_{\max} + (2V_{\max}/\pi)\omega t$$

وفي الفترة $0 < \omega t < \pi$ هي

$$v = V_{\max} - (2V_{\max}/\pi)\omega t$$

إذن يمكن تعيين معاملات المتسلسلة الأسية بحساب التكامل

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [V_{\max} + (2V_{\max}/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t) \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [V_{\max} - (2V_{\max}/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t)$$

ومنه نجد أن $A_n = \frac{4V_{\max}}{\pi^2 n^2}$ لجميع القيم n الفردية و $A_n = 0$ لجميع قيم n الزوجية .

ومعاوقة الدائرة $Z = 1/j\omega C$ يمكن التعبير عنها كدالة في n أي أن $Z_n = 1/jn\omega C$. والآن لدينا

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n} = \frac{4V_{\max}}{\pi^2 n^2} (jn\omega C) = j \left(\frac{4V_{\max} \omega C}{\pi^2 n} \right)$$

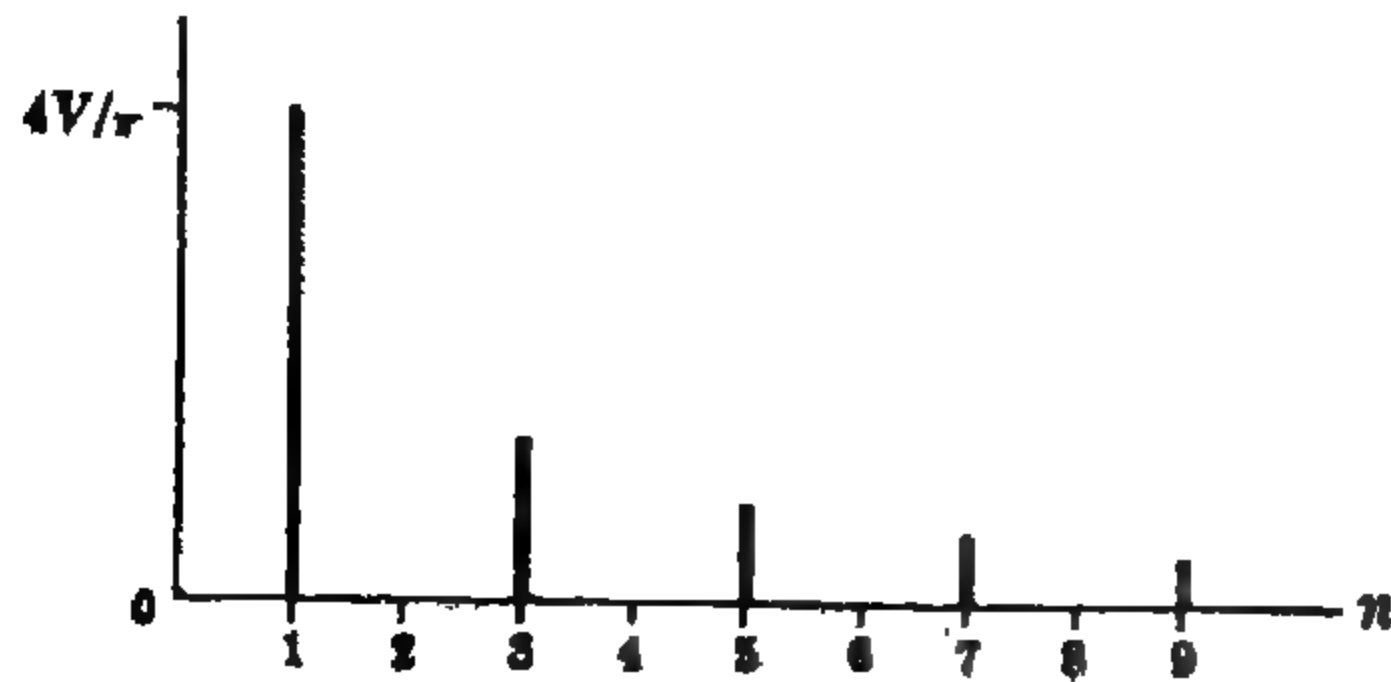
ومتسلسلة التيار هي

$$i = j \left(\frac{4V_{\max} \omega C}{\pi^2} \right) \sum \frac{e^{jn\omega t}}{n}$$

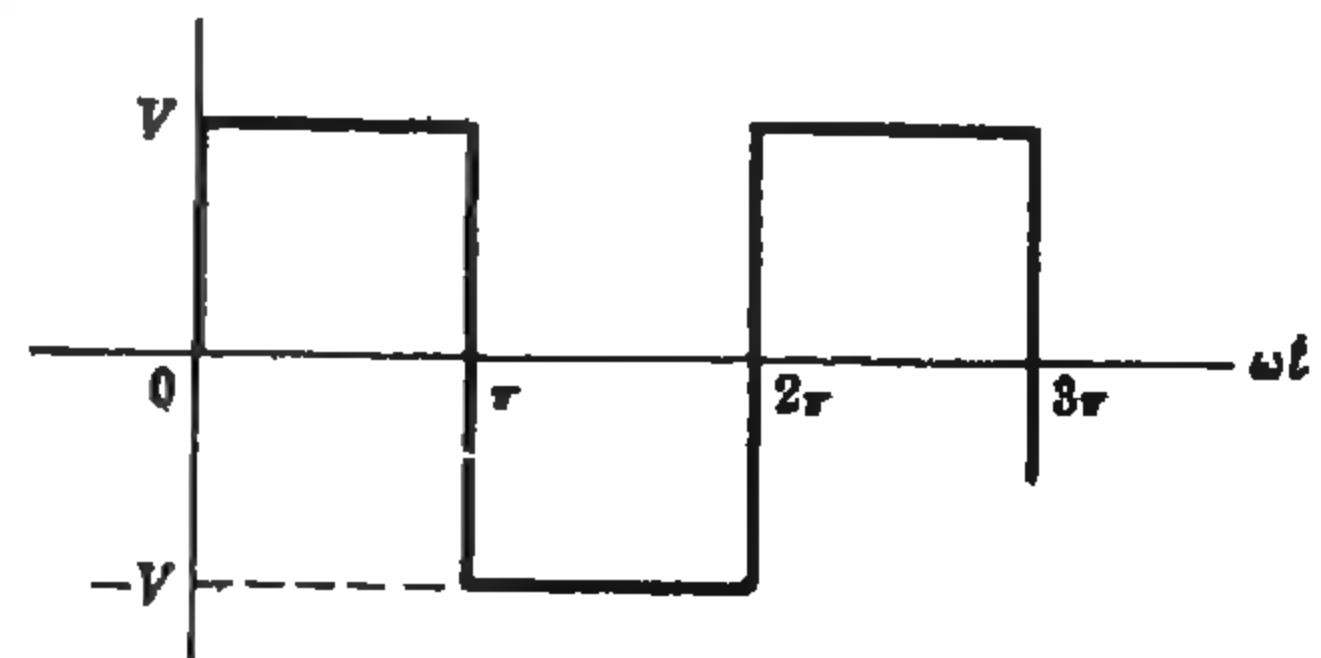
يمكن للمتسلسلة أن تتقارب إلى الشكل المثلثي وبالتالي تبين لنا تركيب الشكل الموجي للتيار . وعلى ذلك فإن هذه المتسلسلة لها نفس الشكل الناتج في المسألة ١٥ - ٨ حيث المعامل $A_n = -j(2V/n\pi)$ لقيم n الفردية فقط . والإشارة السالبة هنا تعني أن موجة هذا التيار هي سالب الموجة المربعة في المسألة ١٥ - ٨ وأن قيمتها العظمى هي $(2V_{\max}\omega C)/\pi$.

مسائل محلولة

١٥ - ١ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للموجة المربعة الموضحة في الشكل ١٥ - ١٥ وارسم الطيف الخطي لها .



شكل ١٥ - ١٦



شكل ١٥ - ١٥

في الفترة $0 < \omega t < \pi$ نجد أن $f(t) = V$ وفي الفترة $\pi < \omega t < 2\pi$ نجد أن $f(t) = -V$.
والقيمة المتوسطة للموجة تساوى صفرأ ؛ إذن $a_0/2 = 0$. ونحصل على معاملات الجيب تمام بكتابة التكاملات التي
يجب حسابها مع إدخال الدوال كما يلي :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} V \cos n\omega t d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \cos n\omega t d(\omega t) \right\} = \frac{V}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{n} \sin n\omega t \right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n} \sin n\omega t \right]_{\pi}^{2\pi} \right\}$$

$$= 0$$

لجميع قيم n .

وعلى هذا فالمتسلسلة لا تحتوى على حدود جيب تمام. وباتباع نفس الطريقة مع التكاملات التي يجب حسابها للحدود
الجيبية نجد أن

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} V \sin n\omega t d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \sin n\omega t d(\omega t) \right\}$$

$$= \frac{V}{\pi} \left\{ \left[-\frac{1}{n} \cos n\omega t \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n} \cos n\omega t \right]_{\pi}^{2\pi} \right\}$$

$$= \frac{V}{\pi n} (-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n2\pi - \cos n\pi) = \frac{2V}{\pi n} (1 - \cos n\pi)$$

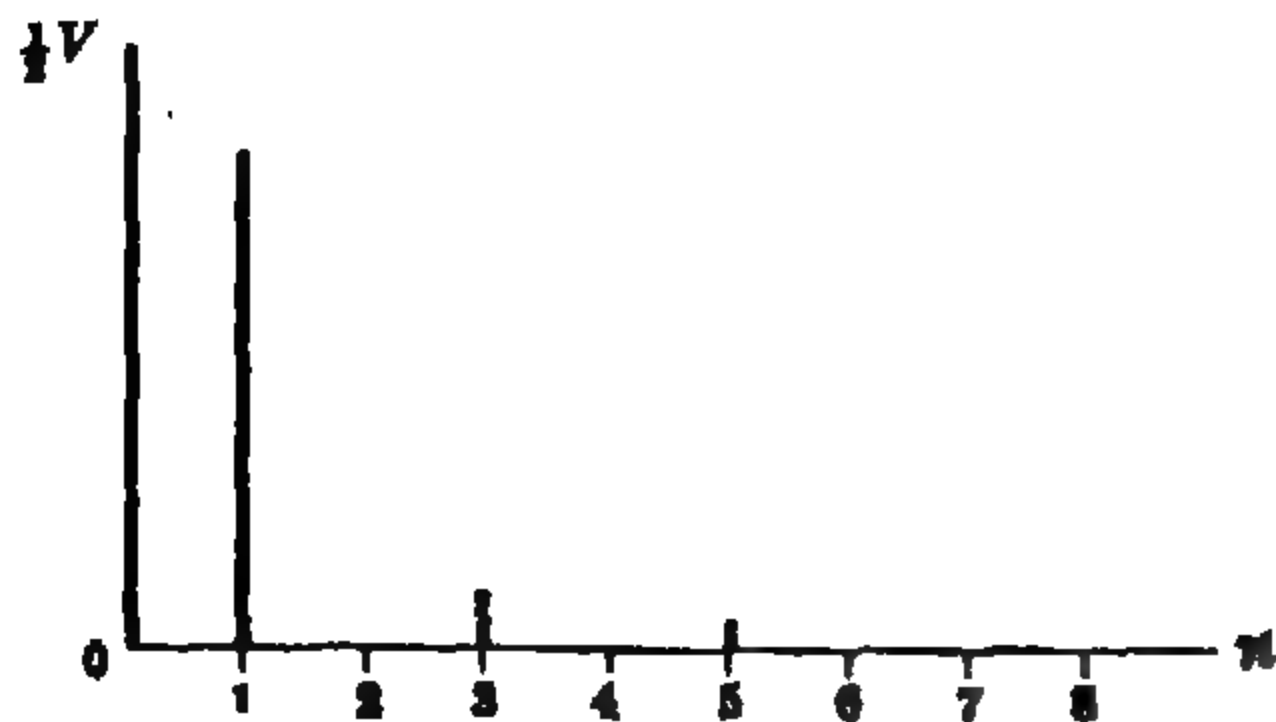
إذن $b_n = 4V/\pi n$ عندما $n = 1, 2, 5, \dots$ و $b_n = 0$ عندما $n = 2, 4, 6, \dots$. ومتسلسلة الموجة
المربعة هي

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \sin \omega t + \frac{4V}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4V}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots$$

ويوضح الشكل ١٥ - ١٦ الطيف الخطي لهذه المتسلسلة. وتحتوى المتسلسلة على حدود جيبية بترددات فردية فقط وهي
التي يمكن استخدامها في اختبار تماثل الشكل الموجي.

وبما أن موجة الشكل ١٥ - ١٥ فردية فإن متسلسلتها تحتوى على حدود جيبية فقط وبما أن لها أيضاً تماثل موجي فإنها
تحتوى على ترددات فردية فقط.

١٥ - ٢. أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للموجة المثلثية الموضحة في الشكل ١٥ - ١٧. وارسم طيفها الخطي.



الموجة دالة زوجية لأن $f(t) = f(-t)$ ، وإذا أزلنا القيمة المتوسطة $V/2$ فإنه يكون لها أيضاً تماثل نصف موجي ، أى أن $f(t) = -f(t + T/2)$. وفى الفترة $-\pi < \omega t < 0$ فإن $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$ وفى الفترة $0 < \omega t < \pi$ فإن $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$. وبما أن الشكل الموجي الزوجي يحتوى على حدود جيب تمام فقط فإن $b_n = 0$ لجميع قيم n الصحيحة .

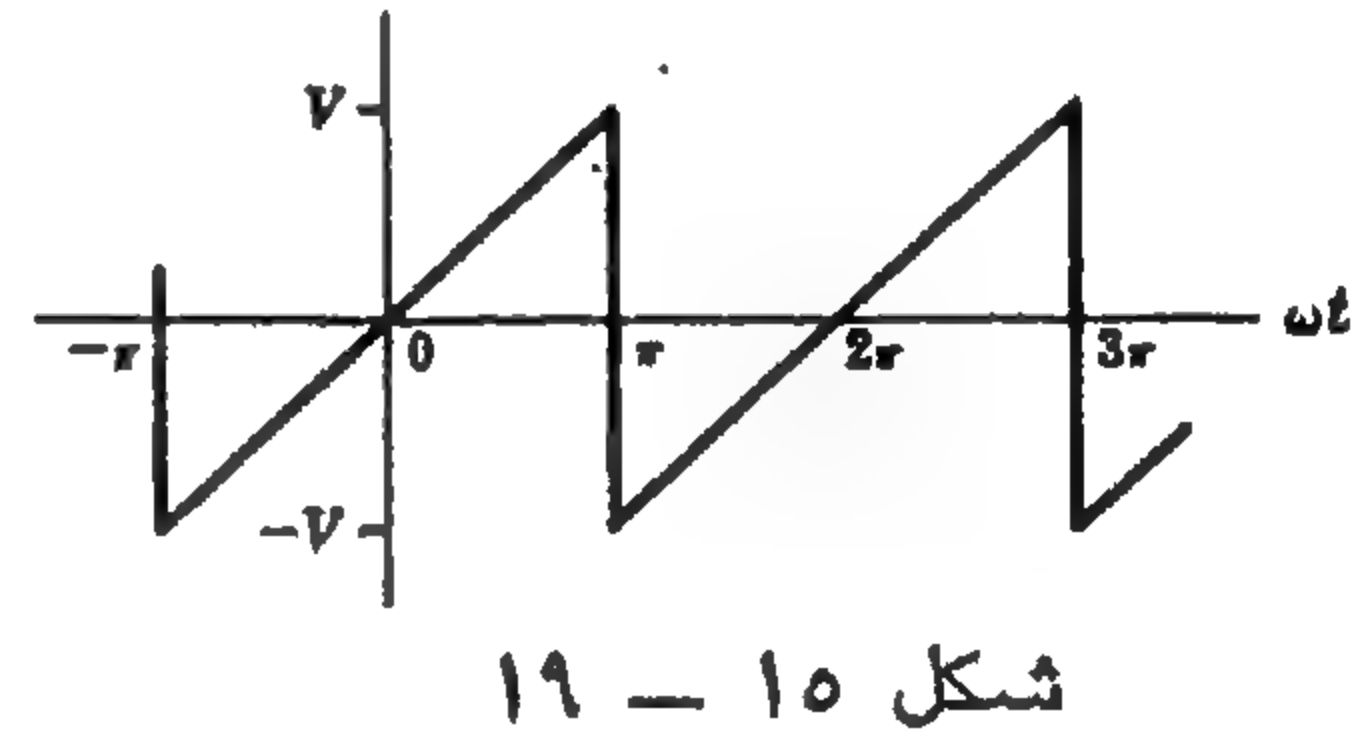
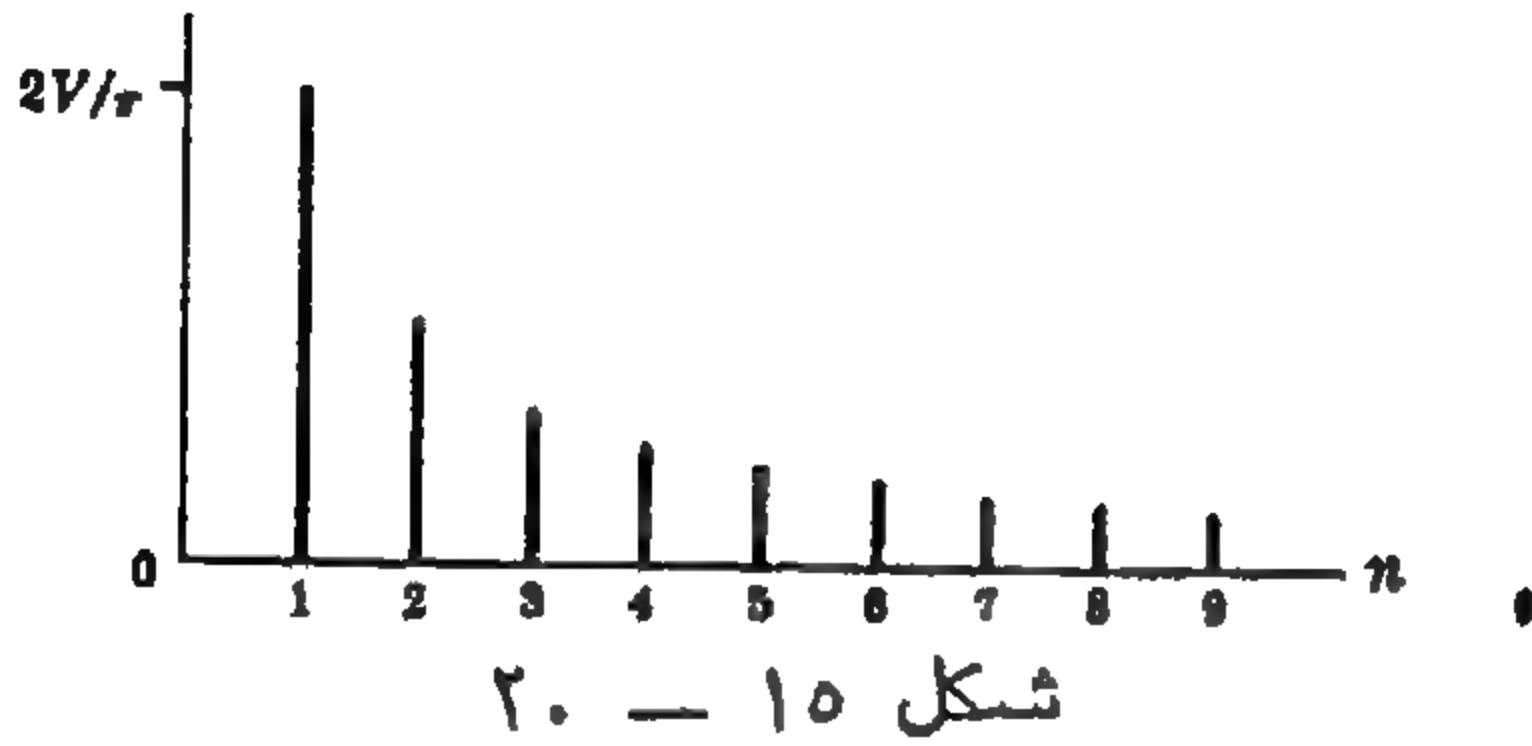
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [V + (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) \\ &= \frac{V}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 \cos n\omega t d(\omega t) + \int_{-\pi}^0 \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t d(\omega t) - \int_0^{\pi} \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t d(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V}{\pi^2} \left\{ \left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_{-\pi}^0 - \left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{\pi^2 n^2} \{ \cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0 \} = \frac{2V}{\pi^2 n^2} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

وكما نتوقع من التماثل النصف موجي فإن المتسلسلة تحتوى فقط على حدود فردية حيث $a_n = 0$ عندما $n = 2, 4, 6, \dots$ وعندما $n = 1, 3, 5, \dots$ فإن $a_n = 4V/\pi^2 n^2$. إذن متسلسلة فوريير المطلوبة هي

$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{4V}{\pi^2} \cos \omega t + \frac{4V}{(3\pi)^2} \cos 3\omega t + \frac{4V}{(5\pi)^2} \cos 5\omega t + \dots$$

وتقل المعاملات بمعدل $1/n^2$ ، وعلى هذا فإن تقارب المتسلسلة أسرع من تلك التى فى المسألة ١٥ - ١ . وتظهر هذه الحقيقة من الطيف الخطى الموضح فى الشكل ١٥ - ٨ .

١٥ - ٣ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية لموجة سن المنشار الموضحة فى الشكل ١٥ - ١٩ وارسم طيفها .



بالفحص نلاحظ أن القيمة المتوسطة للموجة تساوى صفرأ وأن الموجة فردية . وبالتالي فإن المتسلسلة تحتوى فقط على حدود جيبية . ويصف التعبير $f(t) = (V/\pi)\omega t$ الموجة فى الدورة من $-\pi$ إلى $+\pi$ وسوف نستخدم هذه الحدود فى حساب قيمة التكامل للحصول على b_n .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (V/\pi)\omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \sin n\omega t - \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2V}{n\pi} (\cos n\pi)$$

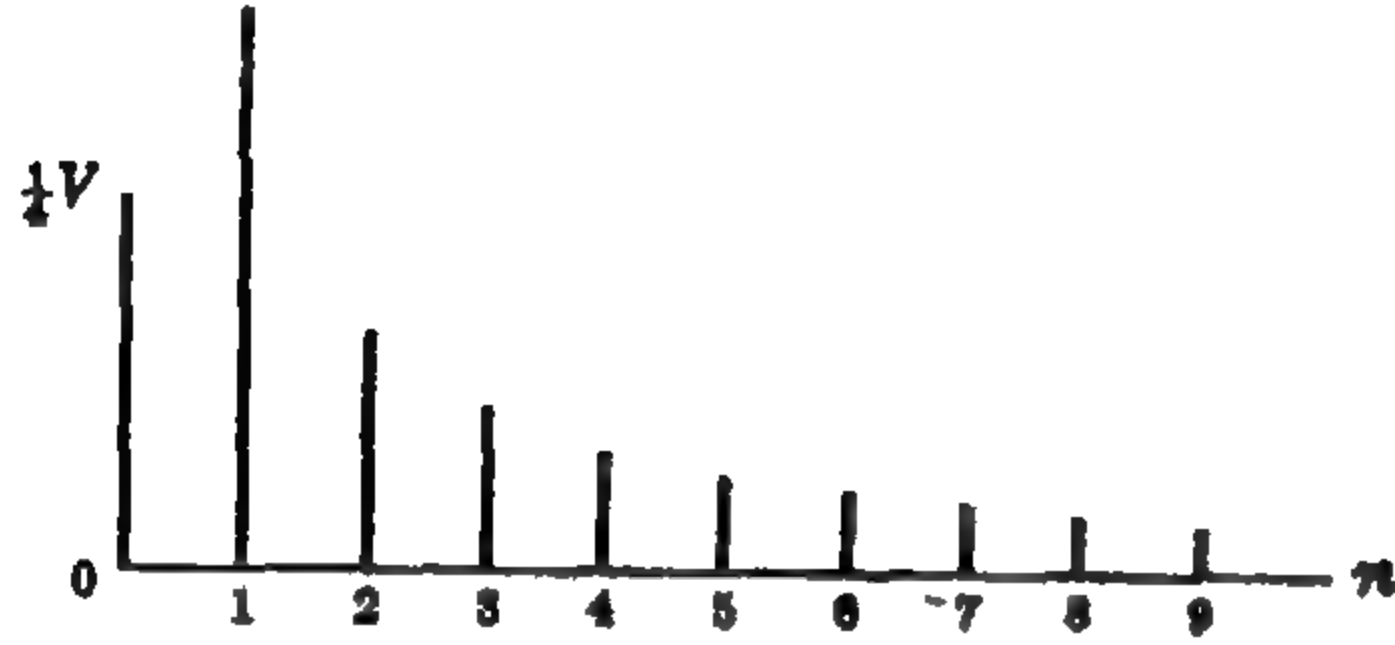
وحيث أن قيم $\cos n\pi$ موجبة لقيم n الزوجية وسالبة لقيم n الفردية فإن إشارات المعاملات تكون متناوبة . والمتسلسلة المطلوبة هي

$$f(t) = \frac{2V}{\pi} \{ \sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t - \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \}$$

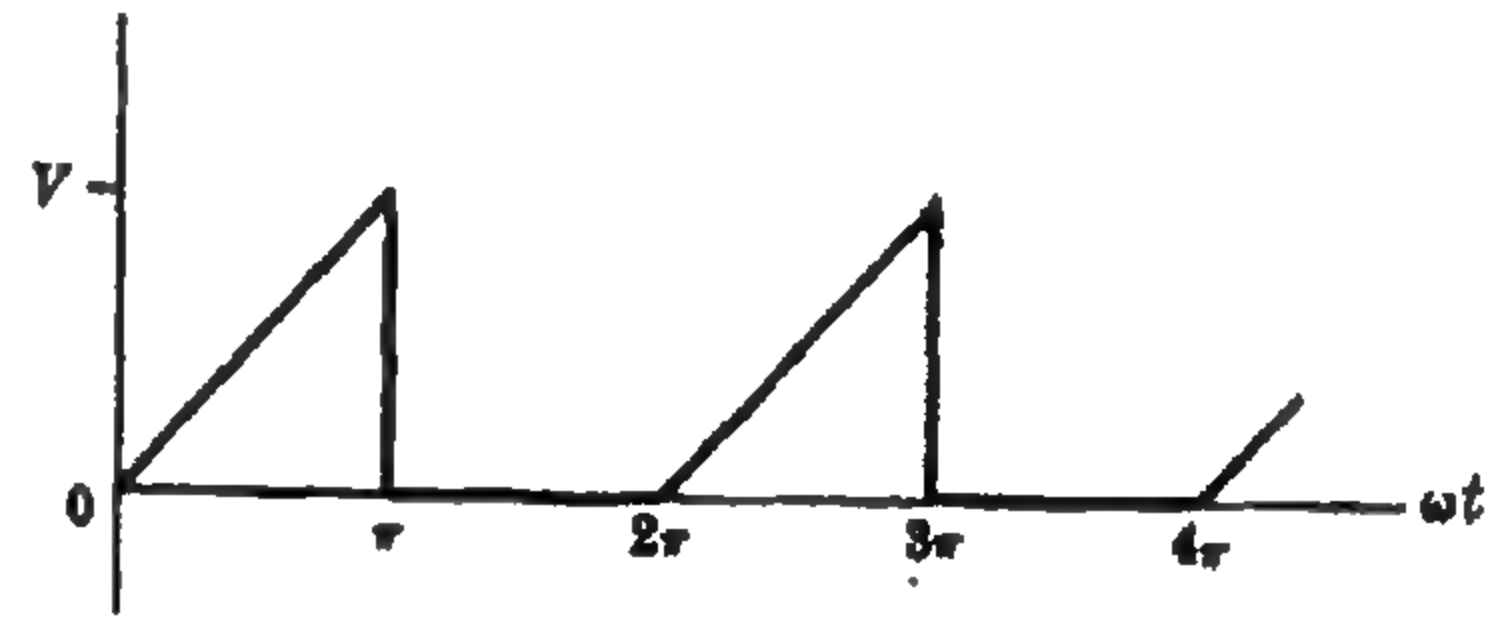
وتتناقص الحدود بمعدل $1/n$ وعلى ذلك فالمتسلسلة تتقارب ببطء كما هو موضح بالطيف في الشكل ١٥ - ٢٠ . وباستثناء إزاحة نقطة أصل المحاور والحد المتوسط فإن هذا الشكل الموجي هو نفسه الموجود في المثال (١) . قارن الطيف الخطي في الشكل ١٥ - ٩ بما في الشكل ١٥ - ٢٠ ولاحظ التشابه الموجود .

١٥ - ٤ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥ - ٢١ وارسم الطيف .

في الفترة $0 < \omega t < \pi$ نجد أن $f(t) = (V/\pi)\omega t$ وفي الفترة $\pi < \omega t < 2\pi$ نجد أن $f(t) = 0$. وبما أن الموجة لا هي زوجية ولا فردية فالمتسلسلة يجب أن تحتوى على حدود جييبية وحدود جييب تمامية معاً . وفي الفترة من 0 إلى π . نحصل على



شكل ١٥ - ٢٢



شكل ١٥ - ٢١

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (V/\pi)\omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_0^\pi = \frac{V}{\pi^2 n^2} (\cos n\pi - 1)$$

عندما n زوجية فإن $(\cos n\pi - 1) = 0$ و $a_n = 0$. وعندما n فردية فإن $a_n = -2V/(\pi^2 n^2)$ ومعاملات b_n هي

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (V/\pi)\omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \sin n\omega t - \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t \right]_0^\pi = -\frac{V}{\pi n} (\cos n\pi)$$

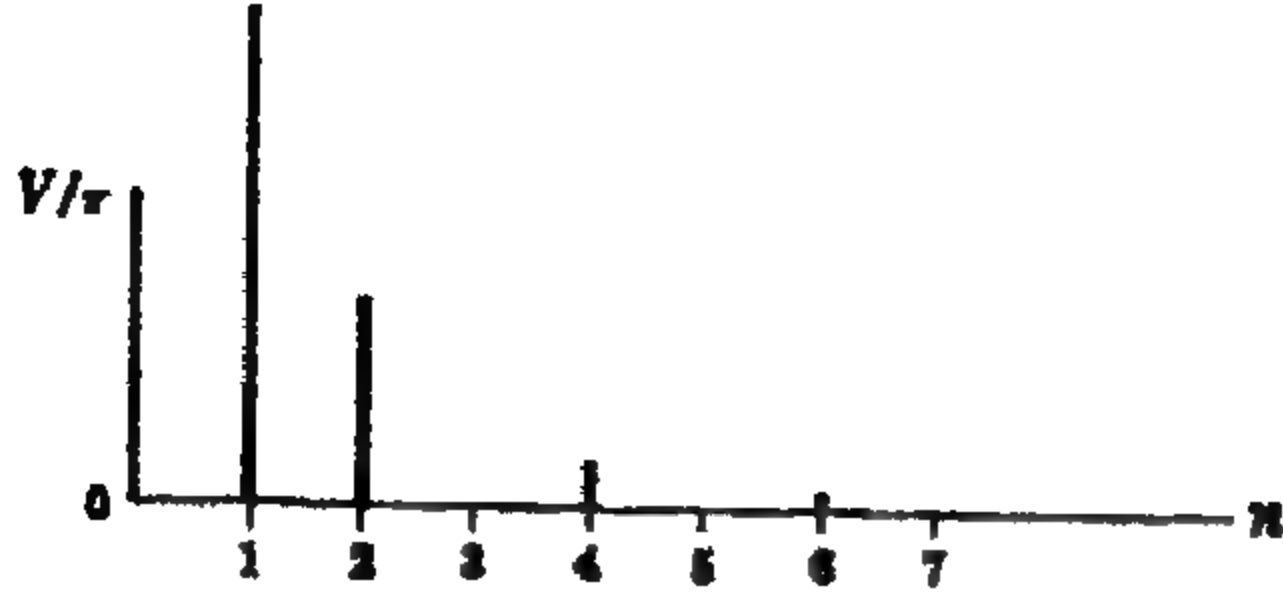
وتتناوب الإشارات حيث $b_n = -V/\pi n$ لقيم n الزوجية و $b_n = +V/\pi n$ لقيم n الفردية ومتسلسلة فوريير المطلوبة هي

$$f(t) = \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{2V}{(3\pi)^2} \cos 3\omega t - \frac{2V}{(5\pi)^2} \cos 5\omega t - \dots$$

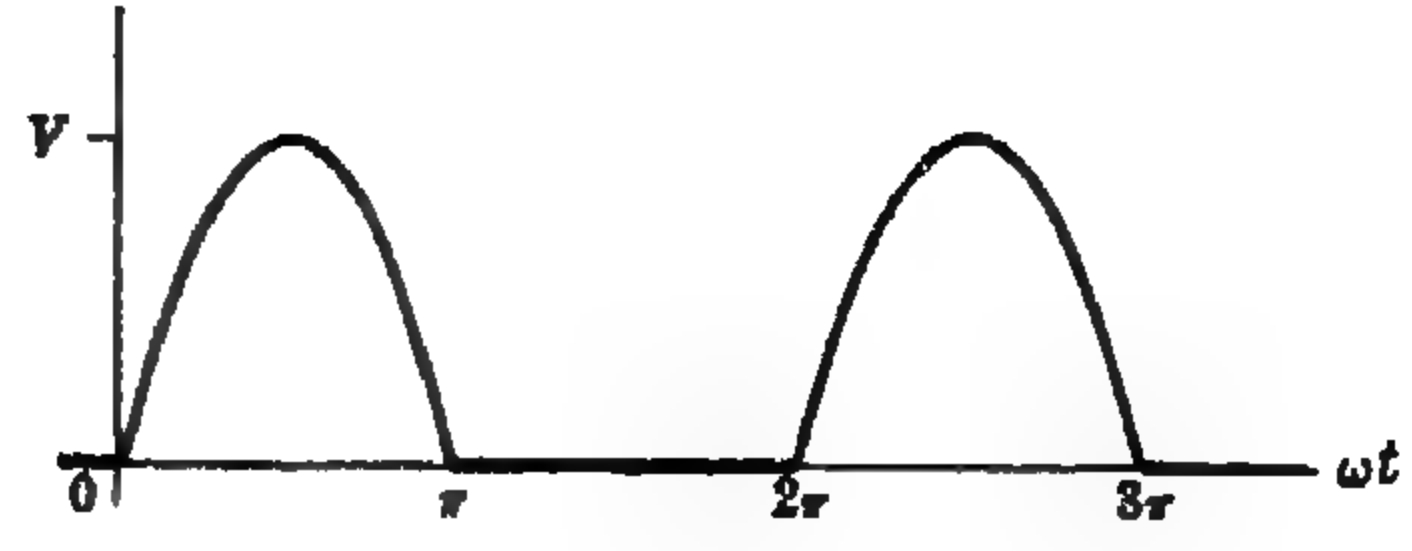
$$+ \frac{V}{\pi} \sin \omega t - \frac{V}{2\pi} \sin 2\omega t + \frac{V}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots$$

وتعطى سمات الترددات الزوجية مباشرة بمعاملات b_n ، وذلك لعدم وجود حدود جييب تمامية زوجية . وعلى ذلك فإنه يجب استخدام $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ لحساب سمات الترددات الفردية . إذن $c_1 = \sqrt{(2V/\pi^2)^2 + (V/\pi)^2}$ وبالمثل $c_3 = V(0.109)$ و $c_5 = V(0.064)$. ويوضح الشكل ١٥ - ٢٢ الطيف الخطي .

١٥ - ٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للدالة الجيبية المقومة تقوياً نصف موجياً والموضحة في الشكل ١٥ - ٢٣ وارسم الطيف .



شكل ١٥ - ٢٤



شكل ١٥ - ٢٣

لاتبين الموجة أى تماثل ولذلك فإننا نتوقع أن تحتوى المتسلسلة على حدود جيبيية وجيب تمامية معا . بما أنه لايمكن الحصول على القيمة المتوسطة بالفحص فإننا نحسب a_0 للحد $a_0/2$ فى المتسلسلة

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} [-\cos \omega t]_0^{\pi} = \frac{2V}{\pi}$$

ثم نعين بعد ذلك a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t \cos n\omega t d(\omega t) \\ &= \frac{V}{\pi} \left[\frac{-n \sin \omega t \sin n\omega t - \cos n\omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1} \right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi(1-n^2)} (\cos n\pi + 1) \end{aligned}$$

عندما n زوجية فإن $a_n = 2V/\pi(1-n^2)$ ، وعندما n فردية فإن $a_n = 0$ وحيث أن هذا التعبير غير محدد عندما $n=1$ ، إذن فإننا يجب أن نكامل على حدة للحصول على a_1 .

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2\omega t d(\omega t) = 0$$

والآن نحسب b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[\frac{n \sin \omega t \cos n\omega t - \sin n\omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1} \right]_0^{\pi} = 0$$

ونجد هنا أيضاً أن هذا التعبير غير محدد عندما $n=1$ وعلى ذلك فإن b_1 تحسب على حدة .

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{V}{2}$$

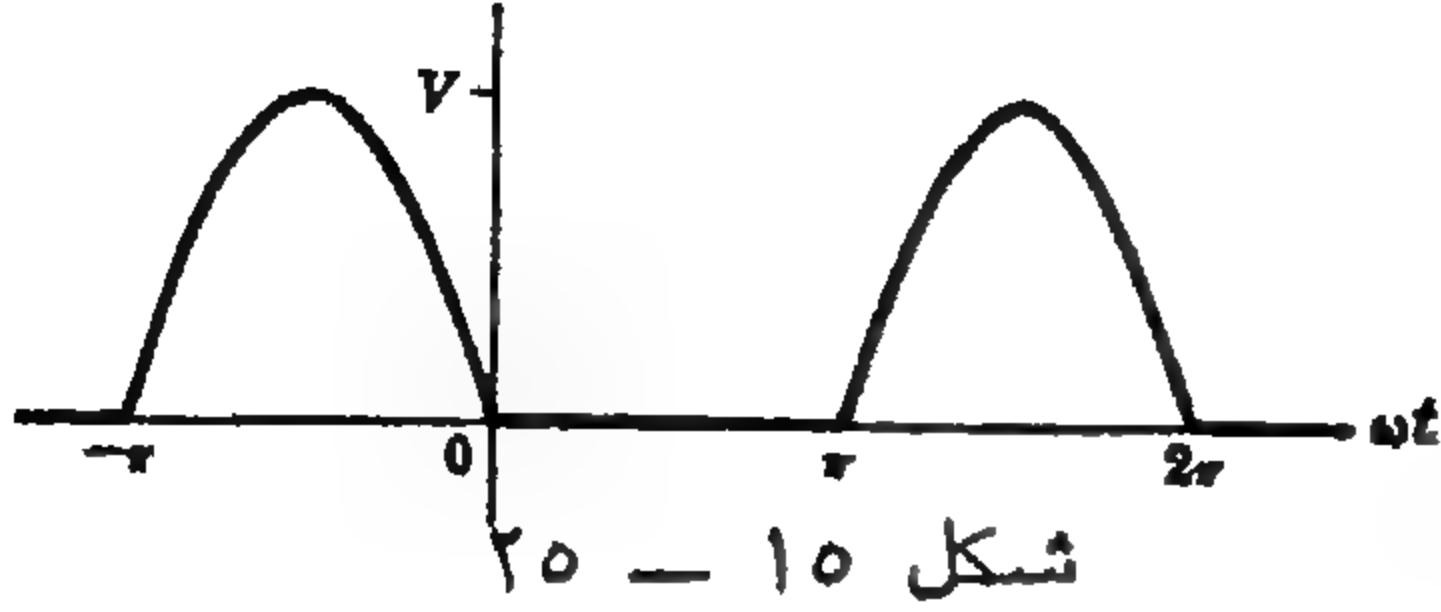
ومتسلسلة فوريير المطلوبة هى

$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{85} \cos 6\omega t - \dots \right\}$$

والطيف فى الشكل ١٥ - ٢٤ يبين الحد الأساسى القوى فى المتسلسلة وكذلك سعات الترددات الأعلى التى

تتناقص سريعاً .

١٥ - ٦ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للموجة الجيبية المقومة تقوياً نصف موجي والموضحة في الشكل ١٥ - ٢٥ ؛ حيث أزيح المحور الرأسى عن موضعه في المسألة ١٥ - ٥ .



شكل ١٥ - ٢٥

الدالة معرفة في الفترة $-\pi < \omega t < 0$ بالعلاقة $f(t) = -V \sin \omega t$. والقيمة المتوسطة هي نفسها كما في المسألة ١٥ - ٥ ، أى أن $a_0 = 2V/\pi$ ولدينا لمعاملات a_n .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \sin \omega t) \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi(1-n^2)} (1 + \cos n\pi)$$

وعندما n زوجية فإن $a_n = 2V/\pi(1-n^2)$ وعندما n فردية فإن $a_n = 0$ فيما عدا $n=1$ حيث يجب اختبارها على حدة .

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t) = 0$$

ولدينا المعاملات b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \sin \omega t) \sin n\omega t d(\omega t) = 0$$

ولكن مرة أخرى نجد أن هذا التعبير غير محدد عندما $n=1$ ، وعلى هذا فإننا نحسب b_1 على حدة

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V) \sin^2 \omega t d(\omega t) = -\frac{V}{2}$$

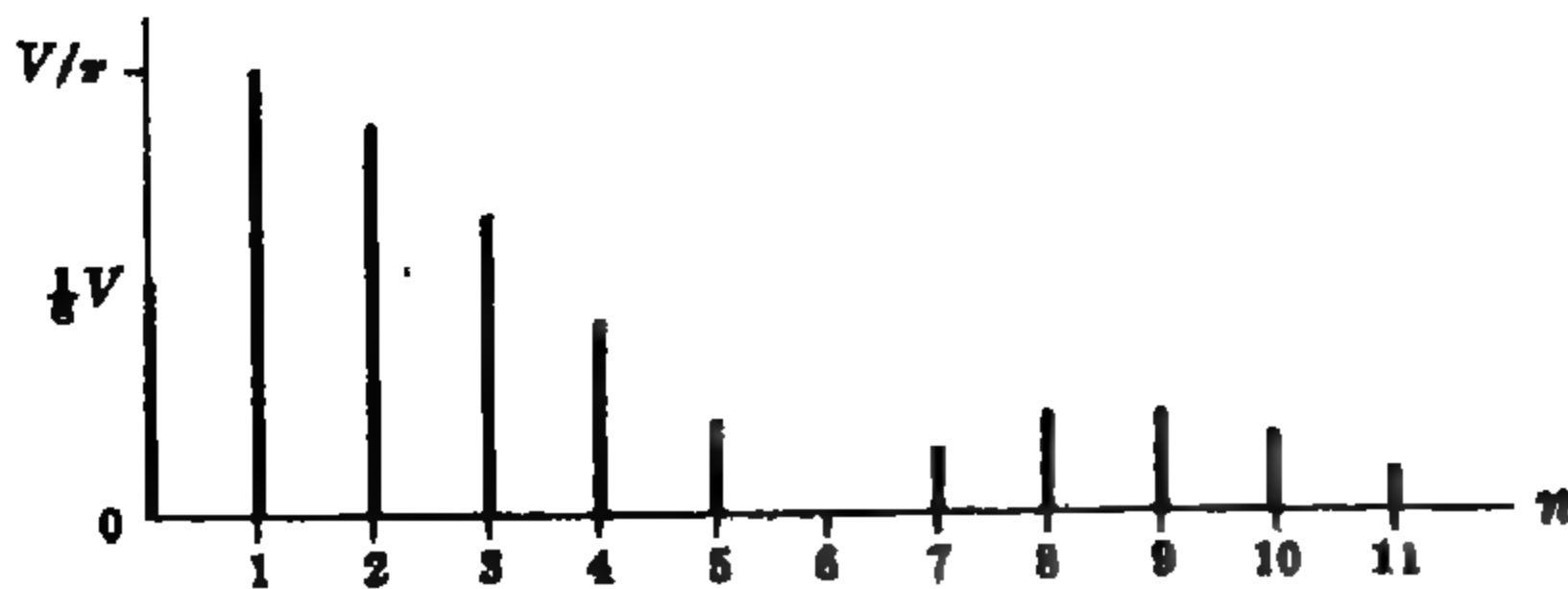
إذن المتسلسلة هي

$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{8} \cos 2\omega t - \frac{2}{16} \cos 4\omega t - \frac{2}{32} \cos 6\omega t - \dots \right\}$$

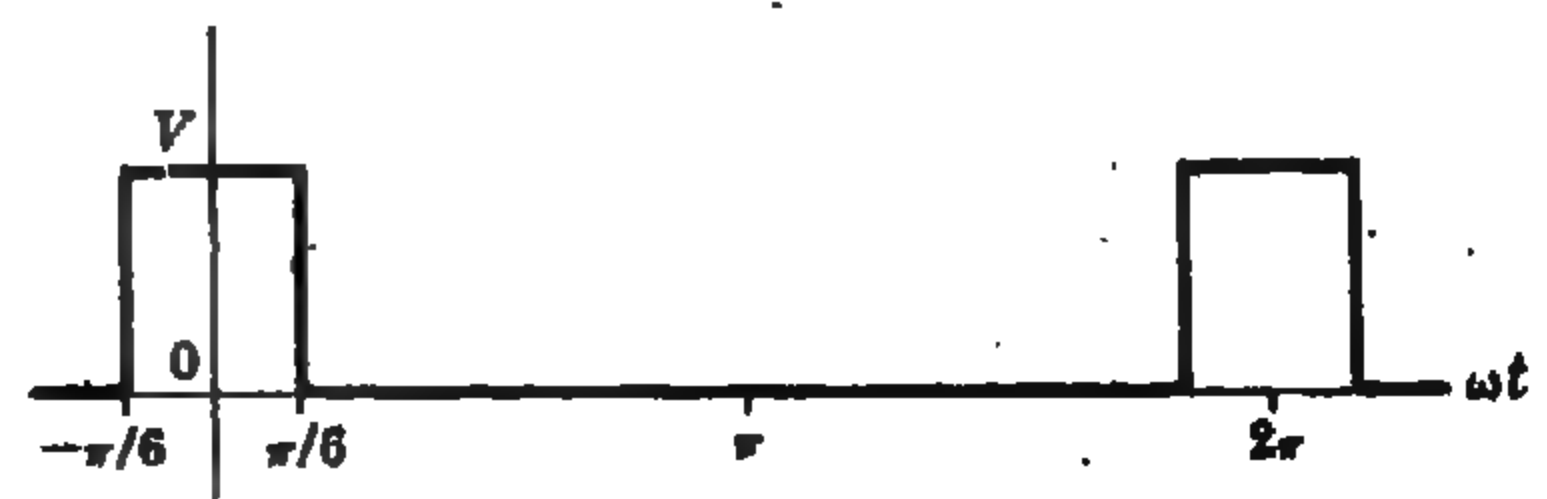
وهذه المتسلسلة متطابقة مع متسلسلة المسألة ١٥ - ٥ فيما عدا الحد الأساسى الذى له إشارة سالبة في هذه المتسلسلة . ومن الواضح أن الطيف مطابق لما في الشكل ١٥ - ٢٤ .

١٥ - ٧ أوجد متسلسلة فوريير المثلثية للنضبة المستطيلة الموضحة في الشكل ١٥ - ٢٦ وارسم الطيف .

بوضع نقطة أصل المحاور كما في الشكل تكون الموجه زوجية وبذلك فإن المتسلسلة تحتوى على حدود جيب تامة فقط بالإضافة إلى حد ثابت . وتستخدم الدورة من $-\pi$ إلى $+\pi$ في حساب قيم التكاملات وقيمة الدالة تساوى صفرأ فيما عدا في الفترة من $-\pi/6$ إلى $+\pi/6$.



شكل ١٥ - ٢٧



شكل ١٥ - ٢٦

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} V d(\omega t) = \frac{V}{3}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} V \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{6}$$

بما أن $\sin n\pi/6 = 1/2, \sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2, 1/2, 0, -1/2, \dots$ عندما $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ على الترتيب،
فالمتسلسلة هي

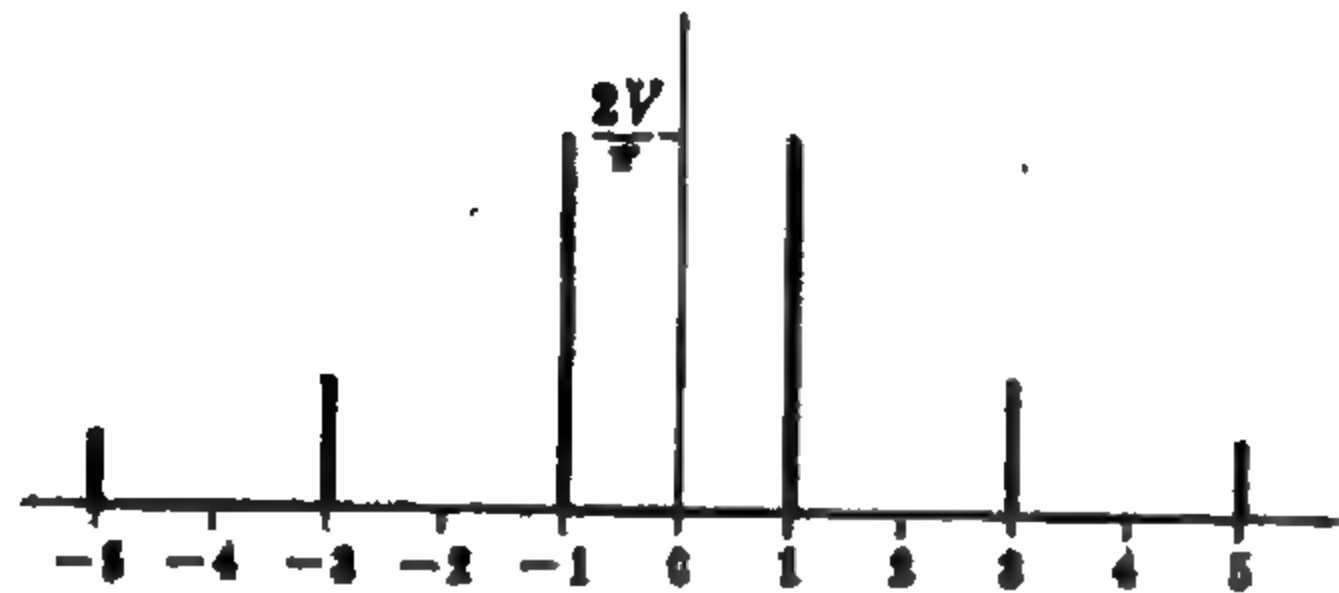
$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \cos 2\omega t + 1 \left(\frac{1}{3} \right) \cos 3\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{4} \right) \cos 4\omega t \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \right) \cos 5\omega t - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right) \cos 7\omega t - \dots \right\}$$

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi/6) \cos n\omega t \quad \text{أو}$$

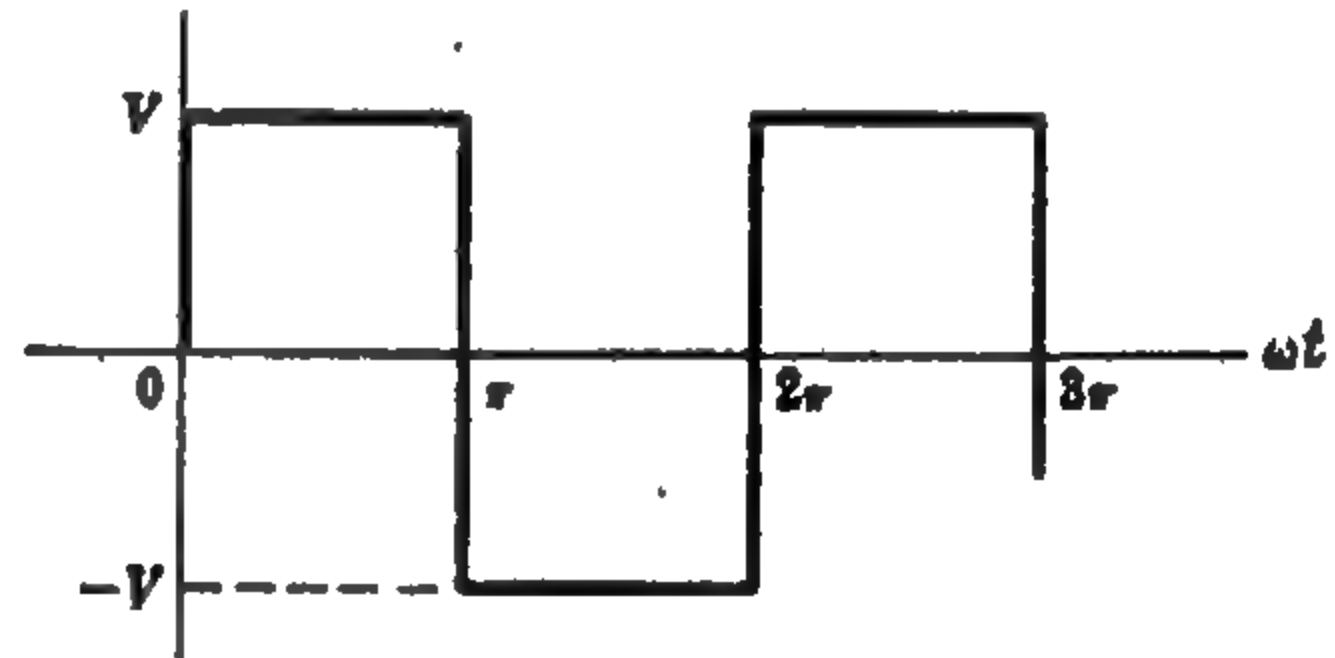
والطيف الخطي الموضح في الشكل ١٥-٢٧ يتناقص ببطء جدا لهذه الموجة، حيث أن المتسلسلة تتقارب ببطء جدا إلى الدالة. من الأشياء التي لها اهتمام خاص حقيقة أن سعات الترددات الثامن والتاسع والعاشر تزداد عن سعة التردد السابع. ونجد للموجات البسيطة السابق اعتبارها أن سعات الترددات العالية تتناقص باستمرار.

١٥-٨ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للموجة المربعة الموضحة في الشكل ١٥-٢٨. وارسم طيفها الخطي.

أوجد معاملات المتسلسلة المثلثية وقارنها بالمسألة ١٥-١.



شكل ١٥ - ٢٦



شكل ١٥ - ٢٨

في الفترة $-\pi < \omega t < 0$ نجد أن $f(t) = -V$ وفي الفترة $0 < \omega t < \pi$ نجد أن $f(t) = V$.
والقيمة المتوسطة للموجة تساوي صفرا. والموجة فردية، إذن المعاملات A_n تخيلية تماما.

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-V) e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{\pi} V e^{-jn\omega t} d(\omega t) \right\} \\ = \frac{V}{2\pi} \left\{ - \left[\frac{1}{(-jn)} e^{-jn\omega t} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{1}{(-jn)} e^{-jn\omega t} \right]_0^{\pi} \right\} \\ = \frac{V}{(-j2\pi n)} (-e^0 + e^{jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^0) = j \frac{V}{n\pi} (e^{jn\pi} - 1)$$

عندما n زوجية نجد $e^{jn\pi} = +1$ و $A_n = 0$ ، وعندما n فردية نجد أن $e^{jn\pi} = -1$ و $A_n = -j(2V/n\pi)$ ومتسلسلة فوريير المطلوبة هي

$$f(t) = \dots + j \frac{2V}{3\pi} e^{-j3\omega t} + j \frac{2V}{\pi} e^{-j\omega t} - j \frac{2V}{\pi} e^{j\omega t} - j \frac{2V}{3\pi} e^{j3\omega t} - \dots$$

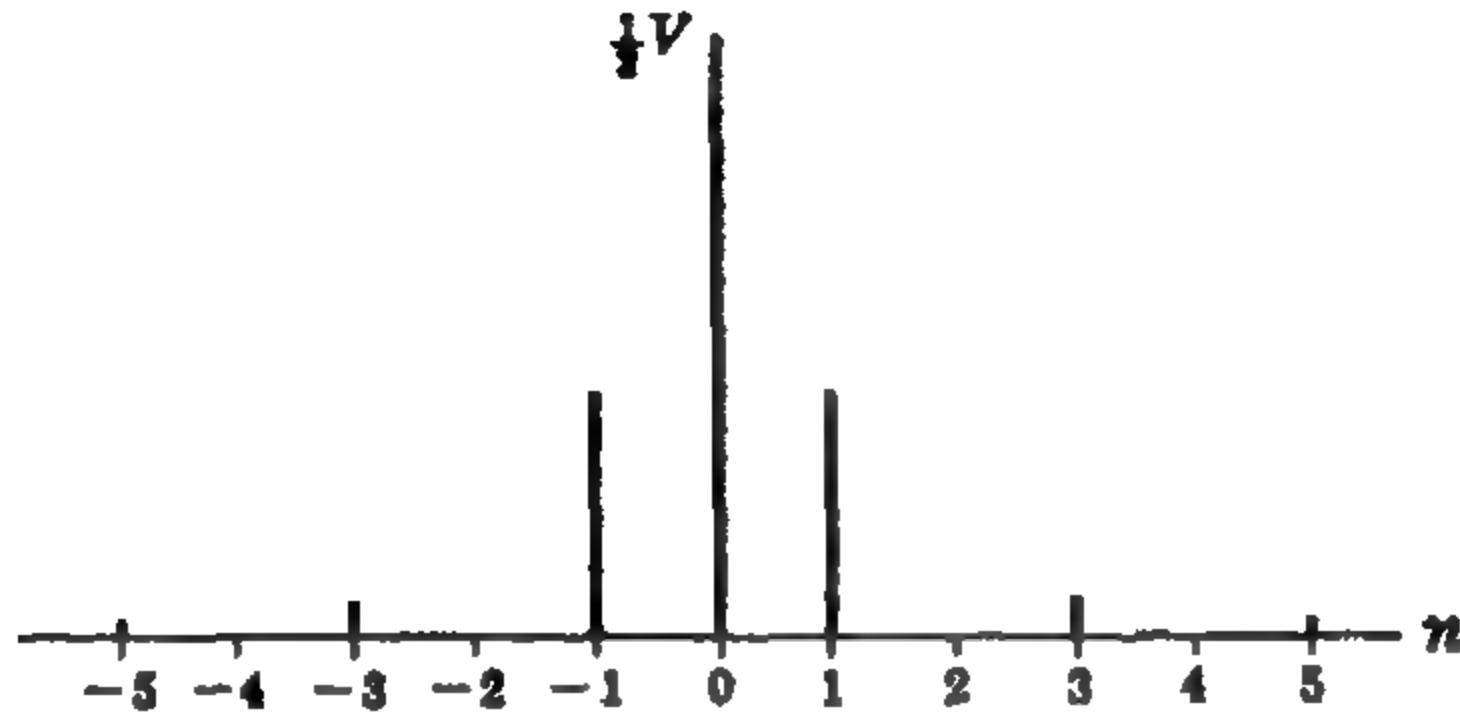
ويوضح الطيف في الشكل ١٥ - ٢٩ سعات لذبذبات موجبة وسالبة معا . ويجمع القيم عند $+n$ و $-n$ ينتج السعة المرسومة للمتسلسلة ذات النسب المثلثية في الشكل ١٥ - ١٦ . معاملات الجيب تمام في المتسلسلة المثلثية هي

$$a_n = A_n + A_{-n} = -j\frac{2V}{n\pi} + \left(-j\frac{2V}{(-n\pi)}\right) = 0$$

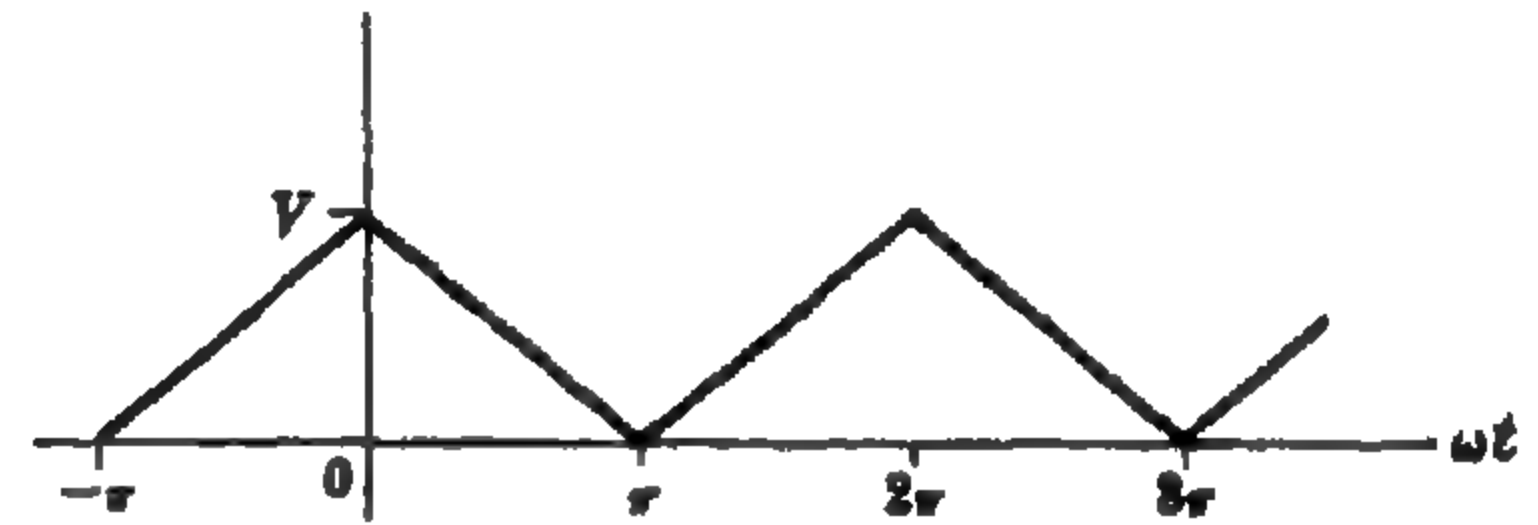
$$b_n = j[A_n - A_{-n}] = j\left[-j\frac{2V}{n\pi} + j\frac{2V}{(-n\pi)}\right] = \frac{4V}{n\pi}$$

وهذا يتفق مع معاملات المتسلسلة المثلثية التي حصلنا عليها في المسألة ١٥ - ١ .

١٥ - ٩ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للموجة المثلثية الموضحة في الشكل ١٥ - ٣٠ وارسم الطيف .



شكل ١٥ - ٣١



شكل ١٥ - ٣٠

مجد في الفترة $-\pi < \omega t < 0$ أن $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$ وفي الفترة $0 < \omega t < \pi$ أن $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$ والموجة زوجية وعلى ذلك فإن معاملات A_n حقيقية تماماً . والقيمة المتوسطة بالفحص هي $V/2$.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 [V + (V/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^\pi [V - (V/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left\{ \int_{-\pi}^0 \omega t e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^\pi (-\omega t) e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_{-\pi}^\pi \pi e^{-jn\omega t} d(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left\{ \left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2} (-jn\omega t - 1) \right]_{-\pi}^0 - \left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2} (-jn\omega t - 1) \right]_0^\pi \right\} = \frac{V}{\pi^2 n^2} [1 - e^{jn\pi}] \end{aligned}$$

ونجد لقيم n الزوجية أن $e^{jn\pi} = +1$ و $A_n = 0$ ولقيم n الفردية أن $A_n = 2V/\pi^2 n^2$. إذن فالمتسلسلة هي

$$f(t) = \dots + \frac{2V}{(-3\pi)^2} e^{-j3\omega t} + \frac{2V}{(-\pi)^2} e^{-j\omega t} + \frac{V}{2} + \frac{2V}{(\pi)^2} e^{j\omega t} + \frac{2V}{(3\pi)^2} e^{j3\omega t} + \dots$$

والطيف موضح في الشكل ١٥ - ٣١ بخطين عند $+n$ و $-n$ وعند إضافتهما نحصل على نفس السعة في طيف الشكل ١٥ - ١٨ .

ومعاملات المتسلسلة المثلثية هي ولقيم n الفردية فقط .

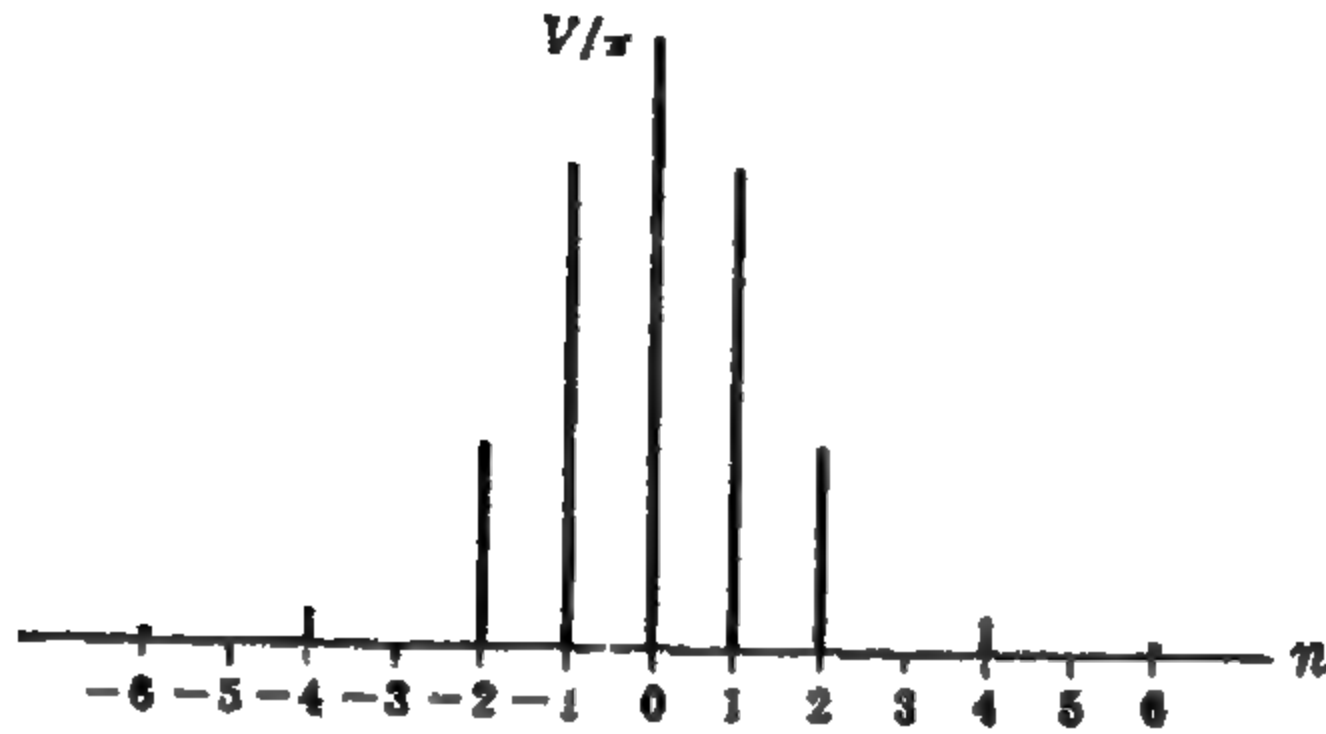
$$a_n = A_n + A_{-n} = \frac{2V}{\pi^2 n^2} + \frac{2V}{\pi^2 (-n)^2} = \frac{4V}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = j[A_n - A_{-n}] = j\left[\frac{2V}{\pi^2 n^2} - \frac{2V}{\pi^2 (-n)^2}\right] = 0$$

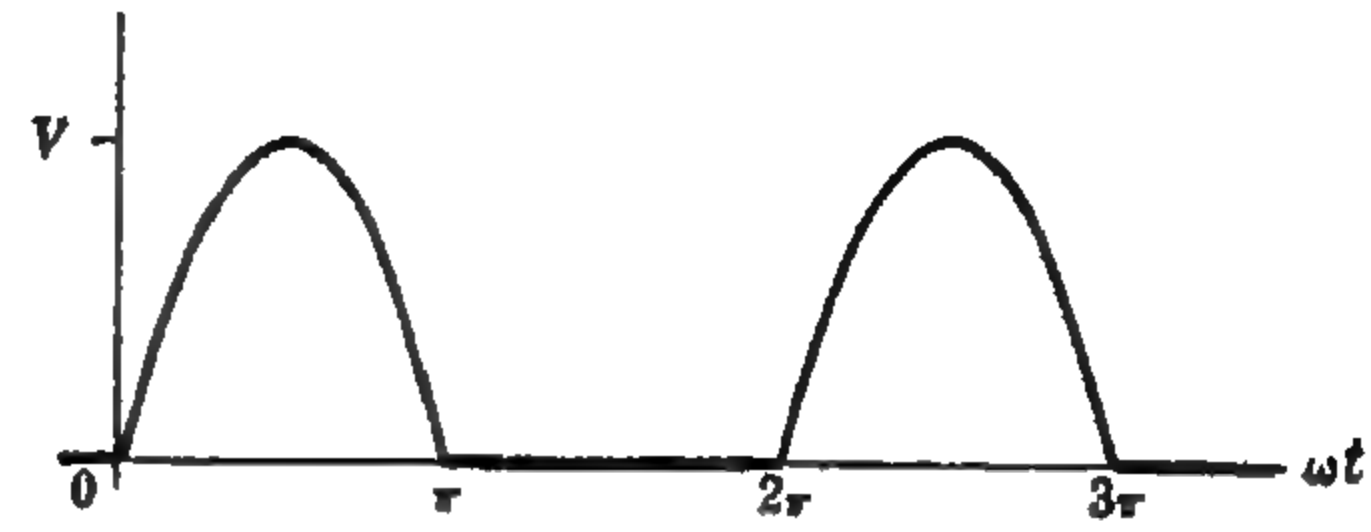
وهذه المعاملات تتفق مع نتيجة المسألة ١٥ - ٢ .

١٥ - ١٥ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للموجة الجيبية المقومة تقوياً نصف موجي والموضحة في الشكل ١٥-٣٢ .

نجد في الفترة $0 < \omega t < \pi$ أن $f(t) = V \sin \omega t$ ونجد في الفترة من π إلى 2π أن $f(t) = 0$.
إذن



شكل ١٥ - ٣٣



شكل ١٥ - ٣٢

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t e^{-jn\omega t} d(\omega t) \\ &= \frac{V}{2\pi} \left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(1-n^2)} (-jn \sin \omega t - \cos \omega t) \right]_0^\pi = \frac{V}{2\pi(1-n^2)} (e^{-jn\pi} + 1) \end{aligned}$$

ونجد لقيم n الزوجية أن $A_n = V/\pi(1-n^2)$ ولقيم n الفردية أن $e^{-jn\pi} = -1$ و $A_n = 0$. وعلى ذلك فعندما $n = +1$ فإن تعبير A_n يصبح غير محدد . يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال ، أى أننا نفاضل بسط ومقام الكسرة

$$A_{-1} = j(V/4) \text{ كل على حدة بالنسبة إلى } n \text{ ثم نجعل } n \text{ تقرب من } 1 \text{ فينتج أن } A_{-1} = j(V/4)$$

$$A_1 = -j(V/4) \text{ و}$$

والقيمة المتوسطة هي

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t d(\omega t) = \frac{V}{2\pi} [-\cos \omega t]_0^\pi = \frac{V}{\pi}$$

إذن متسلسلة فوريير الأسية هي

$$f(t) = \dots - \frac{V}{15\pi} e^{-j4\omega t} - \frac{V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + j\frac{V}{4} e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} - j\frac{V}{4} e^{j\omega t} - \frac{V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi} e^{j4\omega t} - \dots$$

من المهم ملاحظة أنه يوجد معاملان تخيلان فقط في المتسلسلة عند $n = \pm 1$ وأن الحد الجبري الوحيد في المتسلسلة

$$\text{المثلثية في المسألة ١٥-٦ له معامل } b_{10} = j[A_1 - A_{-1}] \quad |j| = j(V/4) = \frac{1}{2}V$$

ويوضح الطيف الخطي في الشكل ١٥-٣٣ السعات الترددية للموجة وهنا يجب مقارنتها بالشكل ١٥-٢٤ .

١٥-١١ أوجد القدرة المتوسطة في المقاومة $R = 10 \Omega$ علماً بأن التيار هو

$$i = 10 \sin \omega t + 5 \sin 3\omega t + 2 \sin 5\omega t \text{ amperes.}$$

القيمة الفعالة للتيار هي $I = \sqrt{\frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(5)^2 + \frac{1}{2}(2)^2} = \sqrt{64.5} = 8.03 \text{ A}$ إذن القدرة المتوسطة هي

$$P = I^2 R = (64.5)10 = 654 \text{ W}$$

طريقة أخرى :

القدرة الكلية هي مجموع قدرات الترددات المختلفة وتعطى بالعلاقة $\frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos \theta$. ولكن زاوية الطور بين الجهد عبر المعاوقة والتيار هي $\theta_R = 0$ وذلك لكل الترددات . إذن

$$v_R = Ri = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t + 20 \sin 5\omega t \text{ volts}$$

$$P = \frac{1}{2}(10)(100) + \frac{1}{2}(5)(50) + \frac{1}{2}(2)(20) = 645 \text{ W.}$$

١٥ - ١٢ أوجد القدرة المتوسطة المعطاة لشبكة كهربائية علماً بأن الجهد والتيار الناتج يعطيان بالمعادلتين .

$$v = 50 + 50 \sin 5 \times 10^3 t + 30 \sin 10^4 t + 20 \sin 2 \times 10^4 t \text{ volts}$$

$$i = 11.2 \sin(5 \times 10^3 t + 63.4^\circ) + 10.6 \sin(10^4 t + 45^\circ) + 8.97 \sin(2 \times 10^4 t + 26.6^\circ) \text{ amperes}$$

متوسط القدرة الكلية هي مجموع القدرة الناتجة عن كل تردد .

$$P = \frac{1}{2}(50)(11.2) \cos 63.4^\circ + \frac{1}{2}(30)(10.6) \cos 45^\circ + \frac{1}{2}(20)(8.97) \cos 26.6^\circ = 317.7 \text{ W}$$

١٥ - ١٢ أوجد ثابتى دائرة التوالى المكونة من عنصرين علماً بأن الجهد المؤثر والتيار الناتج هما نفسهما المعطيان فى المسألة ١٥ - ٢ .

نجد فى متسلسلة الجهد حداً ثابتاً مقداره 50 ولكن لا يقابله حد فى متسلسلة التيار ، وهذا يعنى أن أحد العنصرين مكثف . وبما أنه توجد قدرة معطاة للدائرة فإن العنصر الآخر يجب أن يكون مقاومة .

$$I = \sqrt{\frac{1}{2}(11.2)^2 + \frac{1}{2}(10.6)^2 + \frac{1}{2}(8.97)^2} = 12.6 \text{ A}$$

$$R = P/I^2 = 317.7/159.2 = 2 \text{ ohms}$$

عند $\omega = 5 \times 10^3 \text{ rad/sec}$ نجد أن $|Z| = V_{\max}/I_{\max} = 50/11.2 = 4.47 \Omega$. وبما أن

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2}, X_C = \sqrt{(4.47)^2 - 4} = 4 \Omega$$

$$C = 1/(\omega X_C) = 1/(4 \times 5 \times 10^3) = 50 \mu F \text{ و } X_C = 1/(\omega C) \text{ إذن}$$

وعلى هذا فإن دائرة التوالى تتكون من عنصرين أحدهما مقاومة قيمتها 2Ω والآخر مكثف سعة $50 \mu F$.



شكل ١٥ - ٢٤

١٥ - ١٤ تؤثر موجة الجهد الموضحة فى الشكل ١٥ - ٢٤ على

دائرة توالى تتكون من $R=2000 \Omega$ و $L=10 \text{ H}$.

استخدم متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية لتحصل

على الجهد عبر المعاوقة . ارسم الطيف الخطى للجهد

المؤثر و v_R لتبين تأثير الحث على الترددات .

$$\omega = 377 \text{ rad/sec}$$

القيمة المتوسطة للجهد المؤثر هي V_{\max}/π ، كما في المسألة ١٥-٥ . والدالة الموجية زوجية وعلى ذلك فالمتسلسلة تحتوي فقط على حدود جيب تمام بمعاملات يمكن الحصول عليها بحساب التكامل التالي .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos \omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{600}{\pi(1-n^2)} \cos n\pi/2$$

$\cos n\pi/2$ له قيمة 1 - عندما $n = 2, 6, 10, \dots$ و 1 + عندما $n = 4, 8, 12, \dots$ وعندما تكون n فردية فإن $\cos n\pi/2 = 0$. وعلى هذا فعندما $n = 1$ يكون التعبير السابق غير محدد ويجب حساب قيمته على حدة .

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos^2 \omega t d(\omega t) = \frac{300}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{2}$$

وعلى هذا فتسلسلة الجهد تكون على الشكل

$$v = \frac{300}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{8} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{85} \cos 6\omega t - \dots \right\} \text{ volts}$$

| n | $n\omega$ | R | $n\omega L$ | $ Z $ | θ |
|-----|-----------|-----|-------------|--------|----------|
| 0 | 0 | 2 k | 0 | 2 k | 0° |
| 1 | 377 | 2 k | 3.77 k | 4.26 k | 62° |
| 2 | 754 | 2 k | 7.54 k | 7.78 k | 75.1° |
| 4 | 1508 | 2 k | 15.08 k | 15.2 k | 82.45° |
| 6 | 2262 | 2 k | 22.62 k | 22.6 k | 84.92° |

المعاوقة الكلية للدائرة المتصلة على التوالي هي $Z = R + jn\omega L$ وتحسب عند كل تردد في معادلة الجهد . ويوضح الجدول المرفق النتائج المحسوبة .

تحتوى متسلسلة التيار على حدود لها معاملات تساوى المعاملات الموجودة في متسلسلة الجهد مقسومة على Z وحدود التيار المناظرة لاحقة بزاوية مقدارها θ .

$$n = 0, I_0 = \frac{300/\pi}{2 \text{ k}} \text{ amperes;}$$

$$n = 1, I_1 = \frac{300/2}{4.26 \text{ k}} \cos (\omega t - 62^\circ) \text{ amperes;}$$

$$n = 2, I_2 = \frac{600/3\pi}{7.78 \text{ k}} \cos (2\omega t - 75.1^\circ) \text{ amperes; etc.}$$

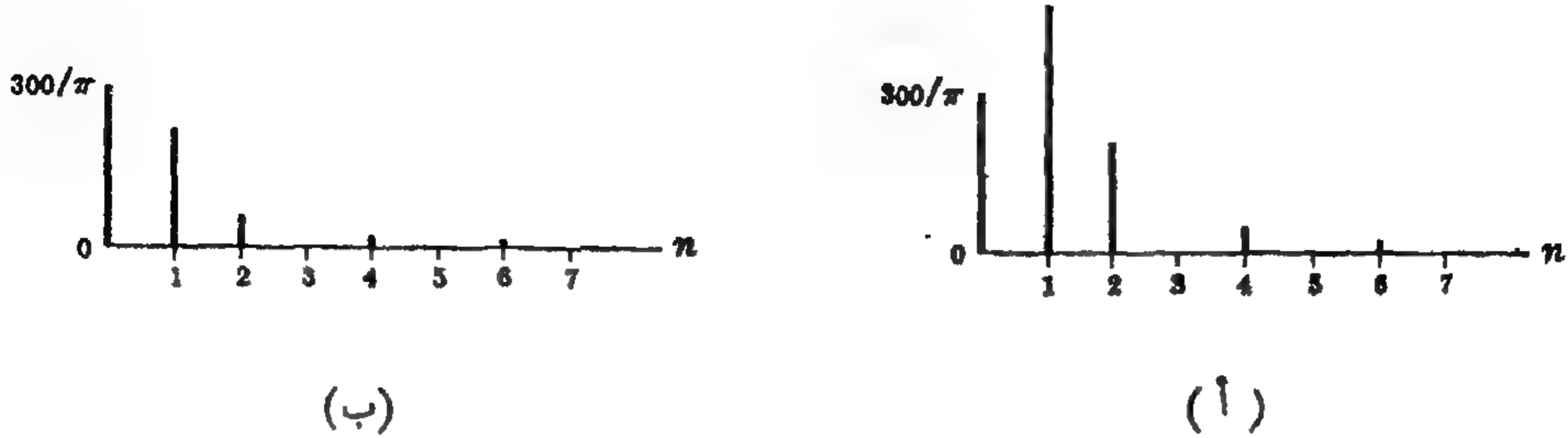
إذن متسلسلة التيار هي

$$i = \frac{300}{2 \text{ k} \pi} + \frac{300}{(2)4.26 \text{ k}} \cos (\omega t - 62^\circ) + \frac{600}{3\pi(7.78 \text{ k})} \cos (2\omega t - 75.1^\circ) \\ - \frac{600}{15\pi(15.2 \text{ k})} \cos (4\omega t - 82.45^\circ) + \frac{600}{35\pi(22.6 \text{ k})} \cos (6\omega t - 84.92^\circ) - \dots \text{ amperes}$$

والجهد عبر المقاومة 2 k هو $i(2 \text{ k})$ أو

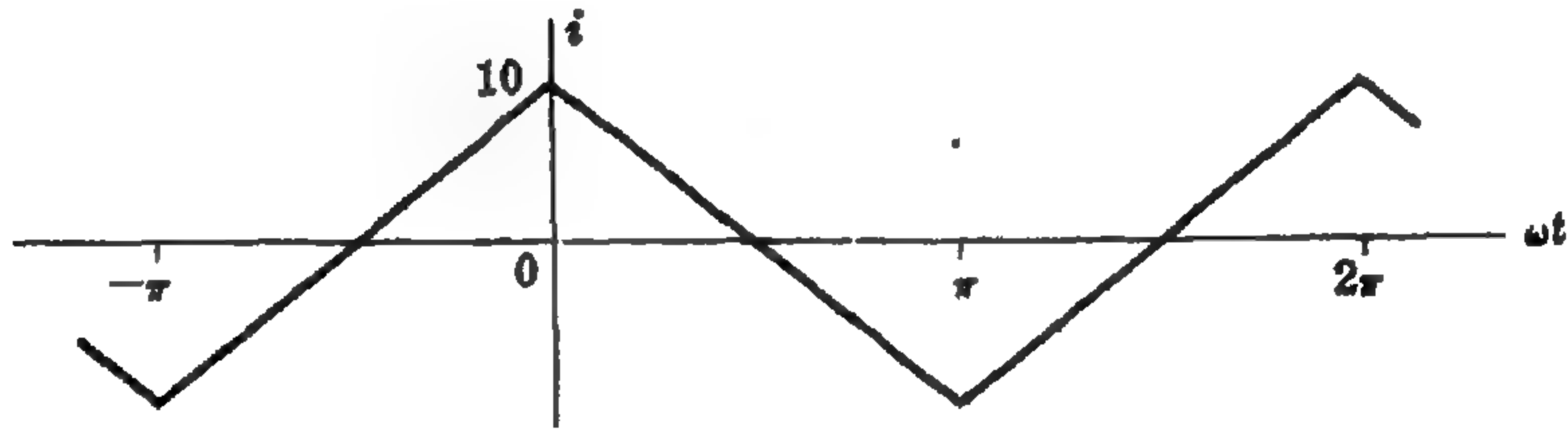
$$v_R = 95.5 + 70.4 \cos (\omega t - 62^\circ) + 16.4 \cos (2\omega t - 75.1^\circ) \\ - 1.67 \cos (4\omega t - 82.45^\circ) + 0.483 \cos (6\omega t - 84.92^\circ) - \dots \text{ volts}$$

ونرى بوضوح من الشكل ١٥-٣٥ كيف أن السعة الترددية لطيف الجهد المؤثر v_R قد قلت بفعل الحث 10 H المتصل على التوالي .



شكل ١٥ - ٣٥

١٥ - ١٥ إذا كان التيار المار في الحث $L = 0.01\text{ H}$ له شكل موجي معطى في الشكل ١٥ - ٣٦ فأوجد المتسلسلة ذات النسب المثلثية للجهد v_L والجهد عبر الحث $\omega = 500\text{ rad/sec}$.



شكل ١٥ - ٣٦

القيمة المتوسطة للتيار تساوى صفراً والشكل الموجي زوجي . وعلى هذا فإن المتسلسلة تحتوي فقط على حدود جيب تمام . ونجد في الفترة $-\pi < \omega t < 0$ ، أن $i = 10 + (20/\pi)\omega t$ وفي الفترة $0 < \omega t < \pi$ أن $i = 10 - (20/\pi)\omega t$.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 [10 + (20/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) + \int_0^{\pi} [10 - (20/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) \right\}$$

$$= \frac{40}{\pi^2 n^2} (1 - \cos n\pi) = \frac{80}{\pi^2 n^2}$$

وذلك لقيم n الفردية فقط .

إذن متسلسلة التيار هي

$$i = \frac{80}{\pi^2} \left\{ \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \frac{1}{49} \cos 7\omega t + \dots \right\}$$

والجهد عبر الحث هو

$$v_L = L \frac{di}{dt} = 0.01 \left(\frac{80}{\pi^2} \right) \frac{d}{dt} \left\{ \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right\}$$

$$= \frac{400}{\pi^2} \left\{ -\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{5} \sin 5\omega t - \frac{1}{7} \sin 7\omega t - \dots \right\} \text{ volts}$$

ويمكن الحصول على الشكل الموجي بالتراكب ، ولكن هذه المتسلسلة تختلف عن مثيلتها في المسألة ١٥ - ١ .
بإشارة سالبة . وعلى هذا فإن V_L موجة مربعة ، وسالب الشكل الموجي معطى في الشكل ١٥ - ١٥

مسائل إضافية

١٥ - ١٦ ركب الشكل الموجي لمتسلسلة فوريير المثلثية .

$$f(t) = \frac{8V}{\pi^2} \{ \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \}$$

١٥ - ١٧ ركب الشكل الموجي لمتسلسلة فوريير .

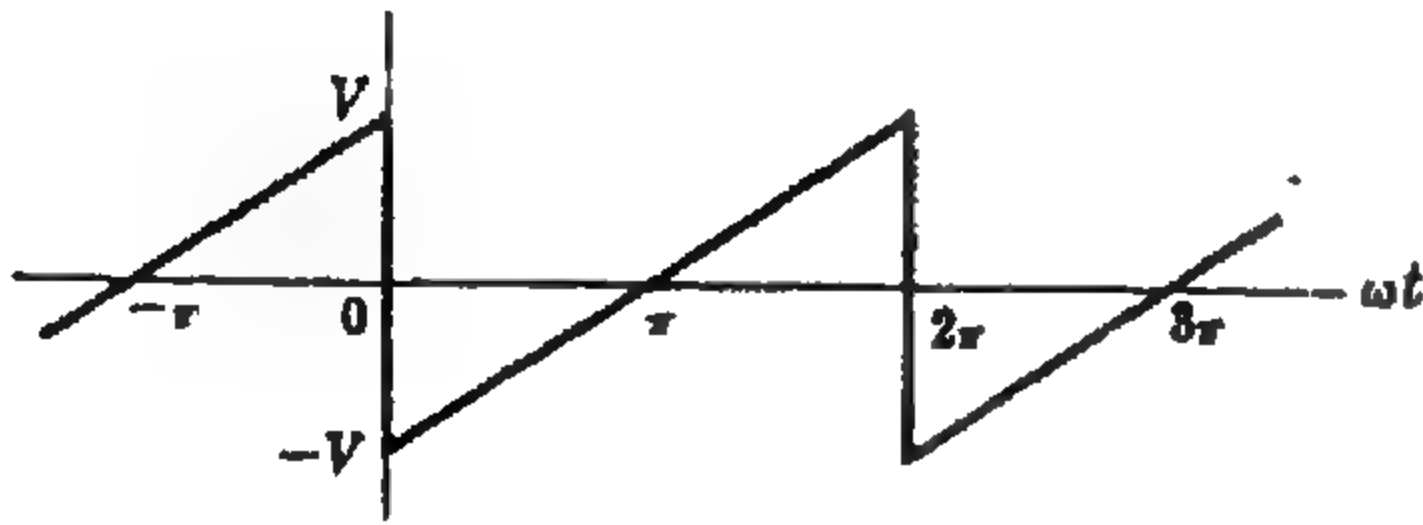
$$f(t) = 5 - \frac{40}{\pi^2} (\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots) \\ + \frac{20}{\pi} (\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots)$$

١٥ - ١٨ ركب الشكل الموجي لمتسلسلة فوريير المعطاة .

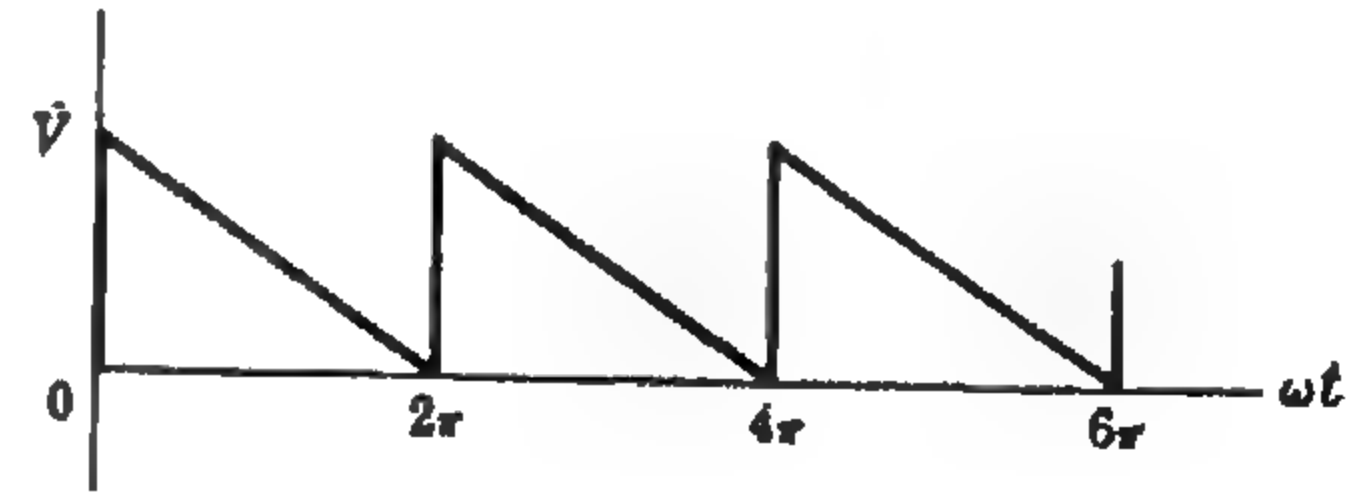
$$f(t) = V \left\{ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \cos \omega t - \frac{1}{3\pi} \cos 2\omega t + \frac{1}{2\pi} \cos 3\omega t - \frac{1}{15\pi} \cos 4\omega t - \frac{1}{6\pi} \cos 6\omega t \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{4} \sin \omega t - \frac{2}{3\pi} \sin 2\omega t + \frac{4}{15\pi} \sin 4\omega t - \dots \right\}$$

١٥ - ١٩ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية لموجة سن المنشار الموضحة في الشكل ١٥-٣٧ وارسم الطيف الخطي .
قارن بالمثال (١) .

$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{V}{\pi} \{ \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \} \quad \text{الجواب :}$$



شكل ١٥ - ٣٨



شكل ١٥ - ٣٧

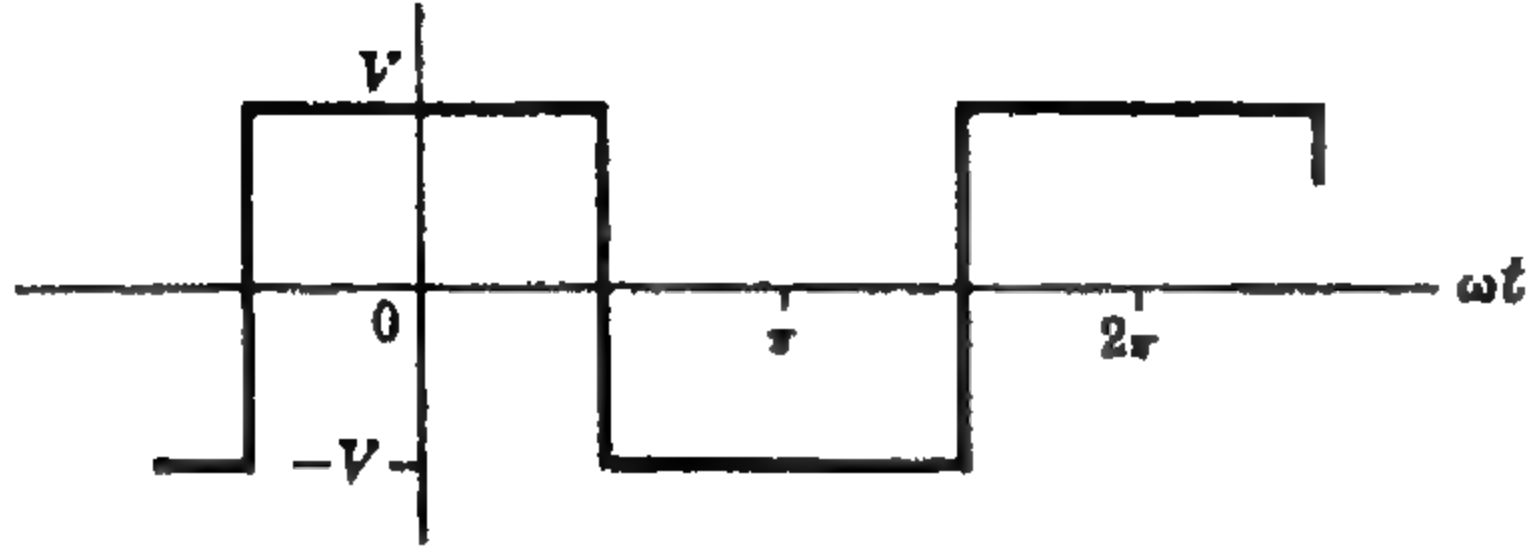
١٥ - ٢٠ أوجد متسلسلة فوريير المثلثية لموجة سن المنشار الموضحة في الشكل ١٥ - ٣٨ وارسم الطيف ، قارن بنتيجة المسألة ١٥ - ٣ .

$$f(t) = \frac{-2V}{\pi} \{ \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots \} \quad \text{الجواب :}$$

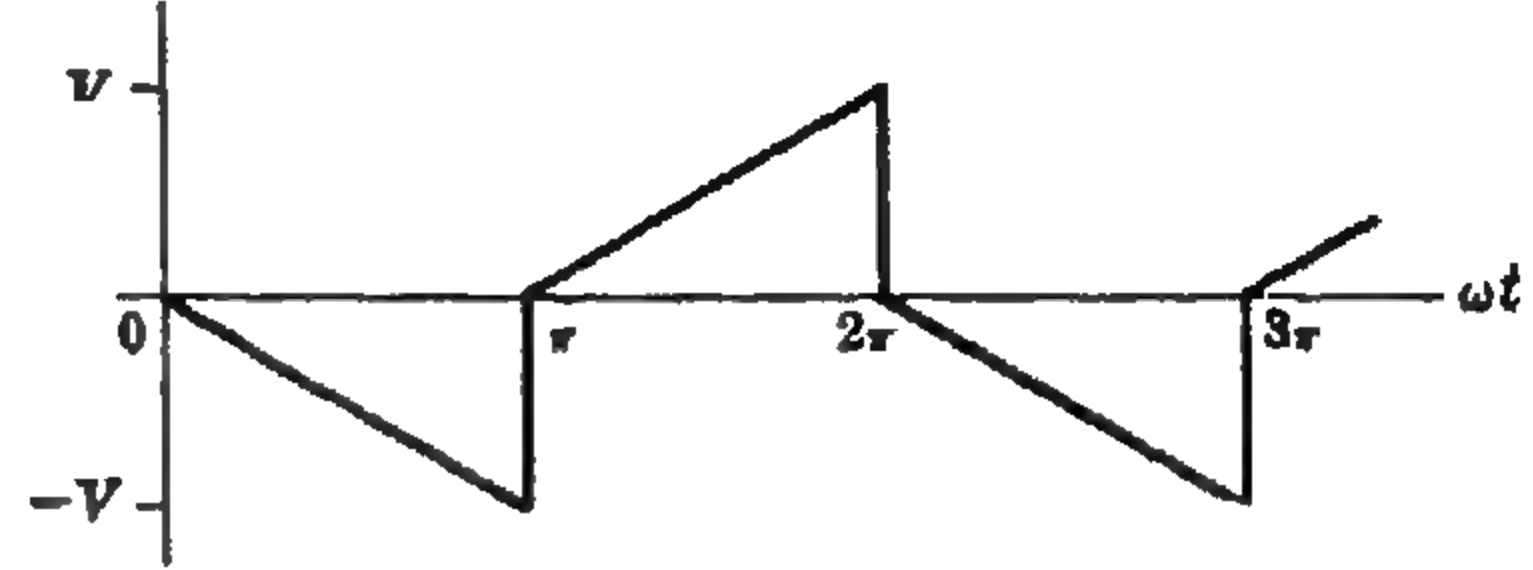
٢١-١٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٣٩ وارسم الطيف الخطي .

$$f(t) = \frac{4V}{\pi^2} \{ \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \} \quad \text{الجواب :}$$

$$- \frac{2V}{\pi} \{ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \}$$



شكل ١٥ - ٤٠



شكل ١٥ - ٣٩

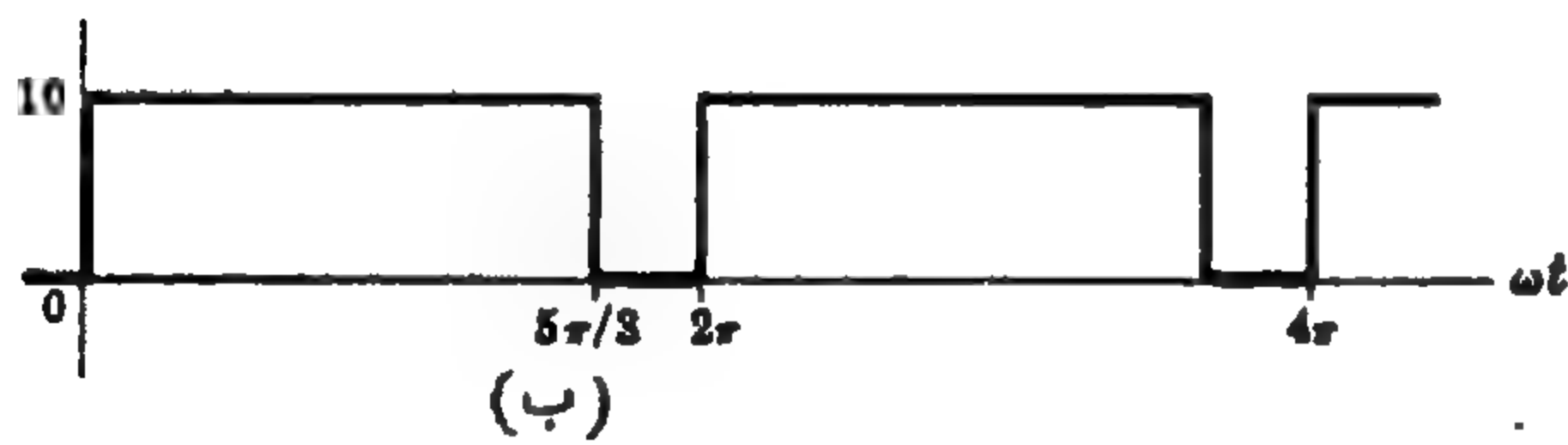
٢٢-١٥ أوجد متسلسلة فوريير المثلثية للموجة المربعة الموضحة في الشكل ١٥-٤٠ وارسم الطيف الخطي . قارن بنتيجة المسألة ١٥-١٠ .

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \{ \cos \omega t - \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t - \frac{1}{49} \cos 7\omega t + \dots \} \quad \text{الجواب :}$$

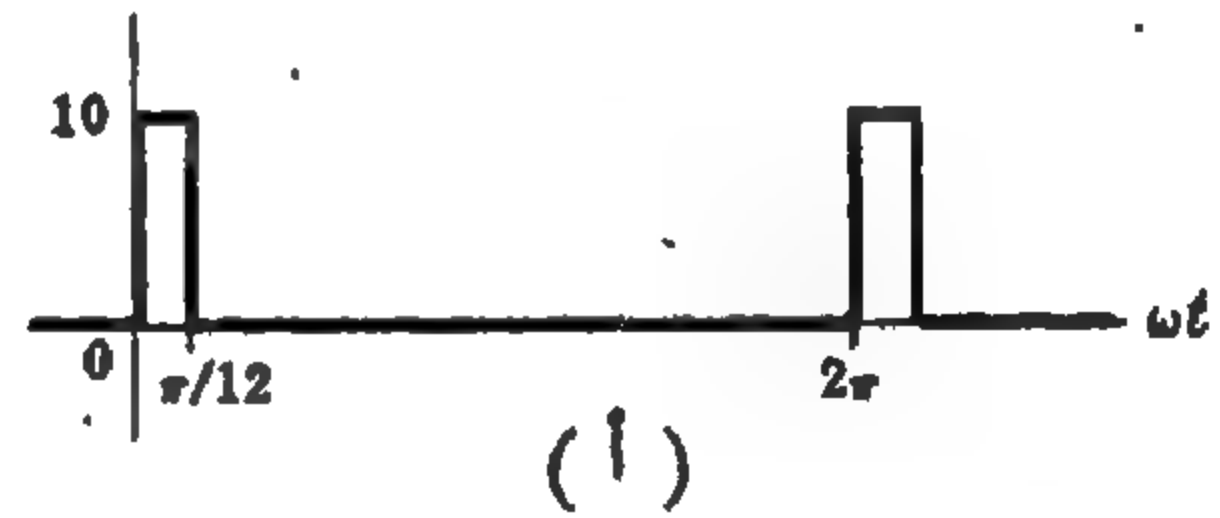
٢٣-١٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٤١ (أ)، (ب) . ارسم طيف كل منهما مع المقارنة .

$$f_1(t) = \frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{10}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{12} \right) \cos n\omega t + \frac{10}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{12} \right) \sin n\omega t \right\} \quad \text{الجواب :}$$

$$f_2(t) = \frac{50}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{10}{n\pi} \left(\sin \frac{n5\pi}{8} \right) \cos n\omega t + \frac{10}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n5\pi}{8} \right) \sin n\omega t \right\}$$



(ب)

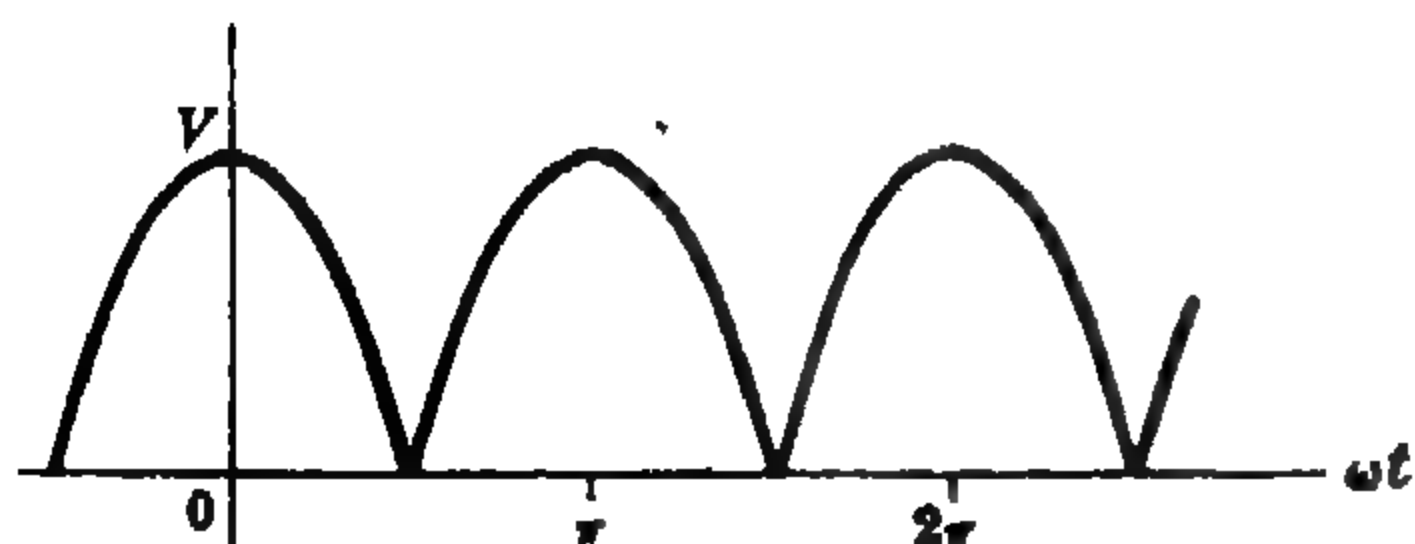


(أ)

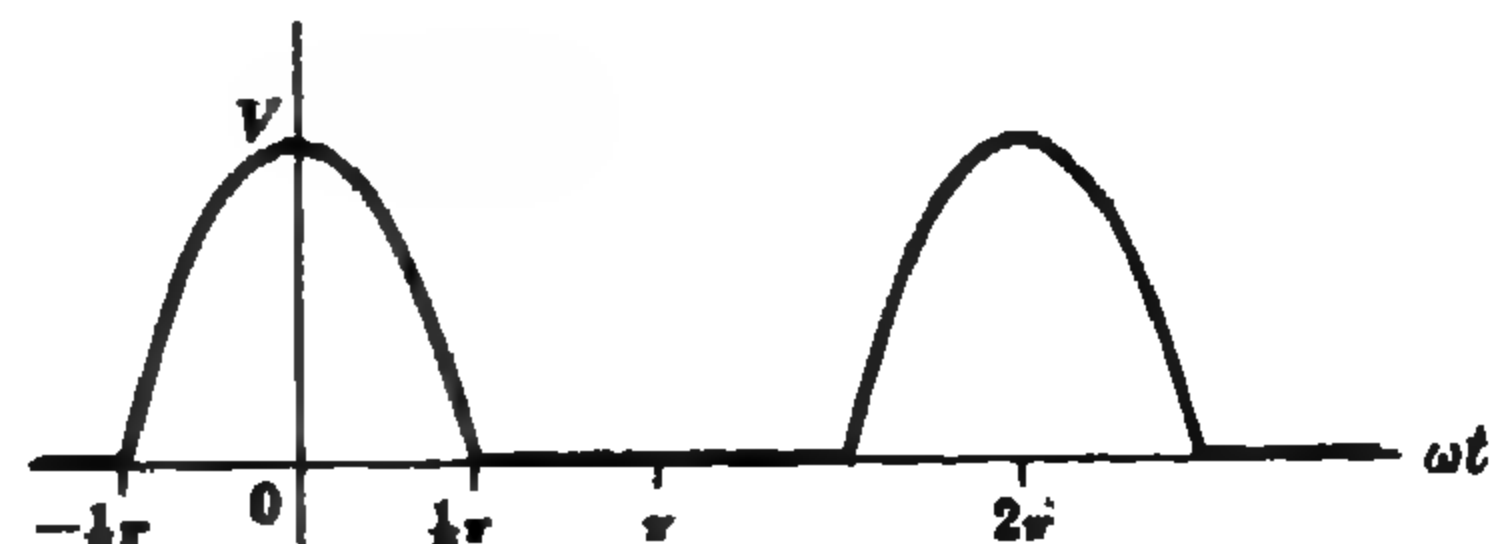
شكل ١٥ - ٤١

٢٤-١٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للموجة الجيبية المقومة نصف تقويم والموضحة في الشكل ١٥-٤٢ وارسم الطيف الخطي . قارن الإجابة بنتيجتي المسألتين ١٥-٥ ، ١٥-٦ .

$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right\} \quad \text{الجواب :}$$



شكل ١٥ - ٤٣



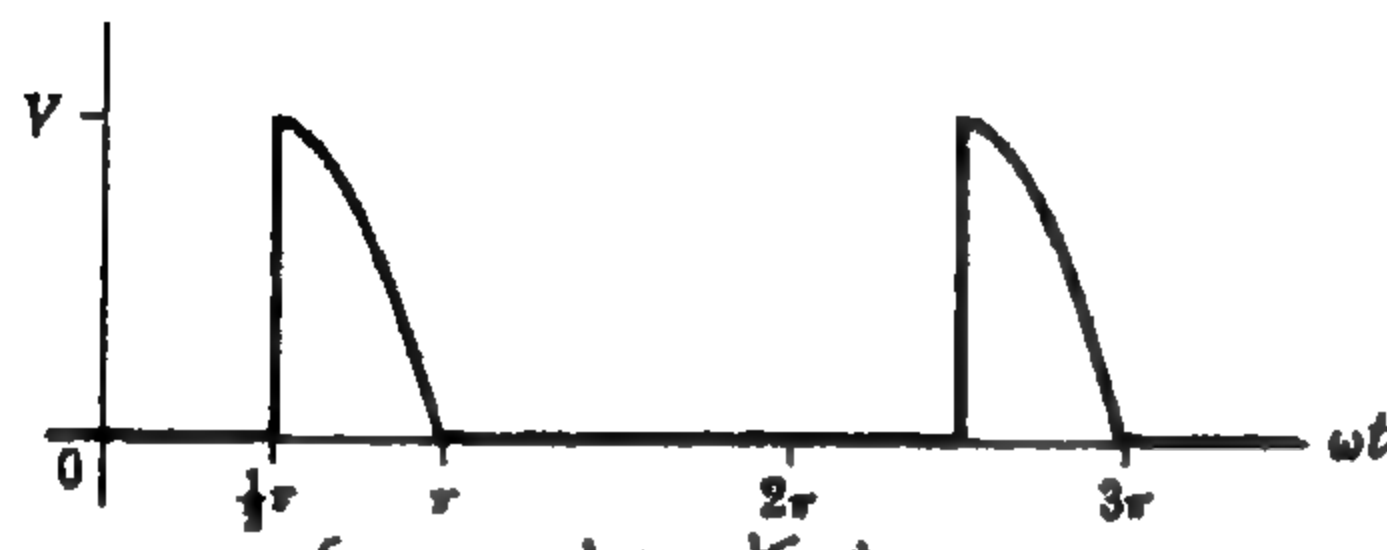
شكل ١٥ - ٤٢

١٥ - ٢٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للموجة المقومة تقويميا كاملا والموضحة في الشكل ١٥-٤٣ وارسم الطيف .

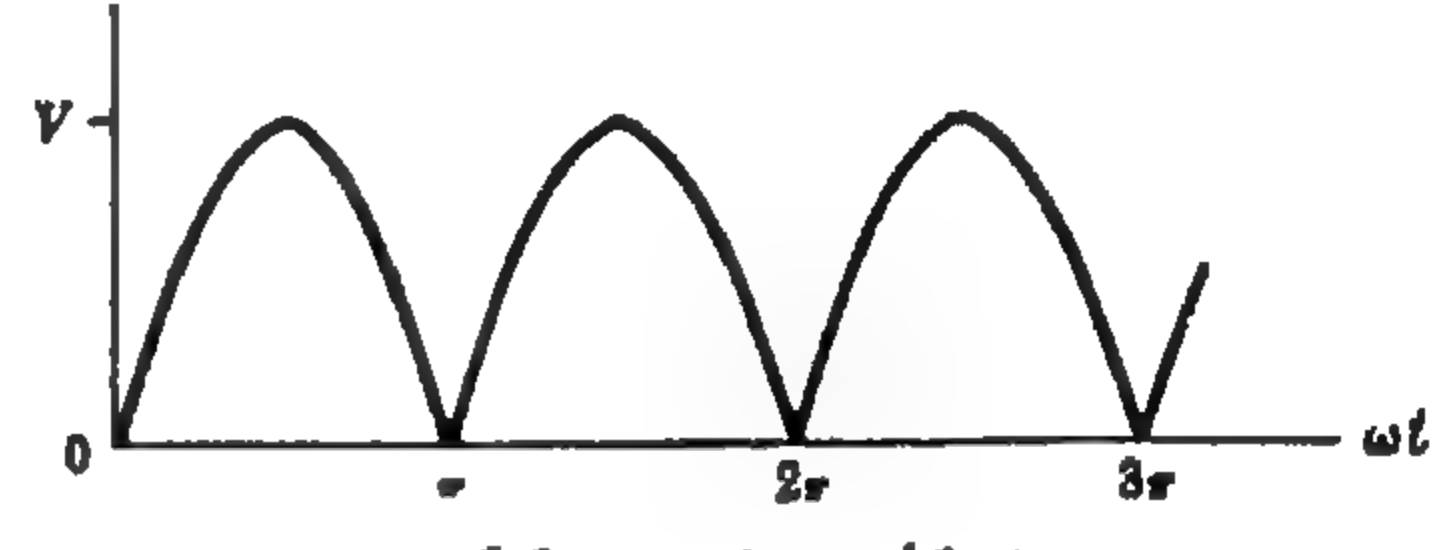
$$f(t) = \frac{2V}{\pi} \{1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots\} \quad \text{الجواب :}$$

١٥ - ٢٦ الشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٤٤ مشابه لما في المسألة ١٥-٢٥ ولكن مع تغيير في موضع نقطة الأصل . أوجد متسلسلة فوريير وقارن بين النتيجةين .

$$f(t) = \frac{2V}{\pi} \{1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots\} \quad \text{الجواب :}$$



شكل ١٥ - ٤٥



شكل ١٥ - ٤٦

١٥ - ٢٧ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للشكل الموجي الموضحة في الشكل ١٥-٤٥ .

$$f(t) = \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V}{\pi(1-n^2)} (\cos n\pi + n \sin n\pi/2) \cos n\omega t$$

$$+ \frac{V}{4} \sin \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{-nV \cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)} \right] \sin n\omega t$$

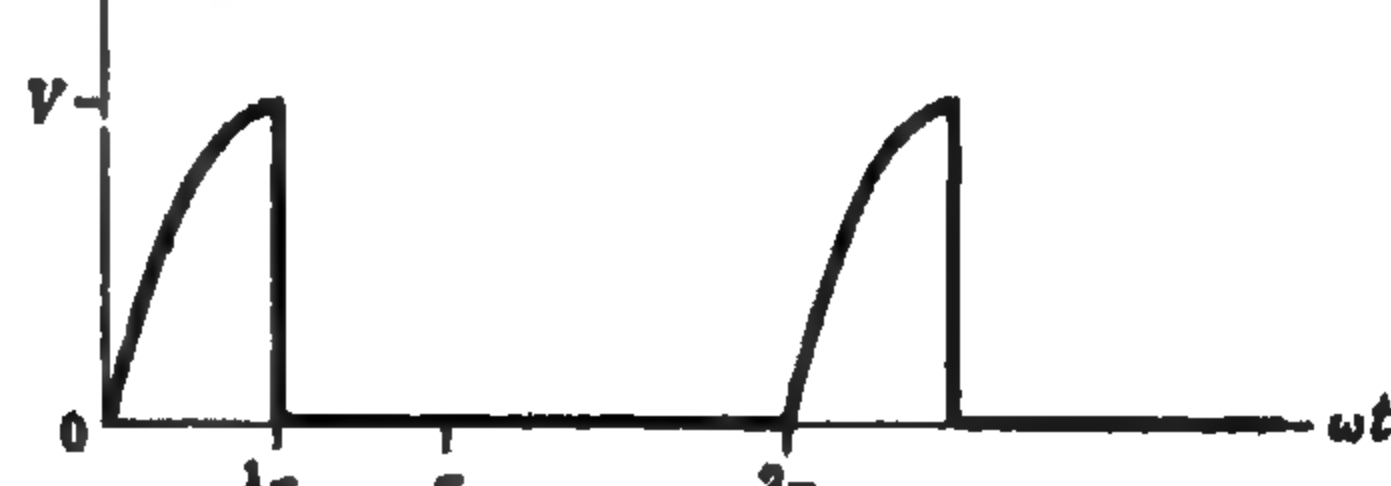
١٥ - ٢٨ أوجد متسلسلة فوريير المثلثية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٤٦ . أضف هذه المتسلسلة لمتسلسلة المسألة ١٥-٢٧ ثم قارن المجموع بالمتسلسلة التي حصلنا عليها في المسألة ١٥-٥٠ .

$$f(t) = \frac{V}{2\pi} + \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V[n \sin n\pi/2 - 1]}{\pi(n^2 - 1)} \cos n\omega t$$

$$+ \frac{V}{4} \sin \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Vn \cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)} \sin n\omega t$$



شكل ١٥ - ٤٧



شكل ١٥ - ٤٨

١٥ - ٢٩ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٤٧ . وارسم الطيف الخطي . حول المعاملات التي حصلت عليها هنا إلى معاملات متسلسلة ذات نسب مثلثية ، ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارنها بنتيجة المسألة ١٥-٤١ .

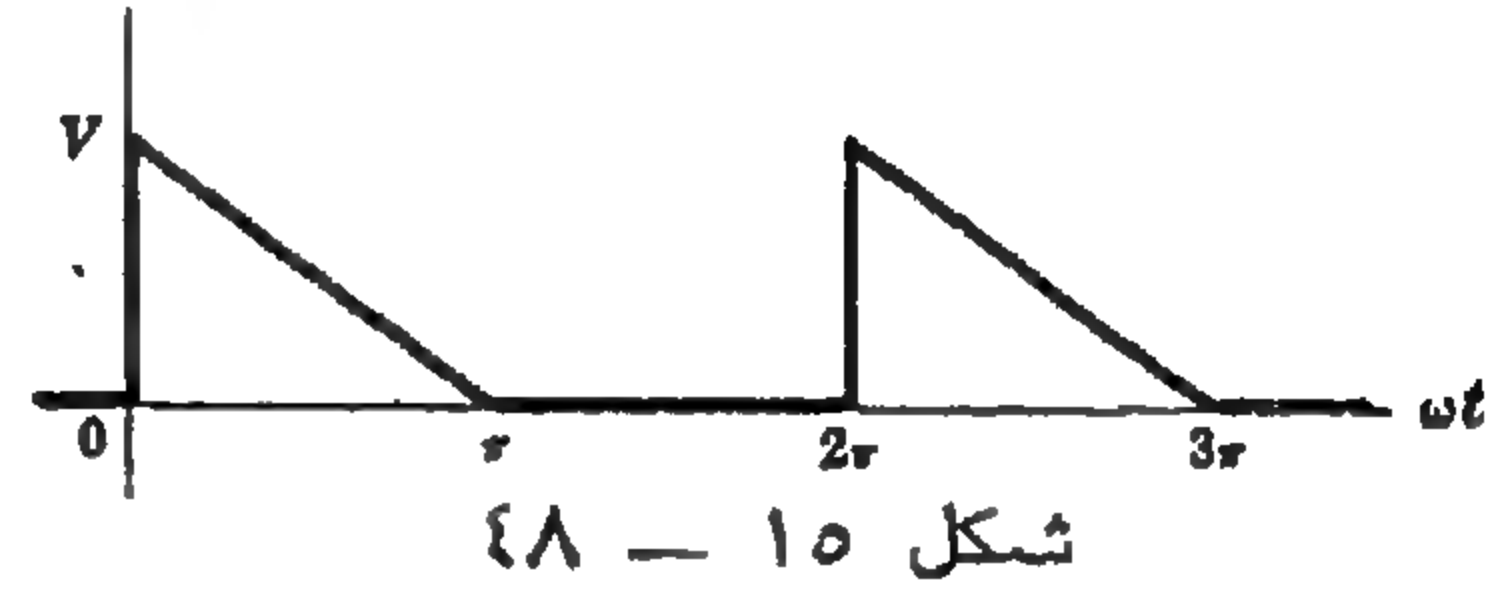
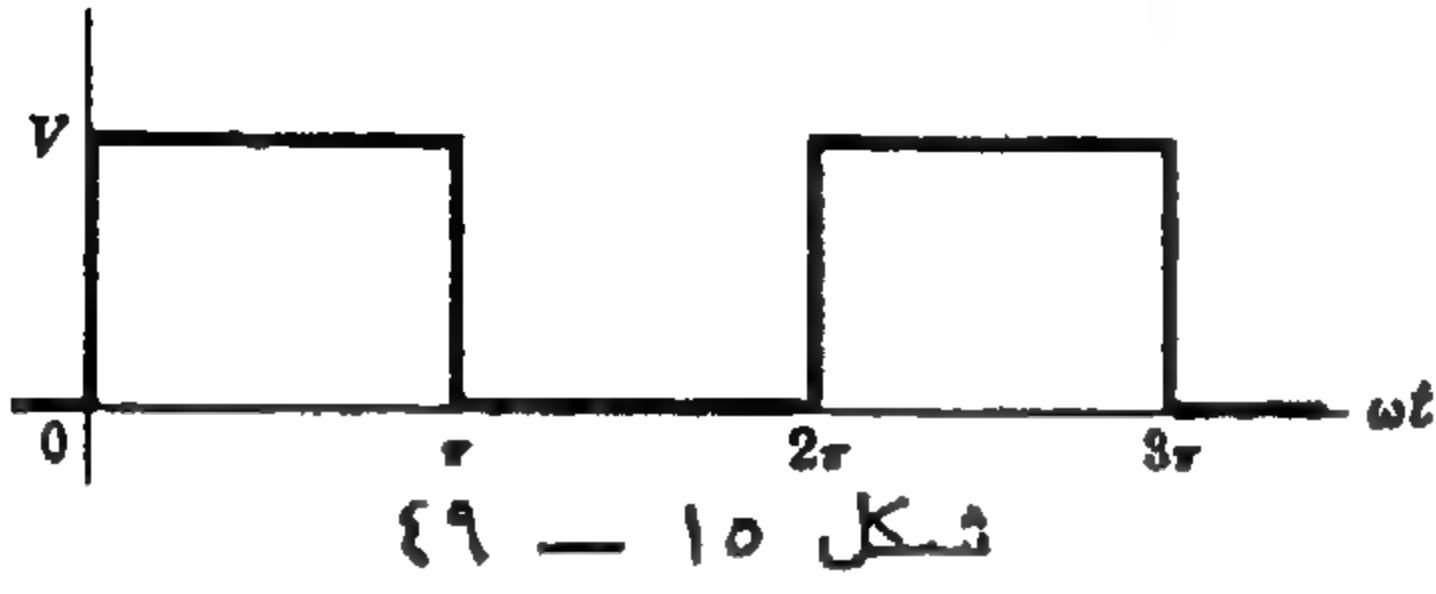
$$f(t) = V \left\{ \dots - \left(\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi} \right) e^{-j3\omega t} - j\frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega t} - \left(\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi} \right) e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi} \right) e^{j\omega t} + j\frac{1}{4\pi} e^{j2\omega t} - \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi} \right) e^{j3\omega t} - \dots \right\}$$

٣٠-١٥ أوجد متسلسلة فوريير للأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٤٨ وارسم الطيف الخطي .

الجواب :

$$f(t) = V \left\{ \dots + \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi} \right) e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega t} + \left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi} \right) e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi} \right) e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi} e^{j2\omega t} + \left(\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi} \right) e^{j3\omega t} + \dots \right\}$$



٣١-١٥ أوجد متسلسلة فوريير للأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٤٩ وارسم الطيف الخطي . أضف متسلسلي المسألتين ٢٩-١٥ ، ٣٠-١٥ الأسيتين إلى بعضهما وقارن المجموع بالمتسلسلة التي حصلت عليها هنا .

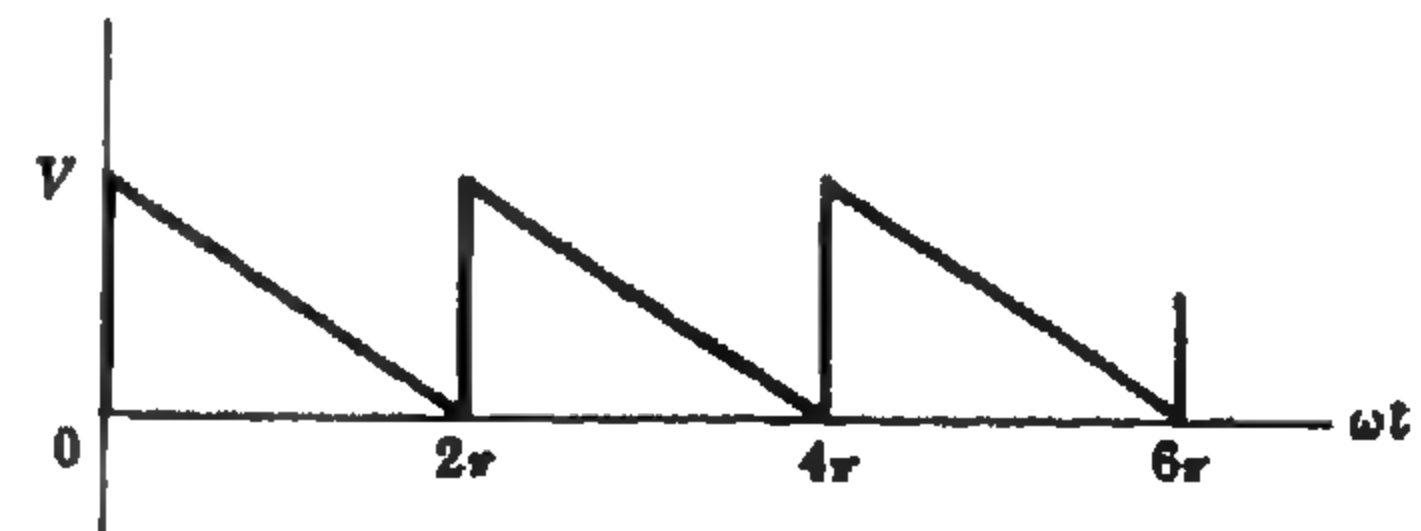
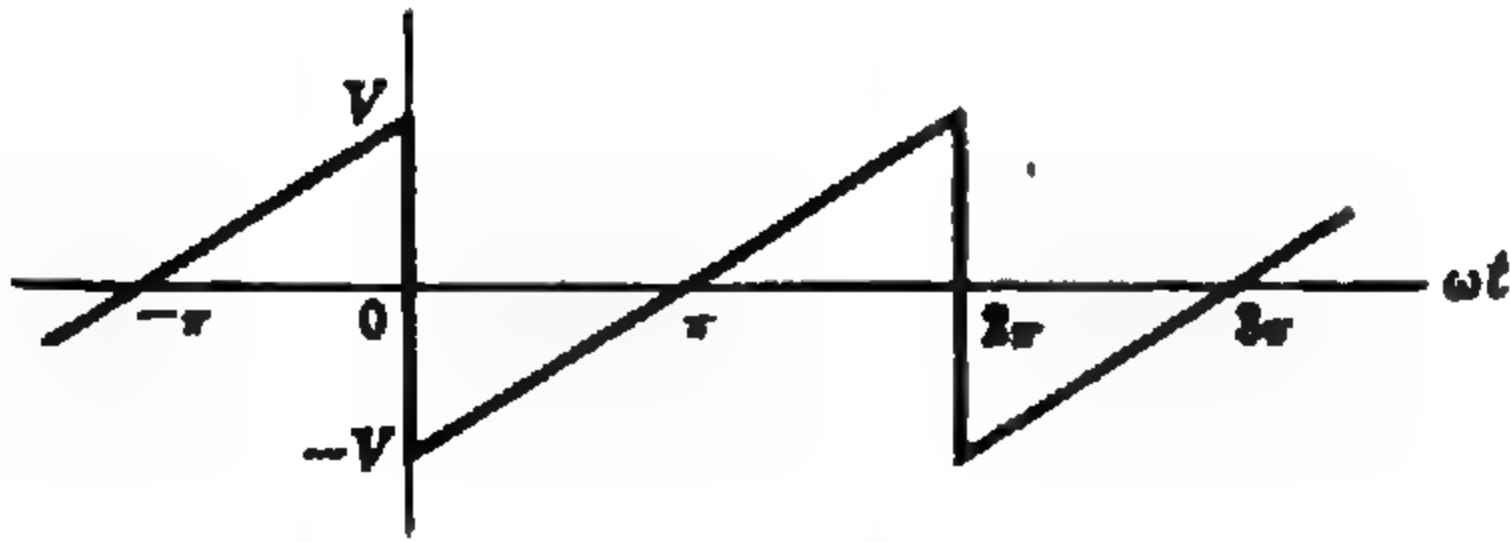
الجواب :

$$f(t) = V \left\{ \dots + j\frac{1}{3\pi} e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{\pi} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{\pi} e^{j\omega t} - j\frac{1}{3\pi} e^{j3\omega t} - \dots \right\}$$

٣٢-١٥ أوجد متسلسلة فوريير للأسية لشكل من المنشار الموجي والموضح في الشكل ١٥-٥٠ وارسم الطيف . حول المعاملات التي حصلت عليها هنا إلى معاملات متسلسلة ذات نسب مثلثية ، ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارن النتيجة بالمتسلسلة التي حصلنا عليها في المسألة ١٥-١٩ .

الجواب :

$$f(t) = V \left\{ \dots + j\frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega t} + j\frac{1}{2\pi} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi} e^{j2\omega t} - \dots \right\}$$



٣٣-١٥ أوجد متسلسلة فوريير للأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٥١ وارسم الطيف . حول معاملات المتسلسلة المثلثية التي حصلت عليها في المسألة ١٥-٢٠ إلى معاملات متسلسلة أسية ثم قارنها بمعاملات المتسلسلة التي حصلت عليها هنا .

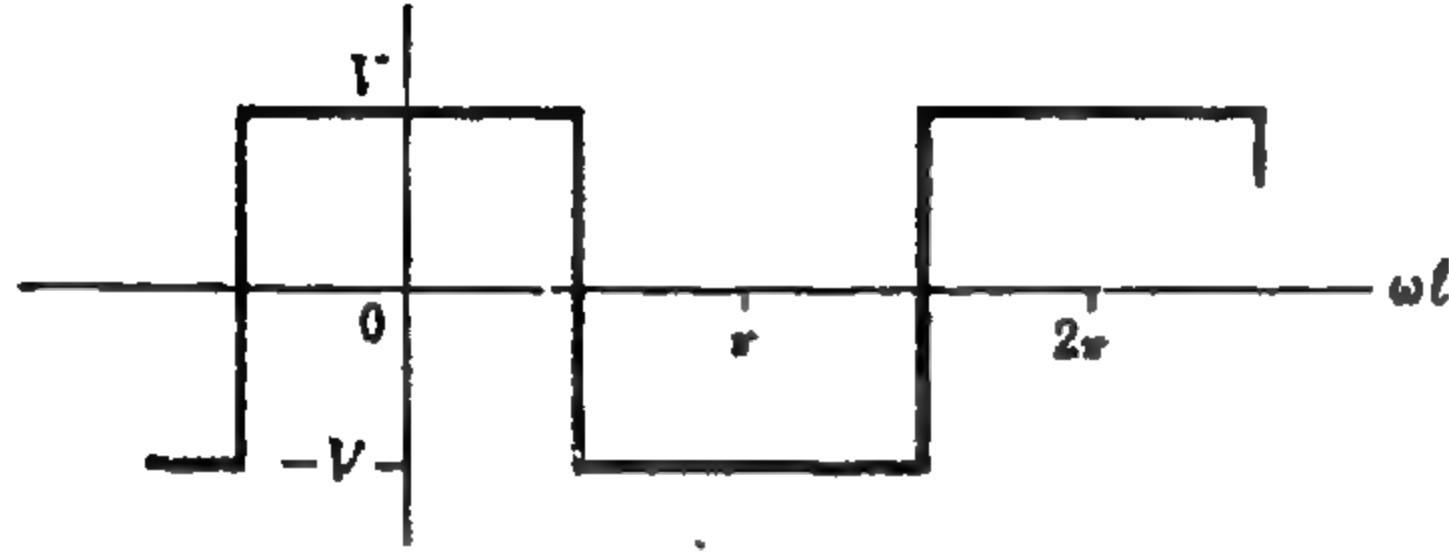
الجواب :

$$f(t) = V \left\{ \dots - j\frac{1}{2\pi} e^{-j2\omega t} - j\frac{1}{\pi} e^{-j\omega t} + j\frac{1}{\pi} e^{j\omega t} + j\frac{1}{2\pi} e^{j2\omega t} + \dots \right\}$$

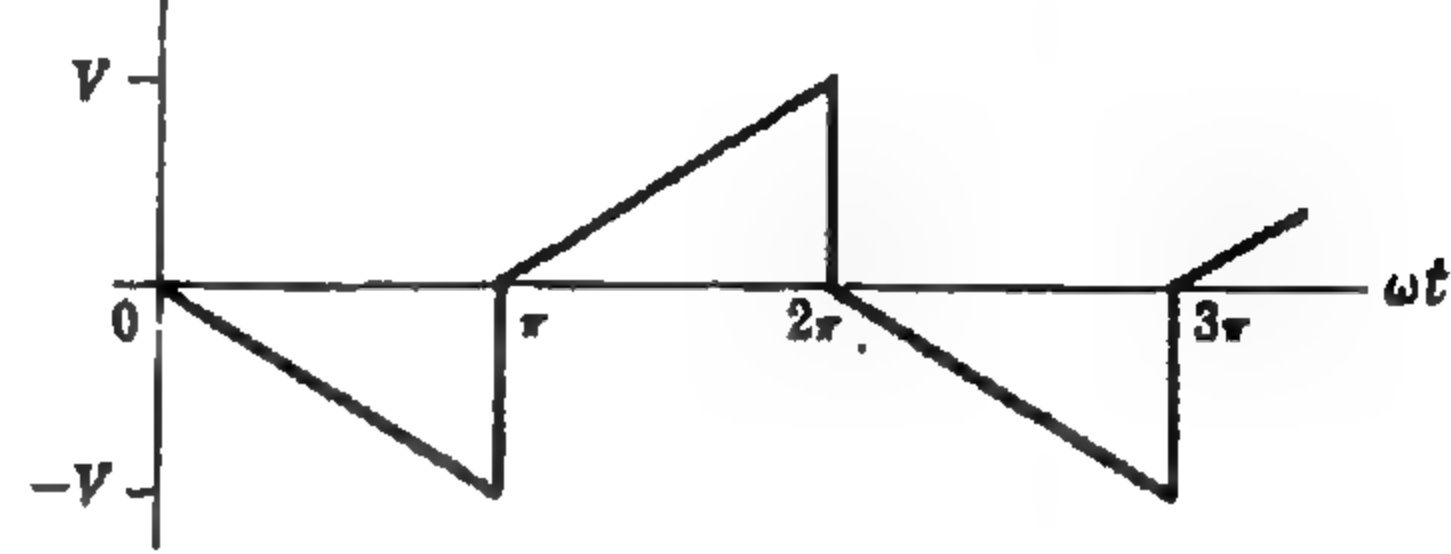
١٥ - ٣٤ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٥٢ . وارسم الطيف . حول المعاملات إلى معاملات متسلسلة مثلثية ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارنها بتلك التي حصلت عليها في المسألة ١٥-٢١ .

الجواب :

$$f(t) = V \left\{ \dots + \left(\frac{2}{9\pi^2} - j\frac{1}{3\pi} \right) e^{-j3\omega t} + \left(\frac{2}{\pi^2} - j\frac{1}{\pi} \right) e^{-j\omega t} \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{\pi^2} + j\frac{1}{\pi} \right) e^{j\omega t} + \left(\frac{2}{9\pi^2} + j\frac{1}{3\pi} \right) e^{j3\omega t} + \dots \right\}$$



شكل ١٥ - ٥٣



شكل ١٥ - ٥٢

١٥ - ٣٥ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للموجة المربعة الموضحة في الشكل ١٥-٥٣ . ثم ارسم الطيف الخطي . حول معاملات متسلسلة المسألة ١٥-٢٢ المثلثية إلى معاملات متسلسلة أسية وقارن بمعاملات النتيجة التي حصلت عليها هنا .

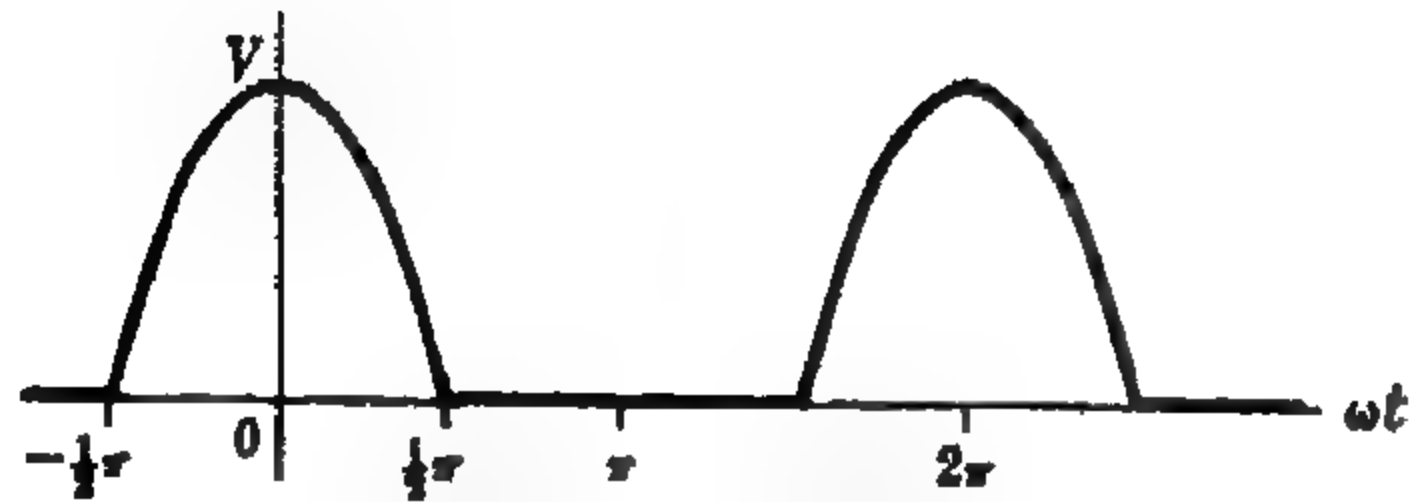
الجواب :

$$f(t) = \frac{2V}{\pi} \{ \dots + \frac{1}{8} e^{-j5\omega t} - \frac{1}{8} e^{-j3\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} - \frac{1}{8} e^{j3\omega t} + \frac{1}{8} e^{j5\omega t} - \dots \}$$

١٥ - ٣٦ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٥٤ وارسم الطيف الخطي .

الجواب :

$$f(t) = \dots - \frac{V}{2\pi} \sin\left(\frac{-2\pi}{6}\right) e^{-j2\omega t} - \frac{V}{\pi} \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) e^{-j\omega t} + \frac{V}{6} \\ + \frac{V}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) e^{j\omega t} + \frac{V}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) e^{j2\omega t} + \dots$$



شكل ١٥ - ٥٥



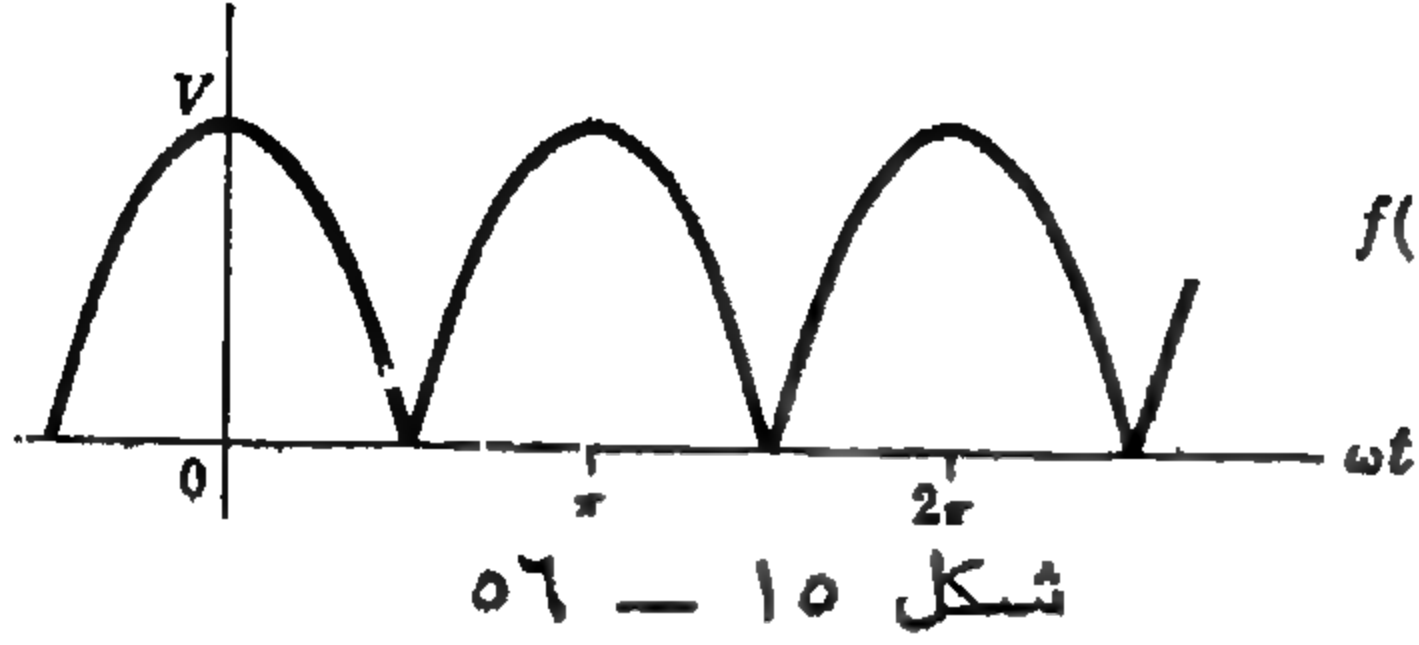
شكل ١٥ - ٥٤

١٥ - ٣٧ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للموجة الجيبية المقومة نصف تقويم والموضحة في الشكل ١٥-٥٥ . حول هذه المعاملات إلى معاملات متسلسلة مثلثية ، ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارنها بنتيجة المسألة ١٥-٢٤ .

الجواب :

$$f(t) = \dots - \frac{V}{15\pi} e^{-j4\omega t} + \frac{V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + \frac{V}{4} e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} \\ + \frac{V}{4} e^{j\omega t} + \frac{V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi} e^{j4\omega t} + \dots$$

٣٨-١٥ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للموجة الجيبية المقومة نصف تقويم والموضحة في الشكل ١٥-٥٦ وارسم الطيف الخطي .



$$f(t) = \dots - \frac{2V}{15\pi} e^{-j4\omega t} + \frac{2V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + \frac{2V}{\pi} + \frac{2V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{2V}{15\pi} e^{j4\omega t} + \dots$$

٣٩-١٥ أوجد القيمة الفعالة للجهد والقيمة الفعالة للتيار والقدرة المتوسطة للشبكة الكهربائية الخاملة علماً بأن الجهد المؤثر $v = 200 + 100 \cos(500t - 30^\circ) + 75 \cos(1500 - 60^\circ)$ volts

الجواب : $i = 3.53 \cos(500t + 75^\circ) + 3.55 \cos(1500 + 78.45^\circ)$ amperes. $218.5 \text{ V}, 3.54 \text{ A}, 250.8 \text{ W}$

٤٠-١٥ إذا أثرنا بالجهد $v = 50 + 25 \sin 500t + 10 \sin 1500t + 5 \sin 2500t$ volts بين طرفي شبكة كهربائية خاملة وكان التيار الناتج هو

$$i = 5 + 2.23 \sin(500t - 26.6^\circ) + 0.566 \sin(1500t - 56.3^\circ) + 0.186 \sin(2500t - 68.2^\circ)$$
 amperes

فأوجد القيمة الفعالة للجهد والقيمة الفعالة للتيار والقدرة المتوسطة .

الجواب : $53.6 \text{ V}, 5.25 \text{ A}, 276.5 \text{ W}$

٤١-١٥ دائرة توالي تتكون من ثلاثة عناصر $R = 5 \Omega$ و $L = 5 \text{ mH}$ و $C = 50 \mu\text{F}$ يؤثر عليها جهد $v = 150 \sin 1000t + 100 \sin 2000t + 75 \sin 3000t$ volts. أوجد القيمة الفعالة للتيار والقدرة المتوسطة في الدائرة . ارسم الطيف الخطي لكل من الجهد والتيار ثم لاحظ تأثير الرنين على التوالي .

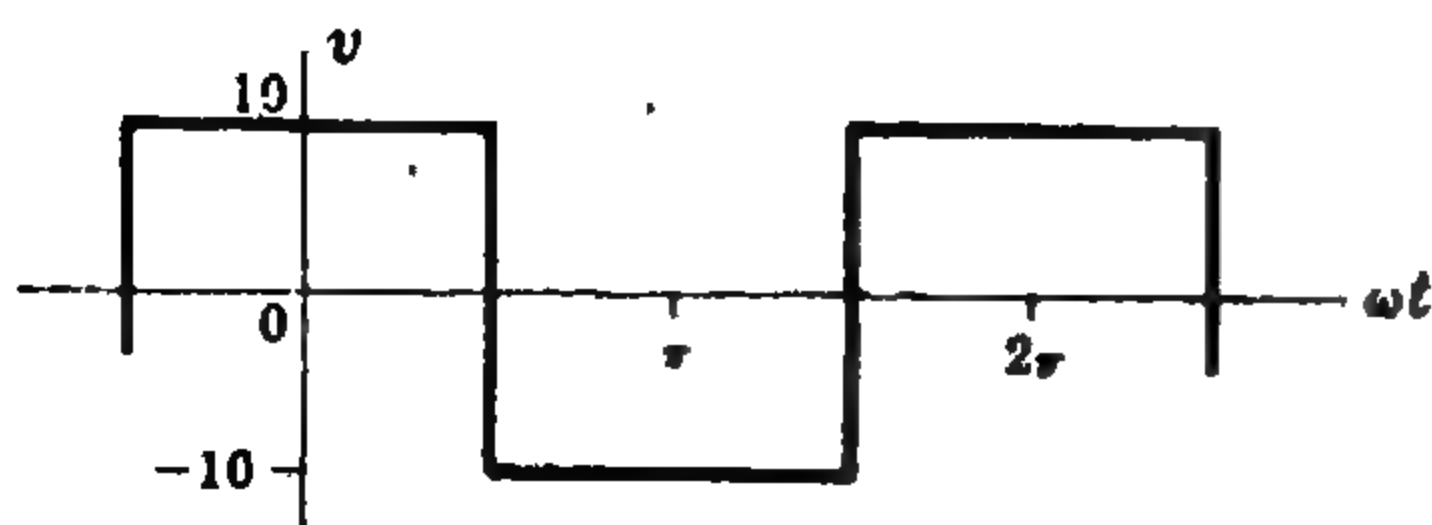
الجواب : $16.58 \text{ A}, 1374 \text{ W}$

٤٢-١٥ دائرة توالي تتكون من عنصرين $R = 10 \Omega$ و $L = 0.02 \text{ H}$ يمر بها تيار $i = 5 \sin 100t + 3 \sin 300t + 2 \sin 500t$ amperes. أوجد القيمة الفعالة للجهد المؤثر والقدرة المتوسطة .

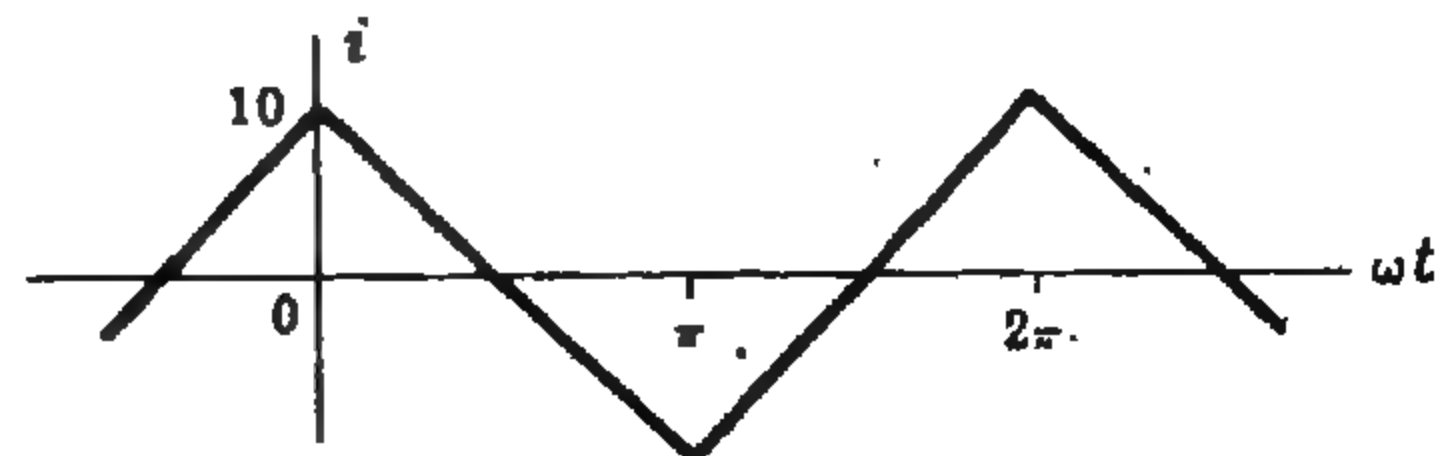
الجواب : $48 \text{ V}, 190 \text{ W}$

٤٣-١٥ حث نقيته $L = 0.01 \text{ H}$ تمر فيه موجة التيار المثلثية الموضحة في الشكل ١٥-٥٧ حيث $\omega = 500 \text{ rad/s}$ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للتيار ثم أوجد متسلسلة الجهد عبر الحث v_L . قارن الاجابة بنتيجة المسألة ١٥-٨ .

$$v_L = \frac{200}{\pi^2} \{ \dots - j\frac{1}{8} e^{-j3\omega t} - j e^{-j\omega t} + j e^{j\omega t} + j\frac{1}{8} e^{j3\omega t} + \dots \}$$
 volts



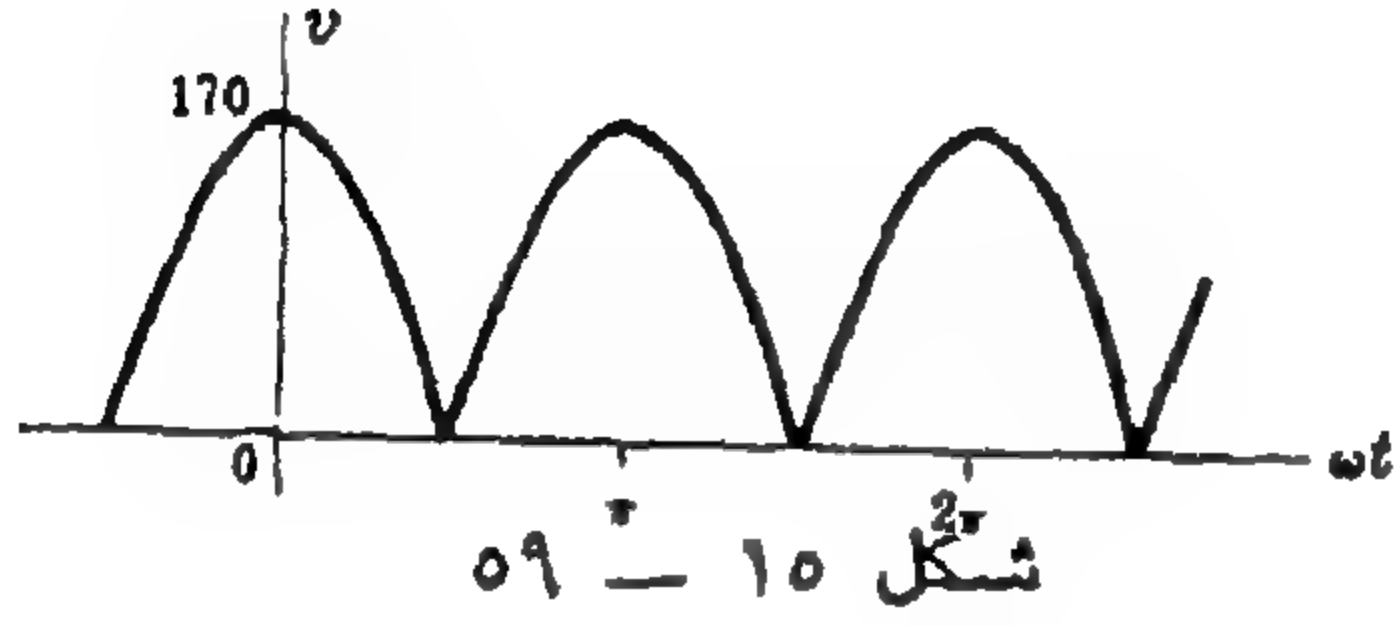
شكل ١٥-٥٨



شكل ١٥-٥٧

١٥ - ٤٤ : حيث نرى قيمته $L = 0.01 \text{ H}$ يؤثر عليه جهد شكله الموجي موضح في الشكل ١٥-٥٨ حيث $\omega = 200 \text{ rad/sec}$. أوجد متسلسلة التيار المثلثية وحقق الشكل الموجي للتيار .

$$i = \frac{20}{\pi} \{ \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \} \text{ amperes} : \text{الجواب}$$



١٥ - ٤٥ : يوضح الشكل ١٥ - ٥٩ موجة جيئية مقومة نصف تقويم وهي تمثل الجهد الذي يؤثر بين طرفي الدائرة LC . القيمة العظمى للجهد هي 170 V و $\omega = 377 \text{ rad/sec}$ استخدم متسلسلة فوريير المثلثية لإيجاد الجهد عبر الحث والمكبث . ارسم الطيف الخطي لكل منهما .

١٥ - ٤٦ : دائرة تتكون من ثلاثة عناصر ؛ $R = 5 \Omega$ متصلة على التوالي مع مجموعة L و C متصلين على التوازي . عند $\omega = 500 \text{ rad/sec}$ كانتا الممانتين المناظرين هما $j2\Omega$ و $-j8\Omega$. أوجد التيار الكلي علماً بأن الجهد المؤثر يعطى بالمعادلة $v = 50 \sin 500t + 20 \sin 1000t$ volts
الجواب : $i = 10 + 3.53 \sin (500t - 28.1^\circ) \text{ amperes}$

الفصل السادس عشر

الحالات العابرة للدوائر

مقدمة :

عندما تتحول دائرة كهربائية من حالة إلى حالة أخرى بواسطة تغيير في الجهد المؤثر أو في أحد عناصر الدائرة ، فإنه توجد فترة تحول تتغير خلالها قيم تيارات الأفرع والهبوط في قيم الجهود من قيمها في الحالة الأولى إلى الحالة الجديدة . وبعد فترة التحول هذه والتي تسمى « فترة عابرة » فإنه يقال إن الدوائر في الحالة المستقرة .

ينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهد على دائرة تحتوي على عناصر خازنة للطاقة معادلة تفاضلية تحل بإحدى الطرق العديدة الممكنة . وهذا الحل يتكون من جزئين «الدالة المتسمة» و«الحل الخاص» . في معادلات تحليل الدوائر الكهربائية تؤول الدالة المتسمة دائماً إلى الصفر سريعاً في فترة زمنية صغيرة نسبية وهي تمثل جزء « الانتقال » في الحل . والحل الخاص هو استجابة الحالة المستقرة والذي كان موضوع دراستنا في الفصول السابقة . وعموماً فإن طرق الحصول على الحل الخاص في هذا الفصل طويلة ومعقدة وغير مباشرة مثل الطرق المستخدمة سابقاً . ومع ذلك . فن خلال تطبيق هذه الطرق فإننا نحصل على المعنى الفيزيائي لاستجابة الحالة المستقرة كجزء من الاستجابة الكلية .

الحالات العابرة للتيار المستمر

دائرة RL في حالة عابرة :

يؤثر على دائرة RL المتصلة على التوالي والموضحة في الشكل ١٦-١ ، جهد ثابت V وذلك عند غلق المفتاح . وينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهد المعادلة التفاضلية التالية

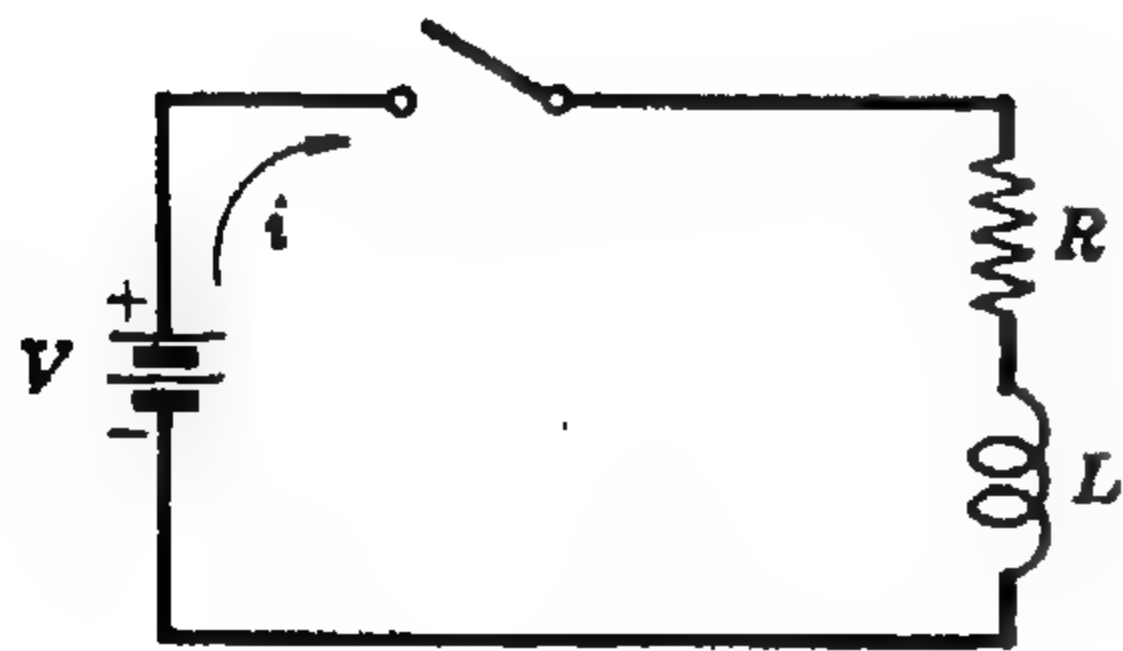
$$(1) \quad Ri + L \frac{di}{dt} = V$$

وبإعادة ترتيب الحدود واستخدام الترميز بالمؤثرات حيث $D = d/dt$ فإن

$$(2) \quad \left(D + \frac{R}{L}\right)i = \frac{V}{L}$$

المعادلة (٢) هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى على الشكل

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} - ay = R \quad \text{or} \quad (D - a)y = R$$



شكل ١٦ - ١

حيث $D = d/dx$ و a ثابت و R ربما تكون دالة في x ولكن ليست دالة في y . ويتكون الحل الكامل للمعادلة (٣) من الدالة المتممة والحل الخاص ، أى أن

$$(٤) \quad y = y_c + y_p = ce^{ax} + e^{ax} \int e^{-ax} R dx$$

حيث c ثابت اختياري يعين بمعرفة الشروط الابتدائية . باستخدام (٤) يكون حل المعادلة (٢) هو

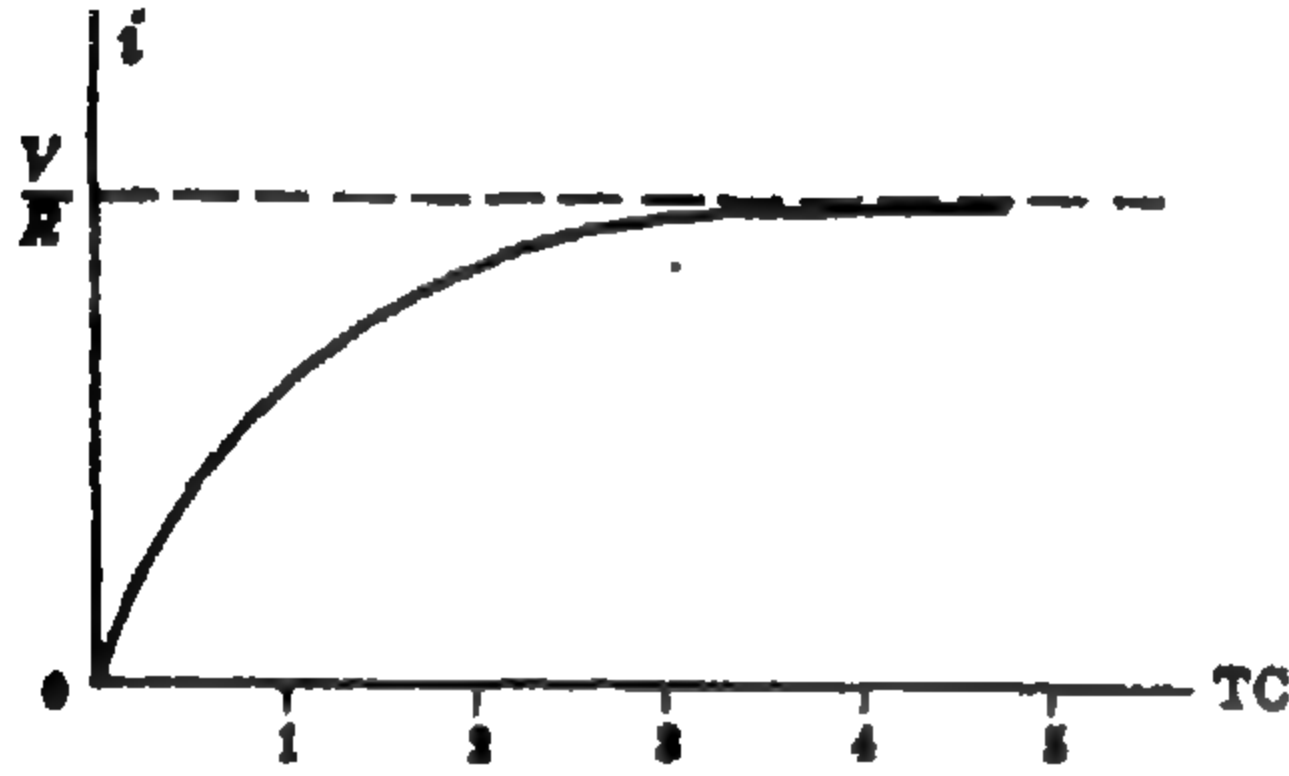
$$(٥) \quad i = ce^{-(R/L)t} + e^{-(R/L)t} \int e^{(R/L)t} \left(\frac{V}{L} \right) dt = ce^{-(R/L)t} + \frac{V}{R}$$

لتعيين c ، نضع $t = 0$ في المعادلة (٥) ونموض بالتيار الابتدائي i_0 بدلا من i هذا التيار الابتدائي هو التيار المار

$$i = \frac{1}{L} \int v dt \quad \text{و} \quad v = L \frac{di}{dt} \quad \text{هنا} \quad \text{ويوجد للحث علاقتان بين الجهد والتيار هما}$$

والعلاقة الثانية تؤكد لنا أنه طالما يوجد جهد مؤثر فإن التيار المار في الحث يجب أن يكون دالة متصلة . وحيث أن التيار يساوى صفراً عندما $t = 0$ فإنه يجب أيضاً أن يساوى صفراً عندما $t = 0 +$. وبالتعويض في المعادلة (٥) نحصل على

$$(٦) \quad c = -V/R \quad \text{أو} \quad i_0 = 0 = c(1) + V/R$$



وبالتعويض عن قيمة c هذه في المعادلة (٥) ينتج أن

$$(٧) \quad i = -\frac{V}{R}e^{-(R/L)t} + \frac{V}{R} = \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t})$$

يعرف هذا النوع من المعادلات بالارتفاع الأسى كما هو موضح في الشكل ١٦ - ٢ . يوضح الرسم الفترة العابرة التي يتغير خلالها التيار من قيمته الابتدائية المساوية للصفر إلى قيمته النهائية في الحالة المستقرة V/R

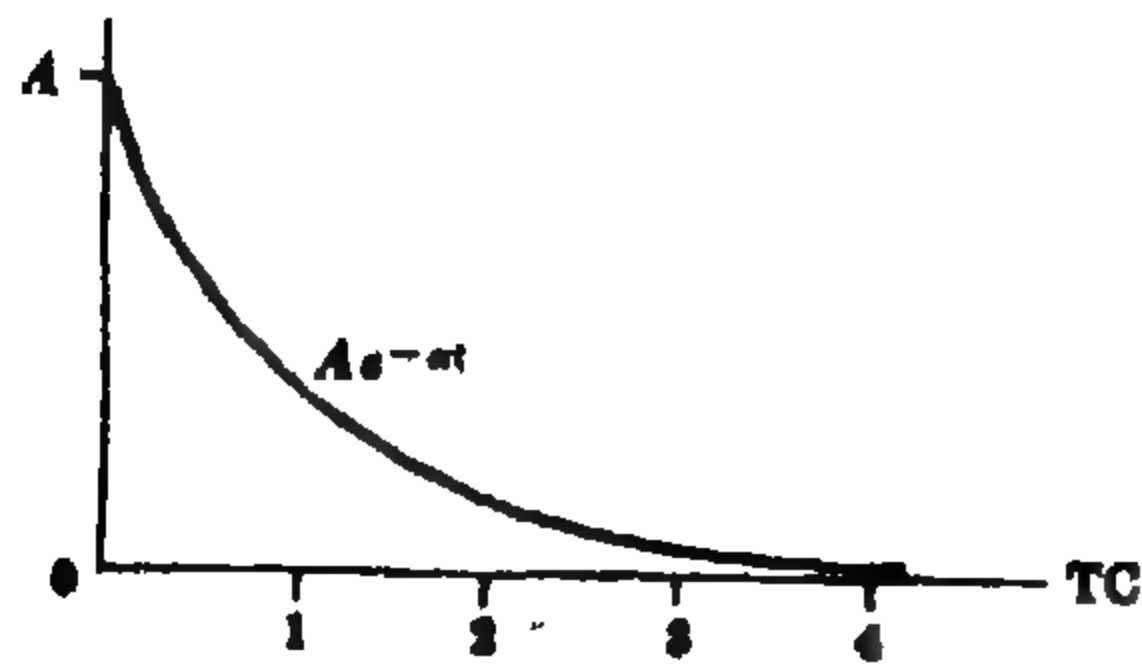
شكل ١٦ - ٢

ثابت الزمن TC لدالة مثل التي في المعادلة (٧) هو الزمن الذي يكون عنده أس e مساوياً للوحدة . وعلى هذا فإن ثابت الزمن لدائرة RL في حالة عابرة هو $TC = L/R$ seconds . عند $TC = 1$ فإن الكمية التي بين القوسين في المعادلة (٧) تأخذ القيمة $0.632 = (1 - 0.368) = (1 - e^{-1})$ عند هذا الزمن يكون التيار مساوياً 63.2% من قيمته النهائية . وبالمثل عند $2 TC$ فإن $0.865 = (1 - 0.135) = (1 - e^{-2})$ ويكون التيار مساوياً 86.5% من قيمته النهائية . وبعد $5 TC$ ينتهى تيار الفترة العابرة عموماً إلى الحالة النهائية ، وللسهولة نأخذ ثابت الزمن كوحدة في رسم معادلة التيار (٧) .

كثال آخر نأخذ الاضمحلال الأسى الموضح في الشكل ١٦ - ٣ والممثل بالمعادلة

$$(٨) \quad f(t) = Ae^{-at}$$

وثابت الزمن هو أيضاً الزمن الذي يكون عنده أس e مساوياً



شكل ١٦ - ٣

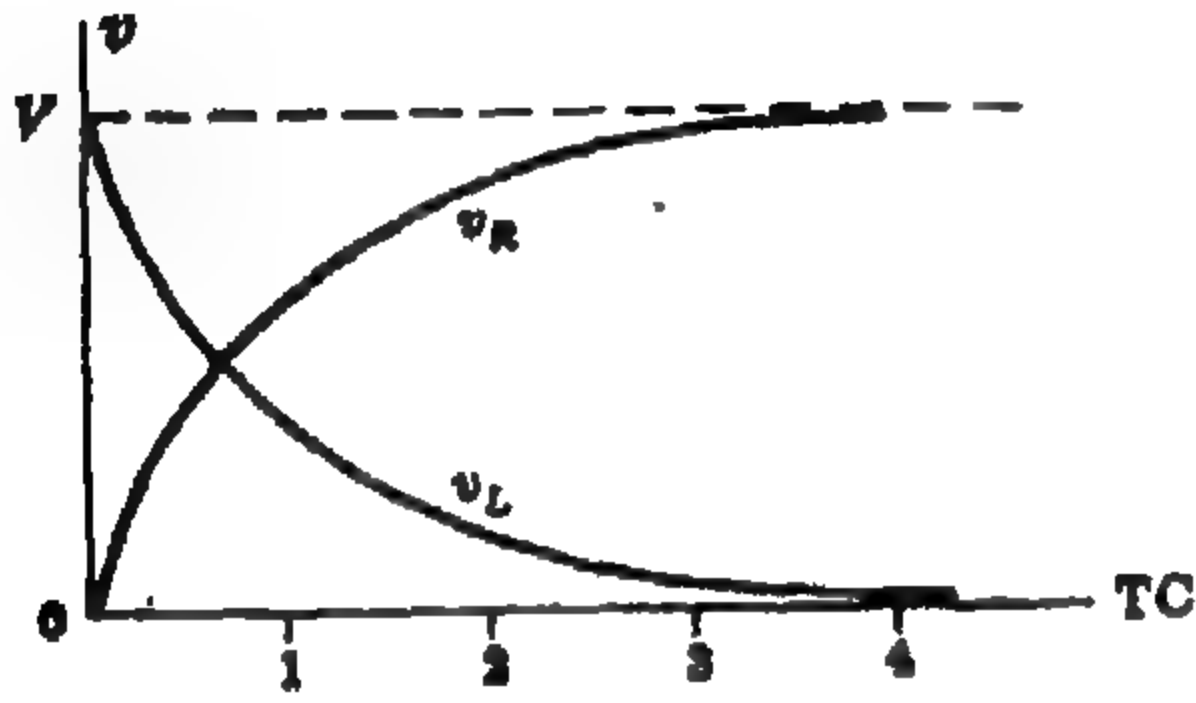
للوحدة ، أى أن $TC = 1/a$. عند $TC = 1$ فإن $e^{-1} = 0.368$ وتضمحل الدالة إلى 36.8% من قيمتها الابتدائية A . وعند $TC = 2$ فإن $e^{-2} = 0.135$ والدالة تساوى 13.5% من A . وعند $TC = 5$ تعتبر الحالة العابرة حالة نهائية .

نحصل على فروق الجهد العابرة على عنصرى دائرة RL من معادلة التيار . وعلى ذلك فالجهد عبر المقاومة هو :

$$(٩) \quad v_R = Ri = V(1 - e^{-(R/L)t})$$

والجهد عبر الحث هو

$$(١٠) \quad v_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} \left\{ \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \right\} = Ve^{-(R/L)t}$$



إن الجهد العابر على المقاومة له ارتفاع أسى بنفس ثابت الزمن للتيار بينما الجهد عبر الحث يعانى اضمحلالاً أسياً ولكن بنفس ثابت الزمن. ومجموع v_R و v_L يحقق قانون كيرشوف أثناء فترة العبور. انظر الشكل ١٦ - ٤

شكل ١٦ - ٤

$$(١١) \quad v_R + v_L = V(1 - e^{-(R/L)t}) + Ve^{-(R/L)t} = V$$

تعطى القدرة اللحظية في أى عنصر في الدائرة بحاصل ضرب الجهد في التيار وعلى هذا فإن القدرة في المقاومة هي

$$(١٢) \quad p_R = v_R i = V(1 - e^{-(R/L)t}) \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{V^2}{R}(1 - 2e^{-(R/L)t} + e^{-2(R/L)t})$$

والقدرة في الحث هي

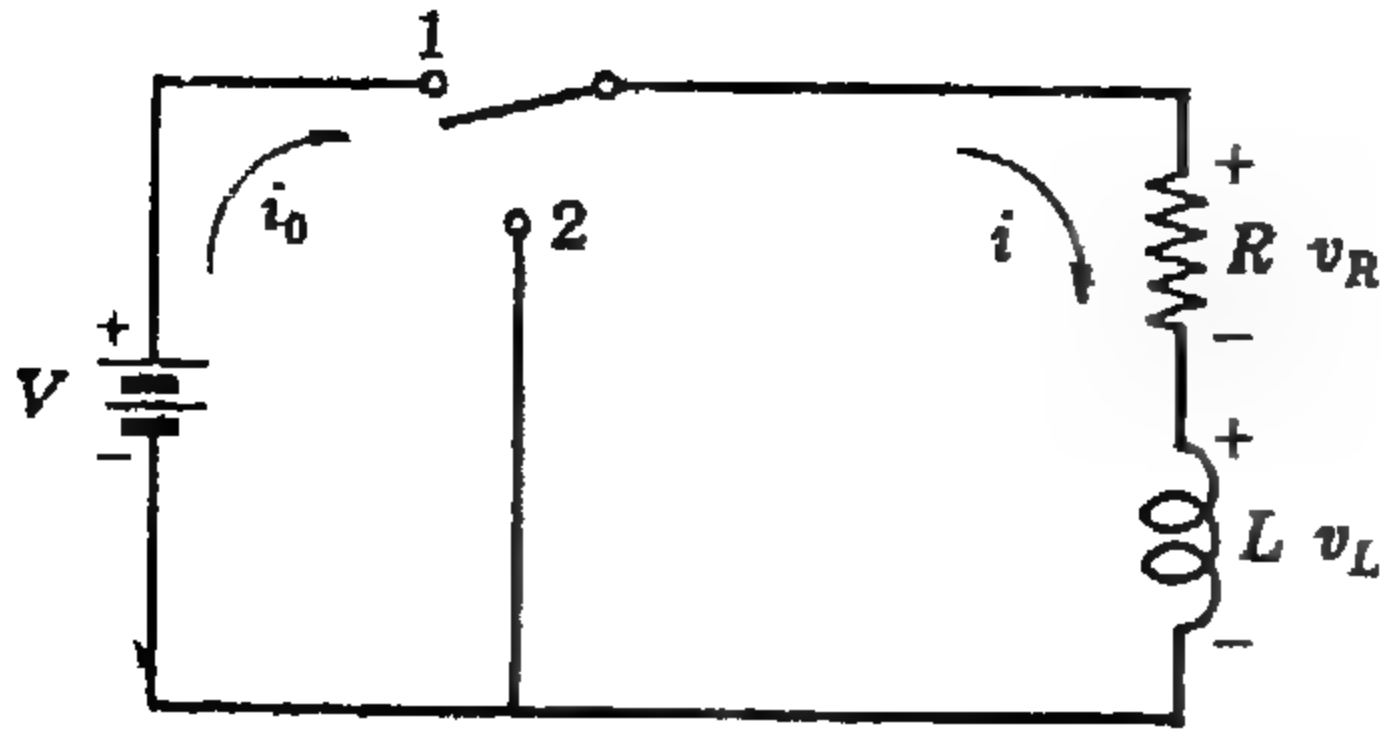
$$(١٣) \quad p_L = v_L i = Ve^{-(R/L)t} \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{V^2}{R}(e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t})$$

إذن القدرة الكلية هي

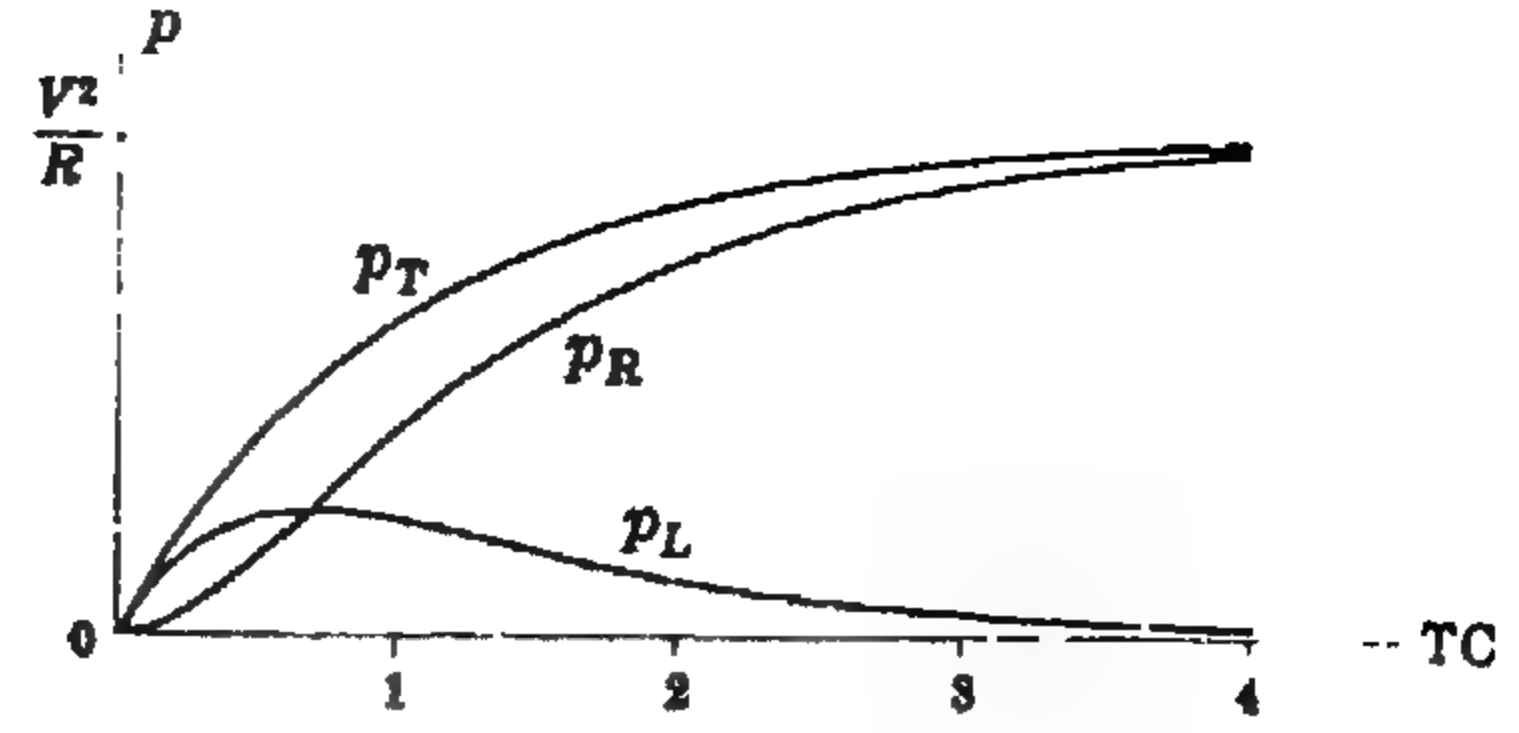
$$(١٤) \quad p_T = p_R + p_L = \frac{V^2}{R}(1 - e^{-(R/L)t})$$

يوضح الشكل ١٦ - ٥ دوال القدرة الثلاث حيث تأخذ p_R و p_T في الحالة المستقرة القيمة V^2/R أو I^2R ، حيث I هو تيار الحالة المستقرة . وتأخذ القدرة في الحث في فترة العبور أو الانتقال قيمة ابتدائية وقيمة نهائية مساويتين للصفر . وهذه القدرة هي الدالة على اختزان الطاقة في المجال المغناطيسى للملف . ولتوضيح ذلك فإننا نكامل p_L من 0 إلى ∞ .

$$(١٥) \quad \begin{aligned} W &= \int_0^{\infty} \frac{V^2}{R}(e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t}) dt = \frac{V^2}{R} \left[-\frac{L}{R}e^{-(R/L)t} + \frac{L}{2R}e^{-2(R/L)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V^2}{R} \left(\frac{L}{R} \right) = \frac{1}{2} LI^2 \text{ joules} \end{aligned}$$



شكل ١٦ - ٦



شكل ١٦ - ٥

تحتوى دائرة RL الموضحة في الشكل ١٦ - ٦ على تيار ابتدائي $i_0 = V/R$. عند $t = 0$ يكون المفتاح في الموضع 2 وبذلك نفصل المصدر وفي نفس الوقت نعمل دائرة مغلقة على فرع R و L المتصلين على التوالي . وبتطبيق قانون كيرشوف للجهد على الدائرة الخالية من المصدر تنتج المعادلة

$$(16) \quad \left(D + \frac{R}{L}\right)i = 0 \quad \text{أو} \quad L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

وحلها هو

$$(17) \quad i = ce^{-(R/L)t}$$

عند $t = 0$ يكون التيار الابتدائي هو $i_0 = V/R$. وبالتعويض في المعادلة (١٧) عن $c = V/R$ فإن معادلة التيار تصبح

$$(18) \quad i = \frac{V}{R} e^{-(R/L)t}$$

يوضح الشكل ١٦ - ٧ (أ) هذا الاضمحلال الأسى . والجهدان المناظران عبر المقاومة والحث هما

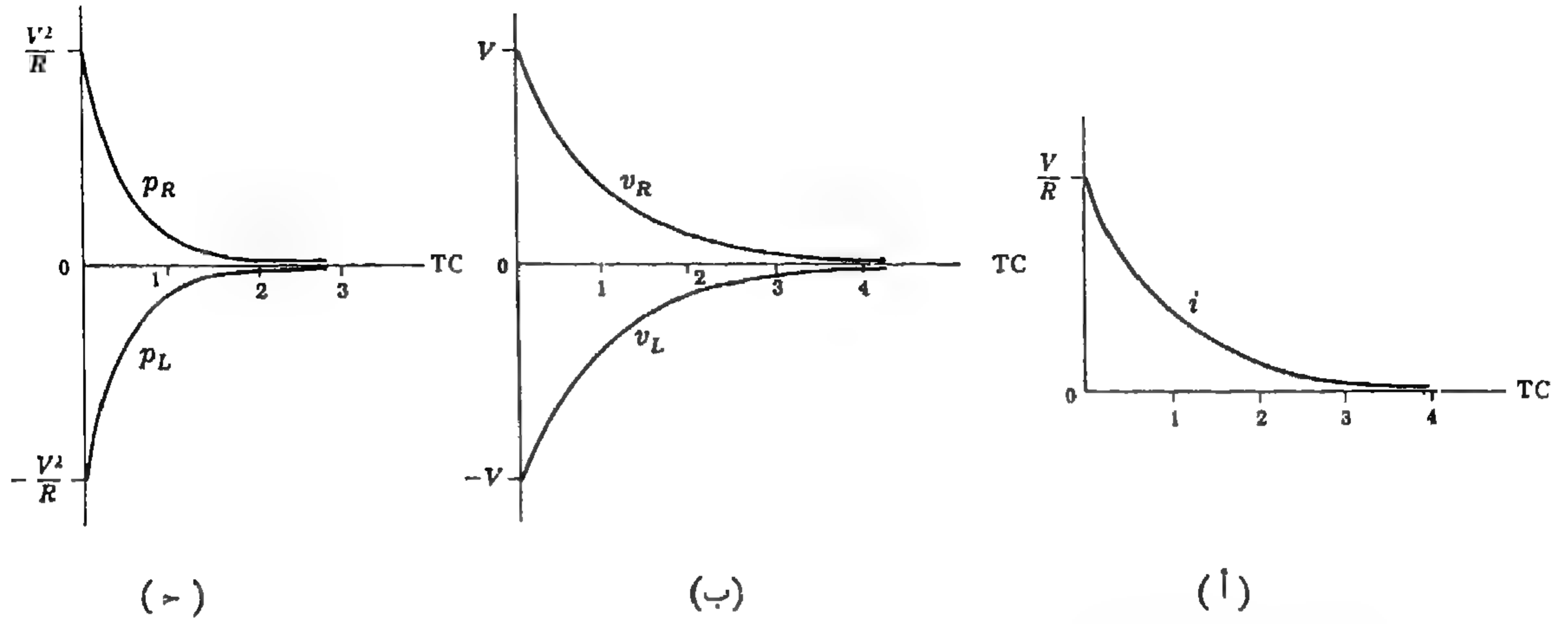
$$(19) \quad v_L = L \frac{di}{dt} = -Ve^{-(R/L)t} \quad \text{و} \quad v_R = Ri = Ve^{-(R/L)t}$$

كما هو موضح في الشكل ١٦ - ٧ (ب) ، ويحقق المجموع $v_R + v_L$ قانون كيرشوف حيث يكون الجهد المؤثر مساوياً

$$p_R = \frac{V^2}{R} e^{-2(R/L)t} \quad \text{(ج) القدرتين اللحظيتين} \quad \text{يوضح الشكل ١٦ - ٧ (ج) القدرتين اللحظيتين}$$

الصفر عندما يكون المفتاح في الموضع 2 . $p_L = -\frac{V^2}{R} e^{-2(R/L)t}$ إذا كاملنا p_L من 0 إلى ∞ فإننا نجد أن الطاقة المنطلقة مساوية تماماً للطاقة التي اختزنت في المجال

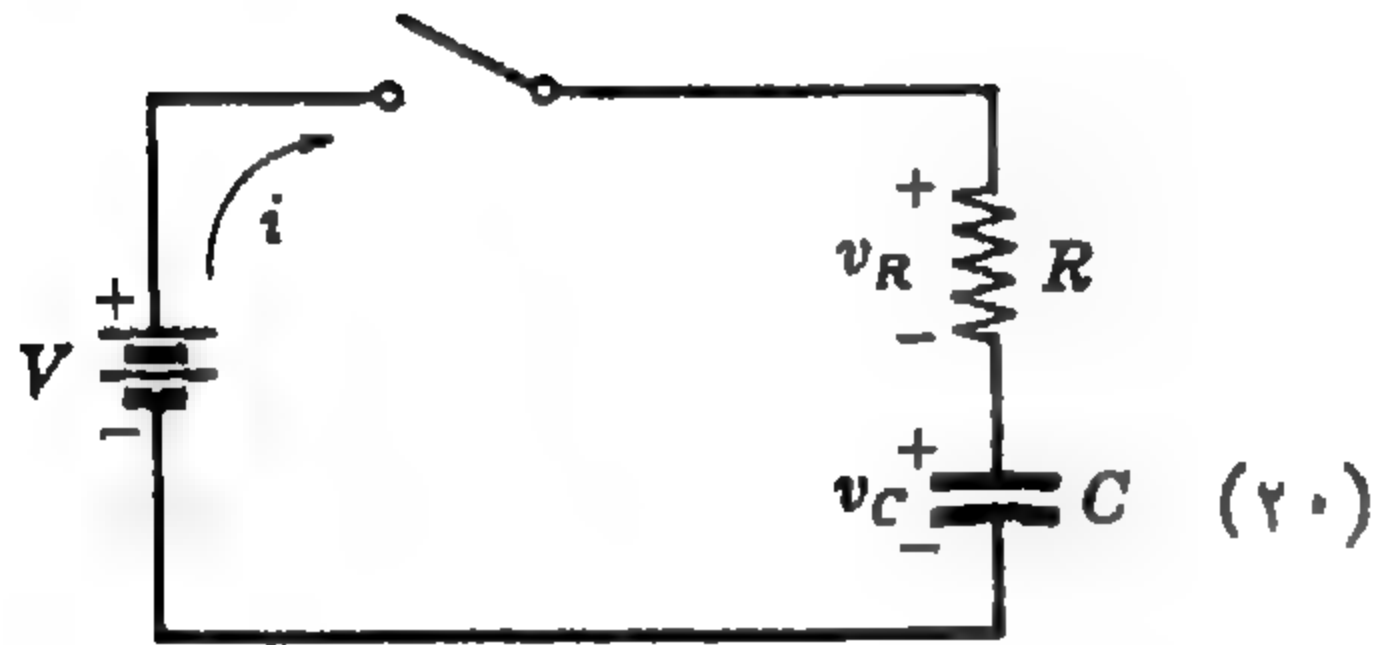
المغناطيسي خلال فترة العبور أو الانتقال السابقة هي $\frac{1}{2}LI^2$. وتنتقل هذه الطاقة خلال اضمحلال فترة الانتقال إلى المقاومة .



شكل ١٦ - ٧

دائرة RC في الحالة العابرة :

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على دائرة RC المتصلة على التوالي والموضحة في الشكل ١٦ - ٨ تنتج المعادلة التفاضلية التالية



$$\frac{1}{C} \int i dt + Ri = V \quad (٢٠)$$

شكل ١٦ - ٨

وبعد إجراء التفاضل ينتج

$$(٢١) \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)i = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} = 0$$

ويكون حل المعادلة المتجانسة هذه من الدالة المتتممة فقط وذلك لأن الحل الخاص يساوى صفراً . أي أن

$$(٢٢) \quad i = c e^{-t/RC}$$

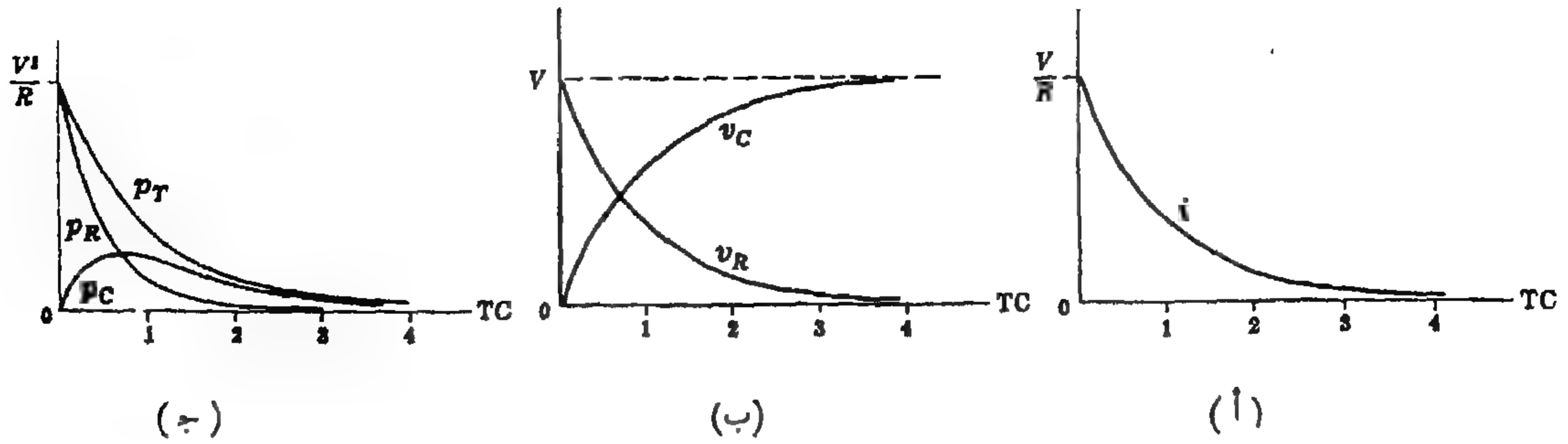
لتعيين الثابت C نلاحظ أنه عندما $t = 0$ فإن المعادلة (٢٠) تصبح $Ri_0 = V$ أو $i_0 = V/R$. والآن بالتعويض عن قيمة i_0 في المعادلة (٢٢) نحصل على $c = V/R$ وذلك عندما $t = 0$. إذن

$$(٢٣) \quad i = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$$

المعادلة (٢٣) هي على شكل اضمحلال أسي كما هو موضح في الشكل ١٦ - ٩ (أ) .

يوضح الشكل ١٦ - ٩ (ب) جهدي العبور أو الانتقال المناظرين

$$(٢٤) \quad v_c = \frac{1}{C} \int i dt = V(1 - e^{-t/RC}) \quad , \quad v_R = Ri = V e^{-t/RC}$$



شكل ١٦ - ٩

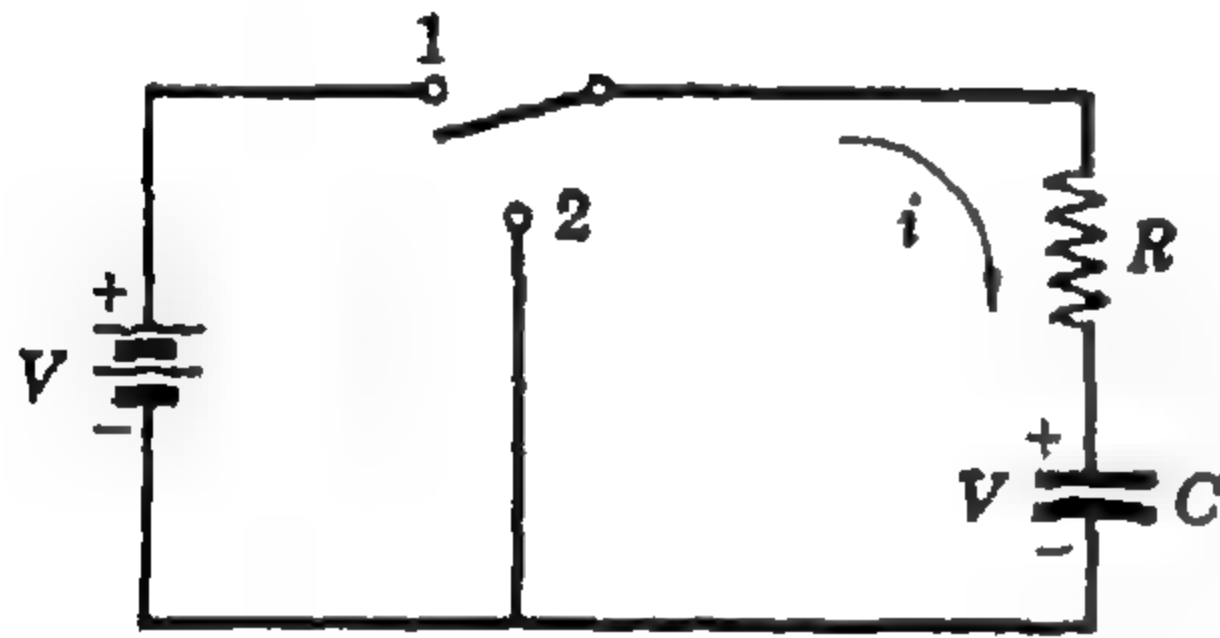
ويوضح الشكل ١٦-٩ (ج) القدرتين اللحظيتين .

$$(٢٥) \quad p_C = v_C i = \frac{V^2}{R} (e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}) \quad , \quad p_R = v_R i = \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC}$$

وتعبر القدرة p_C في فترة العبور بقيمتها الابتدائية والنهائية المساوية للصفر عن الطاقة المخزونة في المحال الكهر-
للمكثف وذلك بجهد ثابت عبر طرفيه . ويتحقق هذا من تكامل p_R من 0 إلى ∞

$$(٢٦) \quad \mathcal{E} = \int_0^{\infty} \frac{V^2}{R} (e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}) dt = \frac{1}{2} CV^2$$

عندما يكون المفتاح في الموضع 1 في دائرة RC على التوالي
الموضحة في الشكل ١٦-١٠ . تكون لدينا الحالة المستقرة ، وعندما
 $t=0$ يتحرك موضع المفتاح إلى 2 . وعند هذا الموضع للمفتاح
تكون معادلة الدائرة هي .



شكل ١٦ - ١٠

$$(٢٧) \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)i = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{1}{C} \int i dt + Ri = 0$$

والحل هو

$$(٢٨) \quad i = ce^{-t/RC}$$

لتعيين الثابت c نضع $t=0$ في المعادلة (٢٨) ونعوض بقيمة التيار الابتدائية i_0 وحيث أن المكثف يشحن إلى جهد V
بالقطبية الموضحة في الرسم ، فإن التيار الابتدائي يكون معاكسا للتيار i ، أي أن $i_0 = -V/R$. إذن $c = -V/R$ ومعادلة
التيار هي

$$(٢٩) \quad i = -\frac{V}{R} e^{-t/RC}$$

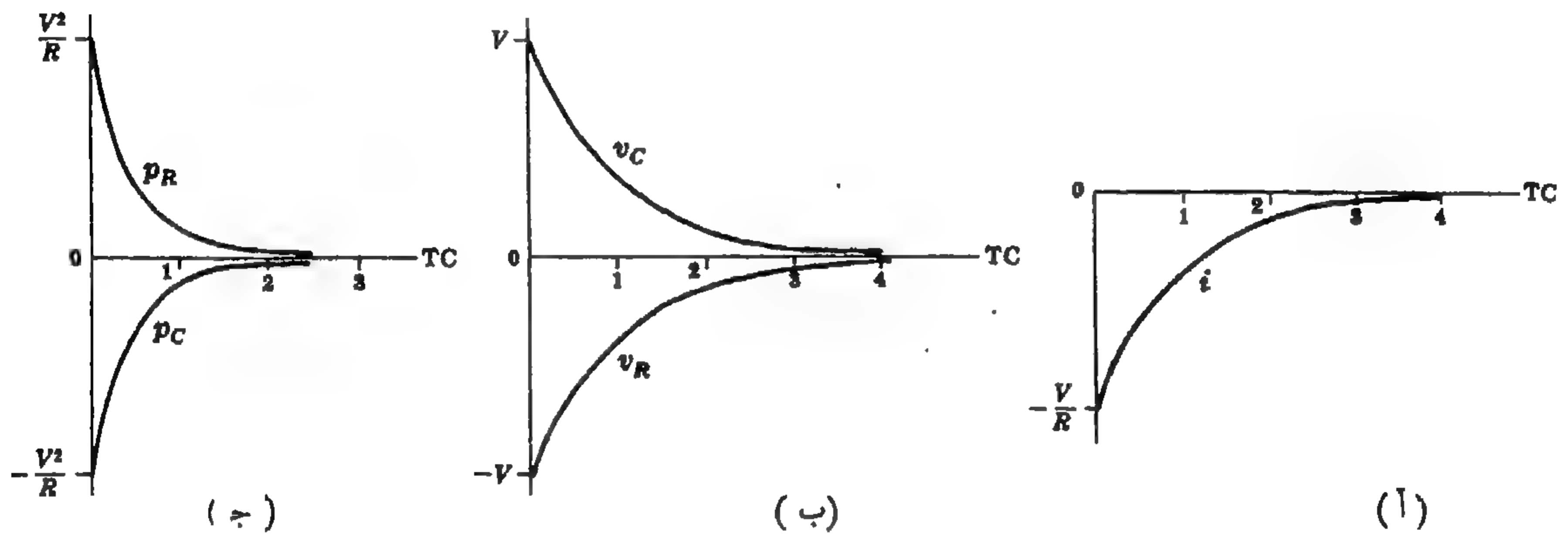
ويوضح الشكل ١٦-١١ (أ) اضمحلال فترة العبور . وجهدا العبور لعنصرى الدائرة المناظرين هما

$$(٣٠) \quad v_C = \frac{1}{C} \int i dt = V e^{-t/RC} \quad , \quad v_R = Ri = -V e^{-t/RC}$$

كما هو موضح في الشكل ١١-١٦ (ب) . لاحظ أن $v_R + v_C = 0$ يحقق قانون كيرشوف وذلك لعدم وجود جهد مؤثر عندما يكون المفتاح في الموضع 2 . وقد رتا العبور هما .

$$(٣١) \quad p_C = v_C i = -\frac{V^2}{R} e^{-2t/RC} \quad , \quad p_R = v_R i = \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC}$$

كما هو موضح في الشكل ١١-١٦ (ج) . لا يوجد مصدر للدالة على p_R لكنه من الواضح أن الطاقة المخزونة في المكثف تنتقل إلى المقاومة أثناء فترة العبور . ويترك للقارئ إثبات أن تكامل p_C بالحددين من 0 إلى ∞ يساوي $-\frac{1}{2}CV^2$.

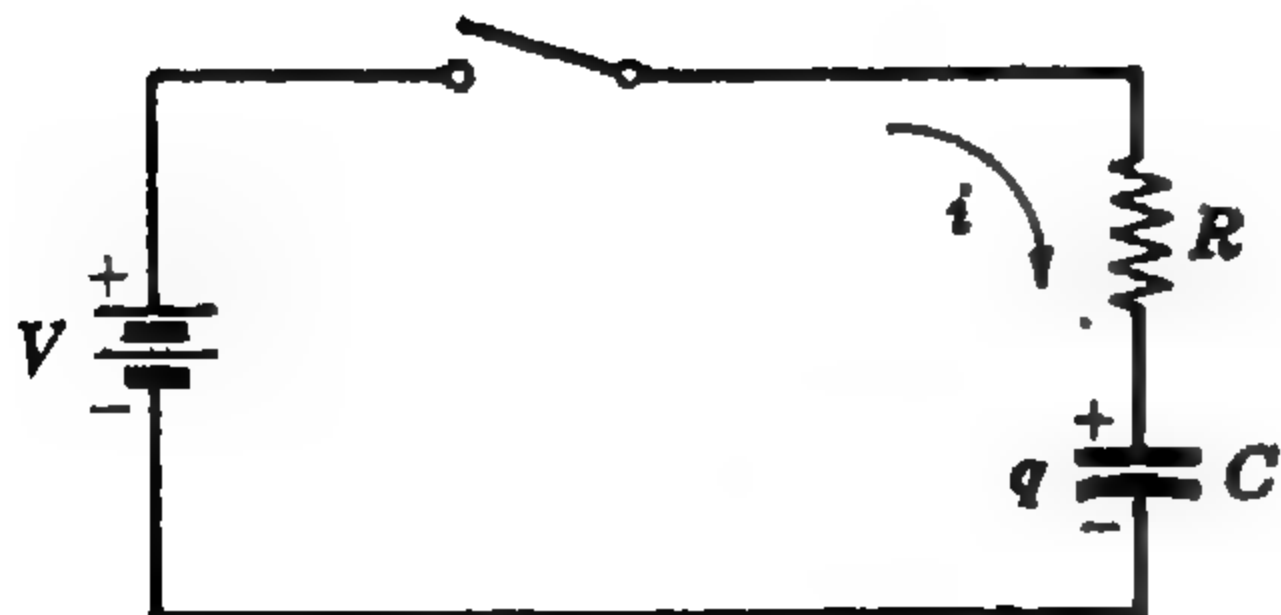


شكل ١٦ - ١١

الشحنة في حالة عابرة للدائرة RC

يكون من المناسب في بعض الأحيان معرفة المعادلة الدالة على الشحنة q في دائرة RC على التوالي في حالة عابرة . ذلك لأن العلاقة بين التيار والشحنة هي $i = dq/dt$ ونحصل على التيار إذن عند الحاجة إليه بواسطة التفاضل .

في الشكل ١٦-١٢ يشحن المكثف بالقطبية الموضحة ؛ حيث أن اتجاه q هو نفسه اتجاه i الموضح في الشكل ١٦-٨ . وتكتب معادلة التيار الأساسية .



شكل ١٦ - ١٢

$$(٣٢) \quad \frac{1}{C} \int i dt + Ri = V$$

باستخدام الشحنة الأساسية والتعويض عن dq/dt بالتيار i .

إذن

$$(٣٣) \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)q = \frac{V}{R} \quad , \quad \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = V$$

باستخدام الطريقة المستخدمة في الحصول على المعادلة (٥) يكون الحل هو

$$(٣٤) \quad q = ce^{-t/RC} + CV$$

عند $t = 0$ تكون الشحنة الأساسية على المكثف هي $q_0 = 0$

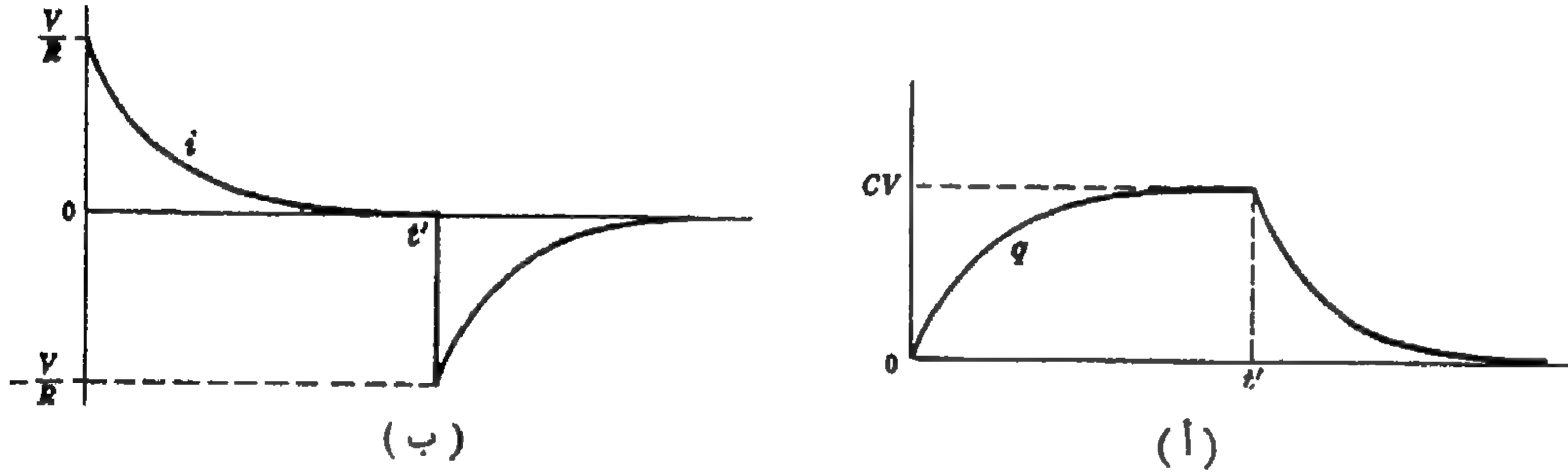
$$(٣٥) \quad c = -CV \text{ أو } q_0 = 0 = c(1) + CV$$

وبالتمويض عن قيمة c هذه في المعادلة (٣٤) نحصل على

$$(٣٦) \quad q = CV(1 - e^{-t/RC})$$

والشحنة العابرة ذات ارتفاع أسى وقيمتها النهائية هي CV . وعلى ذلك فإنه بتحليل دائرة اضمحلال كما موضحة في الشكل ١٦-١٠ على أساس الشحنة فإنه ينتج لدينا شحنة اضمحلال من القيمة CV حسب المعادلة .

$$q = CVe^{-t/RC}$$



شكل ١٦ - ١٣

يوضح الشكل ١٦-١٣ (١) دالتى الشحنة في حالتى الارتفاع والاضمحلال ، كما يوضح الشكل ١٦-١٣ (ب) دالتى التيار المناظرتين . وحيث أن الشحنة يجب أن تكون دالة متصلة فإن $q = CV$ عندما $t'(-)$ و $t'(+) = 0$ بينما $i = 0$ عند $t'(-)$ ويساوى $-V/R$ عند $t'(+) .$

دائرة RLC في الحالة العابرة :

ينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهد على دائرة RLC على التوالى والموضحة في الشكل ١٦-١٤ المعادلة التكاملية التفاضلية التالية .



$$(٣٨) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = V$$

وبالتفاضل نحصل على .

شكل ١٦ - ١٤

$$(٣٩) \quad \left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)i = 0 \quad \text{أو} \quad L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

وهذه المعادلة التفاضلية الخطية والتي من الرتبة الأولى هي من النوع المتجانس وحلها الخاص يساوى صفرا . يمكن أن تأخذ الدالة المتممة ثلاث صور مختلفة تعتمد على القيم النسبية لكل من R و L و C . إن معاملات المعادلة المميزة $D^2 + (R/L)D + 1/LC = 0$ ثابتة وجذرا المعادلة هما .

$$(٤٠) \quad D_2 = \frac{-R/L - \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2}, \quad D_1 = \frac{-R/L + \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2}$$

بوضع $\beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$ و $\alpha = -R/2L$ نجد أن

$$(٤١) \quad D_2 = \alpha - \beta, \quad D_1 = \alpha + \beta$$

والمقدار الموجود تحت الجذر β يمكن أن يكون موجبا أو صفرا أو سالبا ولذلك فإن الحل يكون أما زائد المضاعفة أو حرج المضاعفة أو ناقص المضاعفة (متذبذب) .

الحالة ١ : $(R/2L)^2 > 1/LC$ الجذران D_2 و D_1 حقيقيان وغير متساويان وينتج عنهما حالة زيادة المضاعفة . إذن المعادلة (٣٩) يمكن أن تكتب في صيغة حاصل ضرب .

$$(٤٢) \quad [D - (\alpha + \beta)][D - (\alpha - \beta)]i = 0$$

والتيار هو

$$(٤٣) \quad i = e^{\alpha t}(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}) \quad \text{أو} \quad i = c_1 e^{(\alpha + \beta)t} + c_2 e^{(\alpha - \beta)t}$$

الحالة ٢ : $(R/2L)^2 = 1/LC$. الجذران D_2 و D_1 متساويان والحل هو حالة التضائل الحرج وتكتب المعادلة (٣٩) في صيغة حاصل ضرب .

(٤٤)

$$(D - \alpha)(D - \alpha)i = 0$$

والحل هو

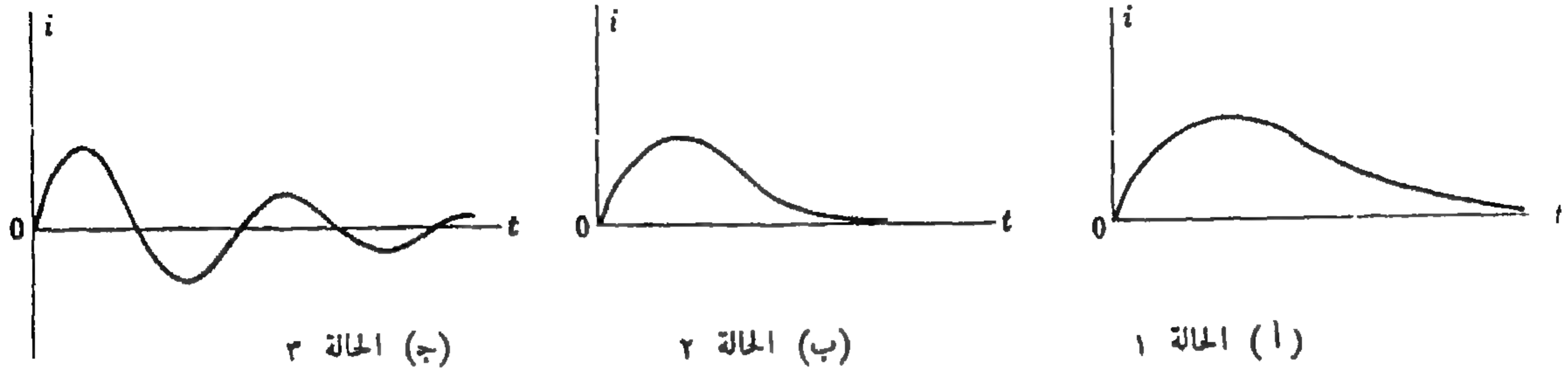
$$(٤٥) \quad i = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t)$$

الحالة ٣ : $(R/2L)^2 < 1/LC$ الجذران D_2 و D_1 مترافقان مركبان والحل هو حالة التضائل الناقص أو المتذبذب وبتعريف $\beta = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$ مع ترك α بتعريفها السابق فإن المعادلة باستخدام المؤثرات تكتب على صيغة حاصل ضرب .

$$(٤٦) \quad [D - (\alpha + j\beta)][D - (\alpha - j\beta)]i = 0$$

$$(٤٧) \quad i = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \quad \text{والحل هو}$$

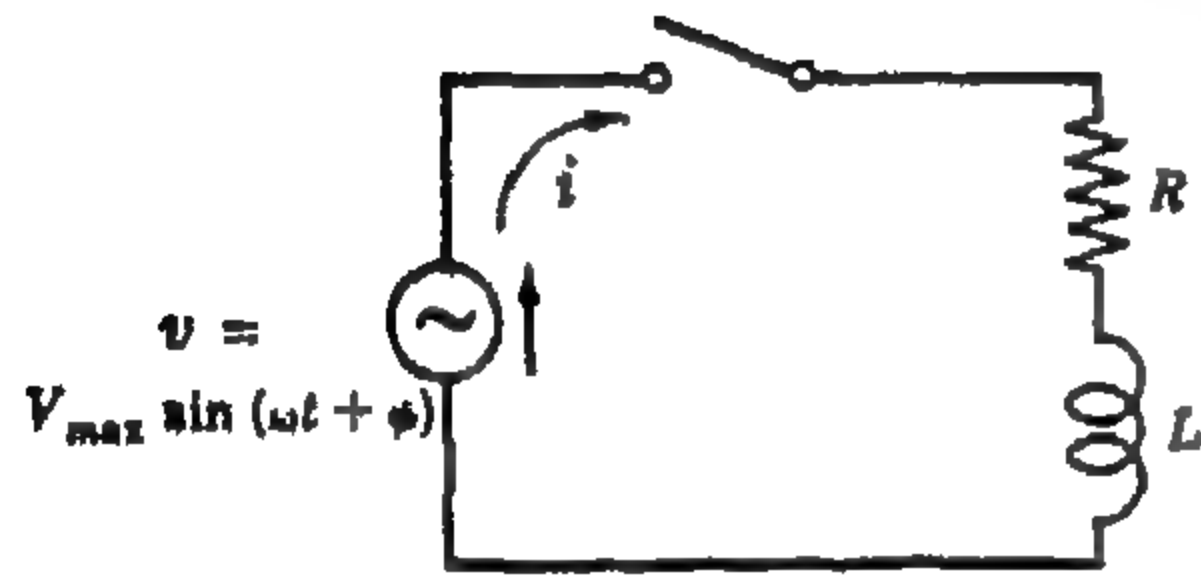
يحتوى التيار في كل الحالات على العامل $e^{\alpha t}$ وحيث أن $\alpha = -R/2L$ فإن قيمة التيار النهائية تساوى صفرا ، وهذا يؤكد أن الدالة المتممة تضمحل في وقت قصير نسبيا . في الشكل ١٥-١٦ رسمت الحالات الثلاث عندما كانت القيمة الابتدائية مساوية للصفر والميل الأساسى موجبا .



شكل ١٦ - ١٥

التيارات المترددة العابرة

التيارات الجيبية العابرة في دائرة RL



شكل ١٦ - ١٦

يؤثر على دائرة RL الموضحة في الشكل ١٦-١٦ عند غلق المفتاح جهد جيبى . يمكن لدالة الجهد أن تؤثر عند أية نقطة في الفترة من لحظة غلق المفتاح ، وعلى هذا فإن زاوية الطور ϕ تأخذ القيم من $0 \rightarrow 2\pi$ rad/sec وينتج من تطبيق قانون كيروشوف للجهد المعادلة التالية

$$(٤٨) \quad \left(D + \frac{R}{L}\right)i = \frac{V_{\max}}{L} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{أو} \quad Ri + L \frac{di}{dt} = V_{\max} \sin(\omega t + \phi)$$

والدالة المتممة هي $i_c = ce^{-(R/L)t}$ والحل الخاص هو

$$i_p = e^{-(R/L)t} \int e^{(R/L)t} \frac{V_{\max}}{L} \sin(\omega t + \phi) dt = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \phi - \tan^{-1} \omega L/R)$$

$$(٤٩) \quad i = i_c + i_p = ce^{-(R/L)t} + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \phi - \tan^{-1} \omega L/R)$$

ويمنع الحث أى تغيير فجائى في التيار وحيث أنه قبل غلق المفتاح كان التيار مساويا للصفر أى أن $i_0 = 0$. إذن

$$c = \frac{-V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\phi - \tan^{-1} \omega L/R) \quad \text{و} \quad i_0 = 0 = c(1) + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\phi - \tan^{-1} \omega L/R)$$

(٥٠) وبالتعويض في (٤٩) فإن التيار يكون

$$i = e^{-(R/L)t} \left[\frac{-V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\phi - \tan^{-1} \omega L/R) \right] + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \phi - \tan^{-1} \omega L/R)$$

يحتوي الجزء الأول من المعادلة (٥٠) على العامل $e^{-(R/L)t}$ الذي تساوى قيمته الصفر في فترة زمنية قصيرة نسبياً . والتعبير الموجود بين القوسين هو ببساطة ثابت معقد إلى حد ما . وتعتمد قيمة هذا الثابت على الزمن في دورة ϕ الذي يغلق عنده المفتاح . وإذا كان $(\phi - \tan^{-1} \omega L/R) = n\pi$ حيث $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ فإن التيار يساوى صفراً ويذهب التيار مباشرة إلى الحالة المستقرة . وإذا كان $(\phi - \tan^{-1} \omega L/R) = (1 + 2n)\pi/2$ فإن تيار العبور يكون عند قيمته العظمى الممكنة .

الجزء الثاني من المعادلة (٥٠) هو التيار في الحالة المستقرة وهو لاحق للجهد المؤثر بالزاوية $\tan^{-1} \omega L/R$ وهذا الحل الخاص الذي حصلنا عليه عن طريق التكامل يمكن الحصول عليه بطريقة المعاملات غير المحددة .

والطريقة صالحة عندما تكون الدالة المؤثرة دالة جيبيية أو جيبي تمامية أو أسية ، وذلك لأن التفاضل المتكرر لهذه الدوال ينتج عنه نفس مجموعة الدوال . ولتطبيق هذه الطريقة على المعادلة (٤٨) حيث الطرف الأيمن يساوى $V_{\max} \sin(\omega t + \phi)$ فإننا نفرض تياراً خاصاً .

$$(٥١) \quad i_p = A \cos(\omega t + \phi) + B \sin(\omega t + \phi)$$

حيث A و B ثابتان . إذن المشتقة الأولى هي

$$(٥٢) \quad i'_p = -A\omega \sin(\omega t + \phi) + B\omega \cos(\omega t + \phi)$$

وبالتمويض عن i_p و i'_p في المعادلة (٤٨) نحصل على

$$(٥٣) \quad \{-A\omega \sin(\omega t + \phi) + B\omega \cos(\omega t + \phi)\} + \frac{R}{L}\{A \cos(\omega t + \phi) + B \sin(\omega t + \phi)\} = \frac{V_{\max}}{L} \sin(\omega t + \phi)$$

وبتجميع معاملات الحدود المتشابهة ينتج .

$$(٥٤) \quad (-A\omega + BR/L) \sin(\omega t + \phi) + (B\omega + AR/L) \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_{\max}}{L} \sin(\omega t + \phi)$$

والآن بمساواة معاملات الحدود المتشابهة ينتج معادلتين في A و B .

$$(٥٥) \quad B\omega + AR/L = 0 \quad , \quad -A\omega + BR/L = V_{\max}/L$$

ومنهما نجد أن

$$(٥٦) \quad B = \frac{RV_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad , \quad A = \frac{-\omega LV_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

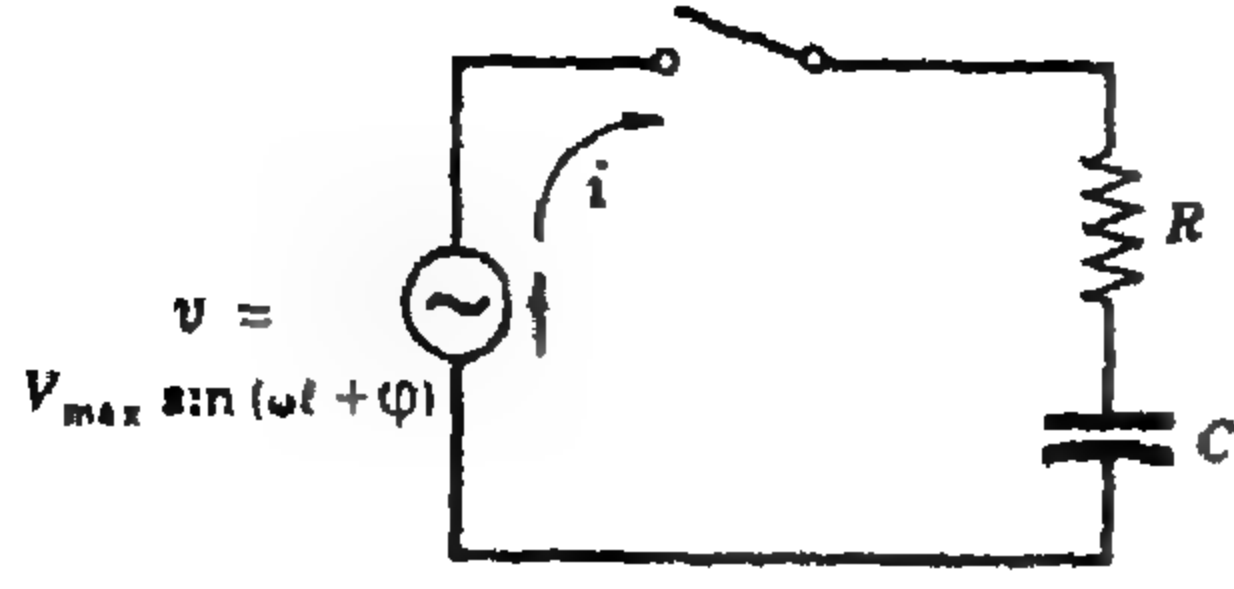
وبالتمويض عن قيمتي A و B في المعادلة (٥١) يكون التيار الخاص هو

$$(٥٧) \quad i_p = \frac{-\omega LV_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t + \phi) + \frac{RV_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \phi)$$

$$(٥٨) \quad i_p = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \phi - \tan^{-1} \omega L/R) \quad \text{أو}$$

وهو نفس الحل الخاص الذي حصلنا عليه بالتكامل .

التيارات العابرة الجيبية في دائرة RC



شكل ١٦ - ١٧

يؤثر جهد جيبي على الدائرة RC الموضحة في الشكل ١٦-١٧ وذلك عند غلق المفتاح . وينتج من تطبيق قانون كيرشوف للجهد على الدائرة المعادلة التالية .

$$(٥٩) \quad Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$$

وبالتفاضل واستخدام الترميز بالمؤثرات نحصل على

$$(٦٠) \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)i = \frac{\omega V_{\max}}{R} \cos(\omega t + \varphi)$$

والدالة المتتممة هي

$$(٦١) \quad i_c = ce^{-t/RC}$$

والحل الخاص الذي نحصل عليه عن طريق التكامل أو طريق المعاملات غير المحددة هو

$$(٦٢) \quad i_p = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR)$$

إذن الحل التام هو

$$(٦٣) \quad i = ce^{-t/RC} + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR)$$

لتعيين الثابت c نضع $t = 0$ في المعادلة (٥٩) ، فيكون التيار الابتدائي هو $i_0 = \frac{V_{\max}}{R} \sin \varphi$ وبالتعويض

بهذه القيمة في المعادلة (٦٣) مع وضع $t = 0$ نحصل على

$$(٦٤) \quad \frac{V_{\max}}{R} \sin \varphi = c(1) + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR)$$

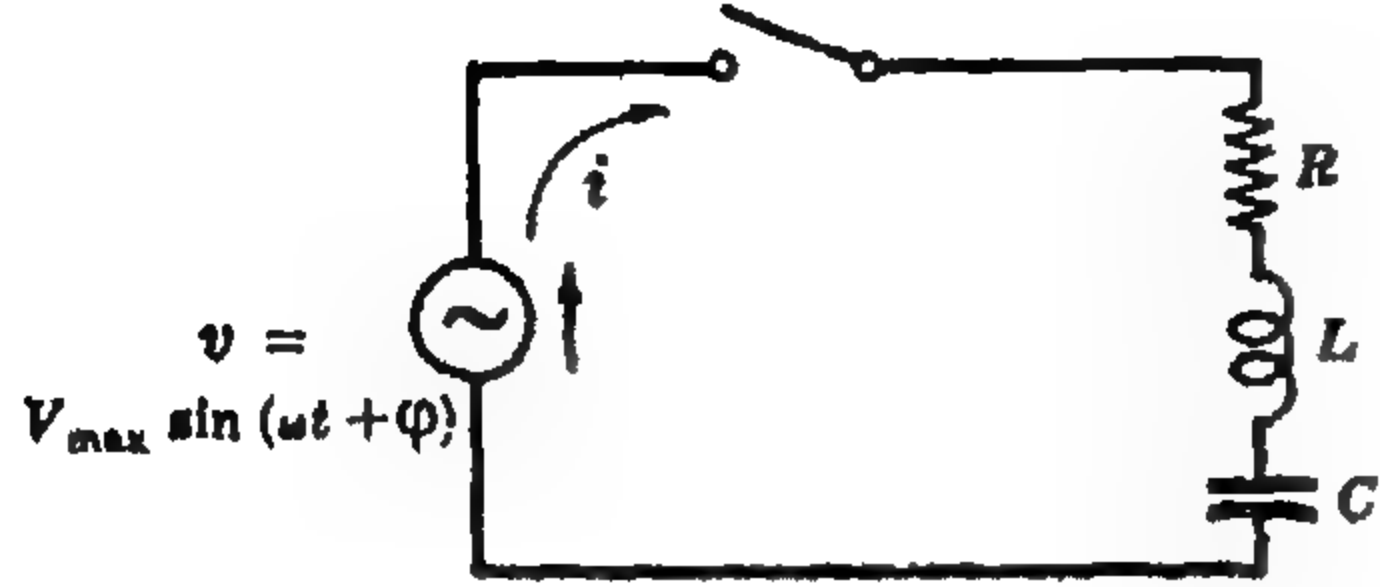
$$(٦٥) \quad c = \frac{V_{\max}}{R} \sin \varphi - \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR) \quad \text{أو}$$

بالتعويض عن c من (٦٥) في (٦٣) ينتج التيار التام

$$(٦٦) \quad i = e^{-t/RC} \left[\frac{V_{\max}}{R} \sin \varphi - \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR) \right] + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR)$$

والحد الأول هو تيار العبور المضمحل بعامل $e^{-t/RC}$. والكمية الداخلية والتي بين قوسين هي كمية ثابتة . والحد الثاني هو تيار الحالة المستقرة وهو سابق للجهد المؤثر بزاوية $\tan^{-1} \omega CR$.

التيارات العابرة الجيبية في دائرة RLC



شكل ١٦ - ١٨

يؤثر على دائرة التوالي RLC الموضحة في الشكل ١٦ - ١٨ جهد جيبى وذلك عند غلق المفتاح . والمعادلة الناتجة هي

$$(٦٧)$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = V_{\max} \sin(\omega t + \phi)$$

وبالتفاضل واستخدام الترميز بالمؤثرات نحصل على

$$(٦٨) \quad \left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} \right) i = \frac{\omega V_{\max}}{L} \cos(\omega t + \phi)$$

نحصل على الحل الخاص بطريقة المعاملات غير المحددة كما يلي . نضع أولاً $i_p = A \cos(\omega t + \phi) + B \sin(\omega t + \phi)$ ثم نحسب i'_p ثم ننوِّض عن i'_p و i''_p في المعادلة (٦٧) . ونحصل على قيم A و B . بمساواة معاملات الحدود المشابهة كما فعلنا سابقاً في حالة تيار الانتقال (أو العبور) الجيبى لدائرة RL . وبالتعبير عن النتيجة بدالة جيبية واحدة يكون الحل الخاص هو

$$(٦٩) \quad i_p = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin\left(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right)$$

والدالة المتبعة مطابقة لما في حالة دائرة التوالي RLC بتيار مستمر السابق دراسته ، حيث كانت النتيجة تضاؤلاً زائداً أو تضاؤلاً حرجياً أو تضاؤلاً متذبذباً حسب قيم R و L و C .

الحالة ١ : $(R/2L)^2 = 1/LC$ الجذران حقيقيان وغير متساويين وتنتج بذلك حالة تضاؤل زائدة .

$$\beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC} \quad \text{حيث} \quad \alpha = -R/2L \quad D_2 = \alpha - \beta \quad \text{و} \quad D_1 = \alpha + \beta$$

والحل التام هو

$$(٧٠) \quad i = e^{\alpha t}(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}) + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin\left(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right)$$

الحالة ٢ : $(R/2L)^2 > 1/LC$. الجذران حقيقيان ومتساويان وتنتج بذلك حالة تضاؤل حرج ، والتيار

التام هو

$$(٧١) \quad i = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t) + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin\left(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right)$$

الحالة ٣ : $(R/2L)^2 < 1/LC$ الجذران مترافقان مركبان وتنتج عن ذلك حالة التذبذب والتيار التام هو (٧٢)

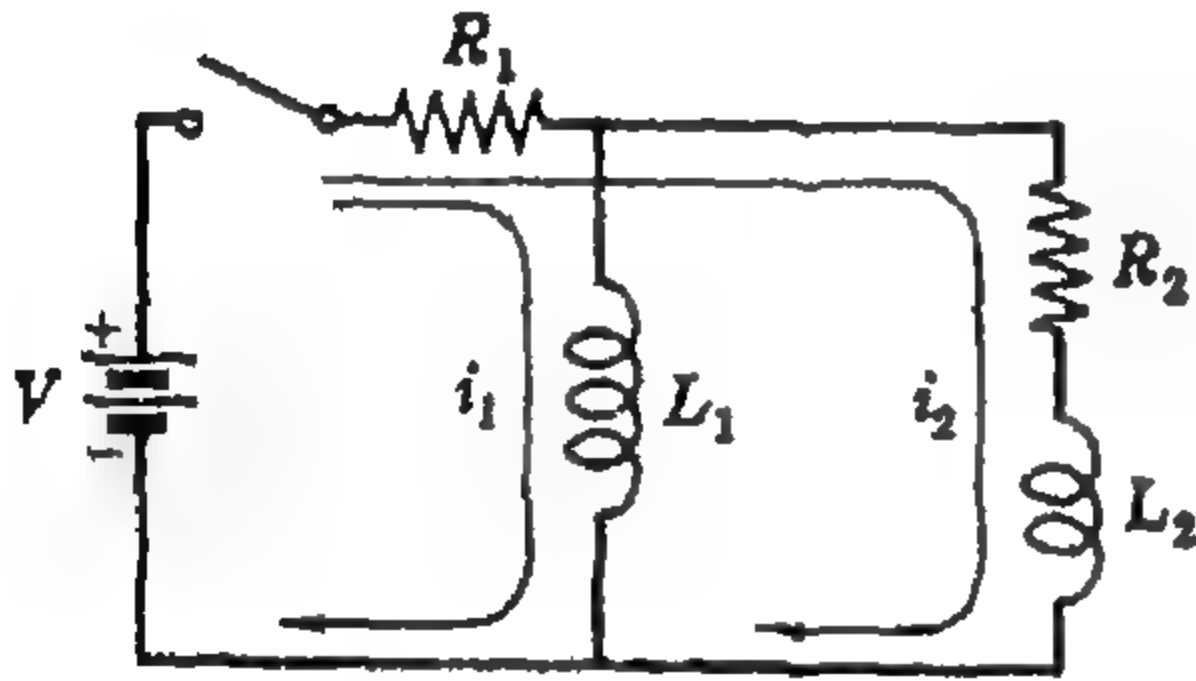
$$i = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) + \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin \left(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R} \right)$$

حيث $\beta = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$

يتطابق الحل الخاص لكل المعادلات (٧٠) و (٧١) و (٧٢) بينما يختلف تيار العبور المعطى بالدالة المتضمنة في كل حالة .
 فثلاً في الحالة ٣ يحتوى تيار العبور على مجموعة دوال جيبية ترددتها β rad/sec ، وهذا التردد يختلف عموماً عن تردد الحل الخاص ω . وبالتالي لا يمكن استنتاج ظهور تيار خلال فترة العبور ، وعادة ما يأخذ شكل غير منتظم تماماً . وبمجرد أن يصبح تيار العبور مساوياً للصفر بفعل عامل الاضمحلال ، فإن التيار يصبح إذن سابقاً أو لاحقاً للجهد المؤثر تبعاً للقيم النسبية للممانعات $1/\omega C$ و ωL بزاوية $\tan^{-1} (1/\omega C - \omega L)/R$

تيارات الانتقال لشبكتين فرعيتين

ينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهد على شبكتين فرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٦ - ١٩ المعادلتان التفاضليتان الآتيتان :



شكل ١٦ - ١٩

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 &= V \\ R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} &= V \end{aligned} \quad (٧٣)$$

باستخدام الترميز بالمؤثرات وإعادة الترتيب نحصل على

$$\begin{aligned} (D + R_1/L_1) i_1 + (R_1/L_1) i_2 &= V/L_1 \\ (R_1/L_2) i_1 + \left(D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \right) i_2 &= V/L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/L_1 \\ V/L_2 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad (٧٤)$$

والحصول على معادلة في i_1 لا تعتمد على i_2 فإننا نستخدم المحددات ، نكتب

$$\begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} i_1 = \begin{vmatrix} V/L_1 & R_1/L_1 \\ V/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} \quad (٧٥)$$

نفك محدد الطرف الأيسر ونرتبها على حسب قوى D التنزلية . ويظهر الحد $D(V/L_1)$ في مفكوك محدد الطرف الأيمن ، ولكن حيث أن $D = d/dt$ ثابت فإن قيمة هذا الحد تساوى صفراً .

$$\left[D^2 + \left(\frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} \right) D + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right] i_1 = V R_2 / L_1 L_2 \quad (٧٦)$$

والمعادلة المميزة هي على الصيغة $D^2 + AD + B = 0$ وحيث أنه في هذه الحالة $A^2 - 4B > 0$ لجميع قيم ثوابت الدائرة (فيما عدا الحالة التي يكون فيها L_1 أو L_2 مساوياً للصفر) فالدالة المتممة هي على الصورة المعطاة في المعادلة (٤٣) . حيث أن الدالة المؤثرة ثابتة فإن الحل الخاص هو الثابت الذي يحقق المعادلة

$$(٧٧) \quad i_{1p} = V/R_1 , \quad \left(\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right) i_{1p} = VR_2/L_1 L_2$$

والآن بتطبيق نفس الطرق على i_2 نحصل على

$$(٧٨) \quad \begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} i_2 = \begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & V/L_1 \\ R_1/L_2 & V/L_2 \end{vmatrix}$$

وبعد فك المحددتين نحصل على

$$\left[D^2 + \left(\frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} \right) D + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right] i_2 = 0$$

والمعادلة المميزة هي نفسها كما في المعادلة (٧٦) ، وبالتالي فإن الدوال المتممة متطابقة . وحيث أن المعادلة من النوع المتجانس فإن الحل الخاص للتيار i_2 يساوى صفراً .

وبدراسة الدائرة نجد أن هذا متوقع تماماً ، ذلك لأنه في الحالة المستقرة يعمل L_1 كدائرة منغلقة على الفرع $R_2 L_2$ وبذلك يحمل التيار بعيداً عن هذا الفرع .

المقاومة R_1 هي المعاوقة النهائية في الحالة المستقرة وينتج عن ذلك أن $i_1 = V/R_1$ كما في المعادلة (٧٧) .

مسائل محلولة

١٦ - ١ دائرة RL على التوالي تتكون من $R = 50 \Omega$ ، $L = 10 \text{ H}$ يؤثر عليها جهد ثابت $V = 100 \text{ V}$ عندما

$t = 0$ وذلك عند غلق المفتاح - أوجد (أ) معادلات كل من i و v_R و v_L ، (ب) التيار عندما $t = 0.5 \text{ Seconds}$

(ج) الزمن الذي عنده $v_R = v_L$.

(أ) المعادلة التفاضلية للتيار المعطى هي

$$(١) \quad 50i + 10 \frac{di}{dt} = 100 \quad \text{أو} \quad (D + 5)i = 10$$

والحل التام هو

$$(٢) \quad i = i_c + i_R = ce^{-5t} + 2$$

عند $t = 0$ نجد أن $i_0 = 0$ أى أن $0 = c(1) + 2$ أو $c = -2$. إذن

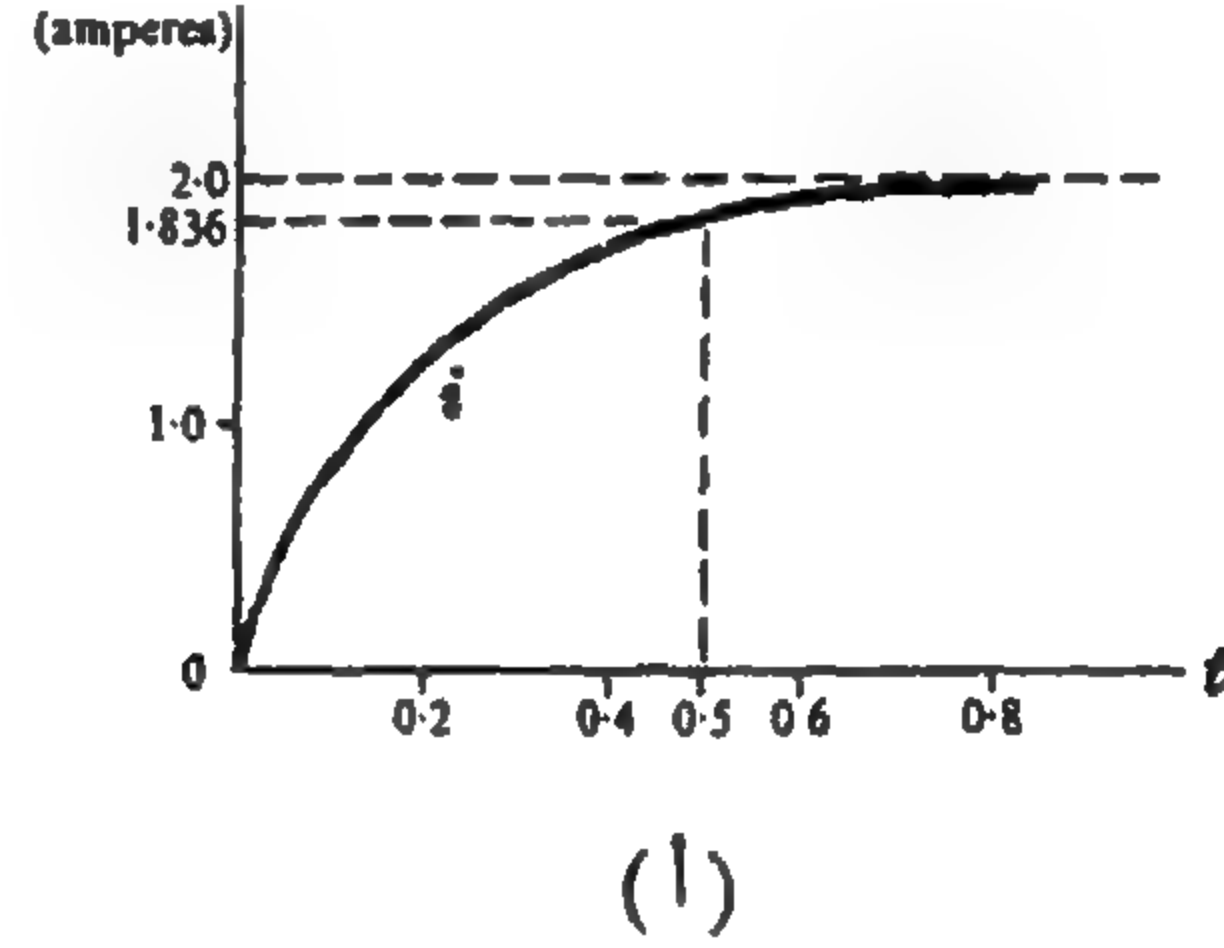
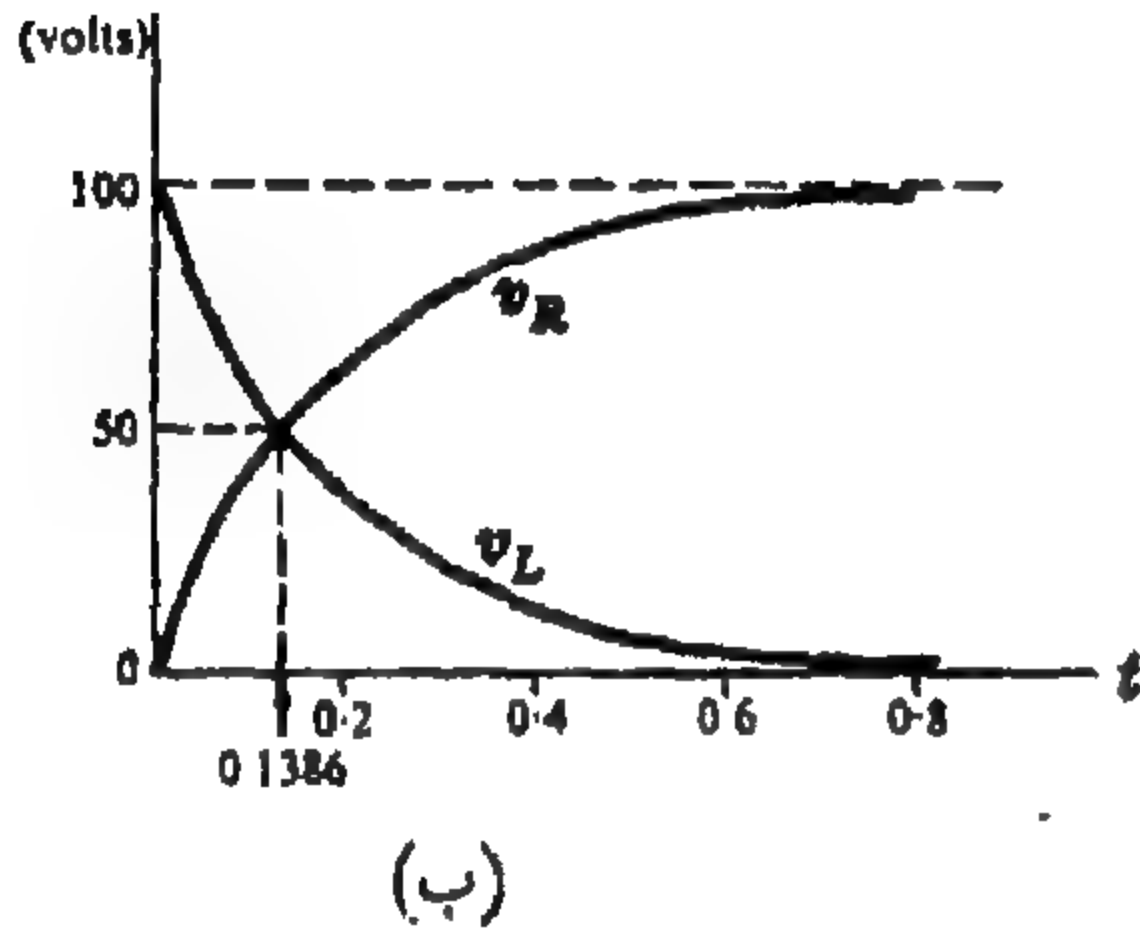
$$i = 2(1 - e^{-5t}) \text{ amperes}$$

ويوضح الشكل ١٦ - ٢٠ (أ) هذه العلاقة .

والجهدان المناظران عبر عنصرى الدائرة هما

$$(٤) \quad v_L = L \frac{di}{dt} = 100e^{-5t} \text{ volts} \quad , \quad v_R = Ri = 100(1 - e^{-5t}) \text{ volts}$$

ويوضح الشكل ١٦ - ٢٠ (ب) هاتين العلاقتين



شكل ١٦ - ٢٠

(ب) نضع في المعادلة (٣) $t = 0.5$ Seconds فنحصل على $i = 2(1 - e^{-5(0.5)}) = 2(1 - 0.082) = 1.836 \text{ A}$

(ج) عندما $v_R = v_L$ فإن كلا منهما يجب أن يساوى 50 V ، وحيث أن الجهد المؤثر يساوى 100 فإننا نضع

أيامن v_R أو v_L يساوى 50 V ثم نحل المعادلة للحصول على t من المعادلة (٤) $v_L = 50 = 100e^{-5t} \text{ volts}$

إذن $e^{-5t} = 0.5$ أو $5t = 0.693$ و $t = 0.1386 \text{ s}$.

١٦ - ٢ بالإشارة إلى المسألة ١٦ - ١ أوجد معادلتى p_R و p_L ثم بين أن القدرة فى الحث تعبر عن الطاقة المخزونة فى المجال المغناطيسى فى الحالة المستقرة .

باستخدام التيار والجهد الذى حصلنا عليهما فى المسألة ١٦ - ١ فإن معادلات القدرة اللحظية تكون:

$$p_R = v_R i = 100(1 - e^{-5t}) 2(1 - e^{-5t}) = 200(1 - 2e^{-5t} + e^{-10t}) \text{ watts}$$

$$p_L = v_L i = 100e^{-5t} 2(1 - e^{-5t}) = 200(e^{-5t} - e^{-10t}) \text{ watts}$$

$$p_T = p_R + p_L = 200(1 - e^{-5t}) \text{ watts}$$

والطاقة المخزونة فى الحالة المستقرة هى $W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(10)(2)^2 = 20 \text{ joules}$.

و تكامل p_L من $t = 0$ إلى $t = \infty$ هو $W = \int_0^{\infty} 200(e^{-5t} - e^{-10t}) dt = 20 \text{ joules}$.

١٦ - ٣ في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ١٦ - ٢١ إذا أغلق المفتاح إلى الموضع 1 عندما كانت $t = 0$ وبذلك يؤثر مصدر مقدار 100 V على الفرع RL ، وعندما كانت $t = 500\text{ }\mu\text{s}$ يتحرك المفتاح إلى الموضع 2 . فأوجد معادلتى التيار في كلتا الفترتين وارسم تيار العبور .

عندما كان المفتاح في الموضع 1 فإن المعادلة هي

$$(١) \quad 100i + 0.2 \frac{di}{dt} = 100 \quad (D + 500)i = 500$$

والتيار التام هو :

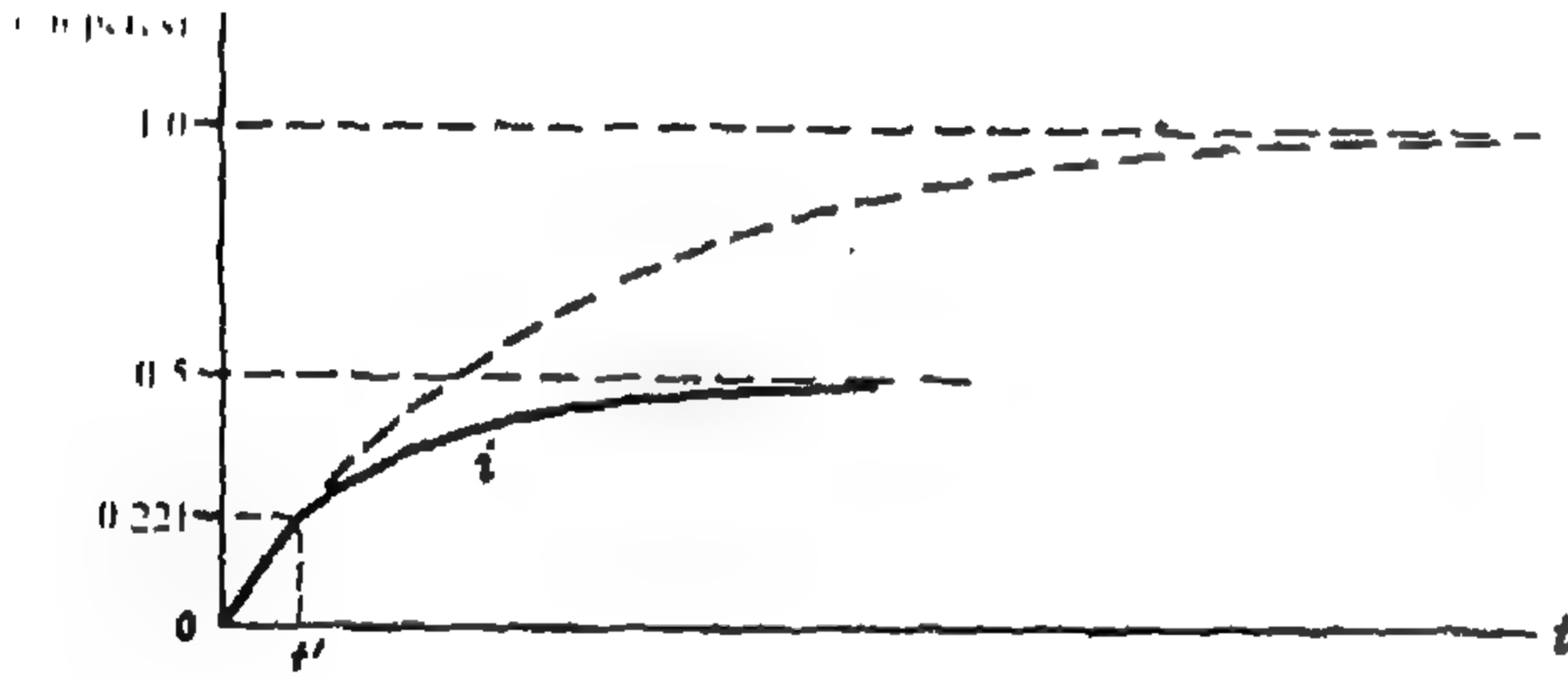
$$(٢) \quad i = c_1 e^{-500t} + 1.0 \text{ amperes}$$

وعندما $t = 0$ كانت $i = 0$ وبتطبيق الشرط الابتدائي على المعادلة (٢) نجد أن $0 = c_1(1) + 1.0$ أو $c_1 = -1.0$ إذن التيار هو

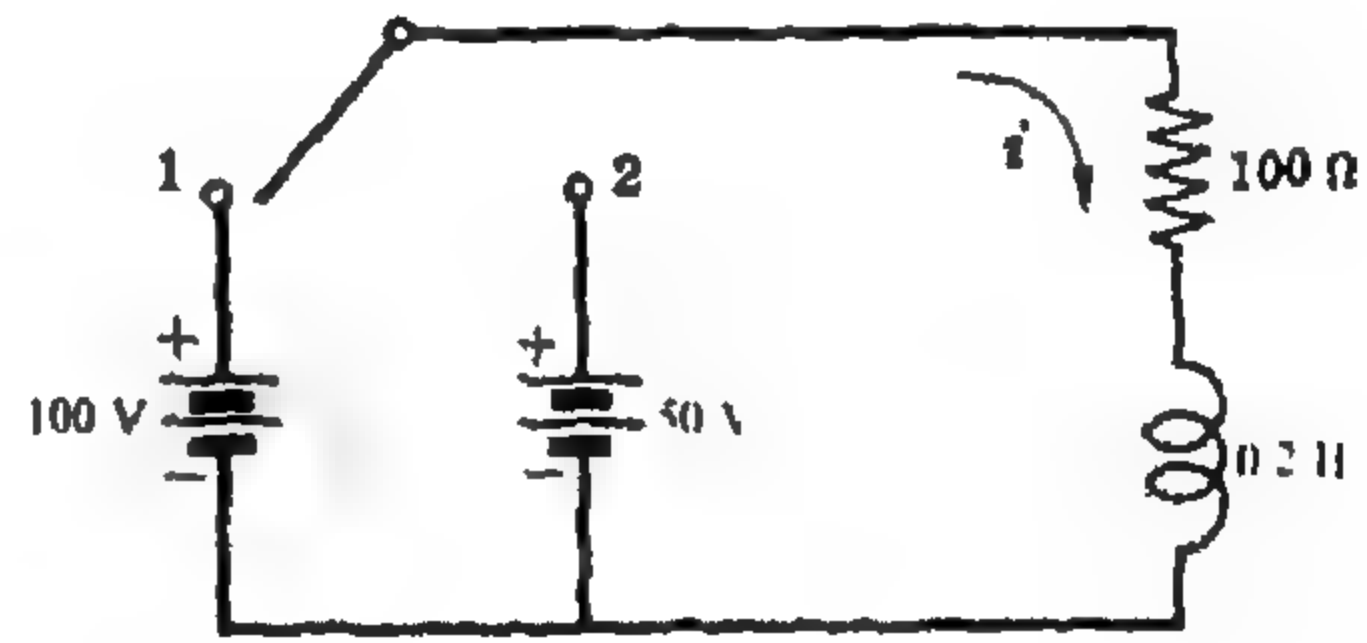
$$(٣) \quad i = 1.0(1 - e^{-500t}) \text{ amperes}$$

والآن عند زمن قدرة $500\text{ }\mu\text{sec}$ فإن التيار يكون

$$(٤) \quad i = 1.0(1 - e^{-500(500 \times 10^{-6})}) = 1.0(1 - 0.779) = 0.221 \text{ A}$$



شكل ١٦ - ٢٢



شكل ١٦ - ٢١

عندما يكون المفتاح في الموضع 2 فإن الجهد المؤثر يكون 50 V بنفس قطبية المصدر 100 V وتكون المعادلة هي

$$(٥) \quad 100i + 0.2 \frac{di}{dt} = 50 \quad \text{أو} \quad (D + 500)i = 250$$

وهي نحصل على

$$(٦) \quad i = c_2 e^{-500(t-t')} + 0.5 \text{ amperes}$$

حيث $t' = 500 \mu s$. والآن بوضع $t = t'$ في المعادلة (٦) فإن التيار يكون $0.221 A$ كما في المعادلة (٤).

$$c_2 = -0.279 \text{ و } i = 0.221 = c_2(1) + 0.5$$

وعندما $t < t'$ فإن

$$(٧) \quad i = -0.279e^{-500(t-t')} + 0.5 \text{ amperes}$$

وتطبق المعادلة (٣) في الفترة $0 < t < t'$ وفي هذه الحالة فإن تيار العبور الموضح بالنقط في الشكل ١٦-٢٢ يقترب من قيمته في الحالة المستقرة وهي 1.0 . عند t' يكون التيار $0.221 A$ والمفتاح في الموضع 2 وفي هذه الحالة نطبق المعادلة (٧) عندما $t < t'$ والقيمة النهائية للتيار في هذه الحالة تساوي $0.5 A$ كما هو موضح .

١٦-٤ كرر المسألة ١٦-٣ مع عكس قطبية المصدر $50 V$.

الجزء الأول من تيار العبور عندما كان المفتاح في الموضع (1) هو نفسه الذي حصلنا عليه في المسألة ١٦-٣ : $i = 1.0(1 - e^{-500t})$ و $i = 0.221 A$ عندما $t = 500 \mu s$.

وبعكس قطبية المصدر $50 V$ تنتج المعادلة التالية

$$(١) \quad 100i + 0.2 \frac{di}{dt} = -50 \text{ أو } (D + 500)i = -250$$

وحلها هو

$$(٢) \quad i = c e^{-500(t-t')} - 0.5 \text{ amperes}$$

والآن عندما $t = t'$ فإن التيار يكون $0.221 A$

وبالتمويض في المعادلة (٢) نجد أن

$$c = 0.721 \text{ أو } 0.221 = c(1) - 0.5$$

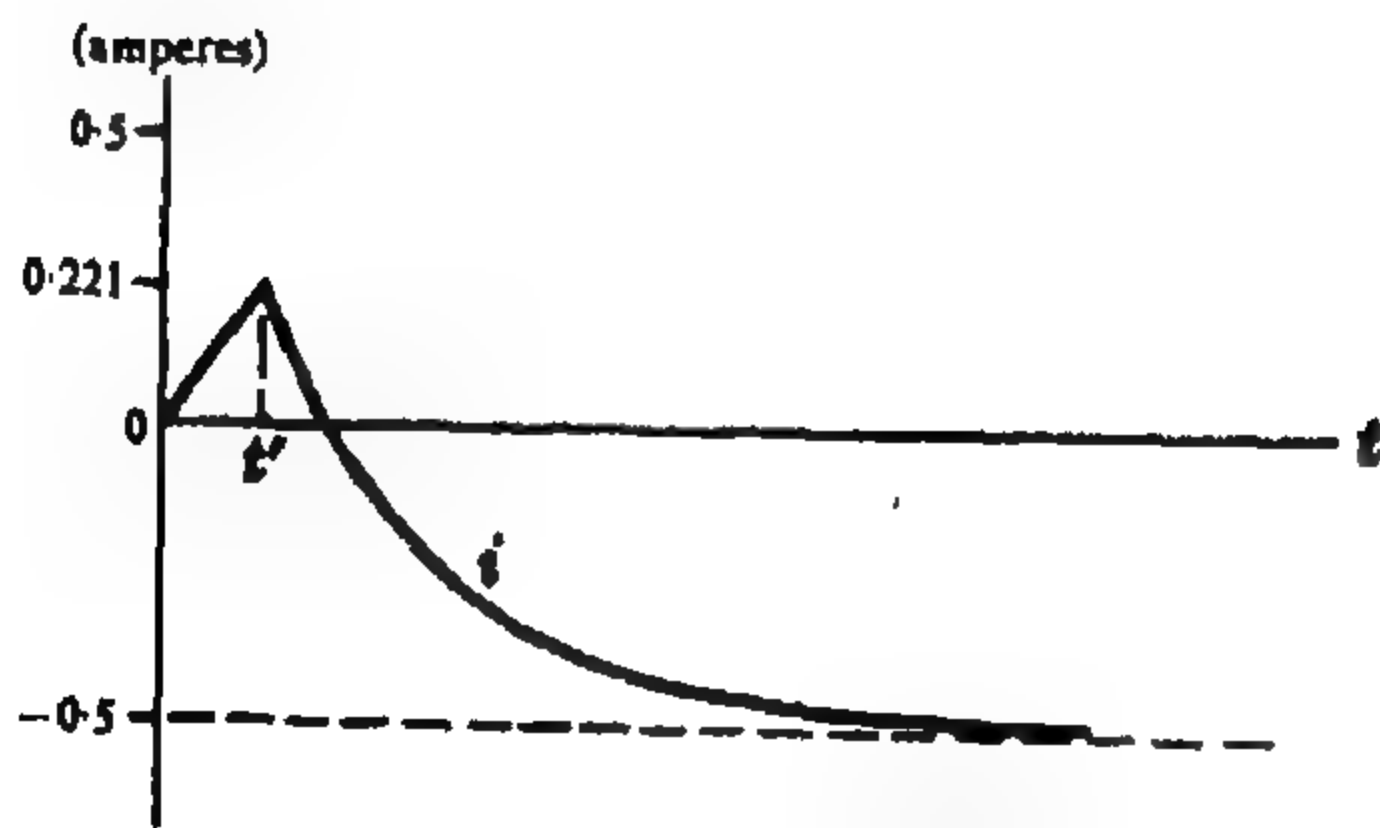
إذن معادلة التيار عندما $t > t'$ هي

$$i = 0.721 e^{-500(t-t')} - 0.5 \text{ amperes}$$

ويوضح الشكل ١٦-٢٣ تيار العبور بقيمته

النائية $-0.5 A$ ذلك لأن اتجاه المصدر $50 V$ عكس

الاتجاه الموجب المفروض للتيار i .



شكل ١٦-٢٣

١٦-٥ دائرة توالي تتكون من R و C فيها $R = 5000 \Omega$ و $C = 20 \mu F$ يؤثر عليها جهد ثابت $V = 100 V$

عند $t = 0$ والمكثف لا يحمل شحنة ابتدائية . أوجد معادلات i و v_R و v_C .

عند غلق المفتاح تكون المعادلة هي

$$(١) \quad 5000i + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int i dt = 100$$

وبالتفاضل واستخدام رموز المؤثرات نحصل على

$$(٢) \quad (D + 10)i = 0 \quad \text{وحلها هو} \quad i = ce^{-10t}$$

بوضع $t = 0$ في المعادلة (١) نحصل على التيار الابتدائي $i_0 = 100/5000 = 0.02 \text{ A}$ وبالتعويض بهذه القيمة في المعادلة (٢) نحصل على $c = 0.02$. إذن معادلة التيار هي

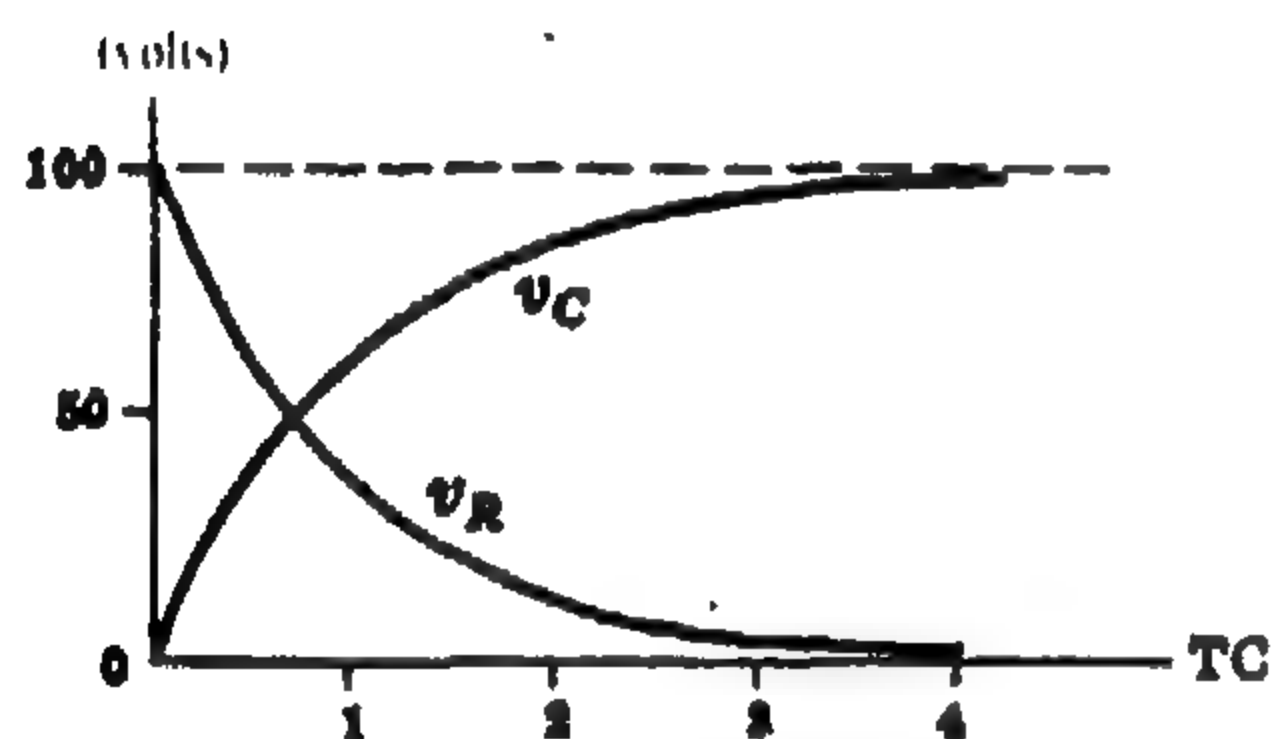
$$(٣) \quad i = 0.02 e^{-10t} \text{ amperes}$$

وجهدا العبور عبر عنصري الدائرة هما

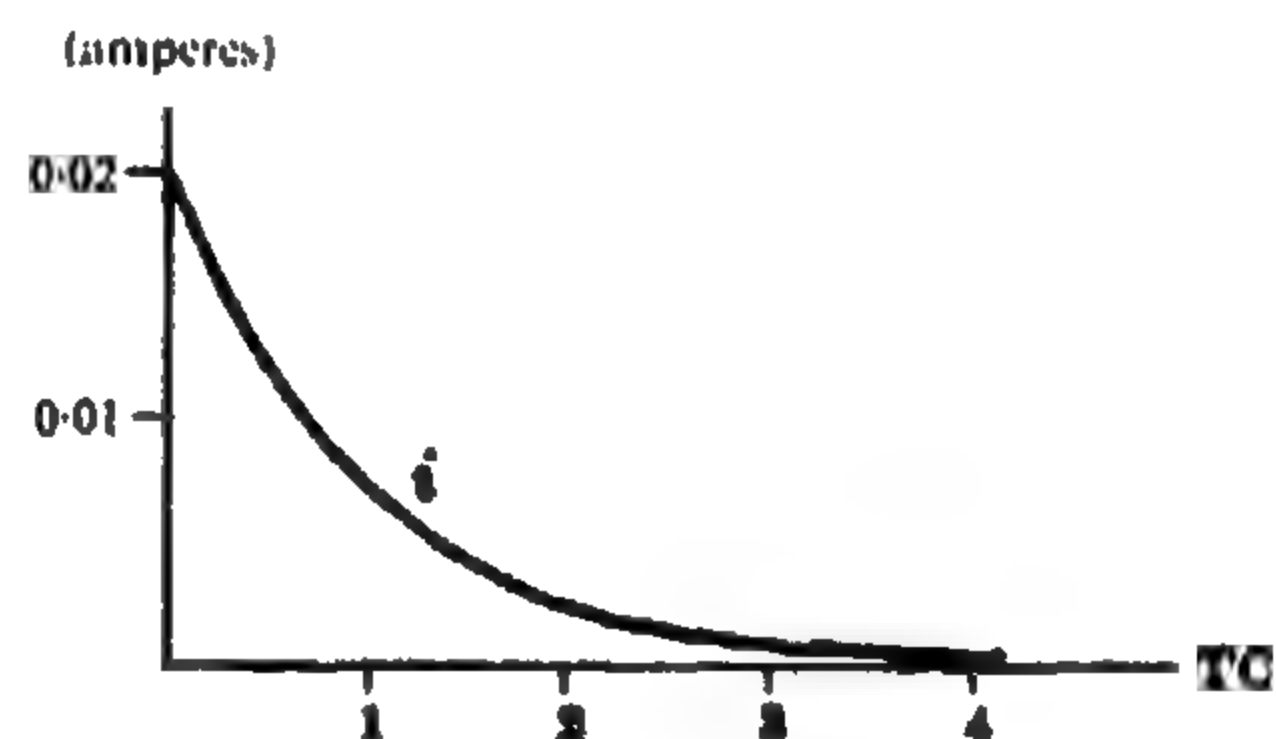
$$v_R = Ri = 5000(0.02 e^{-10t}) = 100 e^{-10t} \text{ volts}$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int 0.02 e^{-10t} dt = 100(1 - e^{-10t}) \text{ volts}$$

يوضح الشكل ١٦ - ٢٤ تيار وجهدى العبور . في الحالة المستقرة $v_R = 0$ ، $v_C = 100 \text{ V}$.



(ب)



(أ)

شكل ١٦ - ٢٤



شكل ١٦ - ٢٥

١٦ - ٢٤ إذا كان على المكثف $20 \mu\text{F}$ في دائرة RC الموضحة في الشكل ١٦ - ٢٥ شحنة ابتدائية $q_0 = 500 \mu\text{ Coulombs}$ وذلك بالقطبية الموضحة في الرسم . وعند $t = 0$ أغلق المفتاح وبالتالي أثرتنا بالجهد الثابت $V = 50 \text{ V}$ فأوجد تيار العبور .

عند غلق المفتاح تكون المعادلة هي

$$(١) \quad (D + 50)i = 0 \quad \text{أو} \quad 1000i + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int i dt = 50$$

والحل هو

$$(٢) \quad i = c e^{-50t} \text{ amperes}$$

والآن فإن المصدر 50 V يحرك تياراً في الاتجاه الموضح بالرسم وينتج عن ذلك شحنة موجبة على اللوح العلوي المكثف .
ينتج عن الشحنة الأساسية على المكثف q_0 جهد مقداره $V_0 = q_0/C = (500 \times 10^{-9})/(20 \times 10^{-6}) = 25 \text{ volts}$
وهو أيضاً يرسل تياراً في اتجاه i كما هو موضح وعلى هذا عندما $t \approx 0$ فإن التيار الأساسي يكون
 $i_0 = (V + q_0/C)/R = (50 + 25)/1000 = 0.075 \text{ A}$ وبالتعويض في المعادلة (٢) نجد أن $c \approx 0.075$
إذن $i = 0.075 e^{-50t} \text{ amperes}$

١٦-٧ كرر المسألة ١٦-٦ باستخدام الشحنة كأساس للعبور .

معادلة الشحنة الأساسية هي

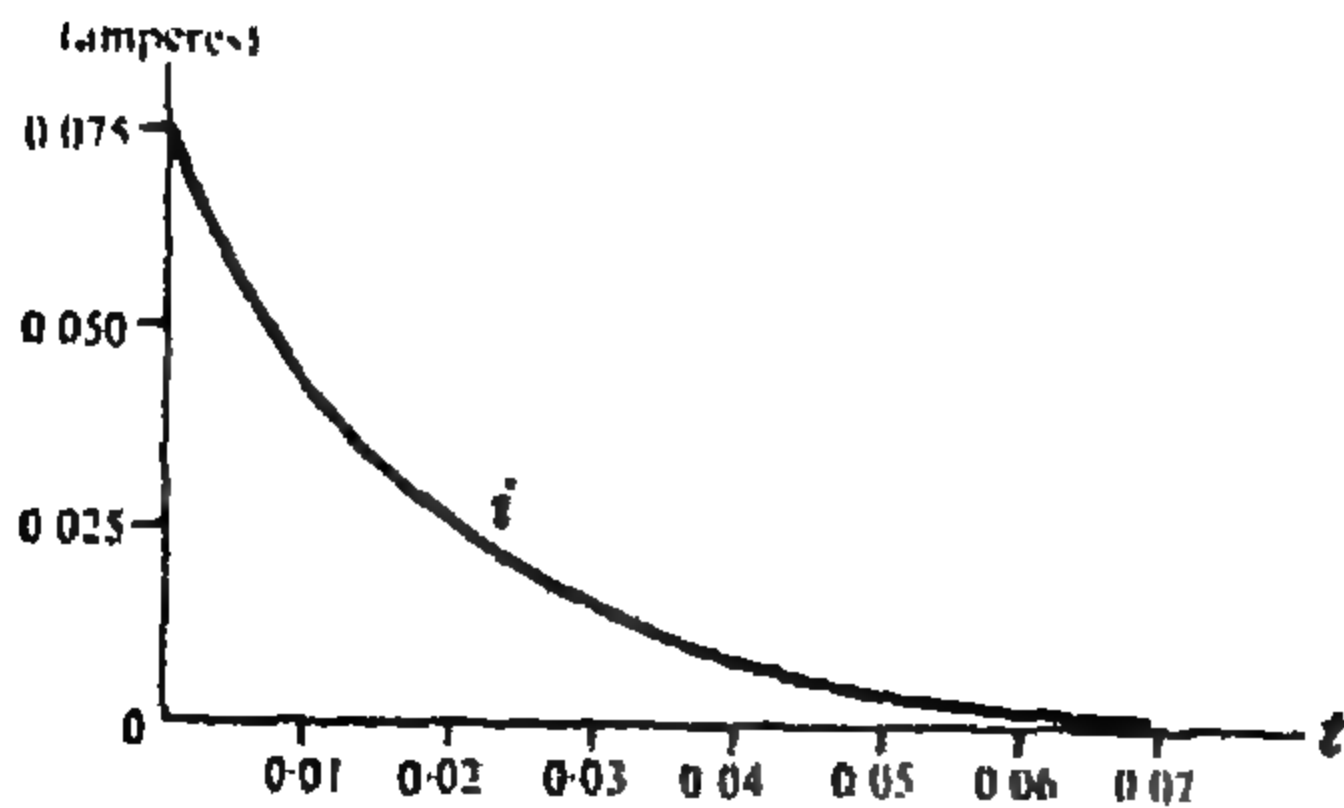
$$(١) \quad 1000 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{20 \times 10^{-6}} = 50 \text{ أو } (D + 50)q = 0.05$$

وحلها هو

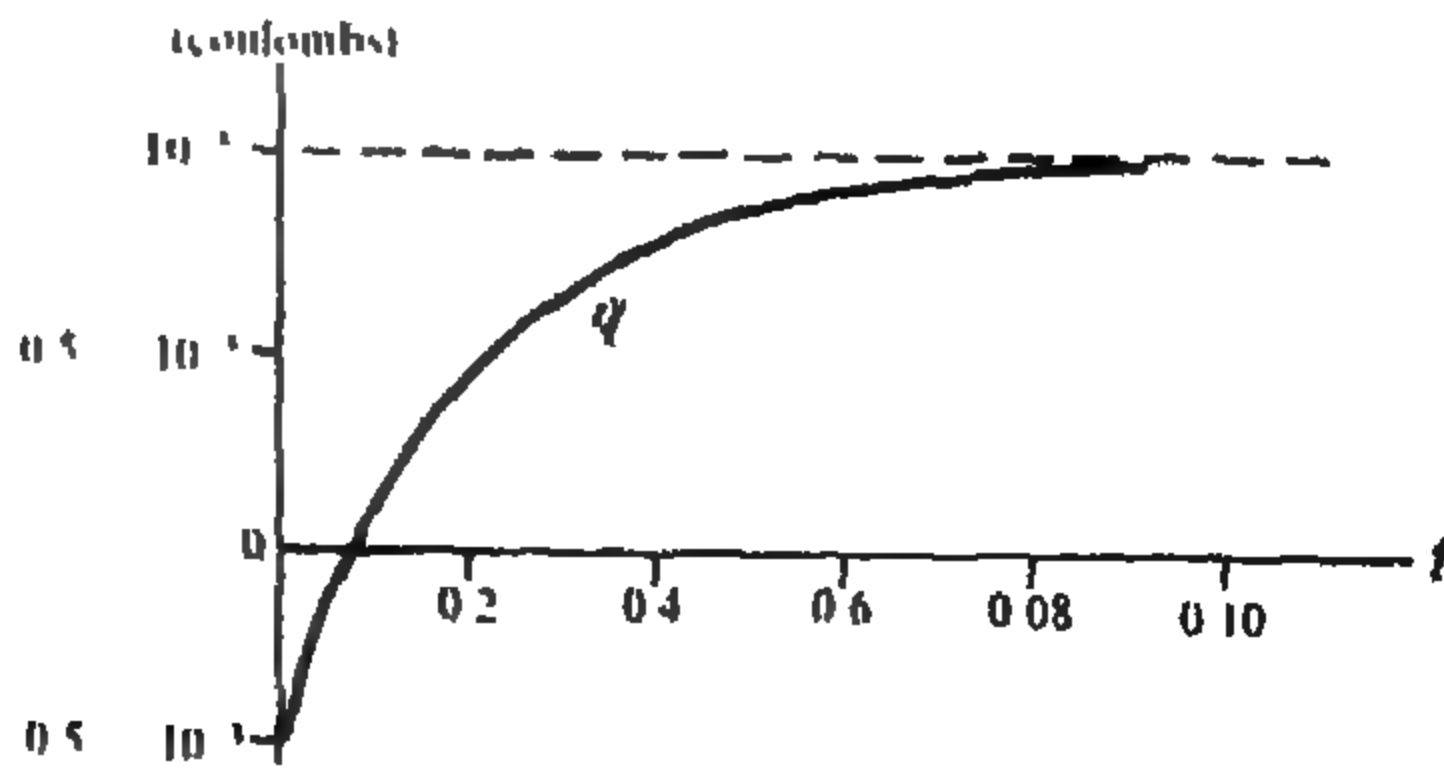
$$(٢) \quad q = c e^{-50t} + 10^{-3} \text{ coulombs}$$

عند $t = 0$ يكون على المكثف شحنة موجبة مقدارها $0.5 \times 10^{-3} \text{ coulombs}$ على اللوح السفلي .
قطبية الشحنة المترسبة أثناء فترة العبور موجبة على اللوح العلوي . إذن بوضع $q_0 = -0.5 \times 10^{-3}$
و $t = 0$ في المعادلة (٢) نجد أن $c = -1.5 \times 10^{-3}$ إذن $q = -1.5 \times 10^{-3} e^{-50t} + 10^{-3}$ ومعادلة
تيار العبور هي $i = dq/dt = 0.075 e^{-50t} \text{ amperes}$

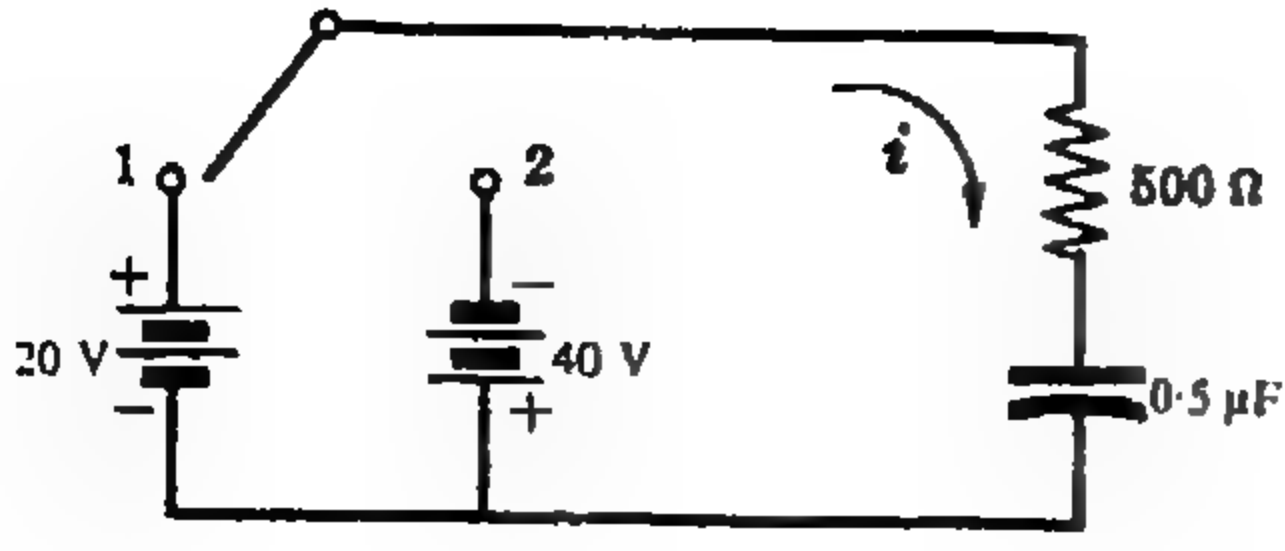
يبين منحنى العبور الموضح في الشكل ١٦-٢٦ (أ) أنه يوجد على اللوح السفلي المكثف شحنة أساسية موجبة مقدارها $0.5 \times 10^{-3} \text{ coulombs}$ وشحنة نهائية مقدارها $1.0 \times 10^{-3} \text{ coulombs}$ بقطبية موجبة على اللوح العلوي . يوضح الشكل ١٦-٢٦ (ب) تيار العبور $i = dq/dt$.



(ب)



(أ)



شكل ١٦ - ٢٧

١٦-٨ في دائرة RC الموضحة في الشكل ١٦-٢٧ أغلق

المفتاح عند الموضع 1 عندما كانت $t = 0$ وبعد $1 TC$ تحرك إلى الموضع 2 . أوجد تيار العبور التام .

عندما كان المفتاح في الموضع 1 فإن حل المعادلة التفاضلية التي نحصل عليها بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على الدائرة هو

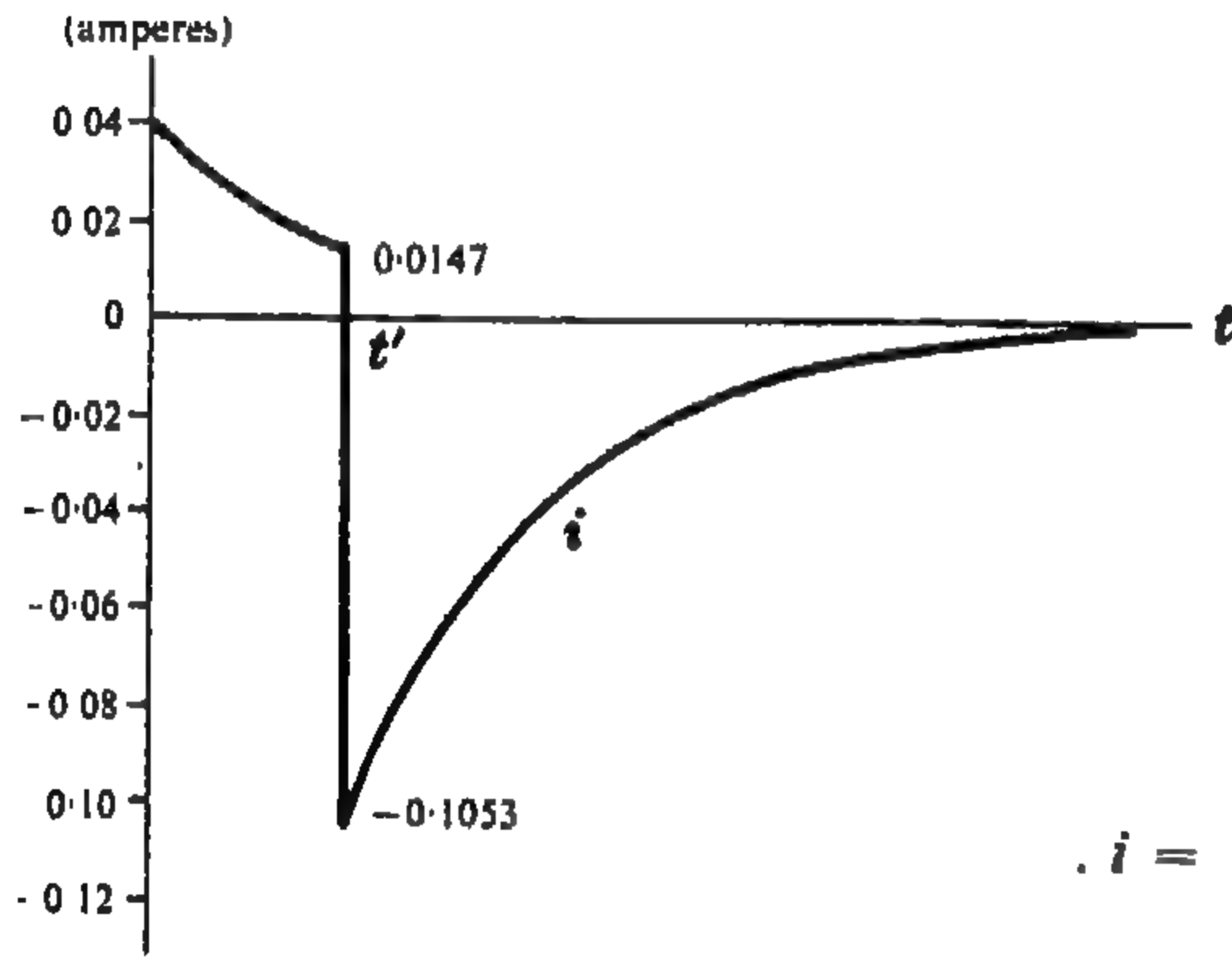
(١)

$$i = c_1 e^{-t/RC} = c_1 e^{-4000t} \text{ amperes}$$

عند $t = 0$ نجد أن $i_0 = V/R = 20/500 = 0.04 \text{ A}$. وبالتعويض في المعادلة (١) نحصل على $c_1 = 0.04$ والتيار في الفترة $0 < t < 1 TC$ هو

$$i = 0.04 e^{-4000t} \text{ amperes}$$

ويستمر هذا العبور إلى $1 TC = RC = 500(0.5 \times 10^{-6}) = 250 \text{ microseconds}$. وعند هذه النقطة فإن قيمة التيار تكون $i = 0.04e^{-1} = 0.0147 \text{ A}$



شكل ١٦ - ٢٨

عندما يتحرك المفتاح إلى الموضع 2 يكون على لوحى المكثف شحنة ينتج عنها جهد مقداره $v_C = 20(1 - e^{-1}) = 12.65 \text{ volts}$ هذا الجهد والمصدر 40 V تيارا في الاتجاه المضاد للتيار الناتج عن المصدر 20 V . بوضع $t' = 1 TC$ فإن معادلة التيار لفترة العبور الثانية هي

$$(٢) \quad i = c_2 e^{-4000(t-t')} \text{ amperes}$$

وعند $t = t'$ فإن $i = -(40 + 12.65)/500 = -0.1053 \text{ A}$

وبالتعويض في المعادلة (٢) نجد أن $c_2 = -0.1053$ والتيار هو

$$(٤) \quad i = -0.1053 e^{-4000(t-t')} \text{ amperes}$$

ويوضح الشكل ١٦-٢٨ تيار العبور التام . وعند $1 TC$ يكون للتيار نهاية صفري قيمتها -0.1053 A

١٦-٩ أوجد شحنة العبور في المسألة ١٦-٨ ثم فاضلها لتحصل على التيار .

معادلة الشحنة الأساسية عندما كان المفتاح في الموضع 1 هي

(١)

$$(D + 4000)q = 0.04 \quad \text{أو} \quad 500 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.5 \times 10^{-6}} = 20$$

والحل هو

$$(٢) \quad q = c_1 e^{-4000t} + 10 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$$

عند $t = 0$ فإن $q_0 = 0$ وبتطبيق هذا الشرط الابتدائي على المعادلة (٢) نحصل على $c_1 = -10 \times 10^{-6}$ وعلى هذا فإن

$$(٣) \quad q = 10 \times 10^{-6} (1 - e^{-4000t}) \text{ coulombs}$$

وتطبق هذه المعادلة في الفترة $0 < t < t'$ حيث $t' = 1 \text{ TC}$. وعند 1 TC تكون الشحنة على المكثف هي

$$q = 10 \times 10^{-6} (1 - e^{-1}) = 6.32 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$$

عندما يكون المفتاح في الموضع 2 تكون المعادلة التفاضلية هي

$$(٤) \quad (D + 4000)q = -0.08 \quad \text{أو} \quad 500 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.5 \times 10^{-6}} = -40$$

وحلها هو

$$(٥) \quad q = c_2 e^{-4000(t-t')} - 20 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$$

والآن نعين c_2 بالتمويض عن قيمة q عند 1 TC ووضع $t = 1 \text{ TC}$ وذلك في المعادلة (٥) . إن

$$\text{إذن} \quad c_2 = 26.32 \times 10^{-6} \quad \text{أو} \quad 6.32 \times 10^{-6} = c_2(1) - 20 \times 10^{-6}$$

$$(٦) \quad q = 26.32 \times 10^{-6} e^{-4000(t-t')} - 20 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$$

ويوضح الرسم ٢٩-١٦ شحنة العبور التامة .

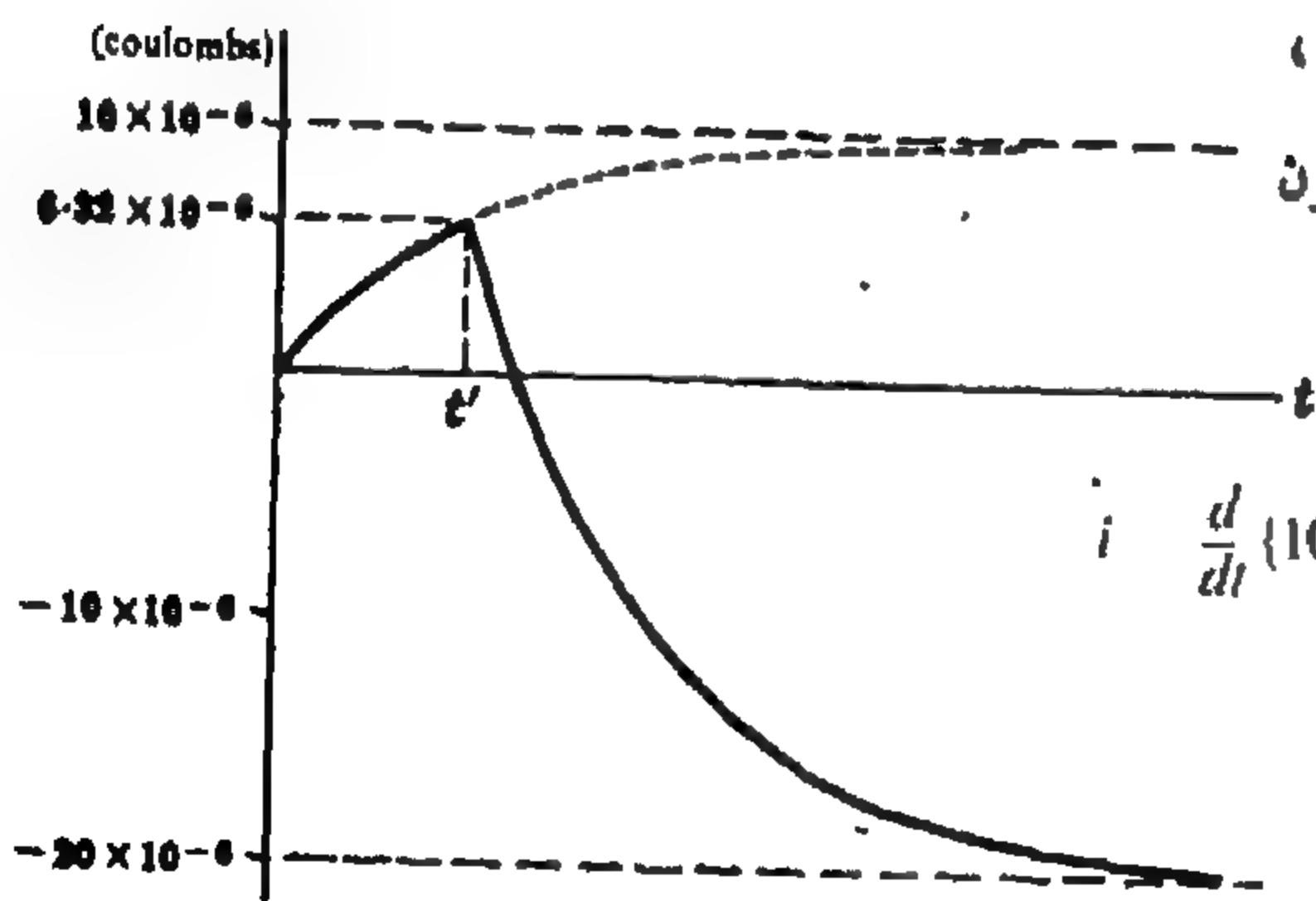
ونحصل على تيار العبور المناظر بتفاضل المعادلتين (٣) ،

(٦) . وعلى هذا فإنه في الفترة $0 < t < t'$ يكون

التيار هو

$$i = \frac{d}{dt} \{10 \times 10^{-6} (1 - e^{-4000t})\} = 0.04 e^{-4000t} \text{ amperes}$$

وعندما $t > t'$ فإن



$$\text{شكل ٢٩ - ١٦} \quad i = \frac{d}{dt} \{26.32 \times 10^{-6} e^{-4000(t-t')} - 20 \times 10^{-6}\} = -0.1053 e^{-4000(t-t')} \text{ amperes}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالمعادلتين (٢) ، (٤) في المسألة ٨-١٦ .

١٦-١٠ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 3000 \Omega$ و $L = 10 \text{ H}$ و $C = 200 \mu\text{F}$. يؤثر عليها جهد ثابت $V = 50 \text{ V}$ عند $t = 0$. أوجد تيار العبور والقيمة العظمى للتيار علماً بأنه لا توجد شحنة ابتدائية على المكثف .

بعد غلق المفتاح تكون المعادلة هي

$$(1) \quad (D^2 + 300D + 500)i = 0 \quad \text{أو} \quad 3000i + 10 \frac{di}{dt} + \frac{1}{200 \times 10^{-6}} \int i dt = 50$$

وجذرا المعادلة المميزة هما $D_1 = -298.3$ و $D_2 = -1.67$

$$(2) \quad i = c_1 e^{-1.67t} + c_2 e^{-298.3t} \text{ amperes}$$

ولحساب قيمتي c_1 و c_2 فإننا نستخدم الشروط الابتدائية . حيث أن دائرة التوالى تحتوى على حث فإن دالة التيار يجب أن تكون متصلة . وحيث أن $i = 0$ عند $t = 0$ فإن i أيضاً يساوى صفراً عند $t = 0$. إذن من المعادلة (١) نجد أن $10 \frac{di}{dt} = 50$ و $\frac{di}{dt} = 5$. والآن بكتابة المعادلة (٢) عند $t = 0$ نجد أن :
 $0 = c_1(1) + c_2(1)$ أو $c_1 + c_2 = 0$. بوضع $t = 0$ في المشتقة الأولى للمعادلة (٢) والتعويض عن $\frac{di}{dt} = 5$ نحصل على $5 = -1.67c_1 - 298.3c_2$ ، وبحل المعادلتين الآتيتين المتعلقةتين بالشوايت نحصل على $c_1 = 0.0168$ و $c_2 = -0.0168$ إذن

$$(3) \quad i = 0.0168 e^{-1.67t} - 0.0168 e^{-298.3t} \text{ amperes}$$

للحصول على القيمة العظمى للتيار نضع $\frac{di}{dt}$ مساوية للصفر ثم نحل المعادلة للحصول على t

$$0 = \frac{di}{dt} = (0.0168)(-1.67)e^{-1.67t} - (0.0168)(-298.3)e^{-298.3t}$$

وبالتعويض عن قيمة t هذه في المعادلة (٣) نحصل على 0.0161 A .

١٦-١١ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 50 \Omega$ و $L = 0.1 \text{ H}$ و $C = 50 \mu\text{F}$. يؤثر عليها جهد ثابت $V = 100 \text{ V}$ عند $t = 0$. أوجد تيار العبور بفرض أن الشحنة الابتدائية على المكثف تساوى صفراً .

عند غلق المفتاح نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية :

$$(1) \quad (D^2 + 500D + 1 \times 10^5)i = 0 \quad \text{أو} \quad 50i + 0.1 \frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \int i dt = 100$$

وجذرا المعادلة المميزة هما $D_1 = -250 + j371$ و $D_2 = -250 - j371$ ، والتيار هو

$$(2) \quad i = e^{-250t} (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t) \text{ amperes}$$

والتيار يساوى صفراً عند $t = 0$. إذن من المعادلة (٢) نجد أن $i_0 = 0 = (1)(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0)$

و $C_1 = 0$ والآن تصبح المعادلة (٢) على الصورة

$$(٣) \quad i = e^{-250t} c_2 \sin 371t \text{ amperes}$$

بتفاضل المعادلة (٣) نجد أن

$$(٤) \quad di/dt = c_2 \{e^{-250t} (371) \cos 371t + e^{-250t} (-250) \sin 371t\}$$

عند $t = 0$ نجد من المعادلة (١) : $0.1 (di/dt) = 100$ أو $di/dt = 1000$ ، وبالتعويض في المعادلة

(٤) عند $t = 0$ نجد أن $di/dt = 1000 = c_2 371 \cos 0$ و $c_2 = 2.7$. إذن التيار المطلوب هو

$$i = e^{-250t} (2.7 \sin 371t) \text{ amperes.}$$

١٦-١٧ دائرة توالى تتكون من RL فيها $R = 50 \Omega$ و $L = 0.2 \text{ H}$ يؤثر عليها مصدر جهد جيبي

$$v = 150 \sin (500t + \phi) \text{ volts} \text{ عند الزمن الذي كانت عنده } \phi = 0 \text{ . أوجد التيار التام .}$$

عند غلق المفتاح تكون المعادلة التفاضلية هي

$$(١) \quad (D + 250)i = 750 \sin 500t \text{ أو } 50i + 0.2 \frac{di}{dt} = 150 \sin 500t$$

والدالة المتممة هي $i_c = c e^{-250t}$

لايجاد الحل الخاص نستخدم طريقة المعاملات غير المحدودة ونفرض تياراً خاصاً

$$(٢) \quad i_p = A \cos 500t + B \sin 500t$$

إذن

$$(٣) \quad i_p' = -500A \sin 500t + 500B \cos 500t$$

وبالتعويض عن i و i' في المعادلة (١) نحصل على

$$(-500A \sin 500t + 500B \cos 500t) + 250(A \cos 500t + B \sin 500t) = 750 \sin 500t$$

بمساواة معاملات $\sin 500t$ ومعاملات $\cos 500t$ نحصل على

$$(٤) \quad 500B + 250A = 0 \text{ و } -500A + 250B = 750$$

وبحل هاتين المعادلتين الآتيتين نجد أن $A = -1.2$ و $B = 0.6$ ، إذن

$$(٥) \quad i_p = -1.2 \cos 500t + 0.6 \sin 500t = 1.34 \sin (500t - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$

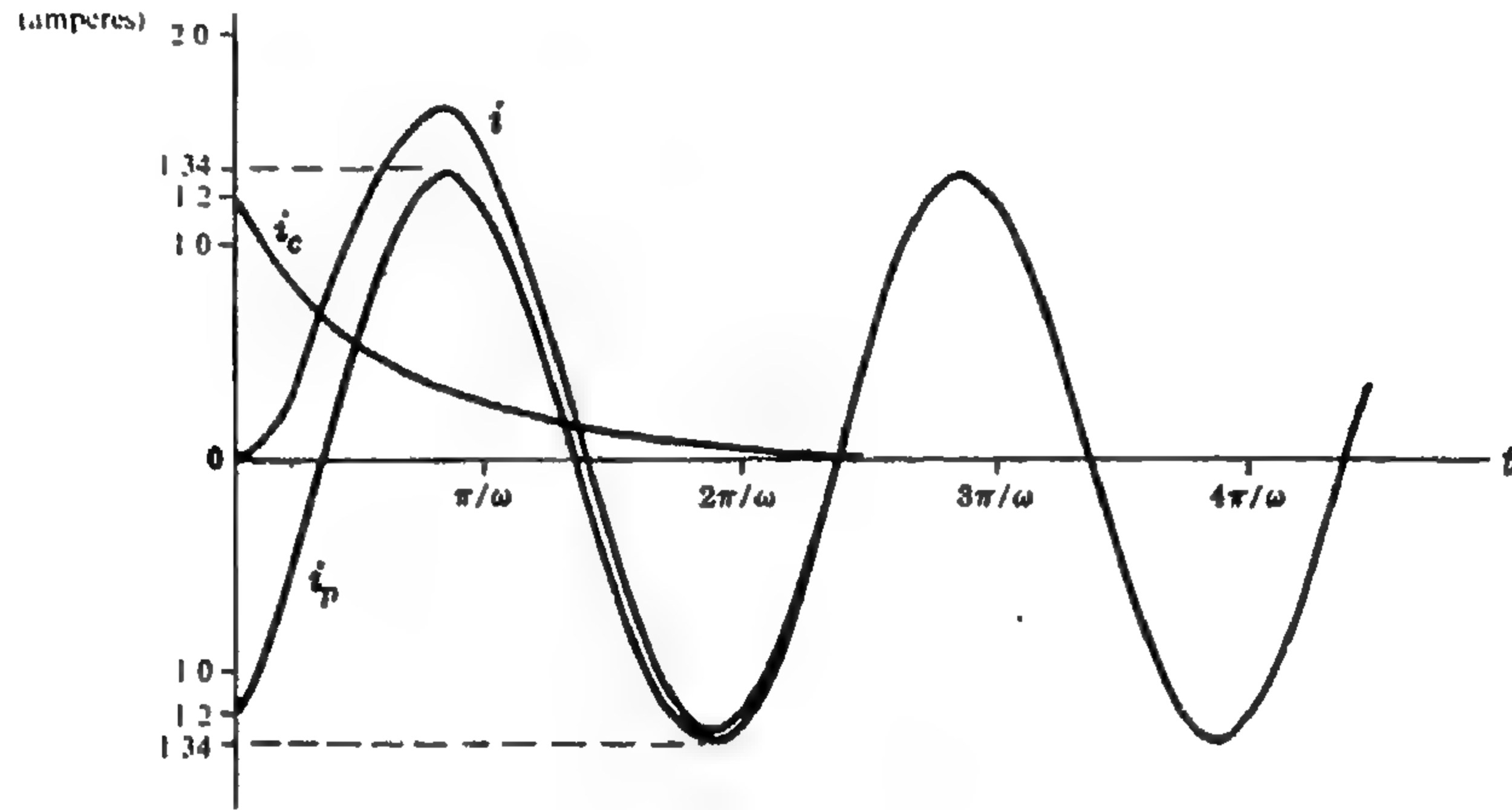
والتيار التام هو

$$(٦) \quad i = c e^{-250t} + 1.34 \sin (500t - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$

وعند $t = 0$ نجد أن $i = 0 = c(1) + 1.34 \sin(-63.4^\circ)$ و $c = 1.2$. إذن

$$(v) \quad i = 1.2 e^{-250t} + 1.34 \sin(500t - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$

يوضح الشكل ١٦ - ٣٠ : i_c و i_p ومجموعهما i بعد انتهاء فترة العبور (تقريباً عندما $t = 5TC$) . يكون التيار جيبياً ولاحقاً للجهد المؤثر بزاوية $\theta = \tan^{-1} \omega L/R = 63.4^\circ$.



شكل ١٦ - ٣٠

١٦ - ١٣ عند أى زاوية ϕ يجب غلق المفتاح في الدائرة الموضحة في المسألة ١٦ - ١٢ حتى يذهب التيار مباشرة إلى الحالة المستقرة بدون فترة عبور ؟

إذا كانت $\phi \neq 0$ فإننا نجد من المعادلة (٦) في المسألة ١٦ - ١٢

$$i = c e^{-250t} + 1.34 \sin(500t + \phi - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$

عند $t = 0$ نجد أن $0 = c(1) + 1.34 \sin(\phi - 63.4^\circ)$. والآن تكون فترة العبور مساوية للصفر إذا كان الثابت

$$c = 0 \text{ ؛ ويحدث هذا عندما } \phi = (63.4^\circ + n 180^\circ) \text{ حيث } n = 0, 1, 2, \dots$$

١٦ - ١٤ دائرة توالي تتكون من RC فيها $R = 100 \Omega$ و $C = 25 \mu F$. يؤثر عليها مصدر جهد جيبي $v = 250 \sin(500t + \phi) \text{ volts}$ ، عند الزمن الذي كانت عنده $\phi = 0^\circ$. أوجد التيار بفرض أنه لا توجد شحنة ابتدائية على المكثف .

عند غلق المفتاح تكون المعادلة التفاضلية للدائرة هي

$$(1) \quad (D + 400)i = 1250 \cos 500t \quad \text{أو} \quad 100i + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \int i dt = 250 \sin 500t$$

والدالة المتتممة هي $i_c = c e^{-400t}$

لإيجاد التيار الخاص بنصف الطرف الأيمن في معادلة المؤثرات مساوياً للجزء الحقيقي للكمية $1250 e^{j500t}$ وبفرض أن التيار الخاص هو

(٢)

$$i_p = K e^{j500t} \text{ amperes}$$

إذن

(٣)

$$i_p = j500 K e^{j500t} \text{ amperes}$$

وبالتعويض عن قيمتي i و i' في المعادلة (١) نحصل على

(٤)

$$j500 K e^{j500t} - 400(K e^{j500t}) = 1250 e^{j500t}$$

ومنها نجد أن $K = 1.955 \angle -51.3^\circ$. نعوض بقيمة K هذه في المعادلة (٢) ، ولكن حيث أن الجهد المحرك يساوي الجزء الحقيقي للقيمة $1250 e^{j500t}$ فإن التيار الفعلي يساوي الجزء الحقيقي للمعادلة (٢) و $i_p = 1.955 \cos(500t - 51.3^\circ)$ والتيار التام هو

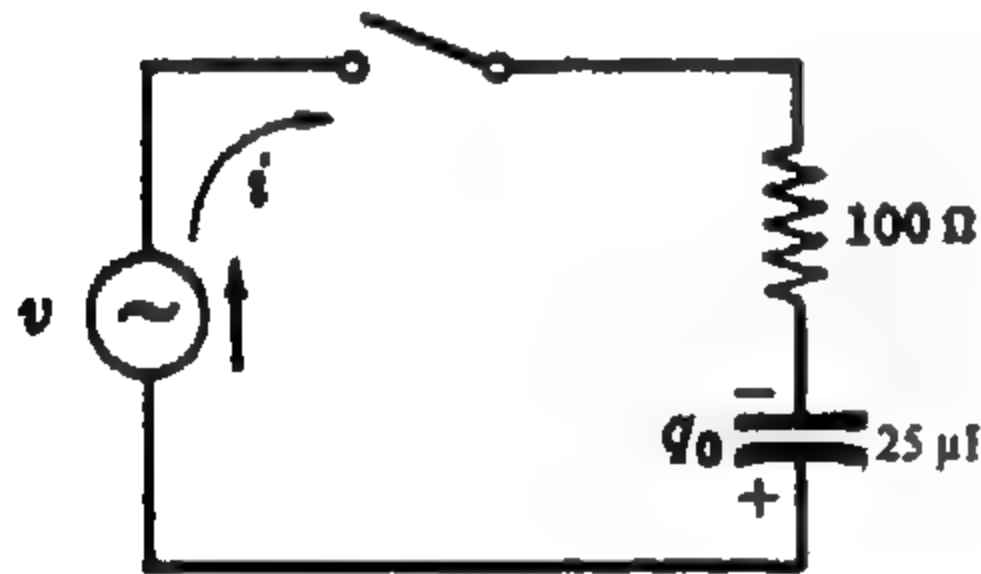
(٥)

$$i = c e^{-400t} + 1.955 \cos(500t - 51.3^\circ) \text{ amperes}$$

عند $t = 0$ تصبح المعادلة (١) : $100i = 250 \sin 0$ أو $i = 0$. والآن باستخدام المعادلة (٥) عند $t = 0$ نجد أن $c = -1.22$ إذن

$$i = -1.22 e^{-400t} + 1.955 \cos(500t - 51.3^\circ) = -1.22 e^{-400t} + 1.955 \sin(500t + 38.7^\circ) \text{ amperes}$$

١٦-١٥ في دائرة RC الموضحة في الشكل ١٦-٣١ يؤثر مصدر



شكل ١٦ - ٣١

جهد جيبي $v = 250 \sin(500t + \phi)$ volts وذلك بفتح المفتاح عند الزمن الذي كانت عنده $\phi = 45^\circ$. فإذا كانت هناك شحنة ابتدائية على المكثف مقدارها $q_0 = 5000 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$ بالقطبية الموضحة في الرسم فأوجد التيار التام .

الدائرة والجهد الجيبي هما نفسهما الموجودان في المسألة ١٦-١٤ فيما عدا أن $\phi = 45^\circ$. إذن فالمعادلة التفاضلية في صيغة المؤثرات هي

(١)

$$(D + 400)i = 1250 \cos(500t + 45^\circ)$$

والدالة المتممة هي نفسها كما في المسألة ١٦-١٤ . والتيار الخاص مزاح بزاوية 45° ، أي أن :

$$i_p = 1.955 \sin(500t + 83.7^\circ) \text{ إذن التيار التام هو}$$

(٢)

$$i = c e^{-400t} + 1.955 \sin(500t + 83.7^\circ) \text{ amperes}$$

عند $t = 0$ يوجد مصدران للجهد يرسلان تياراً . الجهد المكافئ للمكثف المشحون هو :

$v = 250 \sin 45^\circ = 176.7 \text{ volts}$. والمصدر له جهد لحظي $V = q_0/C = (5000 \times 10^{-6})/(25 \times 10^{-6}) = 200 \text{ volts}$

ونفحص دائرة يتبين نسب أن كلا الجهدين ضا نفس القطبية وعلى ذلك فإن التيار الابتدائي هو

$i_0 = (200 + 176.7)/100 = 3.77 \text{ A}$ و نأخذ استخدام المعادلة (٢) مع وضع $i = 3.77$ عند $t = 0$.

نجد أن $C = 1.83$ والتيار المطلوب هو $i = 1.83 e^{-400t} + 1.955 \sin (500t + 83.7^\circ) \text{ amperes}$

١٦-١ يؤثر على دائرة التسوالي المكونة من RLC

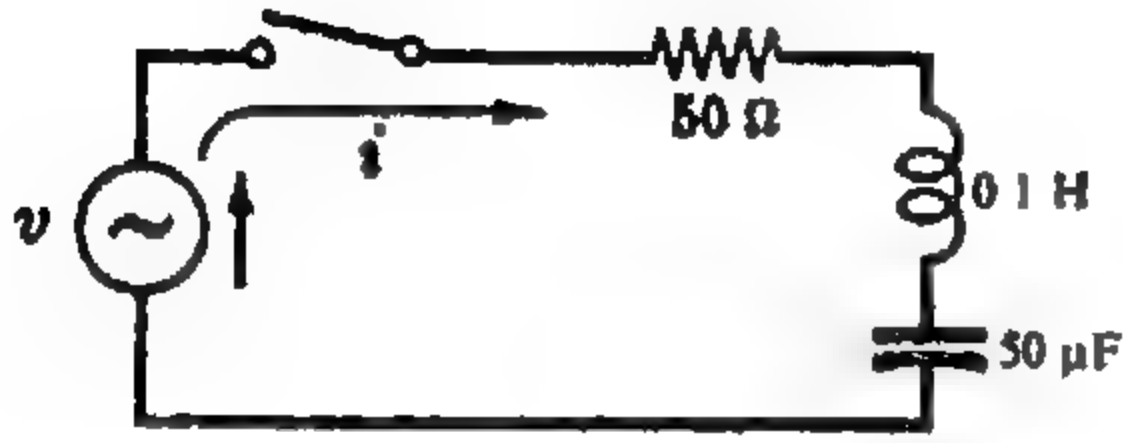
والموضحة في شكل ١٦-٣٢ مصدر جهد جيبي

$v = 100 \sin (1000t + \phi) \text{ volts}$. فإذا أغلق

المفتاح عند الزمن الذي كانت فيه $\phi = 90^\circ$

فأوجد التيار بفرض أن الشحنة الابتدائية على

المكثف تساوي صفراً.



شكل ١٦ - ٣٢

بعد غلق المفتاح تكتب معادلة الدائرة على الصورة

$$50i + 0.1 \frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \int i dt = 100 \sin (1000t + 90^\circ)$$

أو

$$(1) \quad (D_2 + 500D + 2 \times 10^5)i = 10^6 \cos (1000t + 90^\circ)$$

وبجدرا المعادلة المميزة هما :

$$D_2 = -250 - j371 \quad \text{و} \quad D_1 = -250 + j371$$

التيار المتعم هو :

$$i_p = e^{-250t} (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t)$$

والتيار الخاص الذي نحصل عليه باستخدام طريقة المسألة ١٦ - ١٤ هو :

$$i_p = 1.06 \sin (1000t + 32^\circ)$$

إذن فالتيار التام هو :

$$(2) \quad i = e^{-250t} (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t) + 1.06 \sin (1000t + 32^\circ) \text{ amperes}$$

من المعادلة (١) عند $t = 0$ نجد أن $i_0 = 0$ و $di/dt = 1000$ وبالتعويض في المعادلة (٢) نحصل على

$c_1 = -0.562$. والآن بتفاضل المعادلة (٢) نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= e^{-250t} (-371c_1 \sin 371t + 371c_2 \cos 371t) \\ (3) \quad &+ (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t)(-250 e^{-250t}) + 1.06(1000) \cos (1000t + 32^\circ) \end{aligned}$$

وبالتعويض عن $t = 0$ و $c_1 = -0.562$ و $di/dt = 1000$ في المعادلة (٣) ، نجد أن $c_2 = -0.104$ والآن تصبح المعادلة (٢) على الصورة :

$$i = e^{-250t} (-0.562 \cos 371t - 0.104 \sin 371t) + 1.06 \sin (1000t + 32^\circ) \text{ amperes}$$

١٦-١٧ دائرة توالي تتكون من RLC فيها $R = 100 \Omega$ و $L = 0.1 \text{ H}$ و $C = 50 \mu\text{F}$ يؤثر عليها مصدر جهد جيبي : $v = 100 \sin (1000t + \phi) \text{ volts}$ فإذا أغلق المفتاح عندما كانت $\phi = 90^\circ$ ، فأوجد التيار بفرض أن الشحنة الابتدائية على المكثف تساوى صفراً .

عند غلق المفتاح تكون معادلة الدائرة هي :

$$100i + 0.1 \frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \int i dt = 100 \sin (1000t + 90^\circ)$$

أو

$$(1) \quad (D_2 + 1000D + 2 \times 10^5)i = 10^6 \cos (1000t + 90^\circ)$$

وجذرا المعادلة المميزة هما $D_1 = -276.5$ و $D_2 = -723.5$

والدالة المتممة هي $i_c = e^{-276.5t} + c_2 e^{-723.5t}$ ، والحل الخاص الذي نحصل عليه بالطريقة المستخدمة في المسألة

$$16-14 \text{ هو : } i_p = 0.781 \sin (1000t + 51.4^\circ) \text{ ، إذن التيار التام هو :}$$

$$(2) \quad i = c_1 e^{-276.5t} + c_2 e^{-723.5t} + 0.781 \sin (1000t + 51.4^\circ) \text{ amperes}$$

لتعيين الثابتين c_1 و c_2 فإننا نحسب i و di/dt عند $t = 0$ في المعادلة (١) . وبالتعويض بالنتيجة $i_0 = 0$ و $di/dt = 1000$ في المعادلة (٢) ، نحصل على :

$$(3) \quad c_1 + c_2 = -0.610 \text{ أو } i_0 = 0 = c_1(1) + c_2(1) + 0.781 \sin 51.4^\circ$$

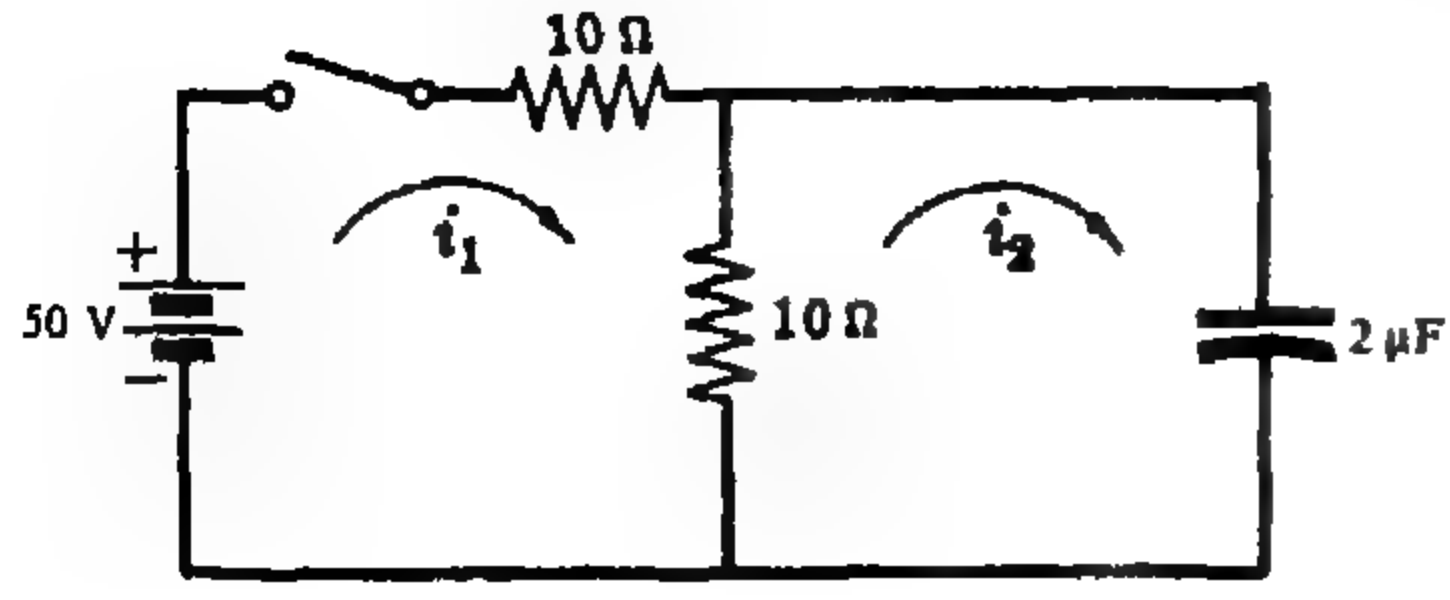
وبتفاضل المعادلة (٢) والتعويض عن $t = 0$ و $di/dt = 1000$ نجد أن :

$$(4) \quad 276.5c_1 + 723.5c_2 = -513 \text{ أو } di/dt = 1000 = -276.5c_1 - 723.5c_2 + 781 \cos 51.4^\circ$$

وبحل المعادلتين الآتيتين (٣) و (٤) نجد أن $c_1 = 0.161$ و $c_2 = -0.771$

إذن :

$$i = 0.161 e^{-276.5t} - 0.771 e^{-723.5t} + 0.781 \sin (1000t + 51.4^\circ) \text{ amperes}$$



شكل ١٦ - ٣٣

١٦-١٨ في الشبكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٦-١٣ أغلق المفتاح عند $t = 0$ أوجد تيار الشبكتين العابرين i_1 و i_2 الموضحين في الشكل وجهد العبور v_C على المكثف .
بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسارين المغلقين نحصل على .

$$(١) \quad 2Di_1 = Di_2 \quad \text{أو} \quad 20i_1 - 10i_2 = 50$$

$$(٢) \quad -Di_1 + (D + 5 \times 10^4)i_2 = 0 \quad \text{أو} \quad -10i_1 + 10i_2 + \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \int i_2 dt = 0$$

ونجد من المعادلة (١) أن $Di_1 = \frac{1}{2}Di_2$ وبالتعويض بها في المعادلة (٢) نحصل على :

$$(٣) \quad (D + 10^5)i_2 = 0 \quad \text{أو} \quad -(\frac{1}{2}Di_2) + (D + 5 \times 10^4)i_2 = 0$$

وبما أن المعادلة (٣) متجانسة فإن حلها يحتوي فقط على الدالة المتممة .

إذن :

$$i_2 = c e^{-10^5 t} \text{ amperes}$$

وبوضع $t = 0$ في المعادلة (٢) نجد أن $-10i_1 + 10i_2 = 0$ أو $i_1 = i_2$. إذن المعادلة (١) عند $t = 0$ تصبح $20i_1 - 10i_1 = 50$ أو $i_1 = i_2 = 5$. وبالتعويض عن قيمة i_2 في المعادلة (٤) نجد أن $c = 5$ إذن :

$$(٥) \quad i_2 = 5 e^{-10^5 t} \text{ amperes}$$

والآن نحصل على تيار العبور i_1 بالتعويض من (٥) في المعادلة (١) .

إذن :

$$i_1 = 2.5 + 2.5 e^{-10^5 t} \text{ amperes} \quad \text{و} \quad 20i_1 - 10(5 e^{-10^5 t}) = 50$$

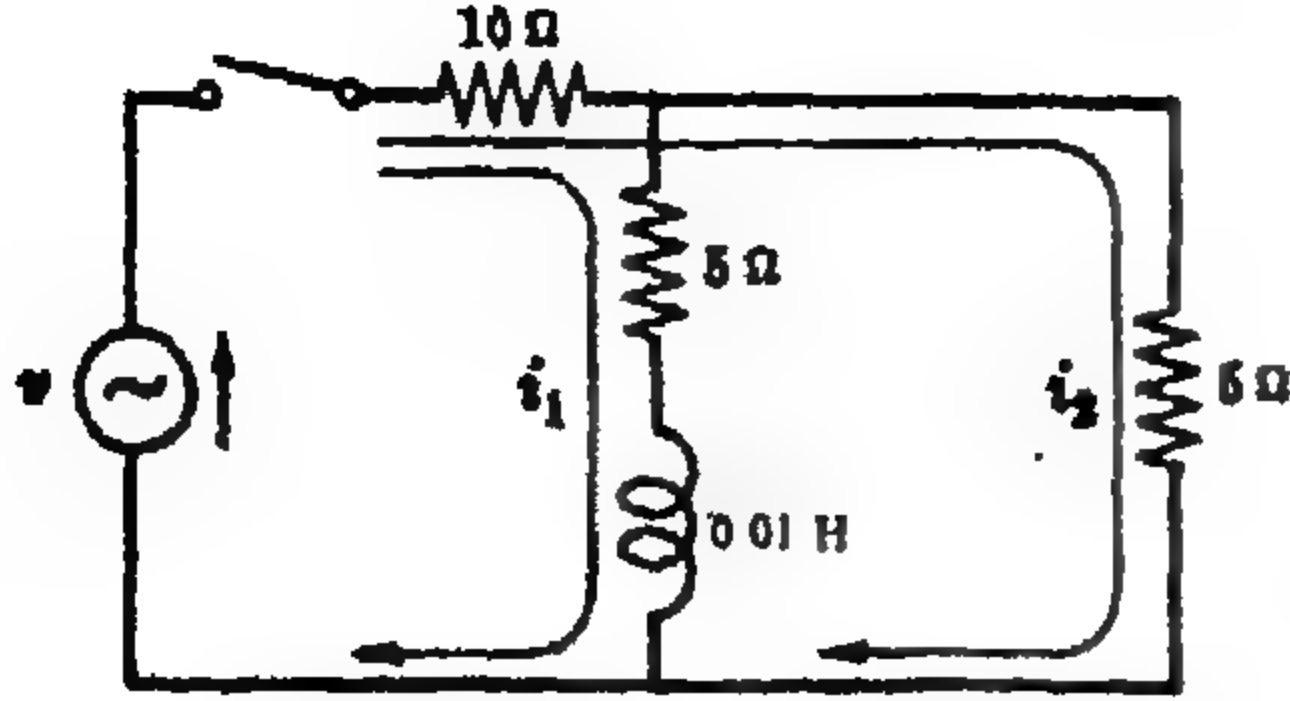
ونحصل على جهد العبور v_C عبر المكثف بتكامل تيار الشبكة الفرعية i_2 .

$$v_C = \frac{1}{C} \int i_2 dt = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \int 5 e^{-10^5 t} dt = 25(1 - e^{-10^5 t}) \text{ volts}$$

١٦-١٩ في الشبكتين الفرعيتين الموضحتين في الشكل ١٦-٣٤ أغلق المفتاح عند $t = 0$ وكان المصدر الجهد هو $v = 150 \sin 1000t \text{ volts}$. أوجد تيارى الشبكتين i_1 و i_2 المعطيان في الشكل .

ينتج من تطبيق قانون كيرشوف على المارين

الموضحين أن :



شكل ١٦ - ٣٤

$$10i_2 + 15i_1 + 0.01 \frac{di_1}{dt} = 150 \sin 1000t$$

أو

$$(1) \quad (D + 1500)i_1 + 1000i_2 = 15,000 \sin 1000t$$

$$(2) \quad 15i_2 + 10i_1 = 150 \sin 1000t$$

(٣) من المعادلة (٢) نجد أن $i_2 = 10 \sin 1000t - \frac{2}{3}i_1$ amperes

وبالتمويض في المعادلة (١) نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$(4) \quad (D + 833)i_1 = 5000 \sin 1000t$$

والحل التام الذي نحصل عليه باستخدام طريقة المسألة ١٦ - ١٤ هو

$$(5) \quad i_1 = c e^{-833t} + 3.84 \sin (1000t - 50.2^\circ) \text{ amperes}$$

والآن بالتمويض عن i_1 في المعادلة (٣) نجد

$$i_2 = -\frac{2}{3}c e^{-833t} - 2.56 \sin (1000t - 50.2^\circ) + 10 \sin 1000t$$

$$(6) \quad = -\frac{2}{3}c e^{-833t} + 8.58 \sin (1000t + 13.25^\circ) \text{ amperes}$$

تيار الشبكة i_1 يمر خلال الملف وعلى ذلك فإنه يساوى صفراً عند $t = 0$. وبالتعويض في المعادلة (٥) نجد :

$$c(1) + 3.84 \sin (-50.2^\circ) = 0 \quad \text{و} \quad c = 2.95 \quad \text{إذن فمعادلتا تيارى الشبكتين هما}$$

$$i_1 = 2.95 e^{-833t} + 3.84 \sin (1000t - 50.2^\circ) \text{ amperes} \quad \text{و} \quad i_2 = -1.97 e^{-833t} + 8.58 \sin (1000t + 13.25^\circ) \text{ amperes}$$

مسائل إضافية

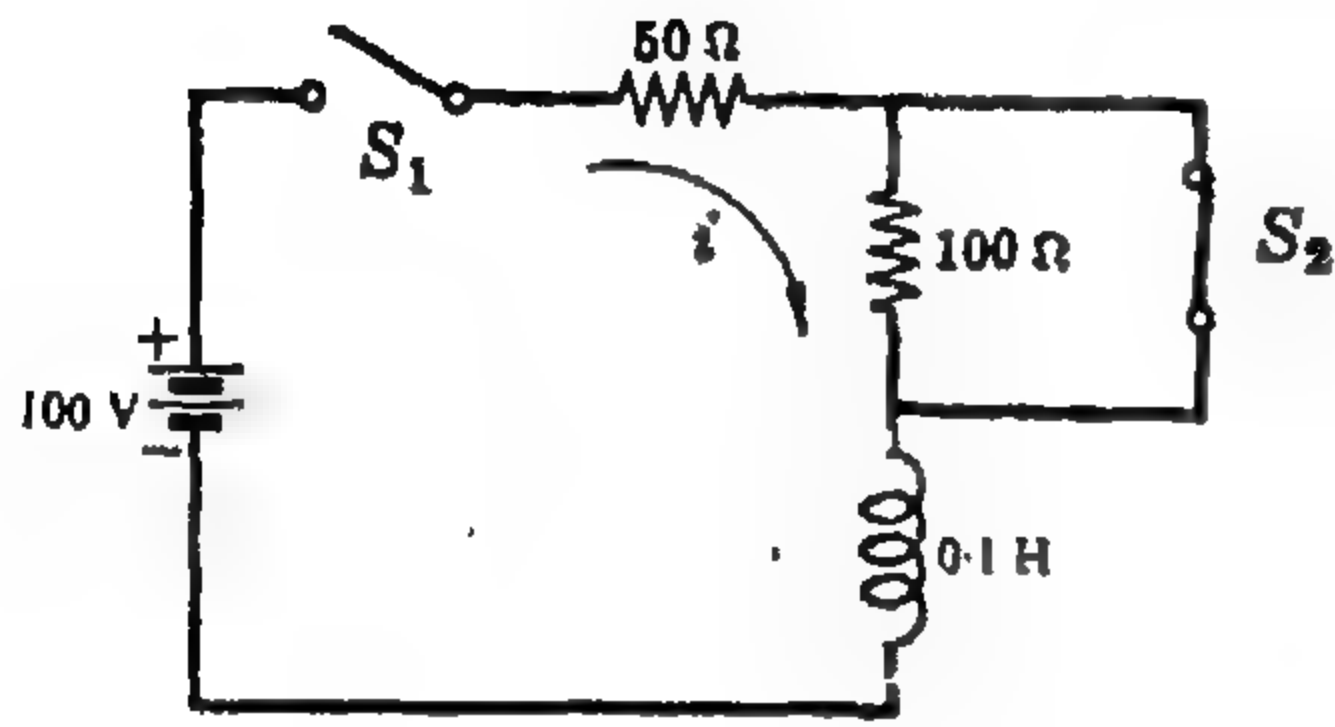
١٦ - ٢٠ في دائرة التوالي المكونة من RL والموضحة في الشكل

١٦ - ٣٥ . أغلق المفتاح S_1 عند $t = 0$ وبعد

4ms فتح المفتاح S_2 . أوجد التيار في الفترتين

$0 < t < t'$ و $t' < t$ حيث $t' = 4 \text{ ms}$: الجواب :

$$i = 2(1 - e^{-500t}) \text{ amperes}, i = 1.06 e^{-1500(t-t')} - 0.667 \text{ amperes}$$



شكل ١٦ - ٣٥

١٦ - ٢١ يؤثر جهد ثابت على دائرة توالى من RL وذلك بفلق

المفتاح . وكان الجهد عبر L هو 25volts عند

$t = 0$ وهبط إلى 5 V عند $t = 25 \text{ ms}$. فإذا

كان $L = 2 \text{ H}$ فما هي قيمة R ؟

الجواب : 128.8Ω

١٦ - ٢٢ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦ - ٣٦ أغلق المفتاح S_1 عند $t = 0$ وفتح المفتاح S_2 عند

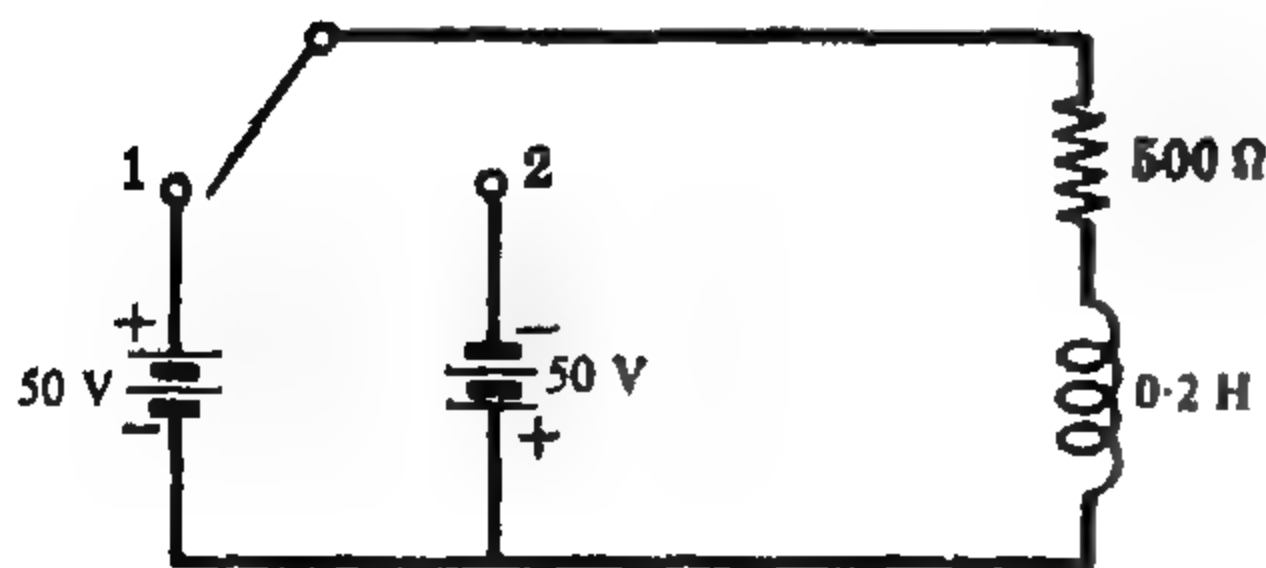
$t = 0.2 \text{ sec}$. أوجد معادلة التيار العابر لهاتين الفترتين .

$$i = 10(1 - e^{-10t}) \text{ amperes}, i = 6.97 e^{-60(t-t')} + 1.67 \text{ amperes} \quad \text{الجواب :}$$

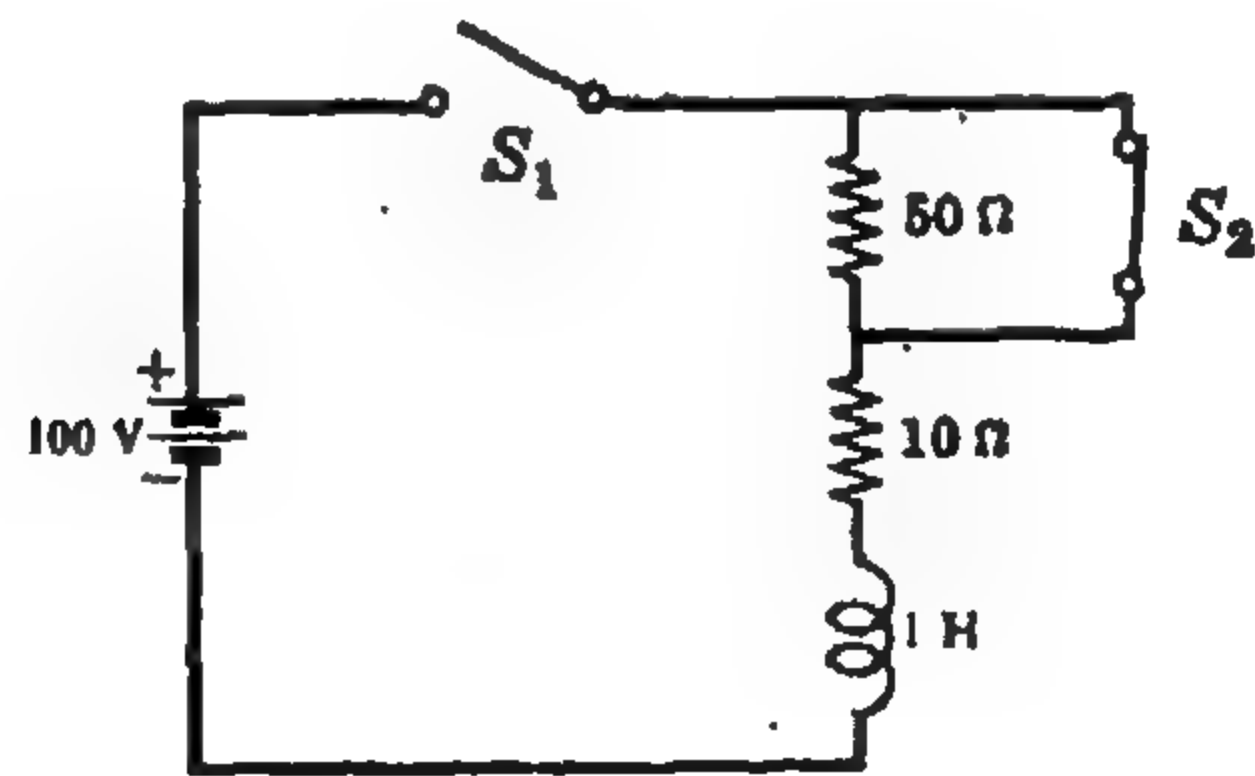
١٦ - ٢٣ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦ - ٣٧ أغلق المفتاح إلى الموضع 1 عند $t = 0$ ، ثم تحرك إلى الموضع 2

بعد 1ms . أوجد الزمن الذي يغير عنده التيار اتجاهه ويصبح مساوياً للصفر .

الجواب : 1.261 ms



شكل ١٦ - ٣٧



شكل ١٦ - ٣٦

١٦ - ٢٤ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦ - ٣٨ أغلق المفتاح إلى الموضع 1 لوقت كاف للوصول إلى حالة الاستقرار

في التيار . وعندما تحرك المفتاح إلى الموضع 2 كان هناك تيار عابر يمر في المقاومة 50Ω لفترة زمنية قصيرة .

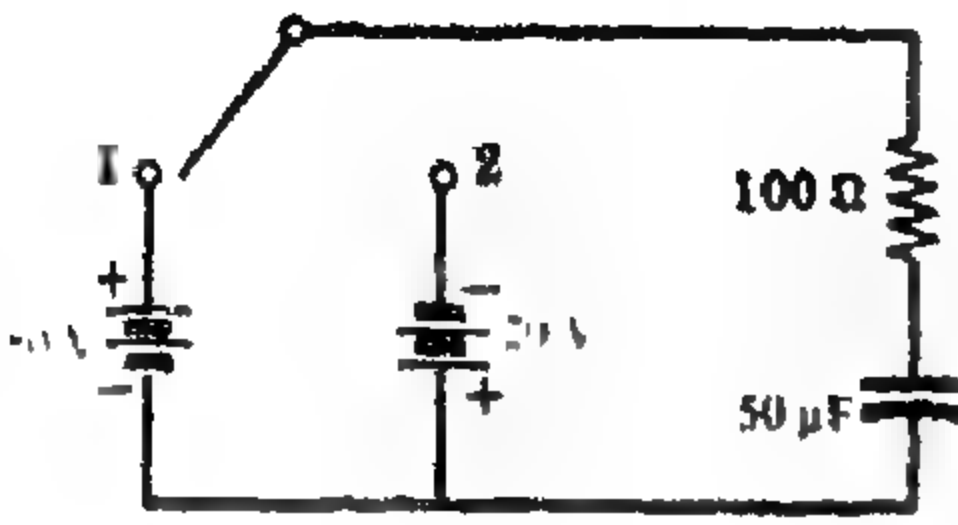
أوجد الطاقة المستنفدة في المقاومة خلال فترة العبور هذه .

الجواب : 8 joules

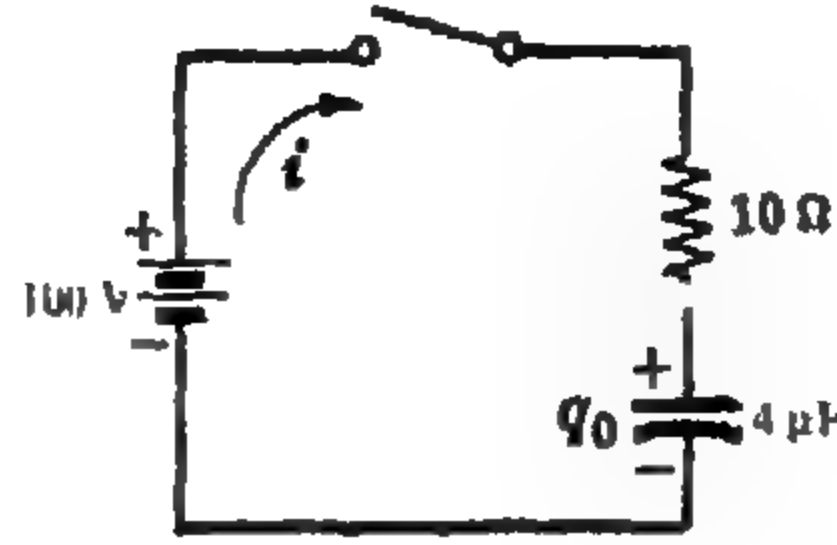
١٦ - ٢٥ يوجد على مكثف دائرة RC الموضحة في الشكل ١٦ - ٣٩ شحنة ابتدائية 10^{-6} coulombs $i = 800$

بالقطبية الموضحة في الرسم . أوجد كلا من تيار وشحنة العبور الناتجتين عند علق المفتاح

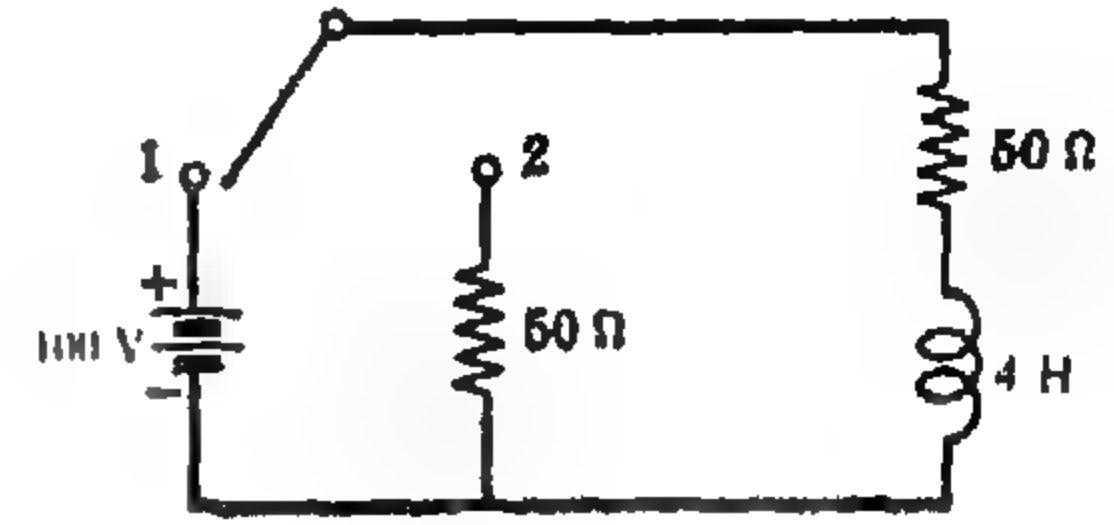
الجواب : 10^{-6} coulombs $q = 400(1 - e^{-2.5 \times 10^4 t})$ amperes, $i = 10e^{-2.5 \times 10^4 t}$



شكل ١٦ - ٤٠



شكل ١٦ - ٣٩



شكل ١٦ - ٣٨

١٦ - ٢٦ وصل مكثف $2 \mu F$ وعليه شحنة ابتدائية $q_0 = 100 \times 10^{-6}$ coulombs عبر طرفي المقاومة 100Ω عند $t = 0$. أوجد الزمن الذي يهبط فيه الجهد العابر عبر المقاومة من 40 إلى 10 V .

الجواب : $277.4 \mu s$

١٦ - ٢٧ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦ - ٤٠ أغلق المفتاح إلى الموضع 1 عند $t = 0$ ثم تحرك إلى الموضع 2 بعد 1 TC . أوجد تعبيرين للتيار العابر في الفترتين $0 < t < t'$ و $t' < t$

الجواب : $0.516e^{-2000t}$ amperes, $i = 0.5e^{-2000t}$ amperes

١٦ - ٢٨ بالإشارة إلى المسألة ١٦ - ٢٧ ، حل المعادلة التفاضلية على أساس الشحنة . من دوال الشحنة العابرة أوجد تعبيرين للتيار ثم قارن النتائج .

١٦ - ٢٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦ - ٤١ وضع المفتاح في الموضع 1 لفترة زمنية كافية للوصول إلى حالة الاستقرار ثم تحرك بعد ذلك إلى الموضع 2 . يمر تيار عابر عند تحريك المفتاح إلى الموضع 2 وينتج عن ذلك استنفاد طاقة في المقاومتين . أوجد هذه الطاقة وقارنها بالطاقة المخزونة في المكثف بعد تحريك المفتاح .

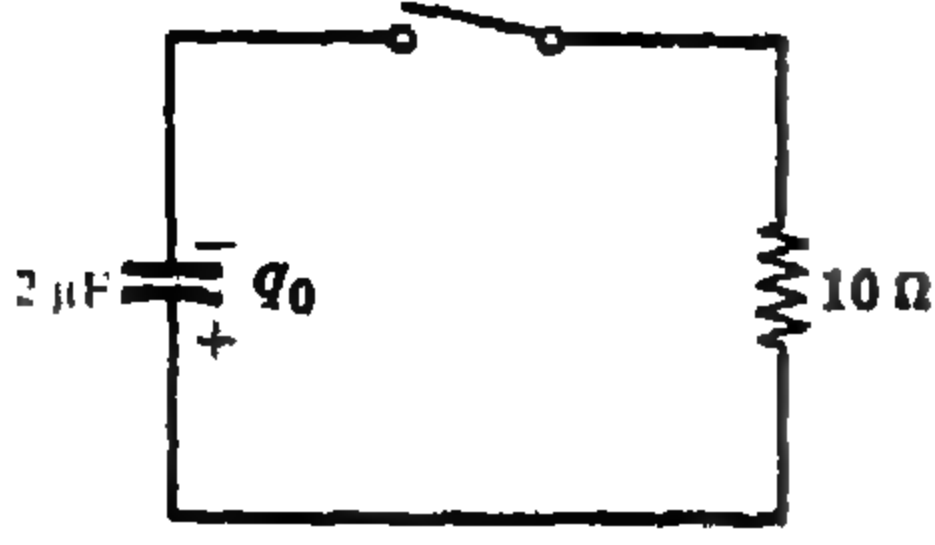
الجواب : 0.20 joules

١٦ - ٣٠ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦ - ٤٢ كان على المكثف C_1 شحنة ابتدائية 300×10^{-6} coulombs $q_0 = 300$. فإذا أغلق المفتاح عند $t = 0$ فأوجد التيار العابر والشحنة العابرة والجهد النهائي على المكثف C_1 .

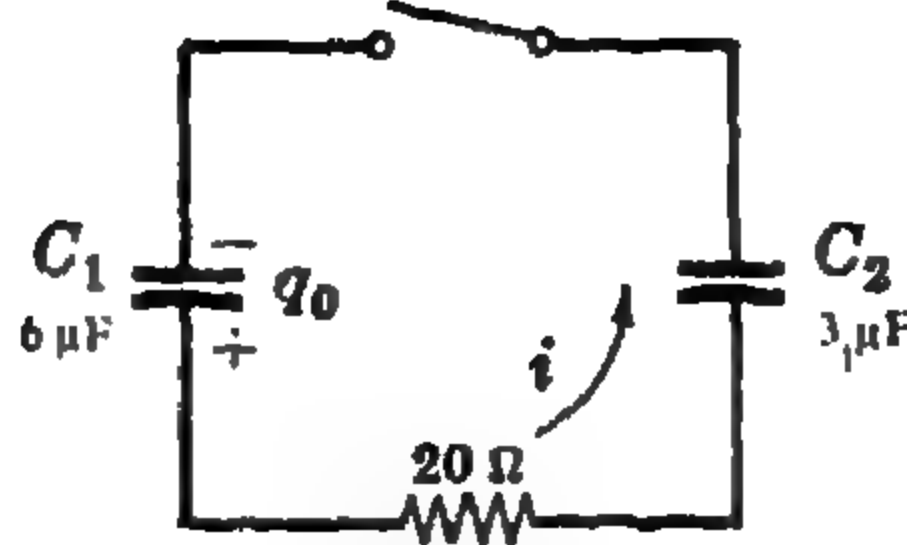
الجواب : 33.3 V $q = 200(1 + 0.5e^{-2.5 \times 10^4 t}) \times 10^{-6}$ coulombs, $i = 2.5e^{-2.5 \times 10^4 t}$ amperes

١٦ - ٣١ بالإشارة إلى المسألة ١٦ - ٣٠ ، أوجد الجهود العابرة V_{C1} و V_{C2} و V_R ثم بين أن مجموعهم يساوى صفراً .
الجواب :

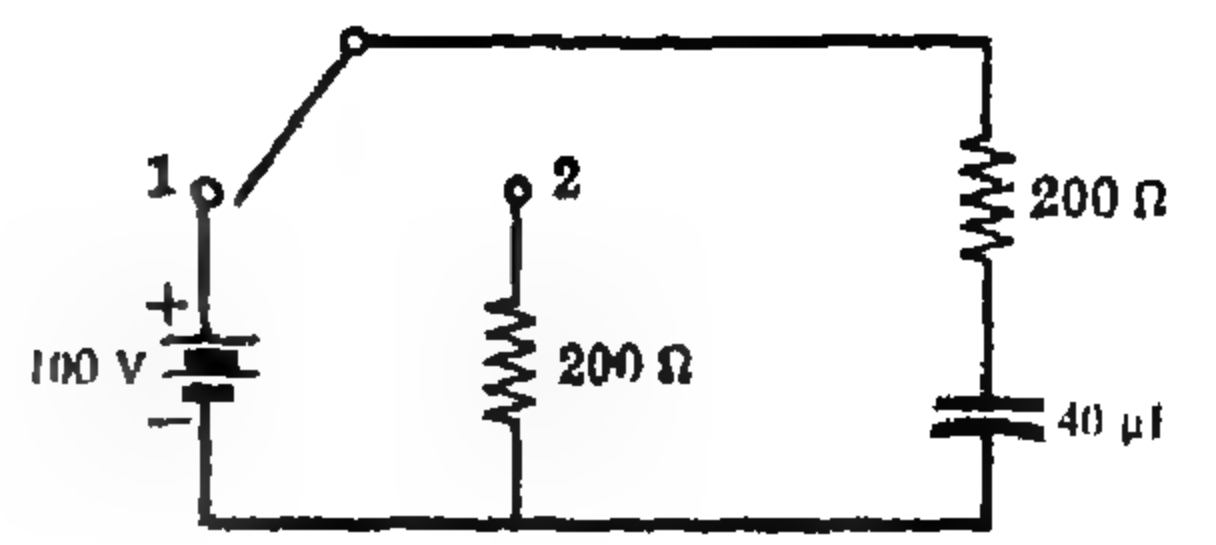
$v_{C1} = 33.3 + 16.7e^{-2.5 \times 10^4 t}$ volts, $v_{C2} = 33.3(1 - e^{-2.5 \times 10^4 t})$ volts, $v_R = -50e^{-2.5 \times 10^4 t}$ volts



شكل ١٦ - ٣٢



شكل ١٦ - ٤٢



شكل ١٦ - ٤١

١٦-٣٢ في دائرة التوالي RC الموضحة في الشكل ١٦-٣٢ كان على المكثف شحنة ابتدائية q_0 وأغلق المفتاح عند $t = 0$. أوجد q_0 علماً بأن قدرة العبور في المقاومة هي $p_R = 360e^{-100t}$ watts

الجواب : 120×10^{-6} coulombs

١٦-٣٣ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 200 \Omega$ و $L = 0.1 H$ و $C = 100 \mu F$. يؤثر عليها جهد ثابت $V = 200$ volts عند $t = 0$. أوجد التيار بفرض أنه لا توجد شحنة ابتدائية على المكثف.

الجواب : $i = 1.055e^{-32t} - 1.055e^{-1948t}$ amperes

١٦-٣٤ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 200 \Omega$ و $L = 0.1 H$ ، فإذا اختيرت قيمة سعة المكثف بحيث تصبح الدائرة في حالة تضاؤل خرج ، فأوجد قيمة C المطلوبة .

الجواب : $10 \mu F$

١٦-٣٥ أوجد الذبذبة الطبيعية لدائرة التوالي RLC التي فيها $R = 200 \Omega$ و $L = 0.1 H$ و $C = 5 \mu F$.

الجواب : 1000 rad/s

١٦-٣٦ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 5 \Omega$ و $L = 0.1 H$ و $C = 500 \mu F$ يؤثر عليها جهد ثابت $V = 10$ volts عند $t = 0$. أوجد التيار العابر الناتج .

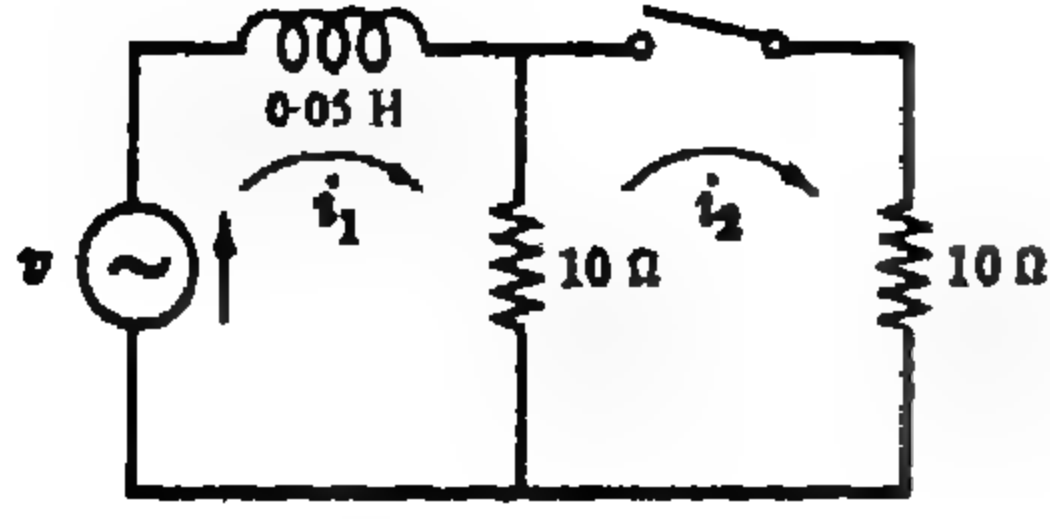
الجواب : $i = 0.72 e^{-25t} \sin 139t$ amperes

١٦-٣٧ دائرة توالى تتكون من RL فيها $R = 300 \Omega$ و $L = 1.0 H$ يؤثر عليها جهد جيبي $v = 100 \cos(100t + \phi)$ volts . فإذا أغلق المفتاح عندما كانت $\phi = 45^\circ$ ، فأوجد التيار العابر الناتج .

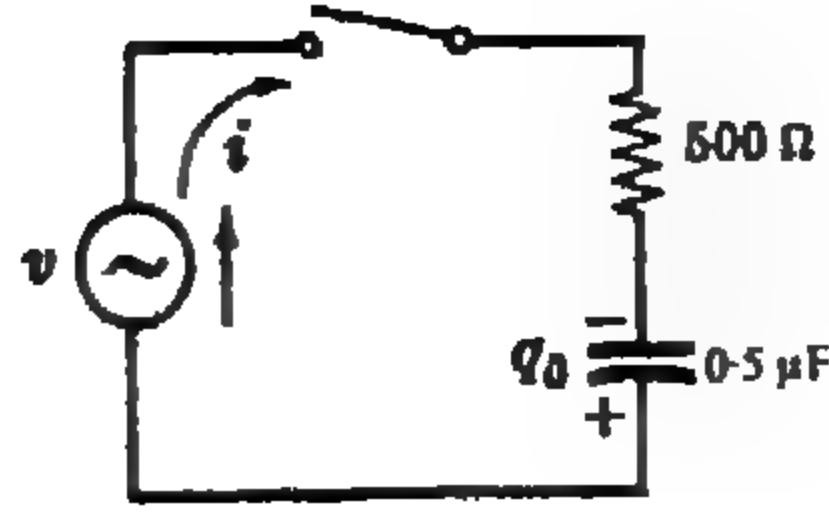
الجواب : $i = -0.282e^{-300t} + 0.316 \cos(100t + 26.6^\circ)$ amperes

١٦-٣٨ تعمل دائرة RL الموضحة في الشكل ١٦-٤٤ في حالة جيبيية والمفتاح في الموضع 1. فإذا تحرك المفتاح إلى الموضع 2 عندما كان مصدر الجهد $v = 100 \cos(100t + 45^\circ)$ volts . فأوجد التيار العابر وارسم آخر نصف دورة في الحالة المستقرة مع الفترة العابرة لتوضيح العبور .

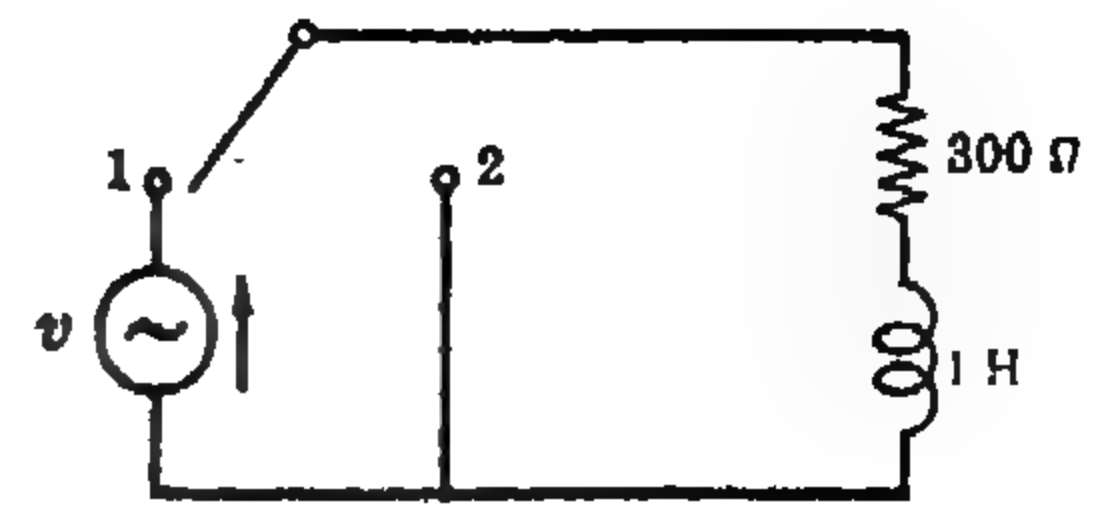
الجواب : $i = 0.282e^{-300t}$ amperes



شكل ١٦ - ٤٦



شكل ١٦ - ٤٥



شكل ١٦ - ٤٤

١٦-٣٩ في دائرة التوالي المكونة من RC والموضحة في الشكل ١٦-٤٥ كان على المكثف شحنة ابتدائية

$q_0 = 25 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$ بالقطبية الموضحة في الرسم . فإذا أثر جهد جيبي

$v = 100 \sin(1000t + \phi) \text{ volts}$ is على الدائرة عند الزمن الذي كانت عنده $\phi = 30^\circ$ ، فأوجد التيار العابر .

الجواب : $i = 0.1535 e^{-4 \times 10^3 t} + 0.0484 \sin(1000t + 106^\circ) \text{ amperes}$

١٦-٤٥ بالإشارة إلى المسألة ١٦-٣٩ ، ماهي الشحنة الابتدائية التي يجب تواجدها على المكثف بحيث يذهب التيار مباشرة

إلى الحالة المستقرة بدون فترة عابرة وذلك عند غلق المفتاح ؟

الجواب : $13.37 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$ + عند اللوح العلوى .

١٦-٤١ بين أن لدائرة التوالي RLC ذات المصدر $v = V_{\max} \sin(\omega t + \phi)$ حل خاص لمعادلتها التفاضلية

يعطى بالعلاقة

$$i_p = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin\left(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right)$$

١٦-٤٢ دائرة توائى تتكون من RLC فيها $R = 5 \Omega$ و $L = 0.1 \text{ H}$ و $C = 500 \mu\text{F}$. يؤثر عليها جهد جيبي

$v = 100 \sin(250t + \phi) \text{ volts}$ عند الزمن الذي كانت عنده $\phi = 0^\circ$. أوجد التيار الناتج .

الجواب : $i = e^{-25t} (5.42 \cos 139t - 1.89 \sin 139t) + 5.65 \sin(250t - 73.6^\circ) \text{ amperes}$

١٦-٤٣ دائرة توائى تتكون من RLC فيها $R = 200 \Omega$ و $L = 0.5 \text{ H}$ و $C = 100 \mu\text{F}$. يؤثر عليها جهد

جيبي $v = 300 \sin(500t + \phi) \text{ volts}$. فإذا أغلق المفتاح عندما كانت $\phi = 30^\circ$ ، فأوجد التيار الناتج .

الجواب : $i = 0.517 e^{-341.4t} - 0.197 e^{-50.6t} + 0.983 \sin(500t - 19^\circ) \text{ amperes}$

١٦-٤٤ دائرة توائى تتكون من RLC فيها $R = 50 \Omega$ و $L = 0.1 \text{ H}$ و $C = 50 \mu\text{F}$. يؤثر عليها جهد جيبي

$v = 100 \sin(500t + \phi) \text{ volts}$. فإذا أغلق المفتاح عندما كانت $\phi = 45^\circ$ ، فأوجد التيار الناتج .

الجواب : $i = e^{-250t} (-1.09 \cos 371t - 1.025 \sin 371t) + 1.96 \sin(500t + 33.7^\circ) \text{ amperes}$

١٦-٤٥ في الشبكة الكهربائية المكونة من شبكيتين فرعيتين والموضحة في الشكل ١٦-٤٦ يعطى مصدر الجهد في الشبكة 1

بالعلاقة $v = 100 \sin(200t + \phi)$ volts. أوجد تيارى العبور i_1 و i_2 فى الشبكيّتين إذا أغلق المفتاح عندما كانت $\phi = 0$.

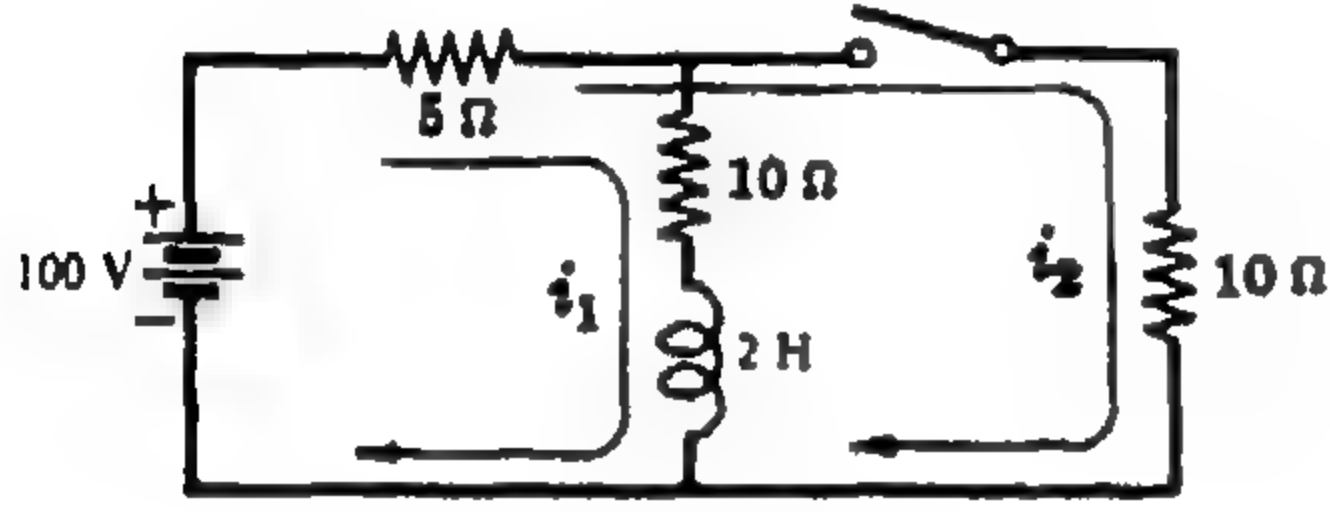
الجواب :

$i_1 = 3.01e^{-100t} + 8.96 \sin(200t - 63.4^\circ)$ amperes, $i_2 = 1.505e^{-100t} + 4.48 \sin(200t - 63.4^\circ)$ amperes
١٦ - ٤٦ أوجد فى الشبكيّتين الفرعيتين الموضحتين فى الشكل ١٦ - ٤٧ تيارى الشبكيّتين i_1 و i_2 عندما يغلق المفتاح عند $t = 0$.

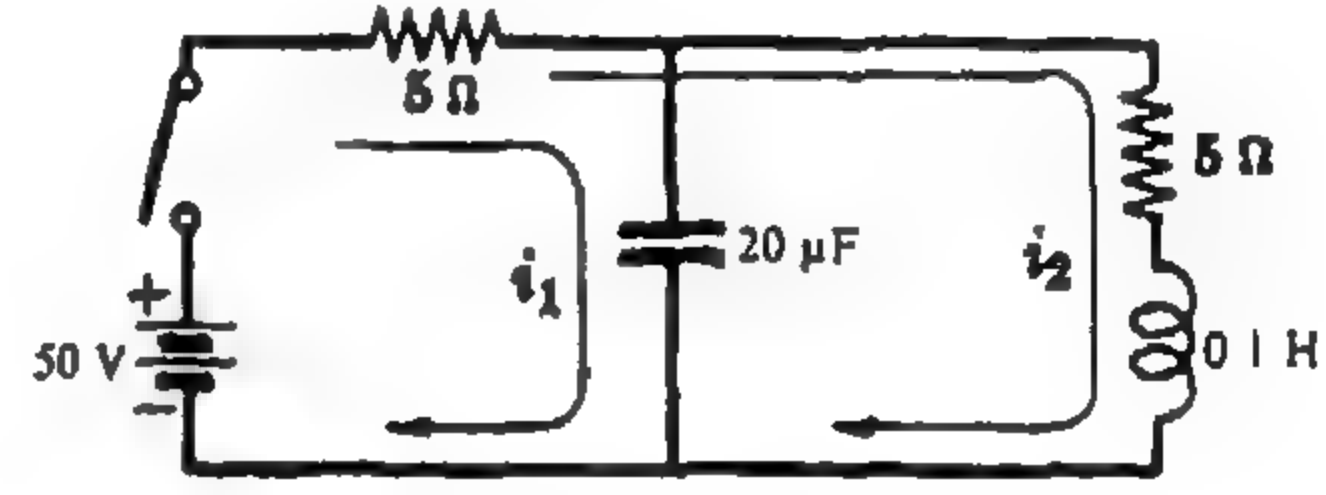
الجواب : $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t}$ amperes, $i_2 = -5.05e^{-100t} + 5 + 0.05e^{-9950t}$ amperes

١٧ - ٤٧ إذا أغلق المفتاح فى الشبكيّتين الفرعيتين الموضحتين فى الشكل ١٦ - ٤٨ عند $t = 0$ فأوجد التيارين الناتجين i_1 و i_2 .

الجواب : $i_1 = 1.67e^{-6.67t} + 5$ amperes, $i_2 = -0.555e^{-6.67t} + 5$ amperes



شكل ١٦ - ٤٨



شكل ١٦ - ٤٧

الفصل السابع عشر

دراسة الظواهر العابرة بطريقة تحويل لابلاس

مقدمة :

حللنا في الفصل السادس عشر التيارات العابرة في الدوائر الكهربائية التي تحتوي على عناصر خازنة للطاقة . وقد نتج عن تطبيق قوانين كيرشوف على هذه الدوائر معادلة تفاضلية أو أكثر بدلالة الزمن ، وذلك حسب تركيب الدائرة . وقد حلت هذه المعادلات بالطرق التقليدية . ولكن هذه الطرق في حالات كثيرة تكون غير مرضية وعلى ذلك فإننا ندخل في هذا الفصل طريقة أخرى تسمى طريقة تحويل لابلاس ، وهي تمكننا من حل المعادلات التفاضلية بطريقة أكثر مباشرة ، وعلاوة على ذلك فإن بعض الدوال غير المنتظمة لا يمكن حلها بسهولة بالطرق التقليدية بينما تعطينا طريقة لابلاس حلاً لهذه المسائل .

يحتوي هذا الفصل فقط على التطبيقات الأساسية لطريقة تحويل لابلاس . وقد تركنا جانباً اشتقاق الصيغ الرياضية والتطبيقات الأكثر تعقيداً ويمكن الرجوع إليها في المراجع المختصة بتحليل فترات العبور .

تحويل لابلاس :

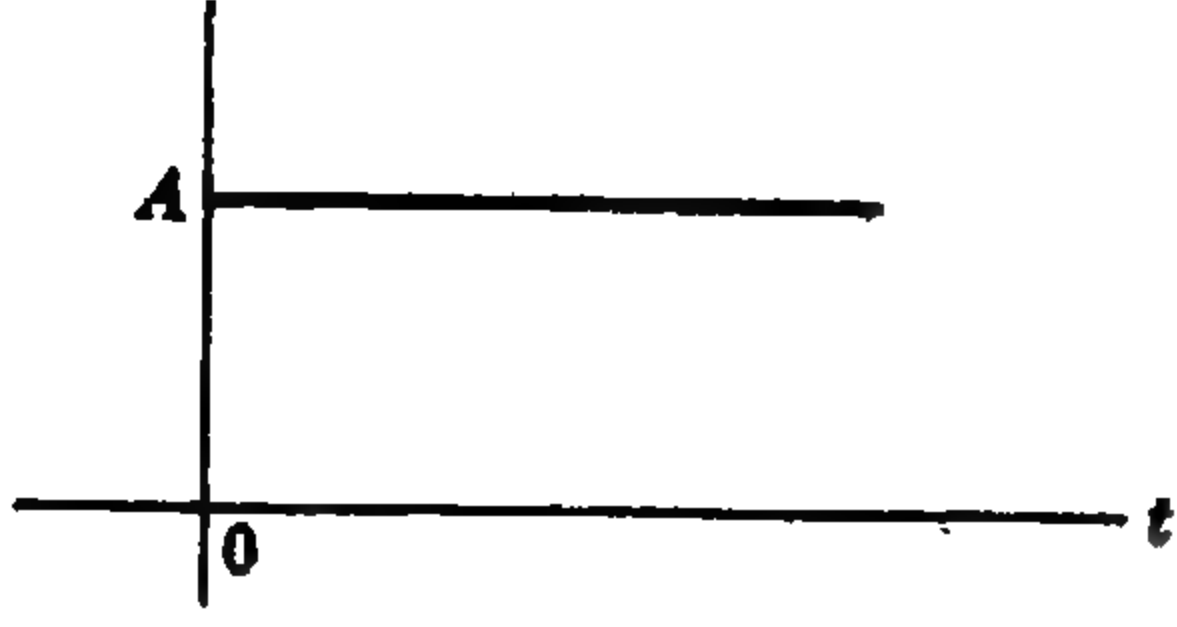
إذا كانت $f(t)$ دالة من الزمن t ومعرفة لجميع قيم $t > 0$ فإن تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ يرمز له بالرمز $\mathcal{L}[f(t)]$ ويعرف بـ

$$(1) \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

حيث يمكن أن يكون البارامتر s حقيقياً أو مركباً . ونفرض في تطبيقات الدوائر الكهربائية أن $s = \delta + j\omega$. ويحول المؤثر $\mathcal{L}[f(t)]$ الدالة $f(t)$ بدلالة الزمن إلى دالة $F(s)$ بدلالة الذبذبة المركبة أو ببساطة بدلالة s . وعلى هذا فإن الدالتين $f(t)$ و $F(s)$ يكونان زوجاً من البدائل أو المتحولات . ويوجد جداول واسعة الانتشار تحتوي على هذه الأزواج . والمتحولات المبينة في الجداول ١٧ - ١ كافية للغرض المطلوب في هذا الفصل . والشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس هو أن الدالة $f(t)$ يجب أن تكون (أ) قطعة متصلة ، (ب) ذات رتبة أسية . تكون الدالة $f(t)$ ذات رتبة أسية إذا كان $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$ لجميع قيم $t > t_0$ حيث كل من A و t_0 ثوابت موجبة . عندما تتحقق هذه الشروط فإن تكامل التحويل المباشر يكون متقارباً لجميع قيم $\delta > \alpha$ وتكون $F(s)$ موجودة . وجميع الدوال المستخدمة في تحليل الدوائر الكهربائية تحقق الشرطين (أ) ، (ب) .

مثال ١ :

تسمى الدالة الموضحة في الشكل ١٧ - ١ بدالة سلمية وتعرف
بـ $f(t) = A$ ، $t > 0$: أوجد تحويلات لابلاس المناظرة .



شكل ١٧ - ١

بتطبيق المعادلة (١) على الدائرة $f(t) = A$ نجد أن

$$\mathcal{L}[A] = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = \left[-\frac{A}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{s}$$

مثال ٢ :

أوجد تحويل لابلاس للدالة $f(t) = e^{-at}$ حيث a ثابت .

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \left[-\frac{1}{(a+s)} e^{-(a+s)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

مثال ٣ :

أوجد تحويل لابلاس للدالة $f(t) = \sin \omega t$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt = \left[\frac{-s(\sin \omega t)e^{-st} - e^{-st}\omega \cos \omega t}{s^2 + \omega^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

مثال ٤ :

أوجد تحويل لابلاس للمشتقة df/dt

$$\mathcal{L}[df/dt] = \int_0^{\infty} (df/dt) e^{-st} dt$$

باستخدام التكامل بالتجزئ حيث $\int u dv = uv - \int v du$ ، $u = e^{-st}$ ، $dv = df$ ، $v = f$. إذن

$$\mathcal{L}[df/dt] = \left[e^{-st} f \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(-se^{-st}) dt = -f(0+) + s \int_0^{\infty} f e^{-st} dt = -f(0+) + s F(s)$$

حيث $f(0+)$ هي قيمة الدالة عند الاقتراب من 0 من ناحية اليمين ، أي أن قيمة الدالة عند $t = (0+)$.

مثال ٥ :

أوجد تحويل لابلاس للتكامل $\int_0^t f(t) dt$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \int_0^{\infty} \int_0^t f(t) dt e^{-st} dt$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مع وضع $dv = e^{-st} dt$ و $u = \int f(t) dt$ إذن

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] &= \left[\int f(t) dt \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{s} \int f(t) dt \Big|_{0+} + \frac{1}{s} F(s) \end{aligned}$$

حيث $\int f(t) dt \Big|_{0+}$ هي قيمة التكامل عند $0+$ ونكتب أيضاً $f^{-1}(0+)$. إذن تحويل لابلاس لتكامل هو

$$\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{-1}(0+)$$

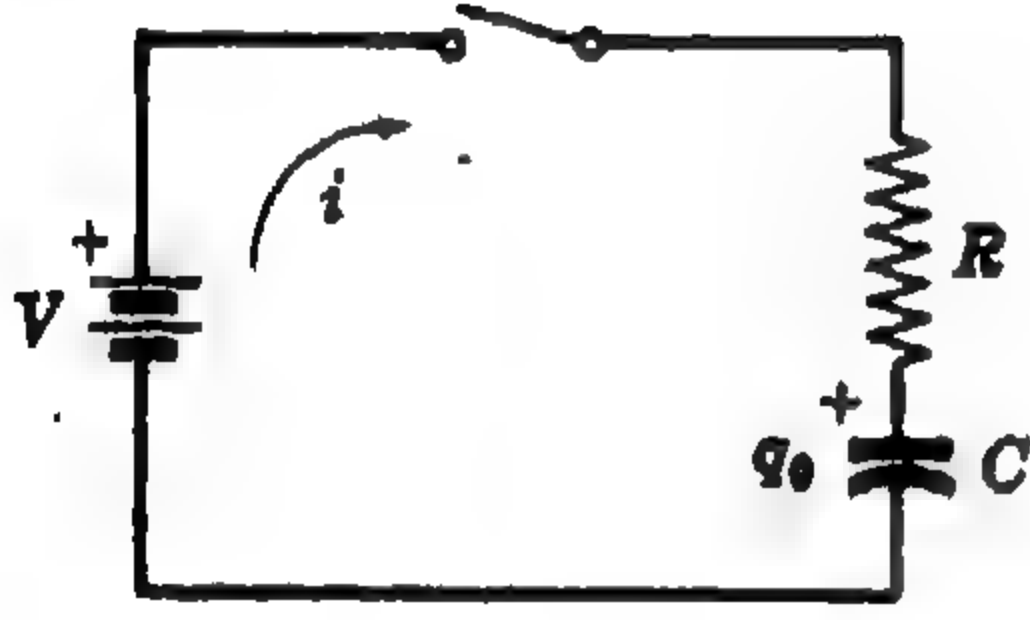
ويظهر زوج التحويل أو البدائل الذي حصلنا عليه في هذا المثال في الجدول ١٧ - ١ .

تطبيقات على تحليل الدوائر :

في دائرة التوالي RC الموضحة في الشكل ١٧ - ٢ توجد شحنة ابتدائية q_0 على المكثف بالتقطيع الموضحة في الرسم . عند غلق المفتاح يؤثر مصدر الجهد الثابت V على الدائرة وتكون المعادلة التفاضلية للدائرة هي :

$$(٢) \quad Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V$$

ونستخدم $I(s)$ للتعبير عن التيار في نطاق s ونأخذ تحويل لابلاس لكل حد في المعادلة (٢)



شكل ١٧ - ٢

$$(٢) \quad \mathcal{L}[Ri] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int i dt\right] = \mathcal{L}[V]$$

$$(٤) \quad RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{f^{-1}(0+)}{Cs} = \frac{V}{s}$$

لدينا الآن $f^{-1}(0+) = \int i dt \Big|_{0+} = q(0+) = q_0$ الشحنة الابتدائية q_0 موجبة على اللوح العلوي للمكثف وهي نفس قطبية الشحنة المترسبة بالمصدر V . إذن الإشارة موجبة . وبالتعويض عن q_0 في المعادلة (٤) نحصل على

$$(٥) \quad RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{q_0}{Cs} = \frac{V}{s}$$

وبإعادة ترتيب الحدود وأخذ $I(s)$ مشترك .

جدول ١٧ - ١

نحويلات لابلاس

| | $f(t)$ | $F(s)$ |
|-----|----------------------------|---|
| 1. | $A \quad t \geq 0$ | $\frac{A}{s}$ |
| 2. | $At \quad t \geq 0$ | $\frac{A}{s^2}$ |
| 3. | e^{-at} | $\frac{1}{s+a}$ |
| 4. | te^{-at} | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| 5. | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| 6. | $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| 7. | $\sin (\omega t + \theta)$ | $\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$ |
| 8. | $\cos (\omega t + \theta)$ | $\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$ |
| 9. | $e^{-at} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$ |
| 10. | $e^{-at} \cos \omega t$ | $\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$ |
| 11. | $\sinh \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$ |
| 12. | $\cosh \omega t$ | $\frac{s}{s^2 - \omega^2}$ |
| 13. | df/dt | $sF(s) - f(0+)$ |
| 14. | $\int f(t) dt$ | $\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0+)}{s}$ |
| 15. | $f(t - t_1)$ | $e^{-st_1} F(s)$ |
| 16. | $f_1(t) + f_2(t)$ | $F_1(s) + F_2(s)$ |

$$(٦) \quad I(s) \left(R + \frac{1}{Cs} \right) = \frac{V}{s} - \frac{q_0}{Cs}$$

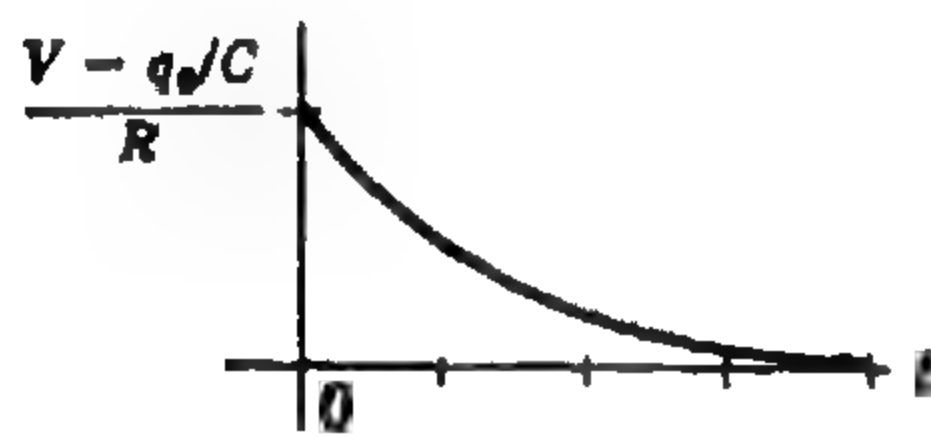
$$(٧) \quad I(s) = \frac{1}{s} (V - q_0/C) \frac{1}{(R + 1/sC)} = \frac{V - q_0/C}{R} \frac{1}{(s + 1/RC)}$$

المعادلة (٧) التي في نطاق s معادلة مساوية للتيار i في نطاق الزمن t . وبالتالي فإن عملية تحويل $F(s)$ إلى $f(t)$ تسمى معكوس تحويل لابلاس ، ويرمز لها بالرمز $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ بالإشارة إلى الجدول ١٧ - ١ نلاحظ أن $F(s)$ لتحويل الزوج 3 تكافئ الحد $1/(s + 1/RC)$ في المعادلة (٦). إذن من تعريف معكوس تحويل لابلاس ومن الجدول نحصل على :

$$(٨) \quad \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i = \left(\frac{V - q_0/C}{R} \right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + 1/RC} \right] = \frac{V - q_0/C}{R} e^{-t/RC}$$

المعادلة (٨) هي التيار العابر في نطاق الزمن الذي ينتج عن غلق مفتاح دائرة RC التي تحتوى على شحنة ابتدائية q_0 على المكثف . وقد أدخلت الشروط الابتدائية في المعادلة (٥) في نطاق s ، وبالتالي عند أخذ معكوس التحويل فإن المعادلة الناتجة تكون محتوية على الثوابت .

لاحظ أنه بالطريقة الجبرية التي استخدمت في كتابة المعادلتين (٦) و (٧) أمكن تحويل الدالة إلى صيغة موجودة في الجدول وعلى ذلك تمكنا من الحصول على تحويل لابلاس المعاكس . يوضح الشكل ١٧ - ٣ الدالة الزمنية بالتيار الابتدائي $(V - q_0/C)/R$ وإذا كان $q_0/C = V$ فإنه لا يوجد فترة عبور ذلك لأن الشحنة الابتدائية على المكثف يكون جهدها المكافئ مساوياً للجهود المؤثر V . وإذا كانت قطبية q_0 معكوسة فإن إشارة q_0/C تتغير وينتج عن ذلك تيار ابتدائي كبير نسبياً .



شكل ١٧ - ٣

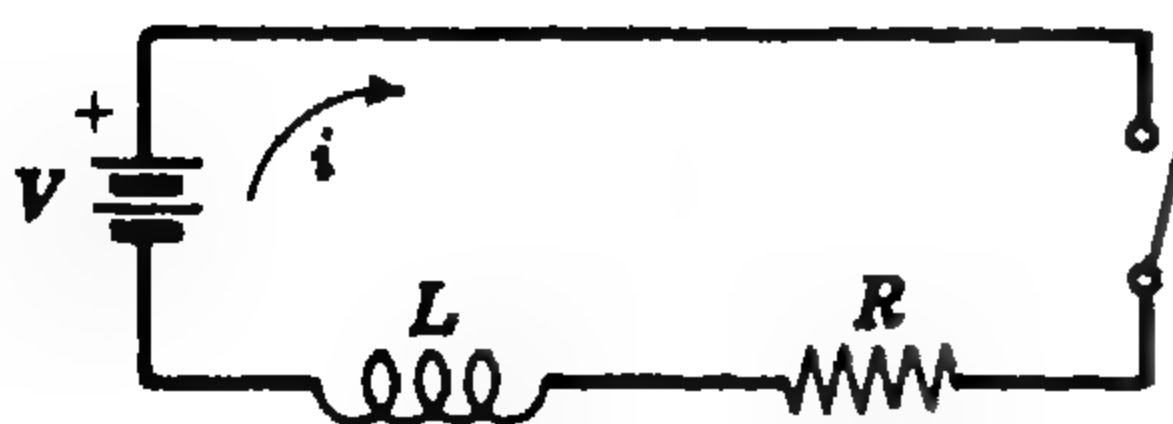
يؤثر على دائرة RL الموضحة في الشكل ١٧ - ٤ مصدر جهد ثابت V عند غلق المفتاح . ينتج من تطبيق قانون كيرشوف بعد غلق المفتاح المعادلة التالية :

$$(٩) \quad Ri + L \frac{di}{dt} = V$$

والآن بتطبيق تحويل لابلاس مباشرة على كل حد نحصل على :

$$(١٠) \quad \mathcal{L}[Ri] + \mathcal{L}\left[L \frac{di}{dt}\right] = \mathcal{L}[V]$$

$$(١١) \quad RI(s) + sLI(s) - Li(0+) = V/s$$



شكل ١٧ - ٤

التيار الابتدائي $i(0+)$ في دائرة التوالي RL والذي كان لها تيار مساو للصفر قبل غلق المفتاح يساوى أيضاً صفرًا عند $t = 0+$. بالتعويض عن $i(0+) = 0$ في المعادلة (١١) نحصل على :

$$(12) \quad I(s)(R + sL) = V/s$$

$$(13) \quad I(s) = \frac{V}{s} \frac{1}{(R + sL)} = \frac{V}{L} \left(\frac{1}{s} \right) \frac{1}{(s + R/L)}$$

لا تظهر دالة المعادلة (١٣) في الجدول ١٧ - ١ ، ولكن إذا أمكن تغييرها إلى الصيغة $A/s + B/(s + R/L)$ فإنه يمكن استخدام تحويل الزوج 3 و 1 في جزء هذه الصيغة ، ويعني الزوج 16 أن الدالة الزمنية الكلية هي مجموع الدالتين الزميتين ، أى أن $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) + F_2(s)] = f_1(t) + f_2(t)$. للحصول على المجموع المطلوب فإننا نضع الطرف الأيمن للمعادلة (١٣) باستثناء الثابت V/L مساوياً لمجموع كسرين كما يلي :

$$(14) \quad \frac{1}{s(s + R/L)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + R/L)} = \frac{A(s + R/L) + Bs}{s(s + R/L)}$$

والآن من البسط نحصل على المعادلة التالية في s :

$$(15) \quad 1 = (A + B)s + AR/L$$

بمساواة معاملات s ذات القوة المتساوية نحصل على :

$$(16) \quad A + B = 0, \quad A = L/R, \quad B = -L/R$$

باستخدام الكسور الجزئية الموضحة واختيار A و B المعينين سابقاً فإن المعادلة (١٣) تصبح :

$$(17) \quad I(s) = \frac{V}{L} \left(\frac{L/R}{s} + \frac{-L/R}{s + R/L} \right) = \frac{V}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right)$$

بتطبيق التحويلين 1 و 3 في الجدول ١٧ - ١ نحصل على تعبير مبهكوس التحويل للتيار .

إذن :

$$(18) \quad \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i = \frac{V}{R} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + R/L} \right] \right\}$$

$$(19) \quad i = \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t})$$

المعادلة (١٩) هي المعادلة الأسية المعتادة وقيمة التيار في الحالة المستقرة هي V/R .

طرق الفك :

عادة ما نحتاج إلى فك خارج القسمة في تحليل الدوائر الكهربائية إلى مجموع عدة كسور وذلك للحصول على معكوس تحويلات لابلاس . وذلك لأن التيار في نطاق s عادة ما يكون نسبة بين كثيرتي حدود في s

$$(٢٠) \quad I(s) = P(s)/Q(s)$$

حيث درجة $Q(s)$ أعلى من $P(s)$. والمعادلة (١٤) توضح مثالا لفك خارج القسمة .

نختبر الآن طريقة فك الكسور الجزئية لحالات مختلفة كذلك التي تحدث في فك خارج قسمة كثيرتي حدود . توجد طريقة أخرى نوردتها فيما يلي تسمى صيغة مفكوك هيثيسيد وينتج من تطبيقاتها طرق مختلفة لحساب معكوس تحويل لابلاس لخارج قسمة كثيرتي حدود .

١ - طريقة مفكوك الكسور الجزئية :

يمكن كتابة المعادلة (٢٠) كمجموع كسور مقام كل منها هو أحد عوامل $Q(s)$ وبسطها ثابت . ولفك خارج القسمة $P(s)/Q(s)$ فإننا يجب أن نعتبر جذور $Q(s)$. وهذه إما أن تكون حقيقية أو مركبة ولذلك فإنه ينتج لدينا ثلاث حالات .

الحالة ١ - جذور $Q(s)$ حقيقية وغير متساوية .

اعتبر أن التيار في نطاق s يعطى بالصيغة التالية :

$$(٢١) \quad I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$$

بتحليل $Q(s)$ فإنه يمكن كتابة المعادلة (٢١) على الصورة :

$$(٢٢) \quad I(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}$$

وعندما $s = -1$ و $s = -2$ فإن التعبير يصبح غير محدد ويقال أنه يوجد أقطاب بسيطة عند هذه القيم لـ s ويعطى معامل القطب البسيط $s = s_0$ بالعلاقة $I(s)(s-s_0)|_{s=s_0}$. وعلى ذلك فلتعيين المعامل ضرب كلا طرفي المعادلة (٢٢) في $(s+2)$:

$$(٢٣) \quad \frac{s-1}{(s+2)(s+1)}(s+2) = A + \frac{B}{(s+1)}(s+2)$$

بالتعويض عن $s = -2$ نجد أن :

$$A = \left. \frac{s-1}{s+1} \right|_{s=-2} = 3$$

بالمثل :

$$B = \left. \frac{s-1}{s+2} \right|_{s=-1} = -2$$

بالتعويض بهذه القيم في المعادلة (٢٢) يكون التيار في نطاق s هو

$$(24) \quad I(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{-2}{s+1}$$

معكوس تحويل لابلاس لـ $I(s)$ الذي نحصل عليه من الجدول ١٧ - ١ هو :

$$i = 3e^{-2t} - 2e^{-t}$$

طريقة أخرى : بضرب طرفي المعادلة (٢٢) في $(s+2)(s+1)$ نحصل على :

$$s-1 = A(s+1) + B(s+2) = (A+B)s + A+2B$$

والآن بمساواة معاملات s ذات القوى المتساوية نجد أن $A+B=1$ و $A+2B=-1$ إذن $A=3$ و $B=-2$ وهي نفس القيم التي حصلنا عليها سابقاً . هذه الطريقة الأخرى تؤدي إلى معادلات آنية يجب حلها للحصول على المعاملات المطلوبة ، بينما تؤدي الطريقة الأولى إلى معادلة بسيطة مستقلة لكل معامل .

الحالة ٢ : جذور $Q(s)$ حقيقية ومتساوية .اعتبر أن التيار في نطاق s يعطى بالمعادلة :

$$(25) \quad I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s(s^2+6s+9)} = \frac{1}{s(s+3)^2}$$

إذن :

$$(26) \quad \frac{1}{s(s+3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2}$$

بضرب طرفي المعادلة (٢٦) في s ووضع s تساوي صفراً

$$A = \left. \frac{1}{(s+3)^2} \right|_{s=0} = \frac{1}{9}$$

وفي حالة الجذور المتكررة فإن معاملات الصيغة التربيعية تعطى بالعلاقة : $I(s)(s-s_0)^2|_{s=s_0}$ إذن :

$$C = \left. \frac{1}{s} \right|_{s=-3} = -\frac{1}{3}$$

ومعامل الحد الخطي الموافق يعطى بالعلاقة : $\frac{d}{ds} [I(s)(s-s_0)^2] \Big|_{s=s_0}$ إذن :

$$B = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \right) \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{s^2} \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{9}$$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة (٢٦) فإن التيار في نطاق s يكون :

$$(27) \quad I(s) = \frac{\frac{1}{9}}{s} - \frac{\frac{1}{9}}{s+3} - \frac{\frac{1}{9}}{(s+3)^2}$$

ومعكوس تحويل لابلاس هو : $i = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{1}{9}te^{-3t}$

طريقة أخرى : بضرب طرفي المعادلة (٢٦) في $s(s+3)^2$ نحصل على :

$$1 = A(s+3)^2 + Bs(s+3) + Cs = (A+B)s^2 + (6A+3B+C)s + 9A$$

وبمساواة معاملات s ذات القوى المتساوية نجد أن $A+B=0$ و $6A+3B+C=0$ و $9A=1$ ، إذن $A = \frac{1}{9}$ ، $B = -\frac{1}{9}$ ، $C = -\frac{1}{3}$ وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها سابقاً .

الحالة ٣ : جذور $Q(s)$ مركبة :

اعتبر أن التيار في نطاق s يعطى بالعلاقة :

$$(28) \quad I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 5} = \frac{1}{(s+2+j)(s+2-j)}$$

بما أن $Q(s)$ لها جذور مترافقة فإن الثوابت في بسط الكسور الجزئية هي أيضاً مترافقة مركبة .

إذن :

$$(29) \quad \frac{1}{(s+2+j)(s+2-j)} = \frac{A}{s+2+j} + \frac{A^*}{s+2-j}$$

بضرب طرفي المعادلة (٢٩) ، في $(s+2+j)$ ووضع $s = -2-j$ نحصل على :

$$A^* = -j\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad A = \frac{1}{s+2-j} \Big|_{s=-2-j} = j\frac{1}{2}$$

بالتعويض بهذه القيم في المعادلة (٢٩) يكون التيار في نطاق s هو

$$(30) \quad I(s) = \frac{j\frac{1}{2}}{s+2+j} + \frac{-j\frac{1}{2}}{s+2-j}$$

ومعكوس لابلاس هو : $i = e^{-2t} \sin t$

طريقة أخرى : بضرب طرفي المعادلة (٢٩) في $(s + 2 - j)(s + 2 + j)$ نحصل على :

$$1 = A(s + 2 - j) + A^*(s + 2 + j)$$

وبمساواة معاملات s ذات القوى المتساوية نجد أن $A + A^* = 0$ و $A(2 - j) + A^*(2 + j) = 1$ ،

$$\text{إذن : } A = \frac{1}{4} \text{ و } A^* = -\frac{1}{4}$$

٢ — صيغة مفكوك هيفيسايد :

نص صيغة مفكوك هيفيسايد على أن معكوس تحويل لابلاس لخارج القسمة $I(s) = P(s)/Q(s)$ يعطى بالعلاقة :

$$(٣١) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}$$

حيث a_k هي جذور $Q(s)$ الـ n المتميزة .

نطبق الآن صيغة مفكوك هيفيسايد على التيار بدلالة s المعطى في الحالة السابقة :

$$(٣٢) \quad I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s - 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s - 1}{(s + 2)(s + 1)}$$

لدينا الآن $P(s) = s - 1$ و $Q(s) = s^2 + 3s + 2$ و $Q'(s) = 2s + 3$ والجذران $a_1 = -2$ و $a_2 = -1$ إذن من المعادلة (٣١) نجد أن :

$$i = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} e^{-2t} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)} e^{-t} = \frac{-3}{-1} e^{-2t} + \frac{-2}{1} e^{-t} = 3e^{-2t} - 2e^{-t}$$

نظرية القيمة الابتدائية :

١٠ من المثال ٤

$$(٣٣) \quad \mathcal{L} [df/dt] = \int_0^\infty (df/dt) e^{-st} dt = sF(s) - f(0+)$$

بأخذ النهاية للمعادلة (٣٣) عندما $s \rightarrow \infty$ نحصل على :

$$(٣٤) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty (df/dt) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sF(s) - f(0+)\}$$

يحتوى التكامل على e^{-st} الذى يقترب من الصفر عندما $s \rightarrow \infty$. إذن :

$$(٣٥) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \{sF(s) - f(0+)\} = 0$$

بما أن $f(0+)$ ثابتة فإنه يمكننا كتابة (٣٥) على الصورة :

$$(٣٦) \quad f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \{s F(s)\}$$

المعادلة (٣٦) هي نص نظرية القيمة الابتدائية . وعلى هذا فإنه يمكننا إيجاد القيمة الابتدائية لدالة الزمن $f(t)$ بضرب الدالة المناظرة في نطاق $F(s)$ في s وأخذ النهاية عندما $s \rightarrow \infty$.

مثال ٦ :

في دائرة RC الموضحة في الشكل ١٧-٢ إذا كان التيار بدلالة s هو $I(s) = \frac{V - q_0/C}{R} \left(\frac{1}{(s + 1/RC)} \right)$ [أنظر المعادلة (٧)] فعين التيار الابتدائي $i(0+)$ باستخدام نظرية القيمة الابتدائية .

من المعادلة (٣٦) نجد أن :

$$i(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{V - q_0/C}{R} \left(\frac{s}{(s + 1/RC)} \right) \right\} = \frac{V - q_0/C}{R}$$

وهذه النتيجة موضحة في الشكل ١٧-٢ .

نظرية القيمة النهائية :

لدينا من المثال ٤

$$(٣٧) \quad \mathcal{L}[df/dt] = \int_0^{\infty} (df/dt)e^{-st} dt = sF(s) - f(0+)$$

وبأخذ النهاية للمعادلة (٣٧) عندما $s \rightarrow 0$ نحصل على :

$$(٣٨) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} (df/dt)e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s) - f(0+)\}$$

وبما أن :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} (df/dt)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} df = f(\infty) - f(0)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(0+) = f(0+)$$

فإن المعادلة (٣٨) تصبح :

$$f(\infty) - f(0) = -f(0+) + \lim_{s \rightarrow 0} \{s F(s)\}$$

أو

$$(٤٠) \quad f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \{s F(s)\}$$

المعادلة (٤٠) هي نص نظرية القيمة النهائية . وبالتشابه مع التطبيق لنظرية القيمة الابتدائية يمكننا إيجاد القيمة النهائية لدالة الزمن $f(t)$ بضرب الدالة المناظرة بدلالة s أى $F(s)$ في s وأخذ النهاية عندما $s \rightarrow 0$. ومع ذلك فإن المعادلة (٤٠) تطبق فقط عندما تكون جميع جذور مقام $F(s)$ لها أجزاء حقيقية سالبة . وهذا الشرط يستبعد الدوال الجيبية لأن الدالة الجيبية محددة في مالا نهاية .

مثال ٧ :

$$I(s) = \frac{V}{R} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right\} \text{ هو إذا كان التيار في نطاق } s$$

[أنظر المعادلة (١٧)] فعين القيمة النهائية للتيار .

من المعادلة (٤٠) نجد أن :

$$i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{V}{R} \left\{ \frac{s}{s} - \frac{s}{s + R/L} \right\} = V/R$$

دوائر نطاق s :

معادلة دائرة التوالى RLC الموضحة في الشكل ١٧ - ه هي :

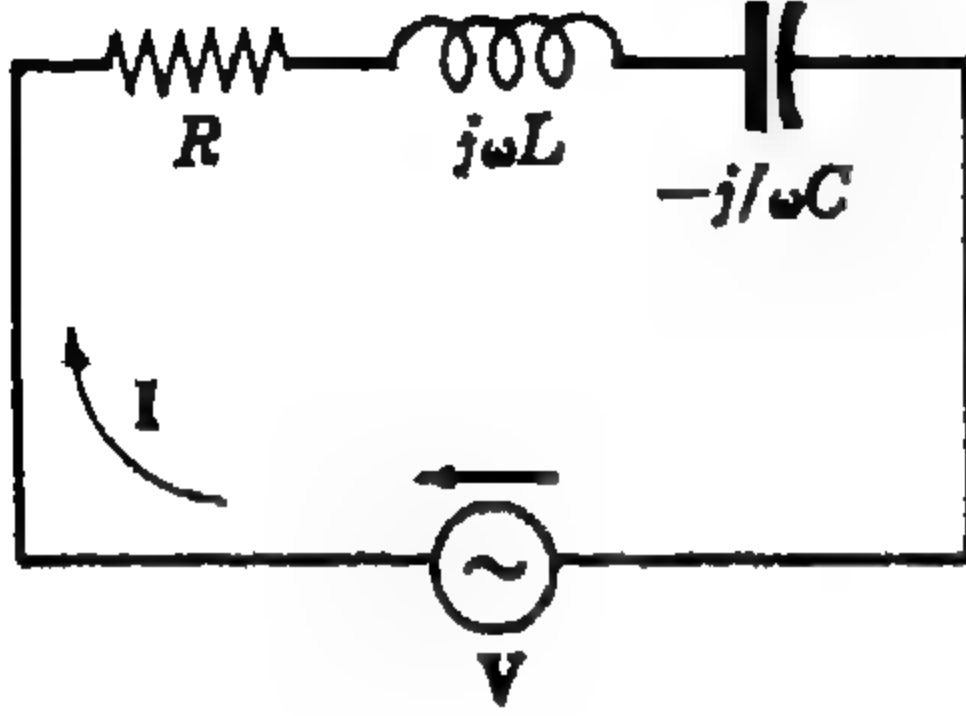
$$(٤١) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = v$$

وقد حلت هذه المعادلة التكاملية - التفاضلية في الفصل السادس عشر بالطرق التقليدية .

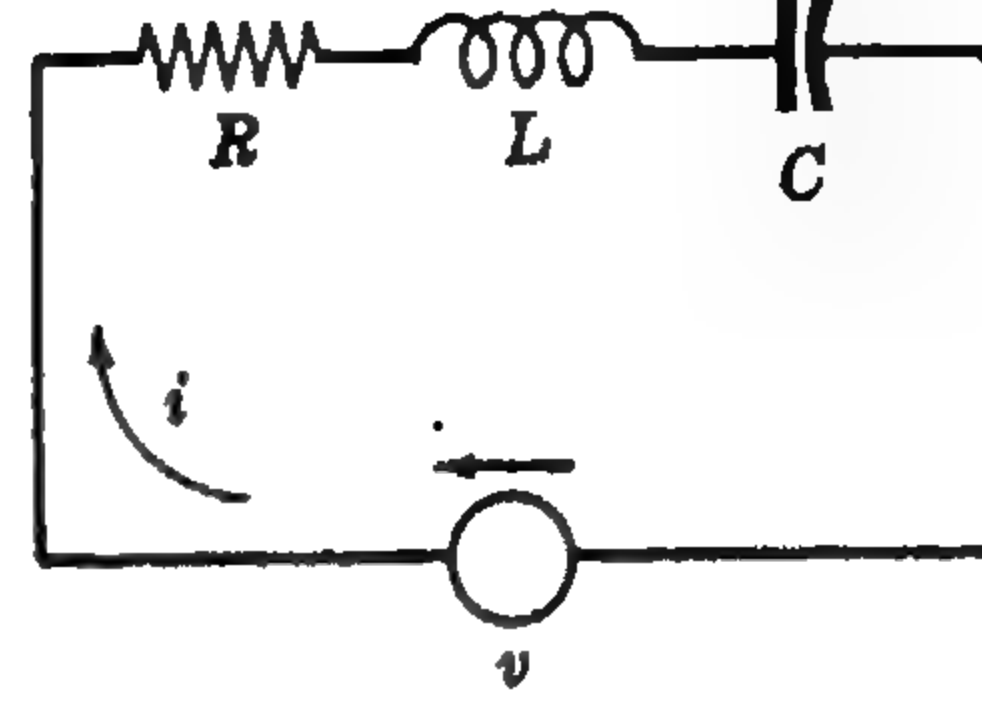
في الحالة الجيبية المستقره يكون لعناصر الدائرة الثلاثة R و L و C ممانعات مركبة تعطى بدلالة ω ، وتعرف بـ R و $j\omega L$ و $1/j\omega C$ على الترتيب . وعلى هذا فإن معادلة الدائرة تتحول من نطاق الزمن إلى نطاق الدذبذبة ، وبهذا التحويل تصبح الجهود والتيارات مطاورة . والآن فإن معادلة دائرة التوالى RLC الموضحة في الشكل ١٧ - ه هي :

$$(٤٢) \quad RI + j\omega LI + (1/j\omega C)I = V$$

والميزة التي نحصل عليها من هذا التحويل هي أنه يمكن معالجة المعادلة المحولة جبرياً للحصول على التيار المطاور I . والمربوط في الجهود المختلفة هي ببساطة حاصل ضرب التيار المطاور في معاوقة عنصر الدائرة .

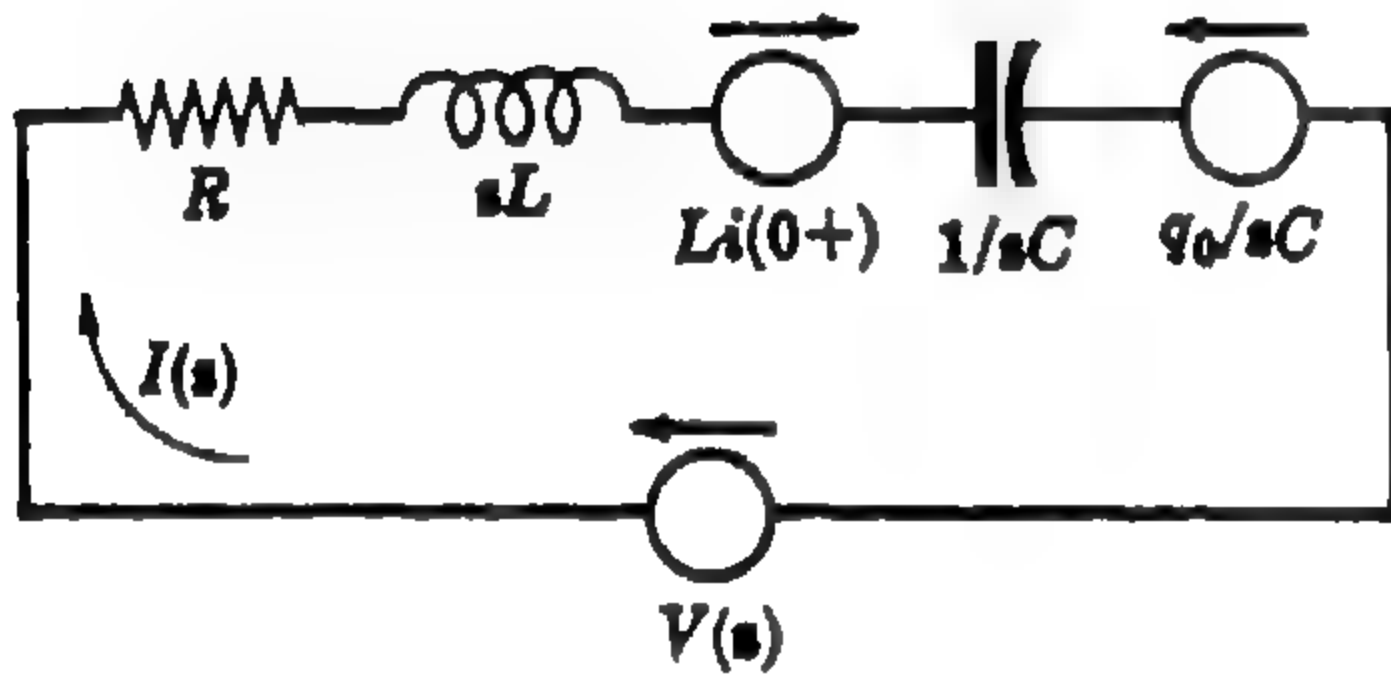


شكل ١٧ - ٦



شكل ١٧ - ٥

ينتج من طريقة تحويل لابلاس لتحويل المربوط في الجهد Ri في نطاق الزمن إلى $RI(s)$ في نطاق s . وبالمثل فإن الجهد عبر $L(di/dt)$ يصبح $sLI(s) - Li(0+)$ والجهد عبر مكثف ما



شكل ١٧ - ٧

$$\frac{1}{sC} I(s) + \frac{q_0}{sC} \text{ يصبح } \frac{1}{C} \int i dt$$

إذن معادلة دائرة التوالى الموضحة في الشكل ١٧ - ٧ تكون :

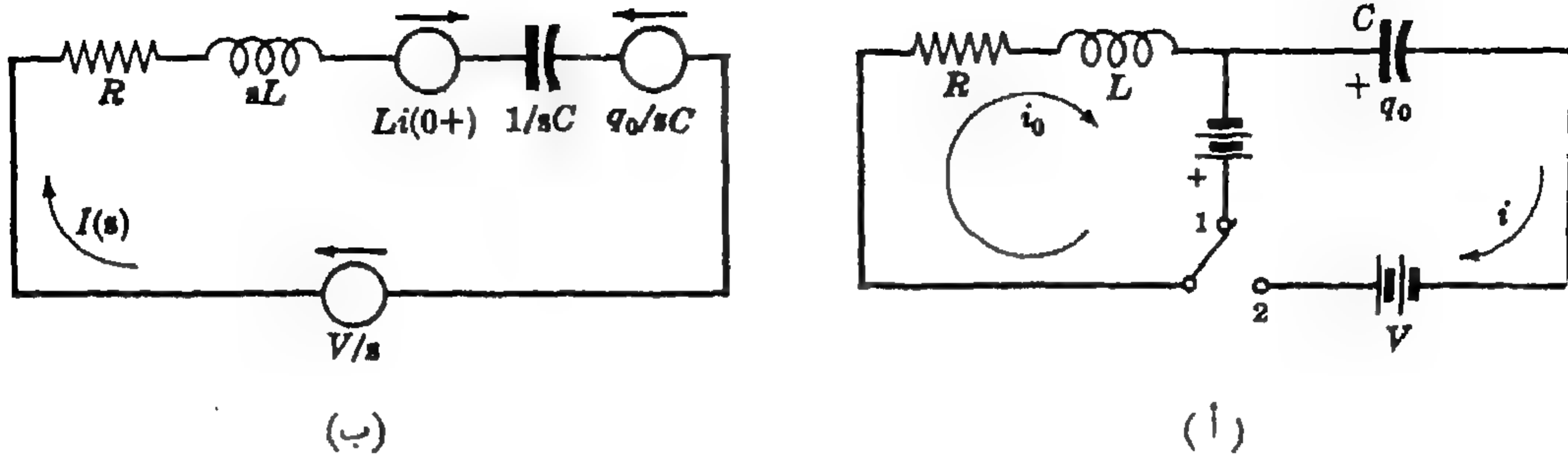
$$(١٢) \quad RI(s) + sLI(s) - Li(0+) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{q_0}{sC} = V(s)$$

أو

$$(١٤) \quad I(s)(R + sL + 1/sC) = V(s) - q_0/sC + Li(0+)$$

في المعادلة (١٤) ، $R + sL + 1/sC$ هي المعاوقة $Z(s)$ في نطاق s ؛ وهي النسبة بين الإثارة إلى الاستجابة . تأخذ $Z(s)$ نفس شكل المعاوقة المركبة لحالة الجيبية المستقرة ، $R + j\omega L + 1/j\omega C$. ويمكن تطبيق معادلات طريقة كل من تيار الشبكة وجهد العقدة في التحليل ببساطة على الدوائر بدلالة s طالما أن الإشارات السليمة قد استخدمت في حدى الشرط الابتدائي $Li(0+)$ و q_0/sC .

اعتبر الدائرة الموضحة في الشكل ١٧ - ٨ (أ) والتي يمر فيها تيار ابتدائي i_0 بينما كان المفتاح في الموضع 1 . عند $t = 0$ يتحرك المفتاح إلى الموضع 2 وبذلك يدخل إلى الدائرة مصدر جهد ثابت V ومكثف ذات شحنة ابتدائية q_0 ولقد اختير الاتجاه الموجب للتيار المفروض في اتجاه عقارب الساعة ، كما هو موضح بالرسم .



شكل ١٧ - ٨

الآن يحول المصدر الثابت إلى V/s والتيار الناتج إلى $I(s)$ كما هو موضح في الشكل ١٧ - ٨ (ب) . حدود الشرط الابتدائي الآن هي مصادر اتجاهها كما هو موضح وتكون المعادلة المناظرة مطابقة للمعادلة (٤٤) . ولتيار ابتدائي i_0 في عكس الاتجاه أو شحنة q_0 بإشارة معاكسة فإن إشارات الحدين $Li(0+)$ و q_0/sC تتغير بالتالي . والأمثلة الآتية توضح كيف أن المعادلات في نطاق s مشابهة للمعادلات المطاوعة التي سبق علاجها في هذا الكتاب . وجميع نظريات الشبكات الكهربائية التي تطبق على الحالة الجيبية المستقرة لها ما يقابلها في نطاق s .

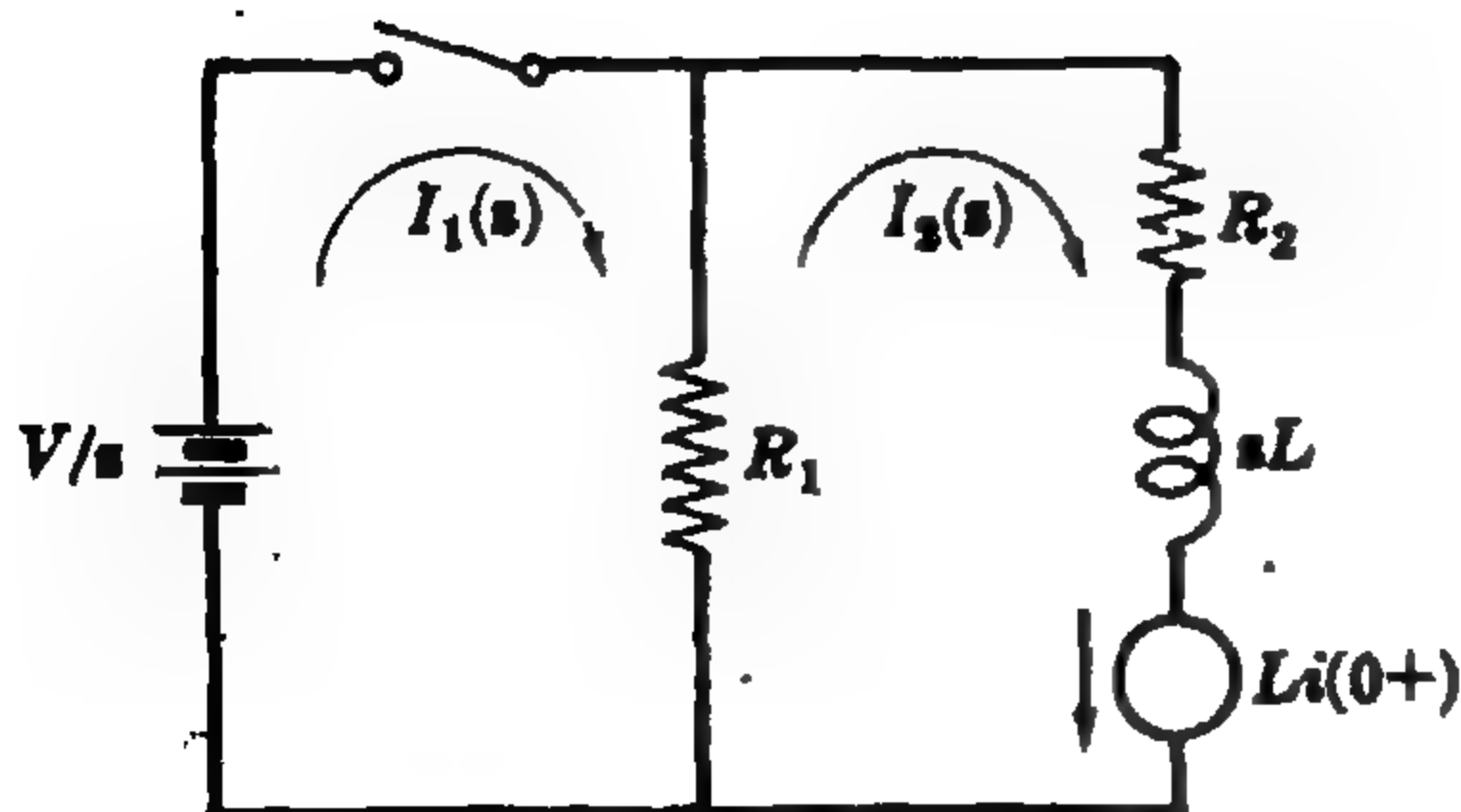
مثال ٨ :

في الشبكة الكهربائية ذات الشبكتين الفرعيتين والموضحة في الشكل ١٧ - ٩ ، اختير تياراً الشبكة بدلالة s كما هو موضح في الرسم . فإذا أغلق المفتاح عند $t = 0$ فأوجد معادلتى $I_1(s)$ و $I_2(s)$.

عند غلق المفتاح يؤثر المصدر V/s على الشبكة الكهربائية وتكون معادلتا تيار الشبكة هما :

$$R_1 I_1(s) - R_1 I_2(s) = V/s$$

و



شكل ١٧ - ٩

$$(R_1 + R_2 + sL) I_2(s) - R_1 I_1(s) = Li(0+)$$

وبما أن التيار الابتدائي في الملف يساوى صفراً فإن المعادلات في الصيغة المصفوفية تكون

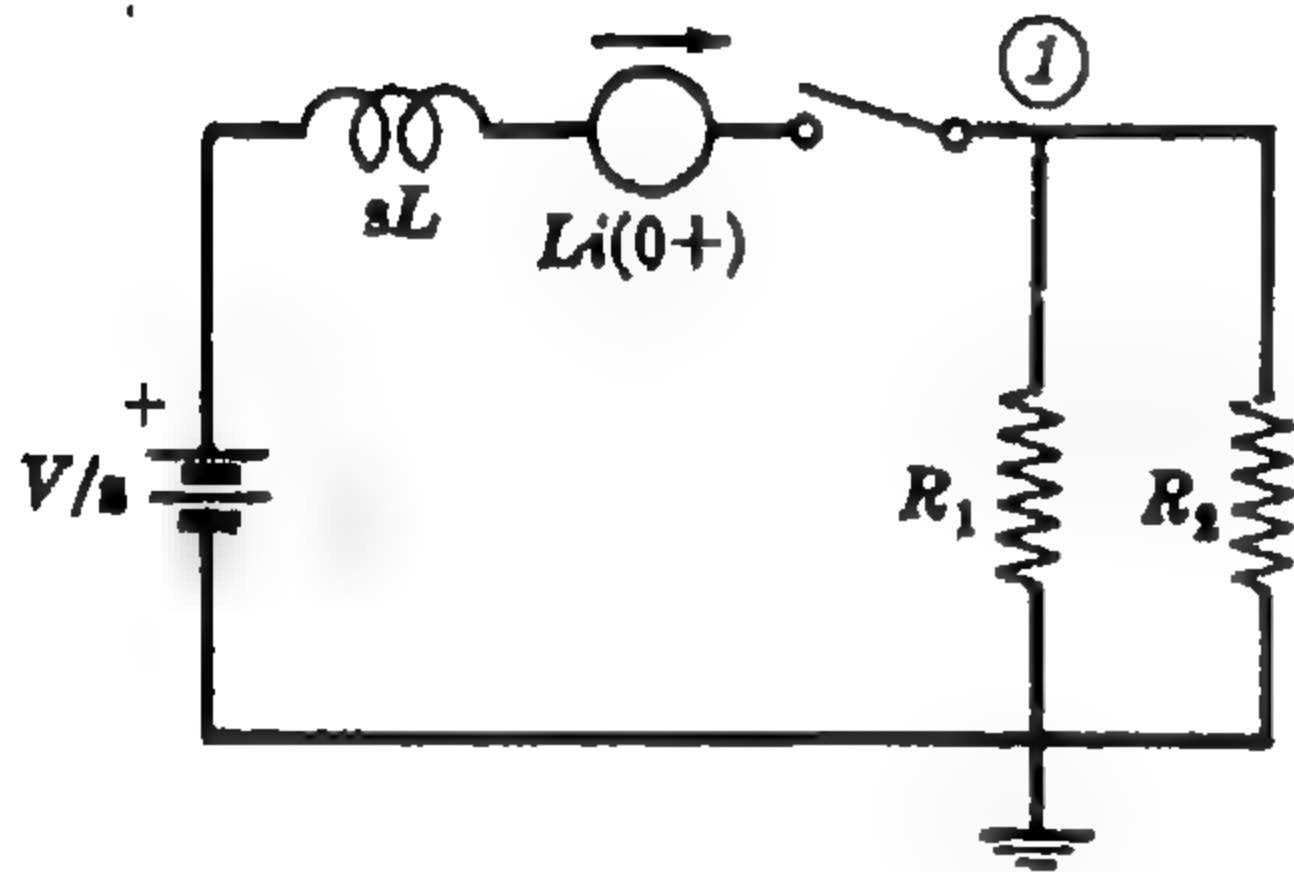
$$\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/s \\ 0 \end{bmatrix}$$

والآن نحصل على معادلتى $I_1(s)$ و $I_2(s)$ المستقلتين إما بالتعويض أو بطريقة المحددات ، والمعادلتان الناتجتان هما :

$$I_2(s) = \frac{V}{s} \frac{1}{(R_2 + sL)} , \quad I_1(s) = \frac{V}{s} \left[\frac{R_1 + R_2 + sL}{R_1(R_2 + sL)} \right]$$

مثال ٩ :

اكتب معادلة جهد العقدة في نطاق s للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧ - ١٠ .



شكل ١٧ - ١٠

نختار العقد 1 وعقدة الإسناد كما هو موضح في الرسم وعند غلق المفتاح تكون معادلة العقدة هي :

$$\frac{V_1(s) - V/s - Li(0+)}{sL} + \frac{V_1(s)}{R_1} + \frac{V_1(s)}{R_2} = 0$$

$$(1/sL + 1/R_1 + 1/R_2) V_1(s) = \frac{V/s + Li(0+)}{sL}$$

وبما أن التيار الابتدائي في الملف يساوى صفراً ، إذن فالمعادلة لجهد العقدة $V_1(s)$ هي :

$$V_1(s) = \frac{V}{s} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + sL R_2 + sL R_1} \right)$$

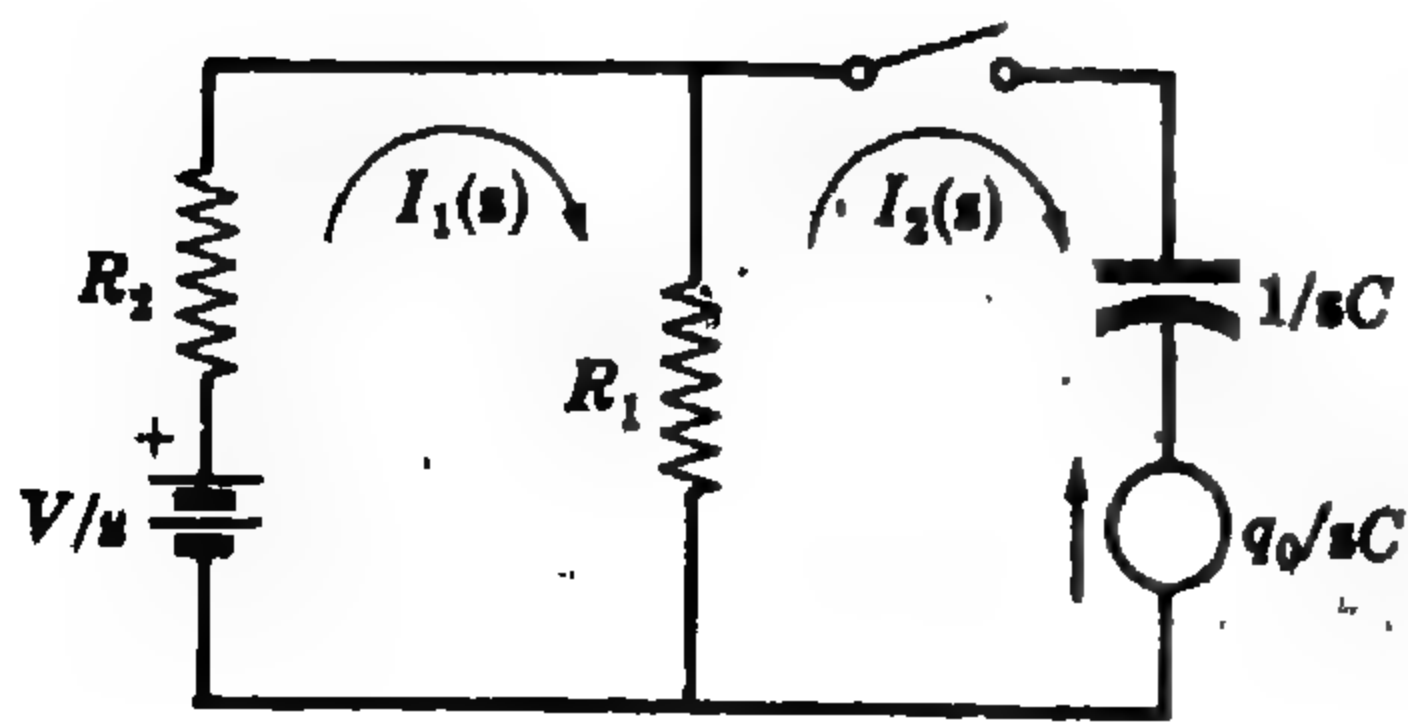
مثال ١٠ :

اكتب معادلات تيار الشبكة في نطاق s للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧ - ١١ علماً بأنه يوجد على المكثف شحنة ابتدائية q_0 عند الزمن الذى أغلق عنده المفتاح .

نختار تيارات الشبكة كما هو موضح في الرسم . بتطبيق قانون كيرشوف على المسارين المغلقين ينتج :

$$(R_1 + R_2) I_1(s) - R_1 I_2(s) = V/s$$

$$(R_1 + 1/sC) I_2(s) - R_1 I_1(s) = -q_0/sC$$



شكل ١٧ - ١١

وبكتابة هاتين المعادلتين في الصيغة المصفوفية نحصل على :

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + 1/sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/s \\ -q_0/sC \end{bmatrix}$$

مسائل محلولة

١٧-١ أوجد تحويل لابلاس للدالة $e^{-at} \cos \omega t$ حيث a ثابت .

بتطبيق المعادلة المعروفة $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ على الدالة المعطاة نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] &= \int_0^\infty \cos \omega t e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left[\frac{-(s+a) \cos \omega t e^{-(s+a)t} + e^{-(s+a)t} \omega \sin \omega t}{(s+a)^2 + \omega^2} \right]_0^\infty \\ &= \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

١٧-٢ إذا كان $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ فبين أن $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$. طبق هذه النتيجة على المسألة ١٧-١ .

لدينا من التعريف أن : $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = F(s)$ إذن

$$(1) \quad \mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \int_0^\infty e^{-at} [f(t)e^{-st}] dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t} dt = F(s+a)$$

وحيث أن $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ ، (أنظر الجدول ١٧-١) ، ينتج من (١) أن

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad ، \quad \text{كما تبين في المسألة ١٧-١ .}$$

١٧-٣ أوجد تحويل لابلاس للدالة $f(t) = 1 - e^{-at}$ حيث a ثابت

لدينا

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1 - e^{-at}] &= \int_0^\infty (1 - e^{-at})e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} dt - \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right] \quad \text{أوجد ١٧-٤}$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{1}{s(s^2-a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{s-a}$$

والمعاملات هي :

$$A = \frac{1}{s^2-a^2}\bigg|_{s=0} = -\frac{1}{a^2} \quad B = \frac{1}{s(s-a)}\bigg|_{s=-a} = \frac{1}{2a^2} \quad C = \frac{1}{s(s+a)}\bigg|_{s=a} = \frac{1}{2a^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/a^2}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s+a}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s-a}\right] \quad \text{ولدينا الآن}$$

والدالة الزمنية المناظرة موجودة في الجدول ١٧-١

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right] = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}e^{-at} + \frac{1}{2a^2}e^{at}$$

$$= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{a^2}(\cosh at - 1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] \quad \text{أوجد ١٧-٥}$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية نحصل عل

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

$$C = \frac{s+1}{s}\bigg|_{s=-2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad A = \frac{s+1}{(s+2)^2}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{4} \quad \text{إذن}$$

ومعاملات الحدود التربيعية هي

$$B = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+1}{s}\right]\bigg|_{s=-2} = -\frac{1}{s^2}\bigg|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{4}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2}\right] \quad \text{ولدينا الآن}$$

والدالة الزمنية المناظرة موجودة في الجدول ١٧-١

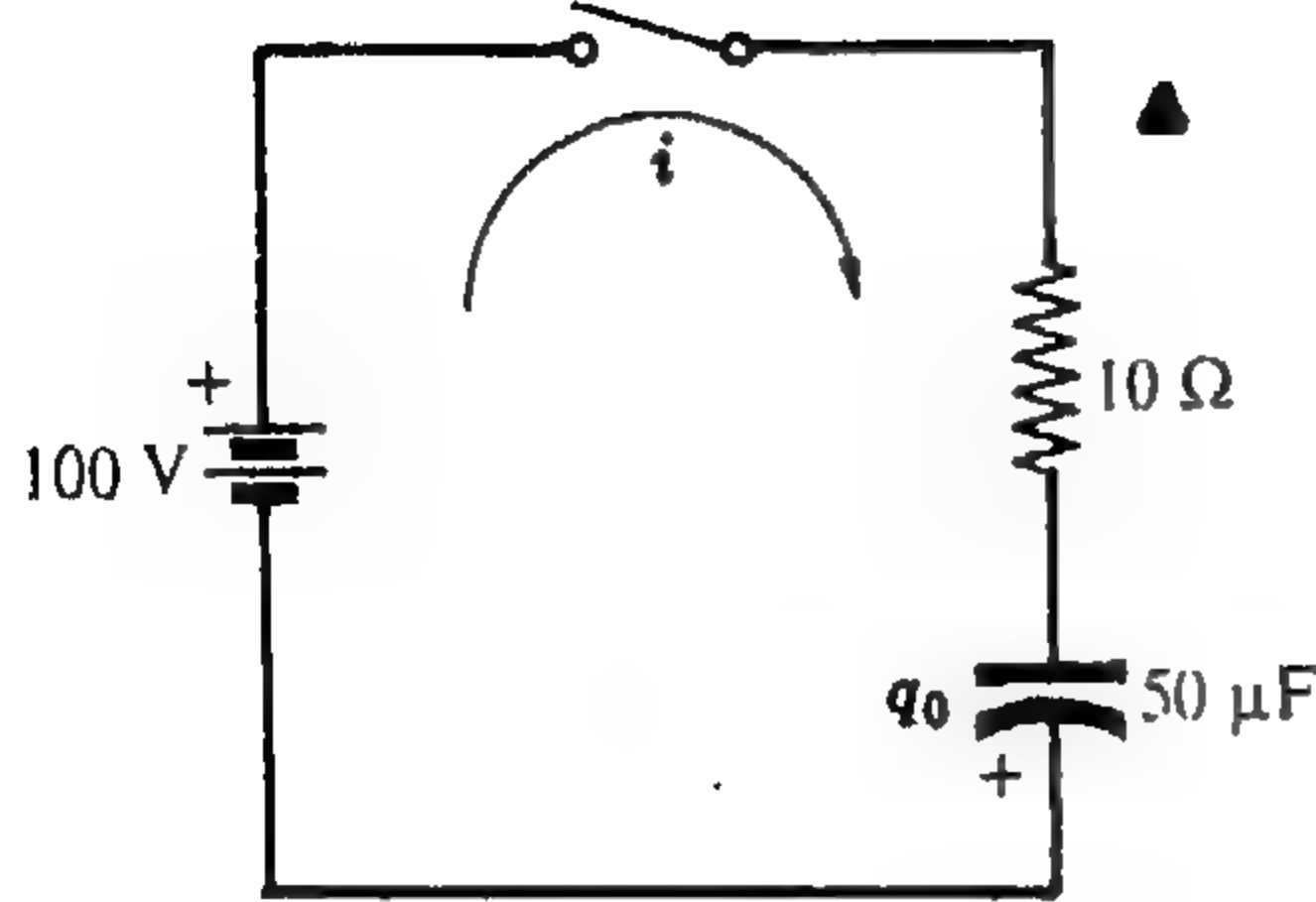
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}$$

١٧ - ٦ في دائرة التوالي المكونة من RC والموضحة في الشكل ١٧ - ١٢

كان على المكثف شحنة ابتدائية $q_0 = 2500 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$

وعند $t = 0$ أغلق المفتاح وأثر جهد ثابت $V = 100 \text{ volts}$

على الدائرة . استخدم تحويل لابلاس لتحصل على التيار .



شكل ١٧ - ١٢

إن معادلة الدائرة المغطاة في نطاق الزمن بعد غلق المفتاح هي

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V$$

أو

$$10i + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \int i dt = 100$$

وبأخذ تحويل لابلاس لحدود المعادلة (١) نحصل على المعادلة في نطاق s .

$$(٢) \quad 10 I(s) + \frac{I(s)}{50 \times 10^{-6} s} + \frac{q_0}{50 \times 10^{-6} s} = \frac{100}{s}$$

وقطبية q_0 الموضحة في الرسم تعاكس قطبية الشحنة التي يرسبها المصدر على المكثف ، إذن المعادلة في نطاق s هي

$$(٣) \quad 10 I(s) + \frac{I(s)}{50 \times 10^{-6} s} - \frac{2500 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-6} s} = \frac{100}{s}$$

$$(٤) \quad I(s) \left\{ \frac{10s + 2 \times 10^4}{s} \right\} = \frac{150}{s}$$

وبإعادة ترتيب الحدود

أو

$$(٥) \quad I(s) = \frac{15}{s + 2 \times 10^3}$$

ونحصل على الدالة الزمنية الآن بأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (٥) .

$$\mathcal{L}^{-1} [I(s)] = i = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{15}{s + 2 \times 10^3} \right] = 15e^{-2 \times 10^3 t} \text{ amperes}$$

إذا كانت الشحنة الابتدائية q_0 موجبة على اللوح العلوي للمكثف . تكون إشارة q_0/sC في المعادلة (٣)

موجبة . إذن يصبح الطرف الأيمن في المعادلة (٤) $50/s$ ، وعلى ذلك يتولد التيار العابر $i = 5e^{-2 \times 10^3 t} \text{ amperes}$.

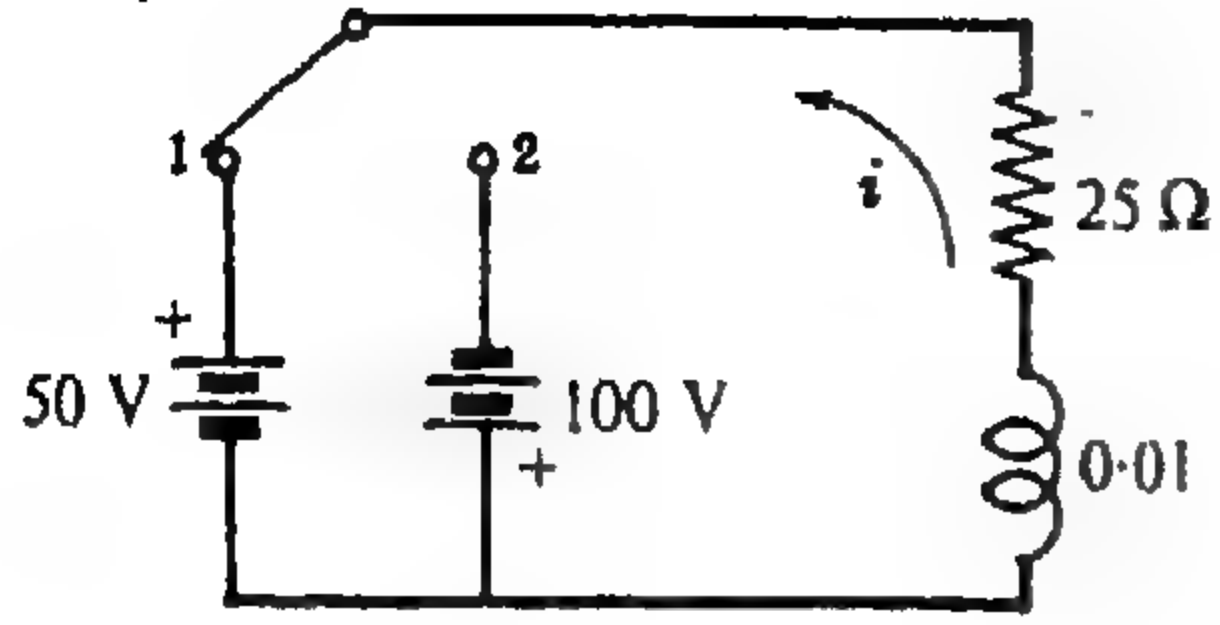
١٧ - ٧ في دائرة RL الموضحة في الشكل ١٧ - ١٣ وضع المفتاح في الموضع 1 لفترة زمنية كافية للوصول إلى شروط الحالة

المستقرة ، وعند $t = 0$ تحرك المفتاح إلى الموضع 2 . أوجد التيار الناتج .

نفرض أن اتجاه التيار كما هو موضحاً في الرسم . إذن

$$i_0 = -50/25 = -2 \text{ A}$$

والمعادلة بدلالة الزمن هي



$$(1) \quad 25i + 0.01(di/dt) = 100$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (١)

$$(2) \quad 25 I(s) + 0.01s I(s) - 0.01 i(0+) = 100/s$$

وبالتعويض عن $i(0+)$ نجد

شكل ١٧-١٢

$$(3) \quad 25 I(s) + 0.01s I(s) - 0.01(2) = 100/s$$

$$(4) \quad I(s) = \frac{100}{s(0.01s + 25)} - \frac{0.02}{0.01s + 25} = \frac{10^4}{s(s + 2500)} - \frac{2}{s + 2500}$$

وبفك $\frac{10^4}{s(s + 2500)}$ في المعادلة (٤) بطريقة الكسور الجزئية

$$(5) \quad \frac{10^4}{s(s + 2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2500}$$

$$B = \frac{10^4}{s} \Big|_{s=-2500} = -4 \quad \text{و} \quad A = \frac{10^4}{s + 2500} \Big|_{s=0} = 4$$

إذن

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة (٤) ينتج

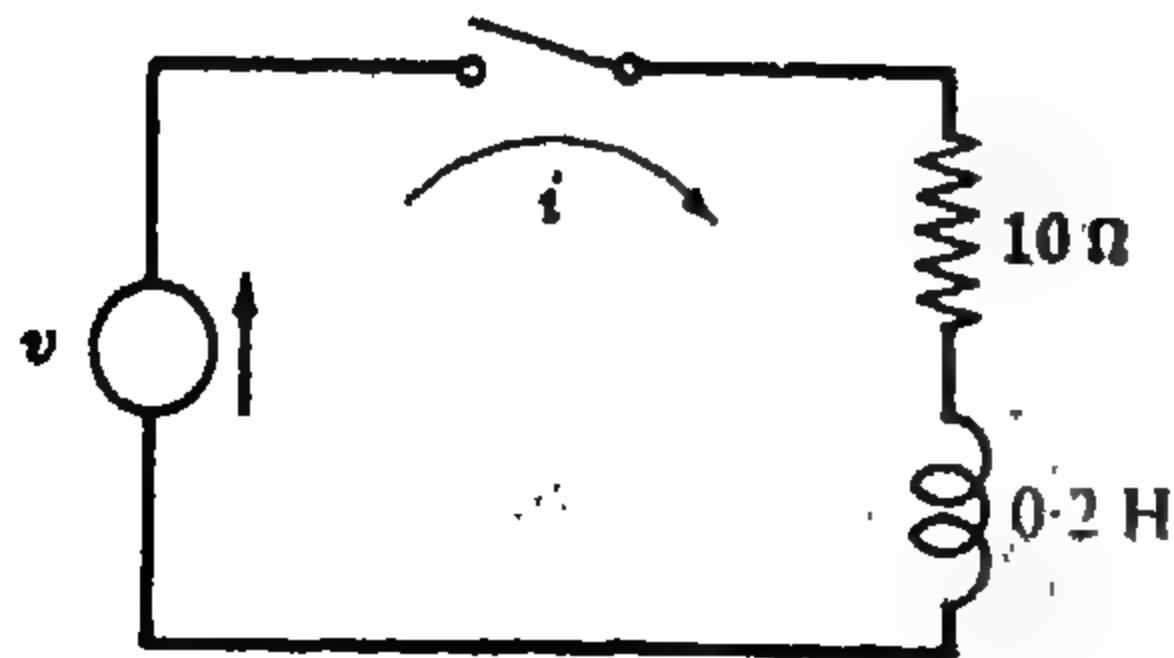
$$(6) \quad I(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 2500} - \frac{2}{s + 2500} = \frac{4}{s} - \frac{6}{s + 2500}$$

وبأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (٦) ، نحصل على $i = 4 - 6e^{-2500t}$ amperes

١٧-٨ إذا أثر على دائرة التوالي RL الموضحة في الشكل ١٧-١٤ جهد

امى يعطى بالعلاقة $v = 50e^{-100t}$ volts . وذلك بفتح المفتاح

عند $t = 0$ فأوجد التيار الناتج .



شكل ١٧-١٤

تعطى معادلة الدائرة بدلالة الزمن بالعلاقة

$$(1) \quad Ri + L(di/dt) = v$$

وتأخذ هذه المعادلة في نطاق s الشكل

$$(2) \quad R I(s) + sL I(s) - L i(0+) = V(s)$$

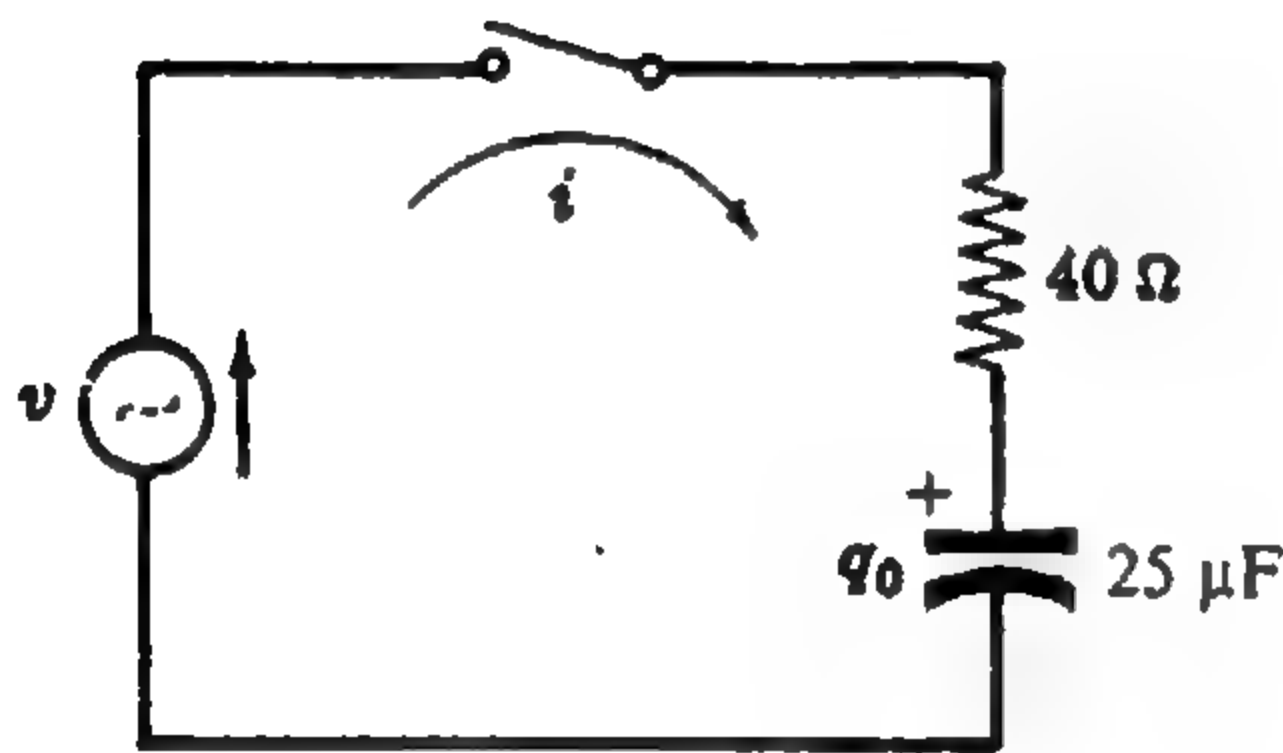
بالتعويض عن ثوابت الدائرة والمصدر بمد تحويله إلى $V(s) = 50/(s + 100)$ في المعادلة (٢) نجد

$$(٣) \quad I(s) = \frac{250}{(s+100)(s+50)} \quad \text{أو} \quad 10 I(s) + s(2) I(s) = \frac{50}{s+100}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{n=1,2} \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} e^{a_n t} \quad \text{باستخدام صيغة مفكوك هيفيسيد}$$

حيث $P(s) = 250$ و $Q(s) = s^2 + 150s + 5000$ و $Q'(s) = 2s + 150$ و $a_1 = -100$ و $a_2 = -50$ إذن

$$i = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{250}{-50} e^{-100t} + \frac{250}{50} e^{-50t} = -5e^{-100t} + 5e^{-50t} \text{ amperes}$$



شكل ١٧ - ١٥

١ - ٤ يؤثر على دائرة التوالى RC الموضحة في الشكل ١٧ - ١٥ مصدر

جهد جيبى $v = 180 \sin(2000t + \phi)$ volt؛ فإذا كان
على المكثف شحنة ابتدائية $q_0 = 1250 + 10^{-6}$ coulombs
بالقطبية الموضحة في الرسم . فعين التيار علماً بأن المفتاح أغلق عند
الزمن الذى كانت عند $\phi = 90^\circ$.

معادلة الدائرة بدلالة الزمن هي

$$(١) \quad 40i + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \int i dt = 180 \sin(2000t + 90^\circ)$$

وينتج من تحويل لابلاس للمعادلة (١) معادلة في نطاق s .

$$(٢) \quad 40 I(s) + \frac{1}{25 \times 10^{-6} s} I(s) + \frac{q_0}{25 \times 10^{-6} s} = 180 \left\{ \frac{s \sin 90^\circ + 2000 \cos 90^\circ}{s^2 + 4 \times 10^6} \right\}$$

وبالتعويض عن الشحنة q_0 في المعادلة (٢) ينتج

$$(٣) \quad 40 I(s) + \frac{4 \times 10^4}{s} I(s) + \frac{1250 \times 10^{-6}}{25 \times 10^{-6} s} = \frac{180 s}{s^2 + 4 \times 10^6} \quad \text{أو}$$

$$I(s) = \frac{4.5 s^2}{(s^2 + 4 \times 10^6)(s + 10^3)} - \frac{1.25}{s + 10^3}$$

وبتطبيق صيغة مفكوك هيفيسيد على الحد $\frac{4.5 s^2}{(s^2 + 4 \times 10^6)(s + 10^3)}$ في المعادلة (٤) ، نحصل على $P(s) = 4.5 s^2$ ،

$$Q'(s) = 3s^2 + 2 \times 10^3 s + 4 \times 10^6 \quad \text{و} \quad Q(s) = s^3 + 10^3 s^2 + 4 \times 10^6 s + 4 \times 10^9$$

$$\text{و} \quad a_1 = -j2 \times 10^3 \quad \text{و} \quad a_2 = j2 \times 10^3 \quad \text{و} \quad a_3 = -10^3 \quad \text{إذن}$$

$$(٤) \quad i = \frac{P(-j2 \times 10^3)}{Q'(-j2 \times 10^3)} e^{-j2 \times 10^3 t} + \frac{P(j2 \times 10^3)}{Q'(j2 \times 10^3)} e^{j2 \times 10^3 t} + \frac{P(-10^3)}{Q'(-10^3)} e^{-10^3 t} = 1.25 e^{-10^3 t} \text{ amperes}$$

$$(1.8 - j0.9) e^{-j2 \times 10^3 t} + (1.8 + j0.9) e^{j2 \times 10^3 t} - 0.35 e^{-10^3 t} \text{ amperes}$$

$$1.8 \sin 2000t + 3.6 \cos 2000t - 0.35 e^{-10^3 t} \text{ amperes}$$

$$4.02 \sin(2000t + 116.6^\circ) - 0.35 e^{-10^3 t} \text{ amperes}$$

عند $t = 0$ يعطى التيار بقسمة الجهد اللحظى المكون من جهد المصدر وجهد المكثف المشحون على المقاومة إذن

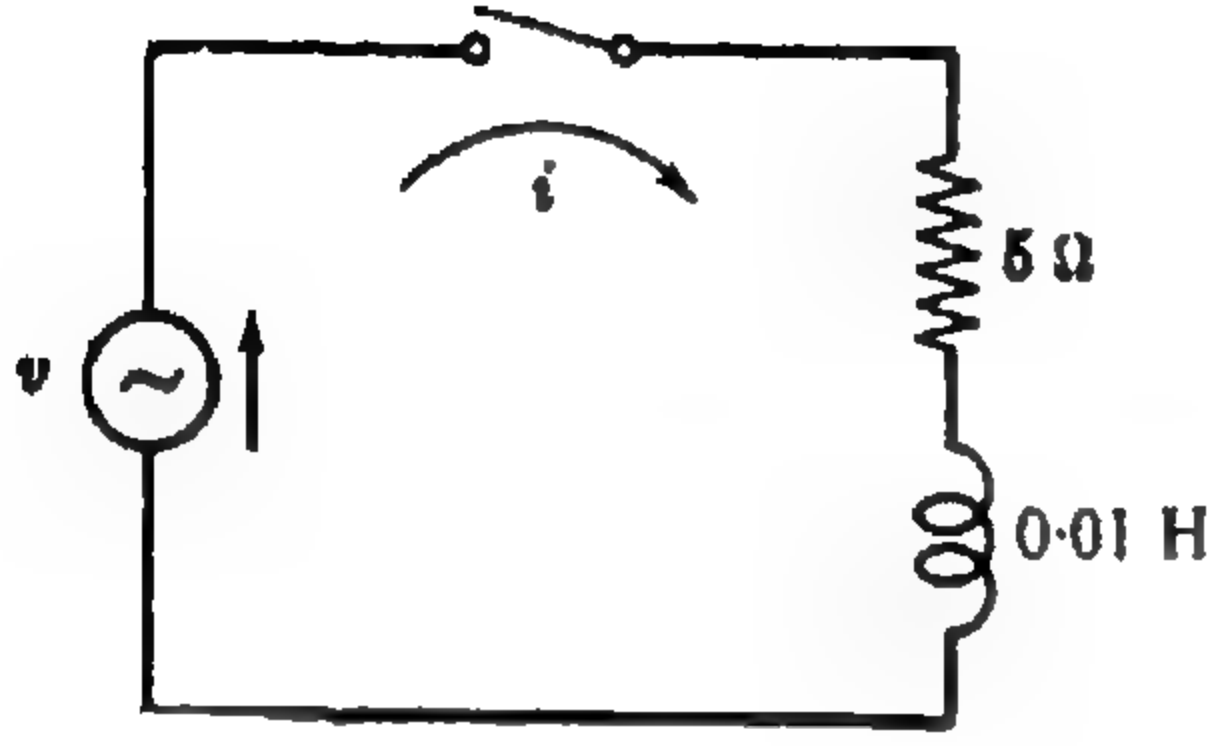
$$i_0 = \left(180 \sin 90^\circ - \frac{1250 \times 10^{-6}}{25 \times 10^{-6}} \right) / 40 = 3.25 \text{ A}$$

ونحصل على نفس النتيجة إذا وضعنا $\phi = 0$ في المعادلة (٤)

١٧-١٠ في دائرة التوالي RL الموضحة في الشكل ١٧-١٦ يعطى مصدر

الجهد الجيبى بالعلاقة $v = 100 \sin(500t + \phi)$ volts

عين التيار الناتج إذا أغلق المفتاح عندما كانت $\phi = 0$.



شكل ١٧-١٦

المعادلة العامة في نطاق s لدائرة RL على التوالي هي

$$(1) \quad R I(s) + sL I(s) - L i(0^-) = V(s)$$

وتحويل المصدر عند $\phi = 0$ هو $V(s) = \frac{500(100)}{s^2 + (500)^2}$

وحيث أنه لا يوجد تيار ابتدائي في الملف؛ $L i(0^+) = 0$

بالتعويض عن ثوابت الدائرة في المعادلة (١)

$$(2) \quad I(s) = \frac{5 \times 10^6}{(s^2 + 25 \times 10^4)(s + 500)} \quad \text{و} \quad 5 I(s) + 0.01s I(s) = \frac{5 \times 10^4}{s^2 + 25 \times 10^4}$$

وبفك (٢) باستخدام الكسور الجزئية

$$(3) \quad I(s) = 5 \left(\frac{-1+j}{s+j500} \right) + 5 \left(\frac{-1-j}{s-j500} \right) + \frac{10}{s+500}$$

ويكون معكوس لابلاس للمعادلة (٣) هو

$$i = 10 \sin 500t - 10 \cos 500t + 10e^{-500t} = 10e^{-500t} + 14.14 \sin(500t - \pi/4) \text{ amperes}$$

١٧-١١ في المسألة ١٧-١٠ ، بكتابة دالة الجهد

$$(1) \quad v = 100e^{j500t} \text{ volts}$$

نكون قد أدخلنا حد جيب تمام في مصدر الجهد. عين تيار الدائرة في المسألة ١٧-١٠ باستخدام المعادلة (١).

عندما $v = 100e^{j500t}$ فإن $V(s) = 100/(s - j500)$ والمعادلة في نطاق s هي

$$(2) \quad I(s) = 10^4/(s - j500)(s + 500) \quad \text{و} \quad 5 I(s) + 0.01s I(s) = 100/(s - j500)$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد

$$(3) \quad I(s) = \frac{10 - j10}{s - j500} + \frac{-10 + j10}{s + 500}$$

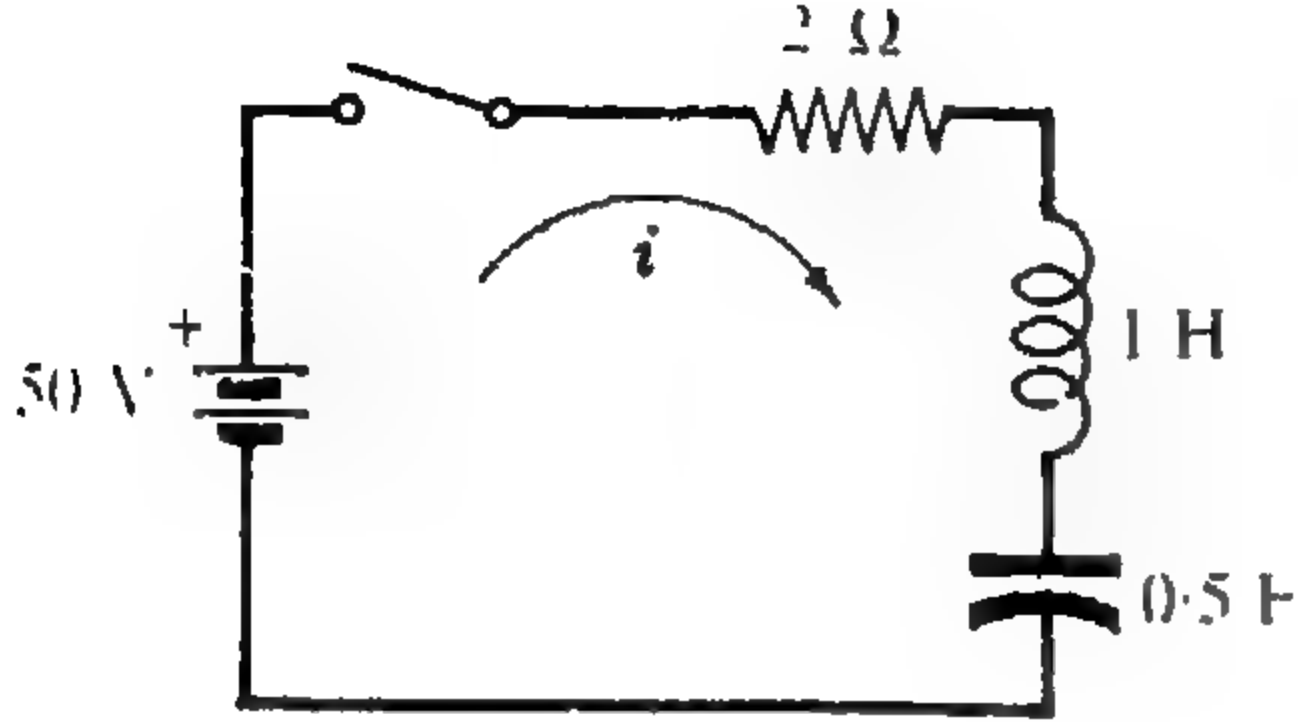
والآن بأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (٣) ، تكون دالة التيار الزمنية المناظرة هي

$$\begin{aligned} i &= (10 - j10)e^{j500t} + (-10 + j10)e^{-500t} \text{ amperes} \\ &= 14.14e^{j(500t - \pi/4)} + (-10 + j10)e^{-500t} \text{ amperes} \\ &= 14.14\{\cos(500t - \pi/4) + j \sin(500t - \pi/4)\} + (-10 + j10)e^{-500t} \text{ amperes.} \end{aligned}$$

وحيث أن مصدر الجهد في المسألة ١٧ - ١٠ يحتوى فقط على الجزء التخيلي للمعادلة (٤) .

$$i = 14.14 \sin(500t - \pi/4) \cdot 10e^{-500t} \text{ amperes}$$

١٧ - ١٢ إذا كان في دائرة التوالى RLC الموضحة في الشكل ١٧ - ١٧ .
لا يوجد شحنة ابتدائية على المكثف . وأغلق المفتاح عند $t = 0$
فعين التيار الناتج .



معادلة الدائرة بدلالة الزمن هي

$$(1) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = V$$

وينتج من تحويل لابلاس لحدود المعادلة (١) معادلة في نطاق s هي

$$(2) \quad RI(s) + sLI(s) - Li(0+) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{q_0}{sC} = \frac{V}{s}$$

ونجد من الشروط الابتدائية أن $Li(0+) = 0$ ، وبالتعويض عن ثوابت الدائرة في المعادلة (٢) نحصل على

$$(3) \quad 2I(s) + 1sI(s) + \frac{1}{0.5s}I(s) = \frac{50}{s}$$

$$(4) \quad I(s) = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{(s+1+j)(s+1-j)} \quad \text{أو}$$

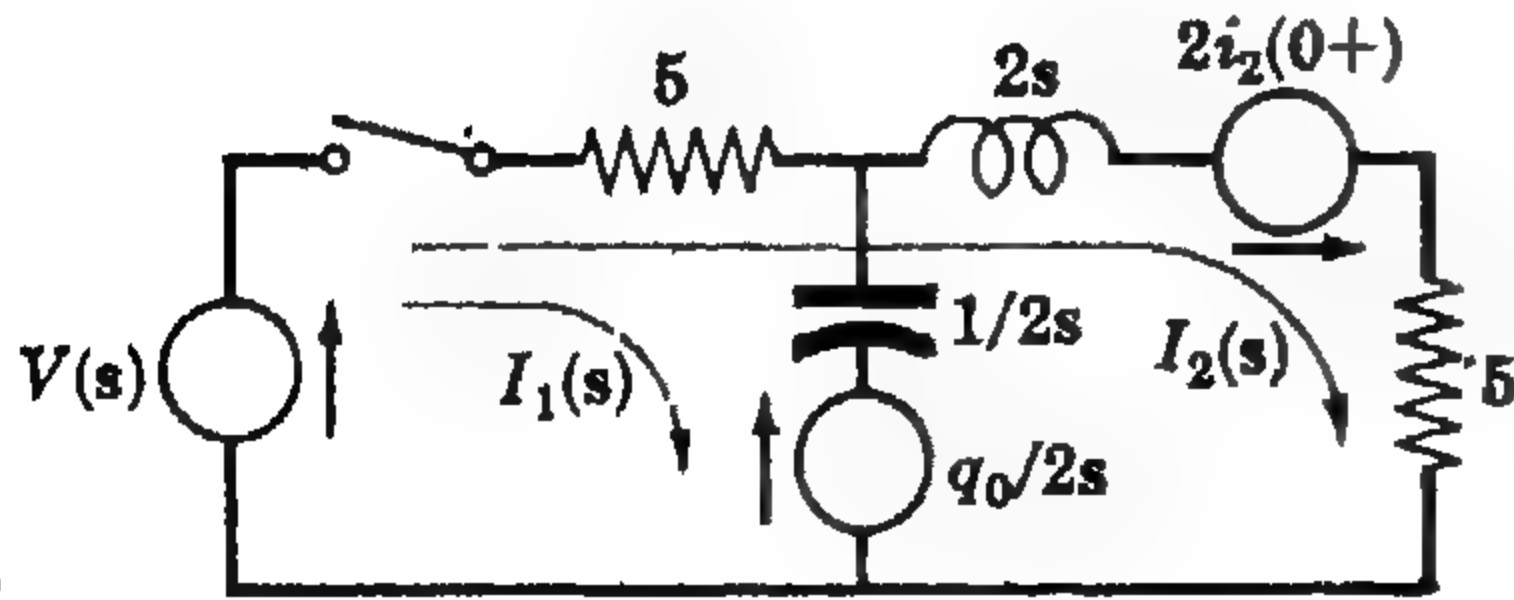
وبفك المعادلة (٤) بطريقة الكسور الجزئية نجد أن

$$(5) \quad I(s) = \frac{j25}{(s+1+j)} - \frac{j25}{(s+1-j)}$$

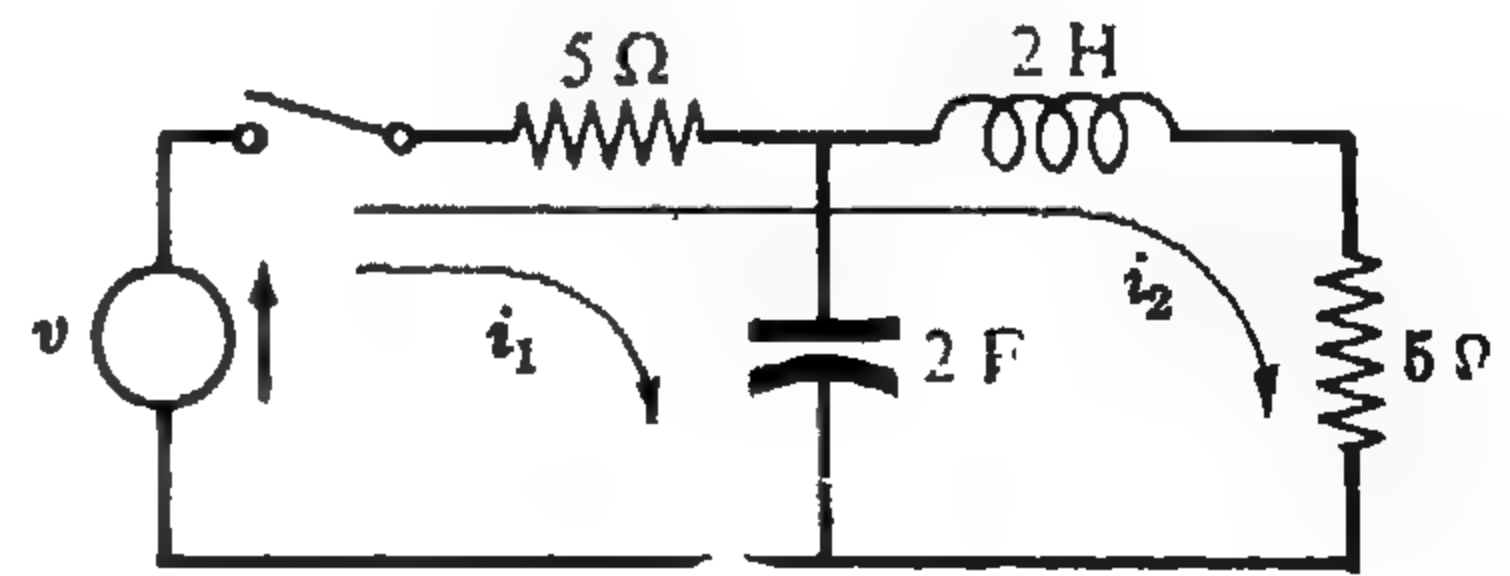
وينتج من معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (٥) التيار بدلالة الزمن

$$i = j25\{e^{(-1-j)t} - e^{(-1+j)t}\} = 50e^{-t} \sin t \text{ amperes}$$

١٧ - ١٣ في الشبكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧ - ١٨ ، اختيرا تيارا الشبكة كما هو موضح في الرسم . اكتب معادلات نطاق s في الصيغة المصفوفية ثم صمم الدائرة المناظرة .



شكل ١٧ - ١٩



شكل ١٧ - ١٨

نكتب مجموعة المعادلات بدلالة الزمن

$$(1) \quad 10i_2 + 2(di_2/dt) + 5i_1 = v \quad \text{و} \quad 5i_1 + \frac{1}{2} \int i_1 dt + 5i_2 = v$$

نأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (١) لنحصل على المعادلات المناظرة في نطاق s

$$(٢) \quad 5I_1(s) + \frac{1}{2s}I_1(s) + \frac{q_0}{2s} + 5I_2(s) = V(s) \quad 10I_2(s) + 2sI_2(s) - 2i_2(0+) + 5I_1(s) = V(s)$$

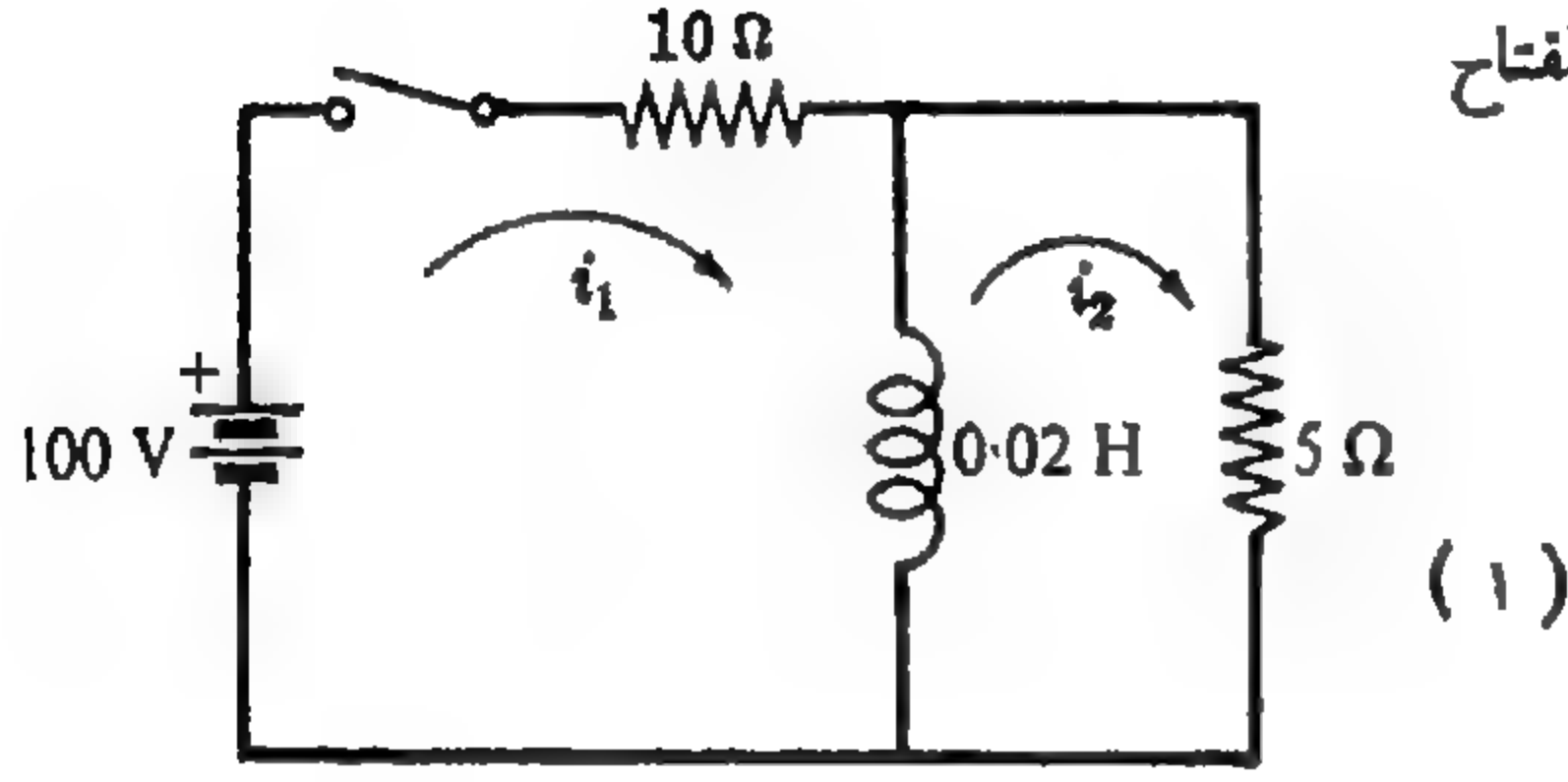
عند كتابة معادلات نطاق s في الصيغة المصفوفية فإنه يمكن تعيين الدائرة في نطاق s بفحص مصفوفات $Z(s)$

و $I(s)$ و $V(s)$ (أنظر الشكل ١٧ - ١٩)

$$\begin{bmatrix} 5 + 1/2s & 5 \\ 5 & 10 + 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(s) - q_0/2s \\ V(s) + 2i_2(0+) \end{bmatrix}$$

١٧ - ١٨ في الشبكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة في

الشكل ١٧ - ٢٠ ، أوجد التيارين الناتجين عند غلق المفتاح



شكل ١٧ - ٢٠

المعادلات بدلالة الزمن للشبكة الكهربائية هي

$$\begin{aligned} 10i_1 + 0.02 \frac{di_1}{dt} - 0.02 \frac{di_2}{dt} &= 100 \\ 0.02 \frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0.02 \frac{di_1}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

بأخذ تحويل لابلاس للمجموعة (١) ،

$$(٢) \quad (10 + 0.02s)I_1(s) - 0.02I_2(s) = 100/s \quad (5 + 0.02s)I_2(s) - 0.02sI_1(s) = 0$$

من المعادلة الثانية في المجموعة (٢) ، نجد أن

$$(٣) \quad I_2(s) = I_1(s) \left(\frac{s}{s + 250} \right)$$

وبالتعويض بها في معادلة نطاق s الأول نحصل على

$$(٤) \quad (10 + 0.02s)I_1(s) - 0.02s \left\{ I_1(s) \left(\frac{s}{s + 250} \right) \right\} = \frac{100}{s}$$

$$(٥) \quad I_1(s) = 6.67 \left\{ \frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right\} \quad \text{أو}$$

والآن بتطبيق طريقة الكسور الجزئية على المعادلة (٥) ، نجد

$$(٦) \quad i_1 = 10 - 3.33e^{-166.7t} \text{ amperes} \quad I_1(s) = \frac{10}{s} - \frac{3.33}{s + 166.7}$$

وأخيراً بالتعويض بالمعادلة (٥) في المعادلة (٣) نحصل على المعادلة في نطاق s

$$(٧) \quad i_2 = 6.67e^{-166.7t} \text{ amperes} \quad I_2(s) = 6.67 \left\{ \frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right\} \frac{s}{s + 250} = 6.67 \left(\frac{1}{s + 166.7} \right)$$

١٧ - ١٨ طبق نظريتي القيمة الابتدائية والنهائية على معادلتى نطاق s ، $I_1(s)$ و $I_2(s)$ في المسألة ١٧ - ١٨

إن معادلتى نطاق s من المسألة ١٧ - ٢٧

$$I_2(s) = 6.67 \left(\frac{1}{s + 166.7} \right) \quad I_1(s) = 6.67 \left\{ \frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right\}$$

والآن تعطى القيمة الابتدائية للتيار i_1 بالعلاقة

$$i_1(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I_1(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[6.67 \left(\frac{s + 250}{s + 166.7} \right) \right] = 6.67 \text{ A}$$

والقيمة النهائية بالعلاقة

$$i_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I_1(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[6.67 \left(\frac{s + 250}{s + 166.7} \right) \right] = 6.67(250/166.7) = 10 \text{ A}$$

والقيمة الابتدائية للتيار i_2 هي

$$i_2(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I_2(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[6.67 \left(\frac{s}{s + 166.7} \right) \right] = 6.67 \text{ A}$$

والقيمة النهائية هي

$$i_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I_2(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[6.67 \left(\frac{s}{s + 166.7} \right) \right] = 0$$

إن فحص دائرة الشكل ١٧ - ٢٠ يحقق كلا من القيم الابتدائية والنهائية السابقة . عند لحظة غلق المفتاح تكون معاوقة الحث لانهائية ويكون التيار $i_1 = i_2 = 100/(10 + 5) = 6.67 \text{ A}$. إذن في الحالة المستقرة يظهر الحث كدائرة مغلقة ، إذن $i_1 = 10 \text{ A}$ و $i_2 = 0$.

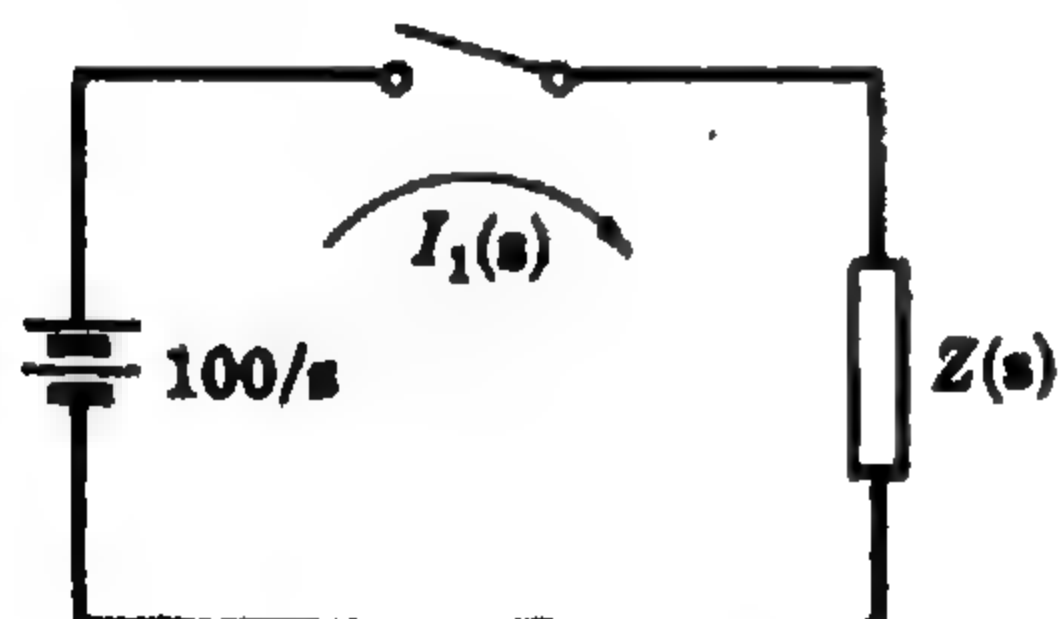
١٧ - ١٩ بالإشارة إلى دائرة الشكل ١٧ - ٢٠ ، أوجد المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية وصمم الدائرة باستخدام هذه المعاوقة .

في نطاق s تكون معاوقة الحث 0.02 H هي $Z(s) = 0.02s$ والتي يمكن معالجتها تماماً مثل $j\omega L$ في الحالة المستقرة الجيبية . وعلى ذلك فإن المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية عند النظر إليها من المصدر تكون

$$(١) \quad Z(s) = 10 + \frac{0.02s(5)}{0.02s + 5} = \frac{0.3s + 50}{0.02s + 5} = 15 \frac{s + 166.7}{s + 250}$$

ويوضح الشكل ١٧ - ٢١ الدائرة المحتوية على المعاوقة المكافئة .

والتيار هو



$$I_1(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{100}{s} \left\{ \frac{s + 250}{15(s + 166.7)} \right\} = 6.67 \left\{ \frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right\}$$

وهذا التعبير مطابق للمعادلة (٥) في المسألة ١٧ - ١٤ ، وعلى ذلك

فالدالة الزمنية هي $i_1 = 10 - 3.33e^{-166.7t} \text{ amperes}$

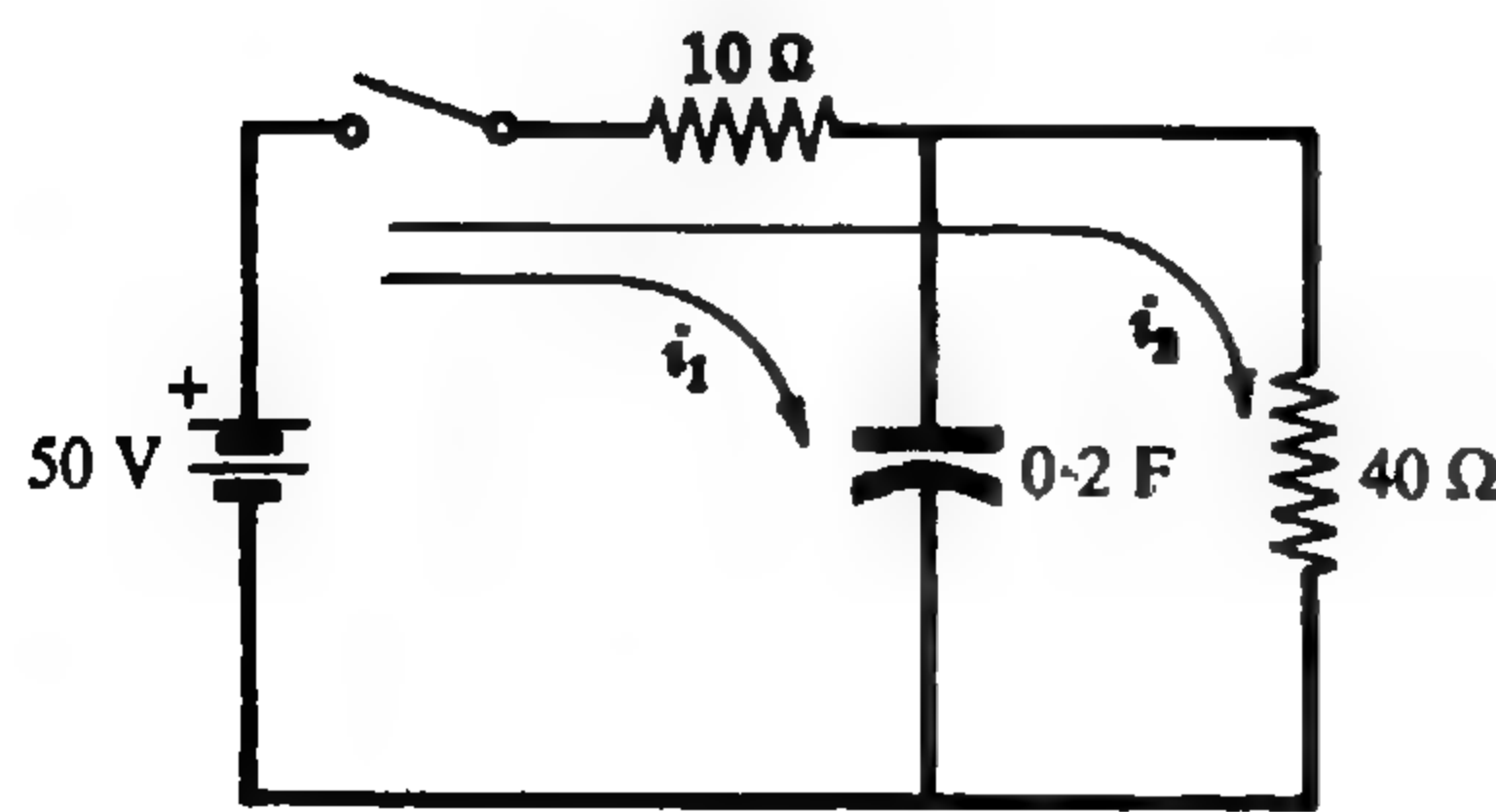
شكل ٢١ - ١٧

١٧ - ١٧ في الشبكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة

في الشكل ١٧ - ٢٢ لا يوجد شحنة ابتدائية على المكثف

أوجد تيارى الشبكة الناتجين عند غلق المفتاح عند $t = 0$.

معادلة الدائرة بدلالة الزمن هي



$$(١) \quad 10i_1 + \frac{1}{0.2} \int i_1 dt + 10i_2 = 50$$

$$50i_2 + 10i_1 = 50$$

شكل ٢٢ - ١٧

والمادلتان المناظرتان في نطاق s هما

$$(٢) \quad 10 I_1(s) + \frac{1}{0.2s} I_1(s) + 10 I_2(s) = 50/s \cdot 50 I_2(s) + 10 I_1(s) = 50/s$$

وفي الصيغة المصفوفية هما

$$\begin{bmatrix} 10 + 1/0.2s & 10 \\ 10 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/s \\ 50/s \end{bmatrix}$$

$$I_1(s) = 5/(s + 0.625) \text{ amperes} \quad \text{ومنها} \quad i_1 = 5e^{-0.625t} \text{ amperes}$$

لإيجاد i_2 نعوض عن قيمة i_1 في المعادلة الثانية لمعادلتى نطاق الزمن (١) .

$$i_2 = 1 - e^{-0.625t} \text{ amperes} \quad \text{و} \quad 50i_2 + 10(5e^{-0.625t}) = 50$$

١٧ - ١٨ بالإشارة إلى المسألة ١٧ - ١٧ أوجد المعاوقة المكافئة في نطاق s للشبكة الكهربائية وعين التيار الكلي ثم أوجد تيارى الفرعين وذلك باستخدام قاعدة تقسيم التيار .

المعاوقة المكافئة في نطاق s هي

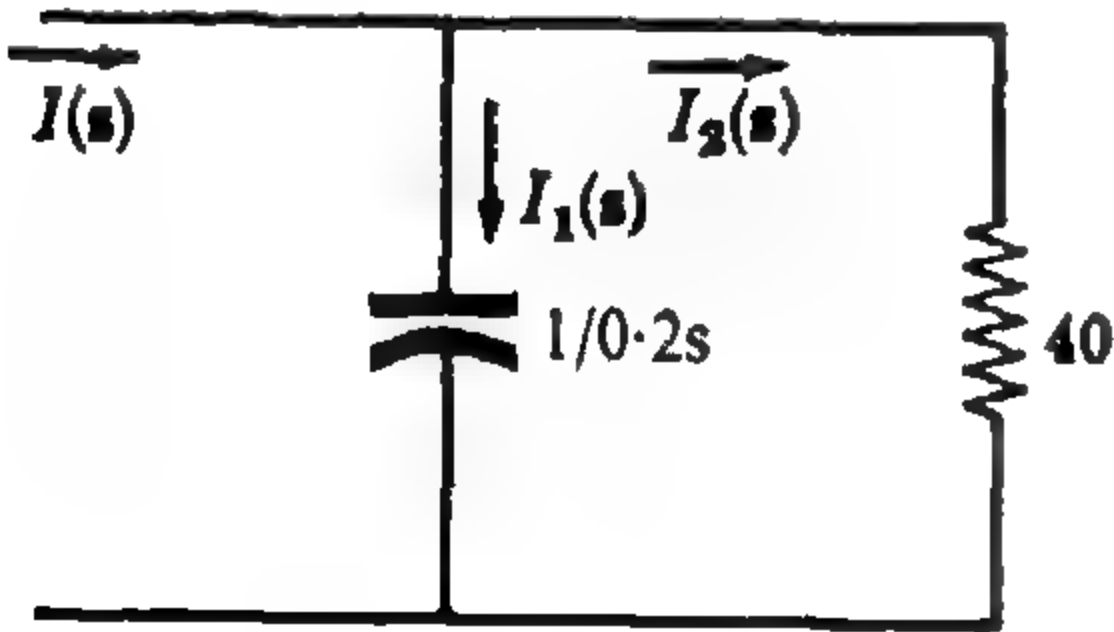
$$(١) \quad Z(s) = 10 + \frac{40(1/0.2s)}{40 + 1/0.2s} = \frac{80s + 50}{8s + 1} = 10 \frac{s + 5/8}{s + 1/8}$$

ويوضح الشكل ١٧ - ٢٢ الدائرة المكافئة ، والتيار الناتج هو :

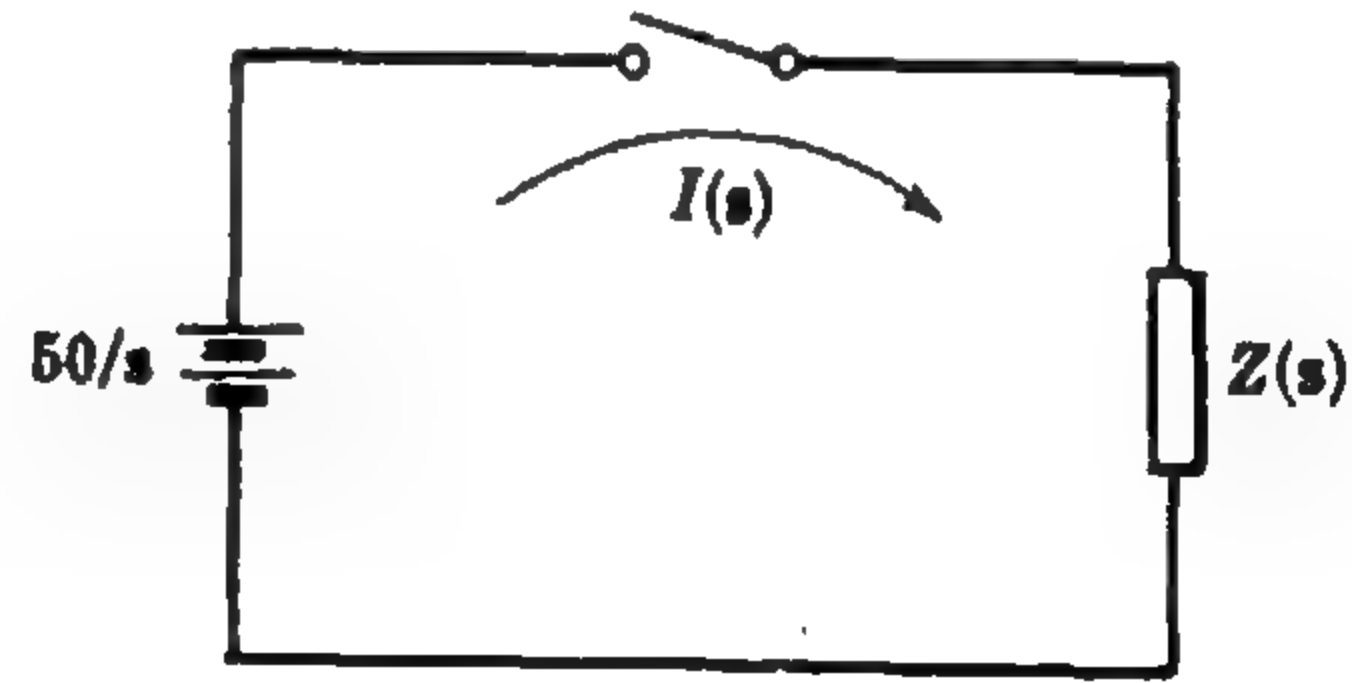
$$(٢) \quad I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s} \left\{ \frac{s + 1/8}{10(s + 5/8)} \right\} = 5 \frac{s + 1/8}{s(s + 5/8)}$$

وبالتعبير عن المعادلة (٢) بصيغة كسور جزئية نجد :

$$I(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s + 5/8} \text{ amperes} \quad \text{ومنها نجد أن} \quad i = 1 + 4e^{-5t/8}$$



شكل ١٧ - ٢٤



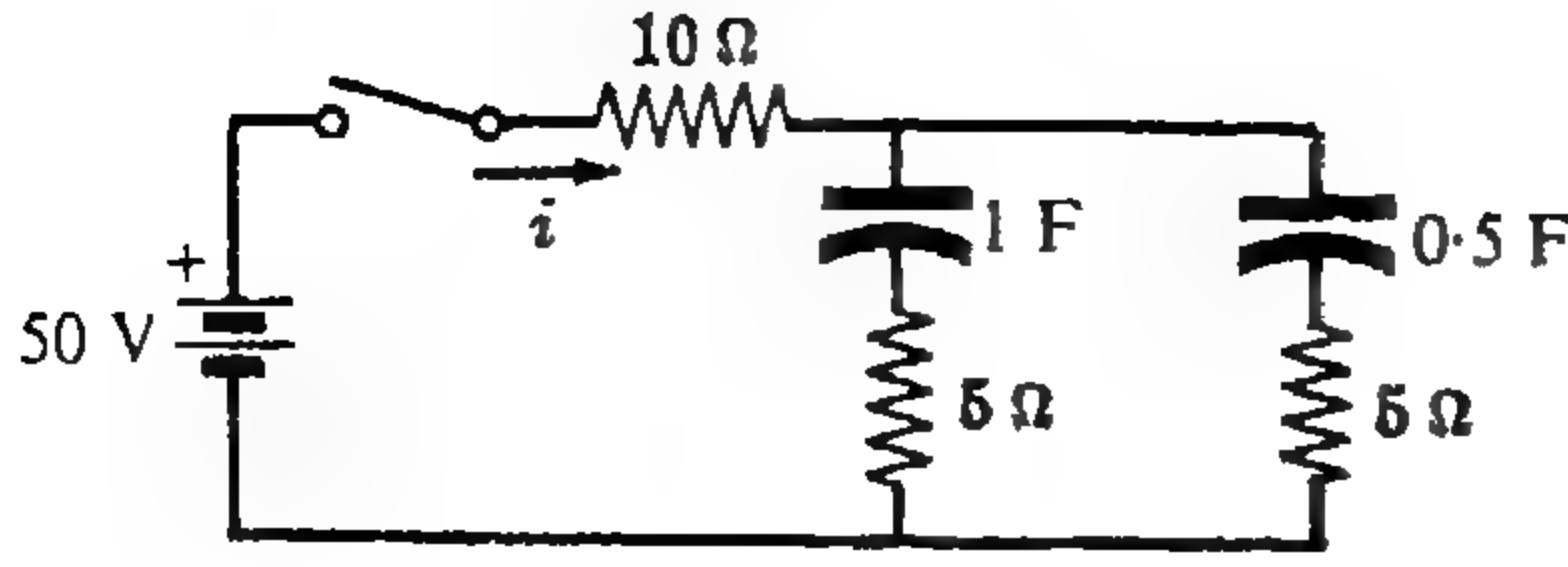
شكل ١٧ - ٢٣

والآن يمكن الحصول على تيارى الفرعين $I_1(s)$ و $I_2(s)$ باستخدام قاعدة تقسيم التيار . وبالإشارة إلى

الشكل ١٧ - ٢٤ نجد لدينا

$$I_1(s) = I(s) \left(\frac{40}{40 + 1/0.2s} \right) = \frac{5}{s + 5/8} \text{ and } i_1 = 5e^{-0.625t} \text{ amperes}$$

$$I_2(s) = I(s) \left(\frac{1/0.2s}{40 + 1/0.2s} \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 5/8} \text{ and } i_2 = 1 - e^{-0.625t} \text{ amperes}$$



شكل ١٧ - ٢٥

١٧ - ١٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧ - ٢٥ أغلق المفتاح عند $t = 0$ وكان لا يوجد شحنة ابتدائية على أى من المكثفين أوجد التيار الناتج ، كما هو موضح في الرسم .

يوجد للشبكة الكهربائية معاوقة مكافئة في نطاق s

(١)
$$Z(s) = 10 + \frac{(5 + 1/s)(5 + 1/0.5s)}{(10 + 1/s + 1/0.5s)} = \frac{125s^2 + 45s + 2}{s(10s + 3)}$$
 هي

والتيار هو :

(٢)
$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s} \frac{s(10s + 3)}{(125s^2 + 45s + 2)} = \frac{4(s + 0.3)}{(s + 0.308)(s + 0.052)}$$

وبالتعويض عن التيار في نطاق s بدلالة كسور جزئية نجد :

$$i = \frac{1}{8} e^{-0.308t} + \frac{31}{8} e^{-0.052t} \text{ amperes} \quad , \quad I(s) = \frac{1/8}{s + 0.308} + \frac{31/8}{s + 0.052}$$

١٧ - ٢٥ طبق نظرية القيمة الابتدائية والنهائية على التيار في نطاق s في المسألة ١٧ - ١٩ .

بما أن : $I(s) = \frac{1/8}{s + 0.308} + \frac{31/8}{s + 0.052}$ فإن التيار الابتدائي هو

$$i(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{s}{s + 0.308} \right) + \frac{31}{8} \left(\frac{s}{s + 0.052} \right) \right] = 4 \text{ A}$$

والتيار النهائي هو

$$i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{s}{s + 0.308} \right) + \frac{31}{8} \left(\frac{s}{s + 0.052} \right) \right] = 0$$

بفحص الدائرة المعطاة في الشكل ١٧ - ٢٥ يتبين لنا أن المقاومة الكلية للدائرة في البداية هي $R = 10 + 5(5)/10 = 12.5$ وعلى هذا فإن : $i(0) = 50/12.5 = 4 \text{ A}$ وفي الحالة المستقرة يكون كل من المكثفين قد شحن لجهد مكافئ يساوى 50 volts والتيار يساوى صفراً .

مسائل إضافية

١٧ - ٢١ أوجد تحويل لابلاس لكل دالة مما يأتي :

(أ) $f(t) = At$ (ب) $f(t) = e^{-at} \sin \omega t$ (ج) $f(t) = \cosh \omega t$ (د) $f(t) = e^{-at} \sinh \omega t$

(هـ) $f(t) = \sinh \omega t$ (و) $f(t) = te^{-at}$ (ز) $f(t) = e^{-at} \sinh \omega t$

الجواب (أ) - (هـ) أنظر الجدول ١٧ - ١ . (و) (ز) $\frac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2}$ (ف)

٢٢ - ٢٧ أوجد معكوس تحويل لابلاس لكل دالة مما يأتي :

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 6s + 9)} \quad (د) \quad F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+1)} \quad (أ)$$

$$F(s) = \frac{2s}{(s^2 + 4)(s+5)} \quad (ز) \quad F(s) = \frac{s+5}{s^2 + 2s + 5} \quad (ح) \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 12} \quad (ب)$$

$$F(s) = \frac{2s+4}{s^2 + 4s + 13} \quad (و) \quad F(s) = \frac{5s}{s^2 + 3s + 2} \quad (ج)$$

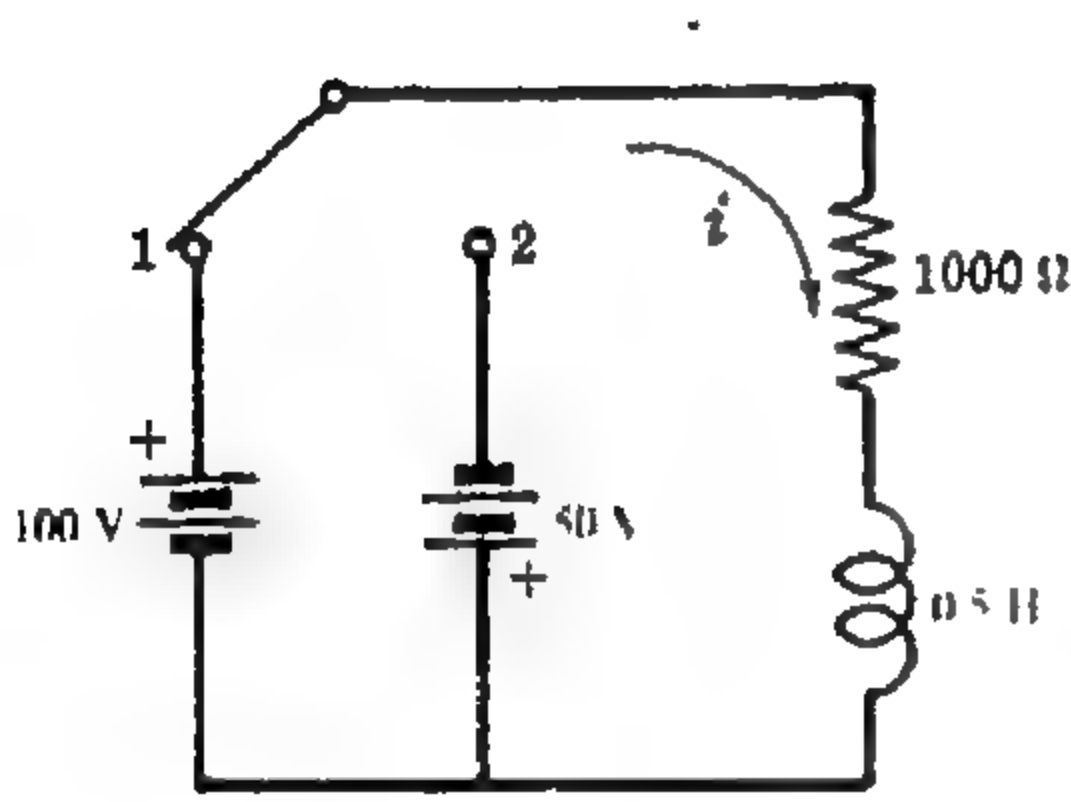
$$\frac{10}{29} \cos 2t + \frac{4}{29} \sin 2t - \frac{10}{29} e^{-5t} \quad (ز) \quad \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-3t} - t e^{-3t} \quad (د) \quad 2e^{-2t} - e^{-t} \quad (أ) :$$

$$e^{-t}(\cos 2t + 2 \sin 2t) \quad (ح) \quad e^{-3t} - e^{-4t} \quad (ب)$$

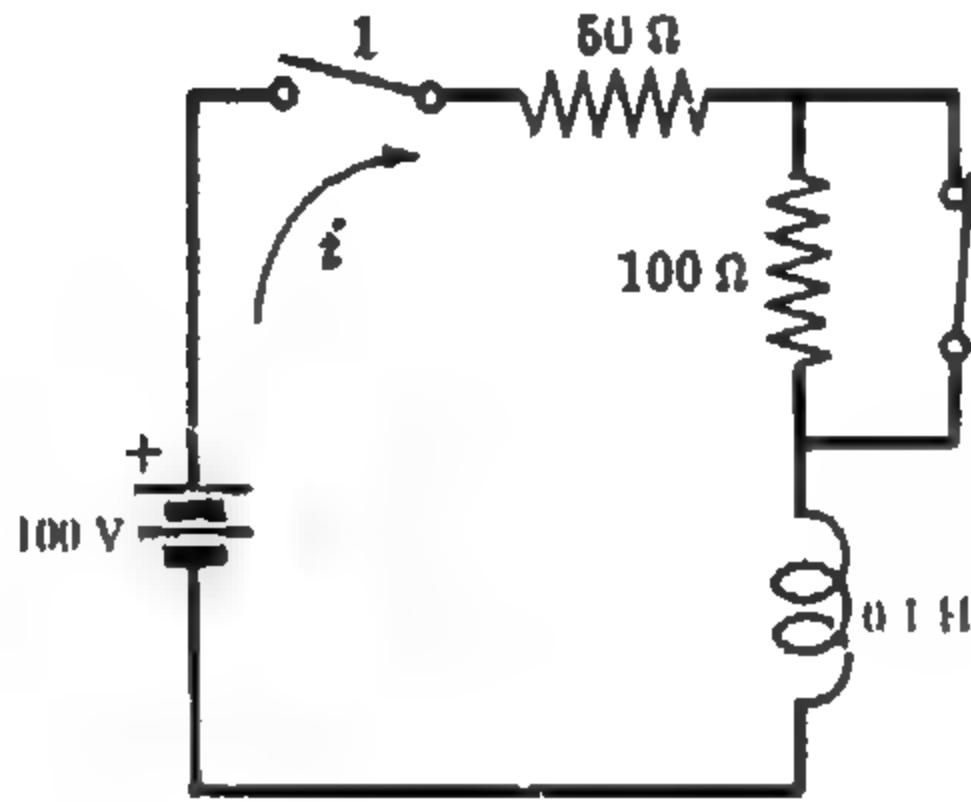
$$2e^{-2t} \cos 3t \quad (و) \quad 10e^{-2t} - 5e^{-t} \quad (ج)$$

٢٣ - ١٧ دائرة تتكون من RL فيها $R = 10 \Omega$ و $L = 0.2 H$ يؤثر عليها جهد ثابت $V = 50 \text{ volts}$ عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج باستخدام طريقة تحويل لابلاس. الجواب : $i = 5 - 5e^{-50t} \text{ amperes}$

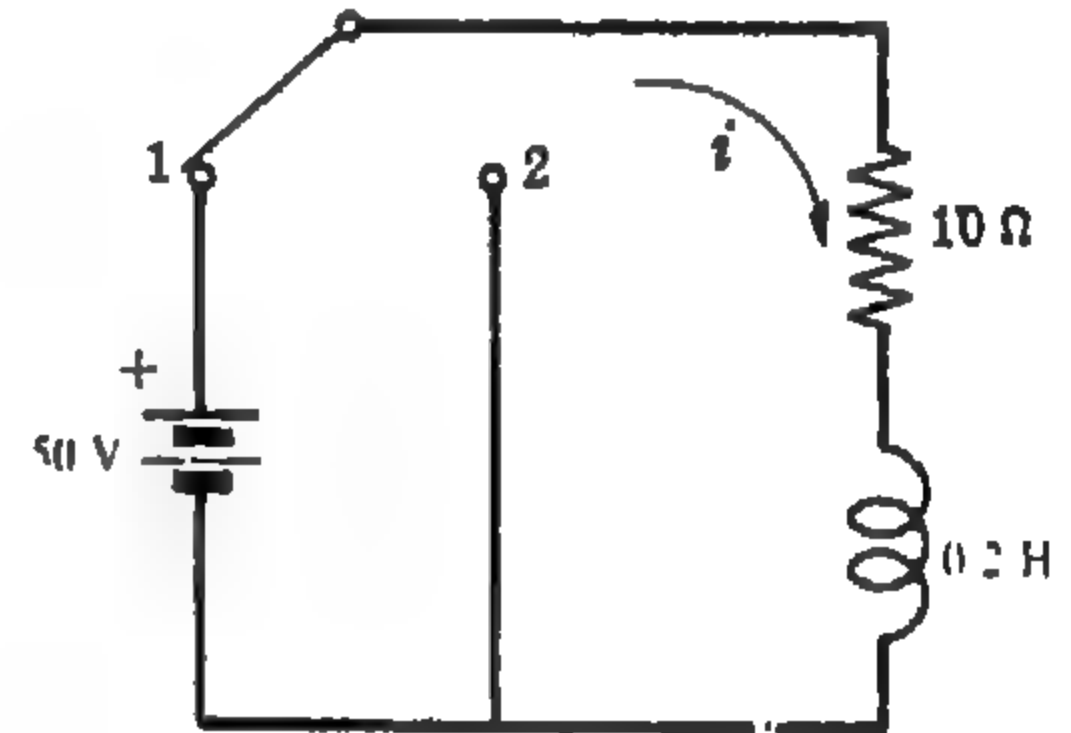
٢٤ - ١٧ في دائرة التوالي RL الموضحة في الشكل ١٧ - ٢٦ كان المفتاح عند الوضع 1 لفترة كافية للوصول إلى الحالة المستقرة ثم تحرك المفتاح إلى الوضع 2 عند $t = 0$. أوجد التيار. الجواب : $i = 5e^{-50t} \text{ amperes}$



شكل ١٧ - ٢٨



شكل ١٧ - ٢٧



شكل ١٧ - ٢٦

٢٥ - ١٧ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٧ - ٢٧ ، أغلق المفتاح 1 عند $t = 0$ ثم فتح المفتاح 2 عند $t = t' = 4 \text{ m sec}$. أوجد التيار العابر في الفترتين $0 < t < t'$ و $t' < t$.

$$i = 2(1 - e^{-500t}) \text{ amperes}, i = 1.06e^{-1500(t-t')} - 0.667 \text{ amperes} \quad \text{الجواب :}$$

٢٦ - ١٧ في دائرة التوالي RL الموضحة في الشكل ١٧ - ٢٨ أغلق المفتاح إلى الوضع 1 عند $t = 0$ وعند $t = t' = 50 \mu \text{ sec}$ تحرك المفتاح إلى الوضع 2. أوجد التيار العابر في الفترتين $0 < t < t'$ و $t > t'$.

$$i = 0.1(1 - e^{-2000t}) \text{ amperes}, i = 0.06e^{-2000(t-t')} - 0.05 \text{ amperes} \quad \text{الجواب :}$$

٢٧ - ١٧ دائرة توال RC فيها $R = 10 \Omega$ و $C = 4 \mu F$ لها شحنة ابتدائية $q_0 = 800 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$ على المكثف عند الزمن الذي أغلق عنده المفتاح ، فإذا أثرنا عليها بجهد ثابت $V = 100 \text{ volts}$ فأوجد التيار العابر الناتج إذا كانت الشحنة (أ) لها نفس قطبية الشحنة التي يولدها المصدر . (ب) لها قطبية معاكسة .

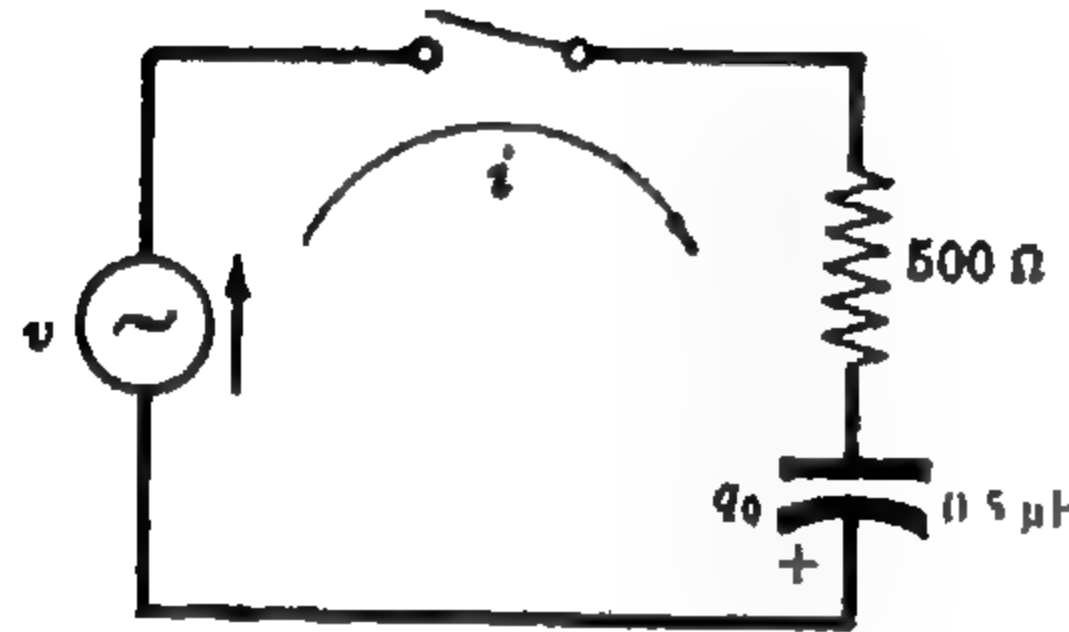
$$i = 30e^{-25 \times 10^3 t} \text{ amperes} \quad (ب) \quad \text{و} \quad i = -10e^{-25 \times 10^3 t} \text{ amperes} \quad (أ) \quad \text{الجواب :}$$

٢٨-١٧ دائرة توالي RC فيها $R = 1000 \Omega$ و $C = 20 \mu F$ لها شحنة ابتدائية q_0 على المكثف عند الزمن الذي أغلق عنده المفتاح ، فإذا أثرنا عليها بجهد ثابت $V = 50$ ، وكان التيار الناتج هو $i = 0.075e^{-50t}$ amperes فأوجد الشحنة q_0 وعين قطبيتها .

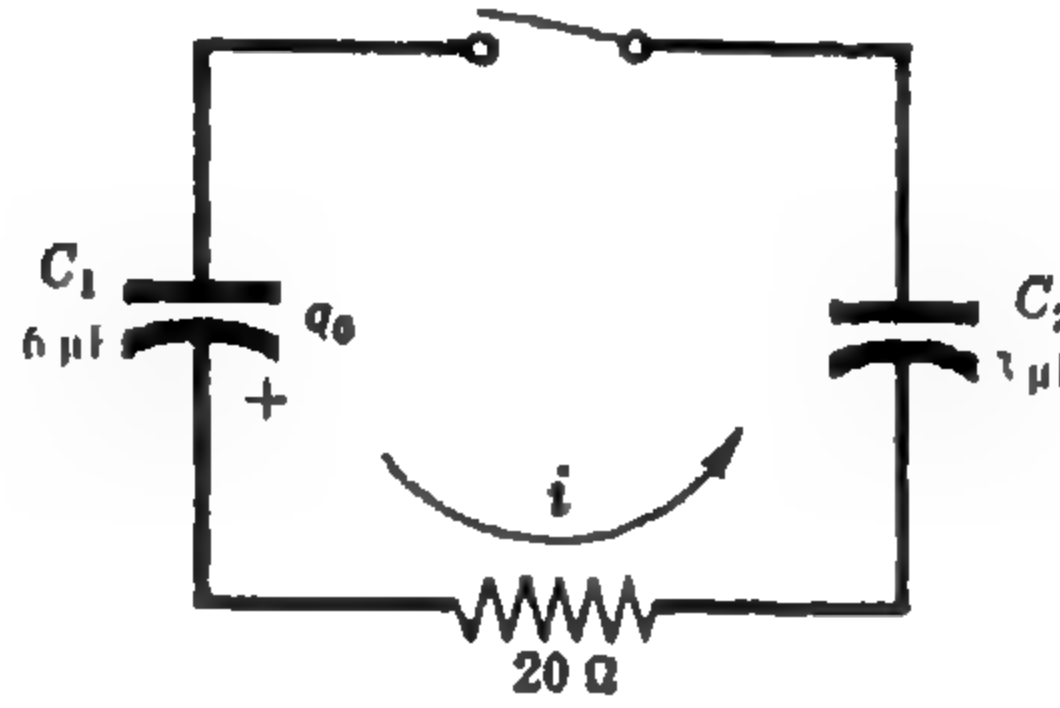
الجواب : 10^{-5} coulombs ، 500 بقطبية عكس قطبية الشحنة التي يولدها المصدر .

٢٩-١٧ في دائرة RC الموضحة في الشكل ٢٩-١٧ أغلق المفتاح إلى الموضع ١ عند $t = 0$ وعند $t = t' = 1$ TC تحرك المفتاح إلى الموضع ٢ . أوجد التيار العابر في الفترتين $0 < t < t'$ و $t > t'$.

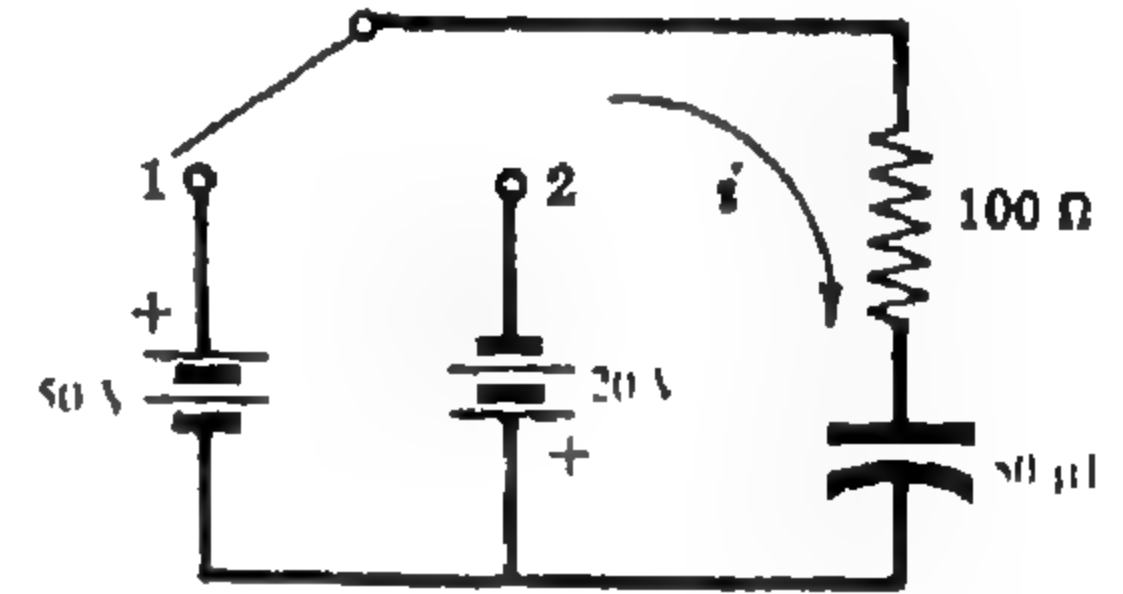
الجواب : $i = 0.5e^{-200t}$ amperes, $i = 0.516e^{-200(t-t')}$ amperes



شكل ٢٨-١٧



شكل ٢٩-١٧



شكل ٣٠-١٧

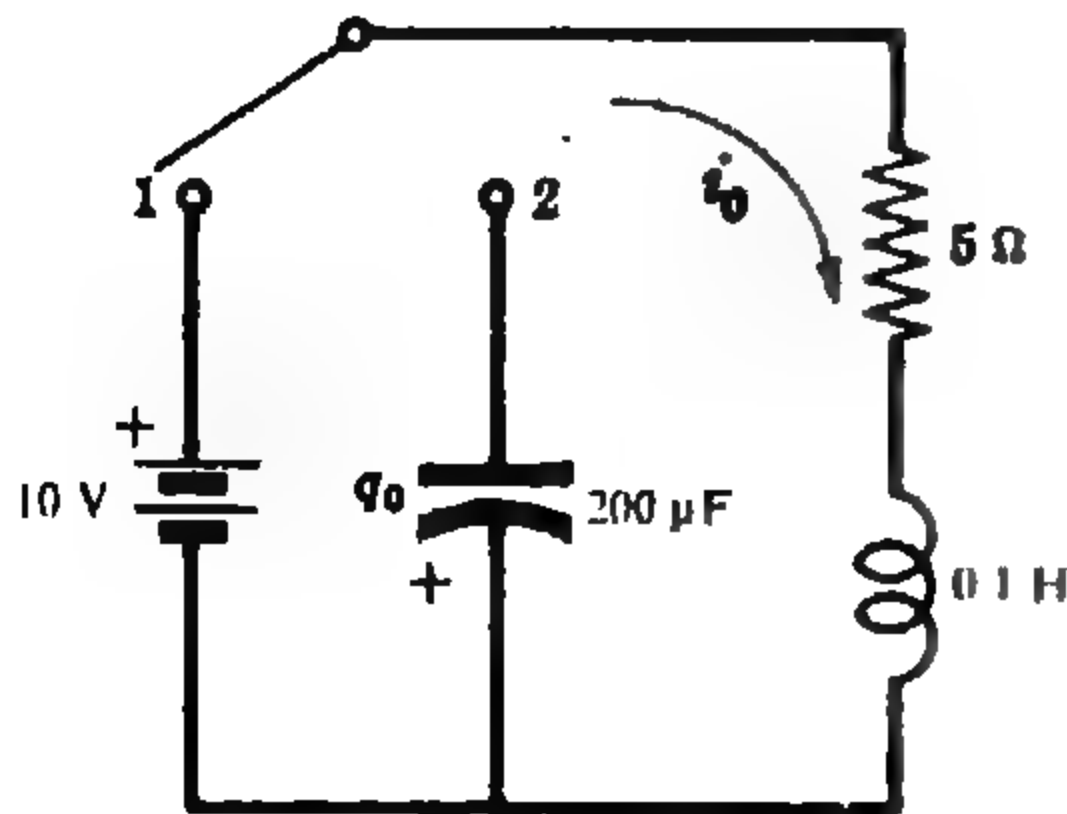
٣٠-١٧ في الدائر الموضحة في الشكل ٣٠-١٧ ، كان على المكثف C_1 شحنة ابتدائية $q_0 = 300 \times 10^{-6}$ coulombs عند الزمن الذي أغلق عنده المفتاح . أوجد التيار العابر الناتج . الجواب : $i = 2.5e^{-2.5 \times 10^4 t}$ amperes

٣١-١٧ في دائرة التوالي RC الموضحة في الشكل ٣١-١٧ كانت الشحنة الابتدائية على المكثف $q_0 = 25 \times 10^{-6}$ coulombs والجهد الجيبي المؤثر $v = 100 \sin(1000t + \phi)$ volts . أوجد التيار العابر الناتج إذا أغلق المفتاح عند الزمن الذي كانت عنده $\phi = 30^\circ$. الجواب : $i = 0.1535e^{-4000t} + 0.0484 \sin(1000t + 106)$ amperes

٣٢-١٧ دائرة توالي RLC فيها $R = 5 \Omega$ و $L = 0.1$ H و $C = 500 \mu F$ يؤثر عليها جهد ثابت $V = 10$ volts عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج . الجواب : $i = 0.72e^{-25t} \sin 139t$ amperes

٣٣-١٧ في دائرة التوالي RLC الموضحة في الشكل ٣٣-١٧ كانت الشحنة الابتدائية على المكثف $q_0 = 1$ mC وظل المفتاح في الموضع ١ لمدة تكفي للوصول إلى الحالة المستقرة . أوجد التيار العابر الذي ينتج عندما يتحرك المفتاح من الموضع ١ إلى الموضع ٢ عند $t = 0$.

الجواب : $i = e^{-25t} (2 \cos 222t - 0.45 \sin 222t)$ amperes



الجواب : $i = -0.666e^{-100t} + 0.670e^{-24.8t} - 0.004e^{-0.2t}$ amperes

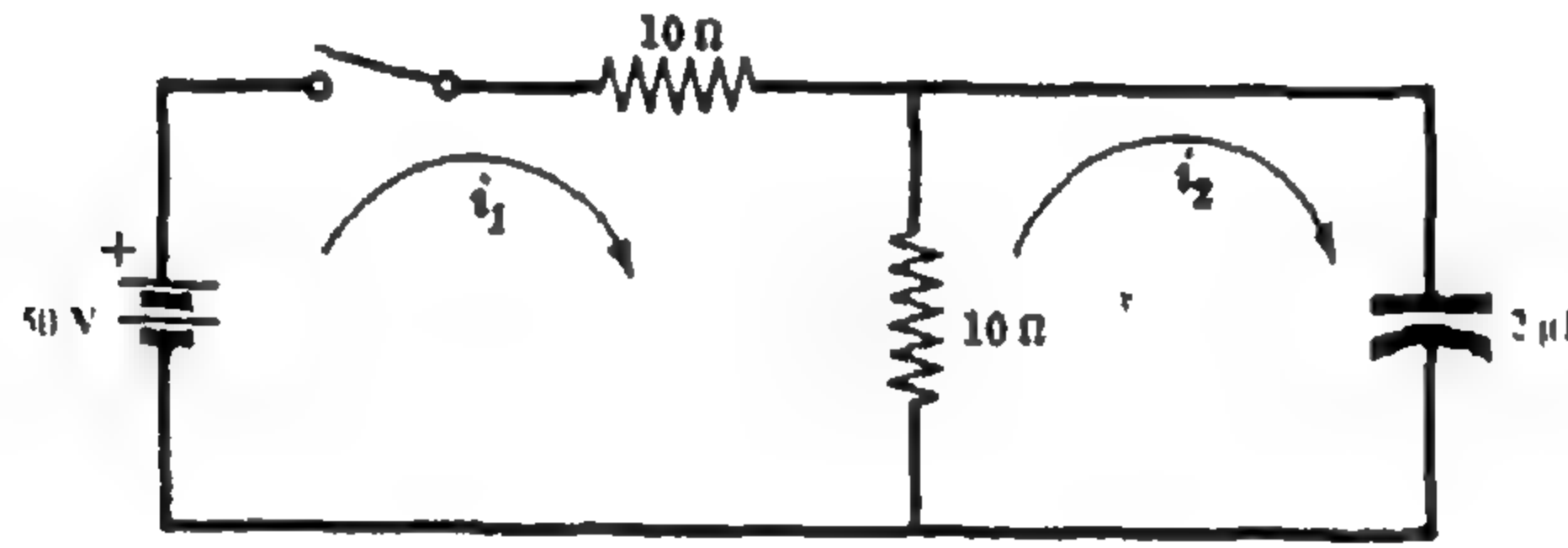
شكل ٣٣-١٧

٣٤-١٧ دائرة توالي RLC فيها $R = 5 \Omega$ و $L = 0.2$ H و $C = 1$ F يؤثر عليها مصدر جهد $v = 10e^{-100t}$ volts عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج .

٣٥ - ١٧ دائرة توالى RLC فيها $R = 200\Omega$ و $L = 0.5H$ و $C = 100\mu F$ لها مصدر جهد جيبي $v = 300 \sin(500t + \phi)$ volts فإذا أغلق المفتاح عند الزمن الذى كانت عنده $\phi = 30^\circ$ فأوجد التيار العابر الناتج .
 الجواب : $i = 0.517e^{-341.4t} - 0.197e^{-58.6t} + 0.983 \sin(500t - 19)$ amperes

٣٦ - ١٧ دائرة توالى RLC فيها $R = 5\Omega$ و $L = 0.1H$ و $C = 500\mu F$ لها مصدر جهد جيبي $v = 100 \sin(250t + \phi)$ volts فإذا أغلق المفتاح عند الزمن الذى كانت عنده $\phi = 0^\circ$ فأوجد التيار الناتج .
 الجواب : $i = e^{-25t} (5.42 \cos 139t - 1.89 \sin 139t) - 5.65 \sin(250t - 73.6^\circ)$ amperes

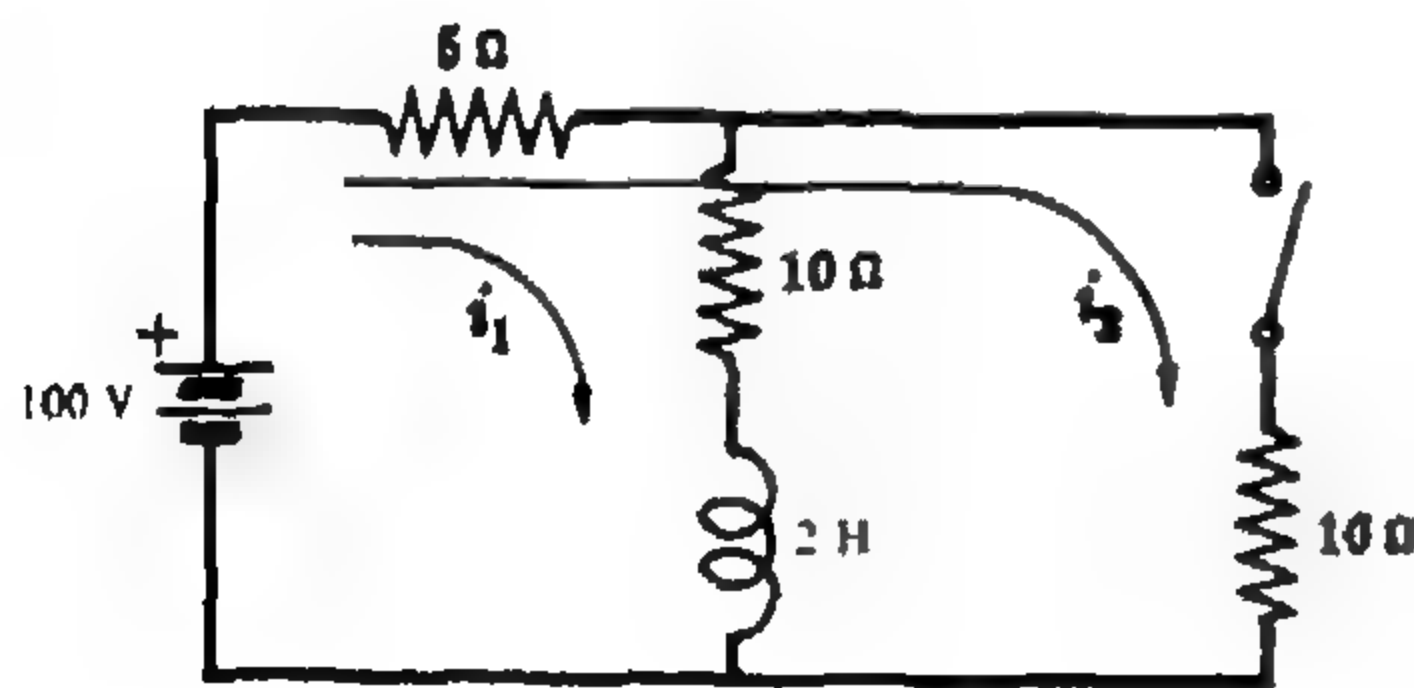
٣٧ - ١٧ في الشبكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٣٣ - ١٧ اختيرت التيارات كما في الرسم . اكتب المعادلات بدلالة الزمن ثم حولها إلى المعادلات المناظرة في نطاق s ثم أوجد التيارين العابرين i_1 و i_2
 الجواب : $i_1 = 2.5(1 + e^{-10^5 t})$ amperes, $i_2 = 5e^{-10^5 t}$ amperes



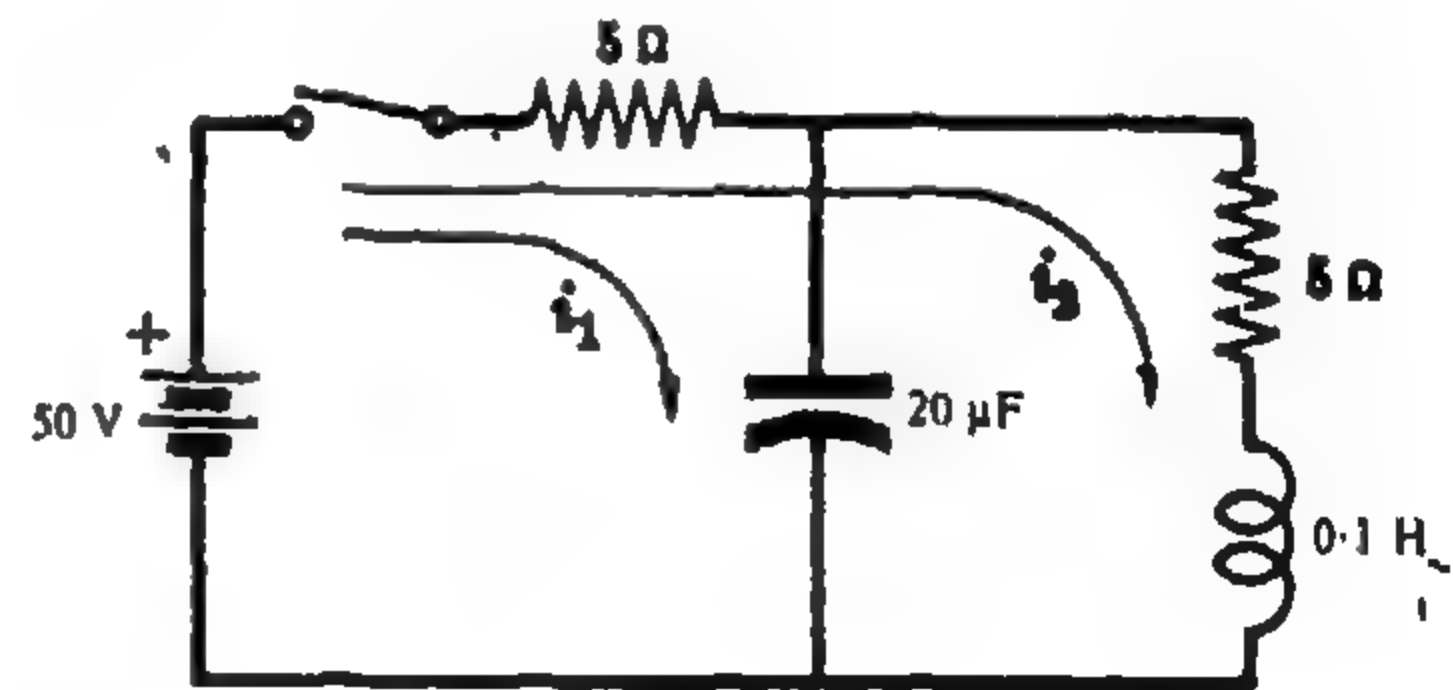
شكل ٣٣ - ١٧

٣٨ - ١٧ اوجد في الشبكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٣٤ - ١٧ التيارين i_1 و i_2 الناتجين عند غلق المفتاح عند $t = 0$.

الجواب : $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t}$ amperes, $i_2 = 5.05e^{-100t} + 5 + 0.05e^{-9950t}$ amperes



شكل ٣٥ - ١٧



شكل ٣٤ - ١٧

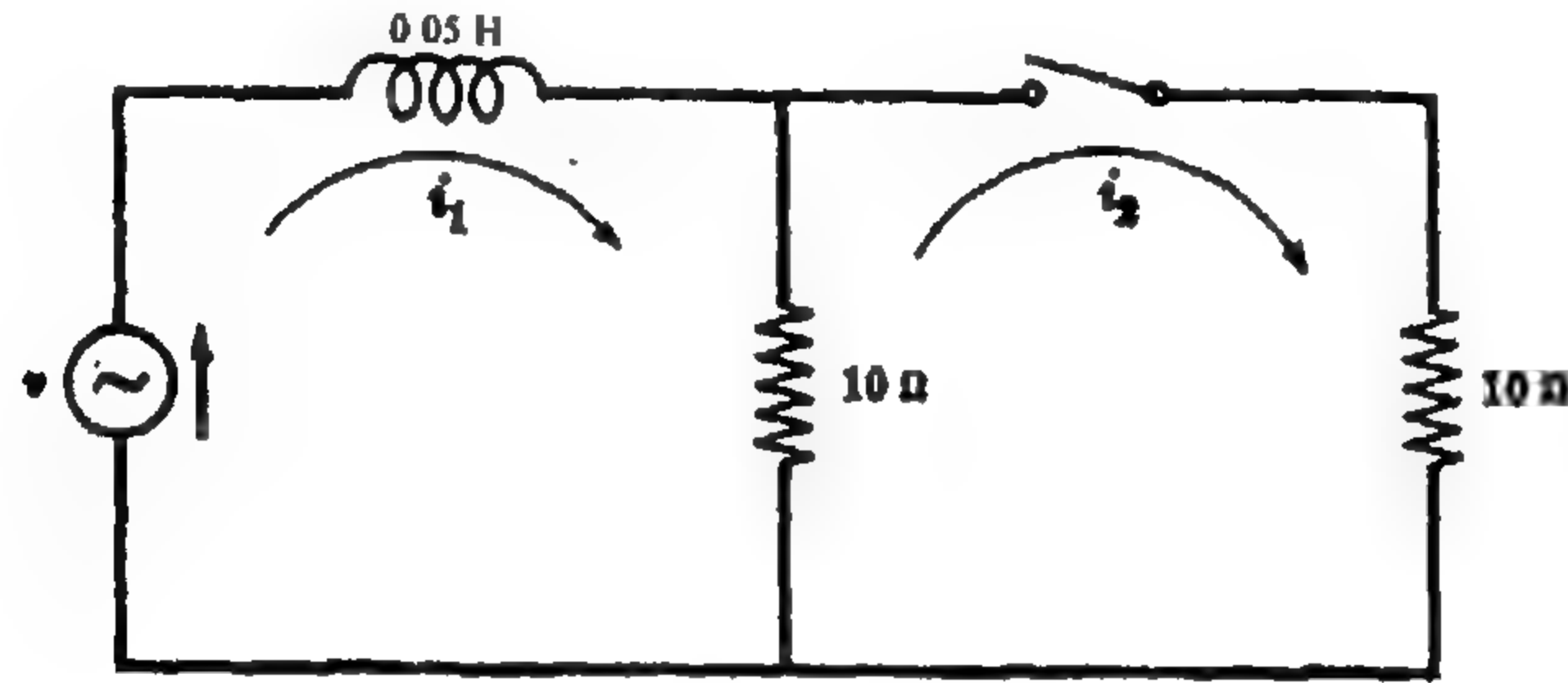
٣٩ - ١٧ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٣٥ - ١٧ يمرر مصدر الجهد 100 volts تيارا متصلا في المسار المغلق الأول . فإذا أغلق المفتاح عند $t = 0$ وبذلك تتصل المقاومة 10Ω على التوازي مع الفرع الذى يتكون من عنصرين على التوالى هما $R = 10\Omega$ و $L = 2H$. فأوجد التيارين الناتجين .

الجواب : $i_1 = 1.67e^{-6.67t} + 5$ amperes, $i_2 = -0.555e^{-6.67t} + 5$ amperes

١٧ - ٤٠ يؤثر على الشبكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧ - ٣٦ مصدر جهد جيبي $v = 100 \sin(200t + \phi)$ volts فإذا أغلق المفتاح عند $t = 0$ وكانت الزاوية $\phi = 0$ وبذلك تتصل المقاومة 10Ω الثانية على التوازي مع المقاومة الأولى . فأوجد تيارى الشبكة الناتجين بالاتجاه الموضح في الرسم .

الجواب :

$$i_1 = 3.01e^{-100t} + 8.96 \sin(200t - 63.4^\circ) \text{ amperes}, i_2 = 1.505e^{-100t} + 4.48 \sin(200t - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$



شكل ١٧ - ٣٦

قائمة بالمصطلحات GLOSSARY

Chapter 1

الفصل الاول :

Parameter
S.I. System
Dimensional Constant
Permeability Constant
Coulomb's Law
Permittivity Constant
Electromotive Force (emf)
Generator
Power
Periodic Function
Period
Energy
Resistor
Inductance
Capacitor
Pure
Resistance
Coil
Self Inductance
Capacitance
Kirchhoff's Law
Network
Instantaneous
Square Wave
Sawtooth Function
Waveform
Discontinuous
Sinusoidal Function

بارامتر - متغير
نظام مترى دولى
ثابت أبعاد
ثابت نفاذية
قانون كولوم
ثابت السماحية
قوة دافعة كهربية
مولد
قدرة
دالة دورية
دورة
طاقة
مقاوم
حث
مكثف
نقى
مقاومة
ملف
حث ذاتى
سعة
قانون كيرشوف
شبكة كهربائية
لحظى
دالة مربعة
دالة سن منشار
شكل موجى
غير متصل
دالة جيبيية

Chapter 2

الفصل الثاني :

| | |
|-------------------------|---------------------|
| Average Value | قيمة متوسطة |
| Effective Value | قيمة فعالة |
| Infinite | غير منتهى |
| Power Series | متسلسلة قوى |
| Root Mean Square Value | جذر متوسط مربع قيمة |
| Form Factor | عامل الشكل |
| Half Cycle Average | متوسط نصف الدورة |
| Independent Variable | متغير مطلق |
| Triangular Wave | موجة مثلثة الشكل |
| Half-Wave Rectification | تقويم نصف موجى |
| Full-Wave Rectification | تقويم موجى كامل |
| Delayed | معوقة |
| Graphical Solution | حل تخطيطى |
| Amplitude | سعة |
| Harmonic | توافق |
| Fundamental Harmonic | توافق أساسى |
| Rise Time | زمن الارتفاع |
| Radian | زاوية نصف قطرية |
| Phase | طور |

Chapter 3

الفصل الثالث :

| | |
|------------------------------|------------------------|
| Sinusoidal Current | تيار جيبى |
| Integrodifferential Equation | معادلة تكاملية تفاضلية |
| Transient Current | تيار عابر |
| Steady Current | تيار مطرد أو مستقر |
| Impedance | معاوقة |
| Phase Angle | زاوية الطور |
| Displacement | إزاحة |
| Lead | سابق |
| Lag | لاحق |
| Resonance | رنين |
| Frequency | ذبذبة |
| Parallel | توازى |
| Reactance | ممانعة |

Chapter 4

الفصل الرابع :

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| Complex Numbers | أعداد مركبة |
| Real Numbers | أعداد حقيقية |
| Rational Numbers | أعداد جزرية |
| Irrational Numbers | أعداد صماء |
| Real Number Line | خط العدد الحقيقي |
| Imaginary | تخيل |
| Imaginary Number Line | خط العدد التخيل |
| Polar Representation | تمثيل قطبي |
| Modulus | مقياس |
| Argument | الإزاحة الزاوية |
| Stienmetz | شكل شتينميتر |
| Rectangular Form | صيغة أحداثيات متعامدة |
| Trigonometric Form | صيغة حساب مثلثات |
| Conjugate | مترافق |
| Binomial | ذات حدين |
| Numerator | بسط |
| Denominator | مقام |
| Slide Rule | مسطرة حاسبة |
| Cursor | الجزء المنزلق |
| Hairline | خط شعري |

Chapter 5

الفصل الخامس :

| | |
|----------------------|-----------------------|
| Phasor Notation | ترميز طورى (أو مطاور) |
| Waveform | شكل موجى |
| Periodic | دورى |
| Fourier Method | طريقة فورير |
| Euler's Formula | صيغة إيلر |
| Particular Solution | حل خاص |
| Polar Form | شكل قطبي |
| Angular Velocity | سرعة زاوية |
| Exponential Function | دالة أسية |
| Shift Angle | زاوية تزحزح |
| Time Domain | مجال الزمن |

| | |
|------------------|-------------------|
| Ohm's Law | قانون أوم |
| Frequency Domain | مجال الذبذبة |
| Subscript | رمز سفلى (دليل) |
| Locus | محل هندسى |

Chapter 6

الفصل السادس :

| | |
|----------------|----------------------|
| Admittance | مساحمة |
| Reciprocal | معكوس |
| Conductance | مواصلة |
| Susceptance | تقبلية |
| Polarity | القطبية |
| Active Circuit | دائرة فعالة (نشطة) |
| Bridge | قنطرة |

Chapter 7

الفصل السابع :

| | |
|---------------------|-------------------------------|
| Power | قدرة |
| Power Factor | عامل القدرة |
| Alternator | مولد التيار المتردد |
| Passive | خامل (غير فعال) |
| Network | شبكة |
| Instantaneous Power | قدرة لحظية |
| Energy | طاقة |
| Apparent Power | قدرة ظاهرية |
| Reactive Power | قدرة مفاعلية |
| Quadrature | مركبة عمودية أو مركبة تربيعية |
| Load | حمل |
| Synchronous Motor | محرك تزامنى |
| Line Currant | تيار الخط |

Chapter 8

الفصل الثامن :

| | |
|------------------------|-------------------|
| Quality Factor | عامل الجودة |
| Band Width | إتساع الشريط |
| Phase Shifting Circuit | دائرة تغيير الطور |

Chapter 9

الفصل التاسع :

| | |
|---------------------------|------------------------|
| Mesh | شبكة |
| Network Tree | هيكل الشبكة الكهربائية |
| Link Branch | فرع اتصال |
| Junction | نقطة اتصال |
| Matrix | مصفوفة |
| Inversion | تعاكس |
| Determinant | محددة |
| Square Matrix | مصفوفة مربعة |
| Row | صف |
| Column | عمود |
| Sequence | متتابة |
| Permutation | تبديل |
| Minors | محددات |
| Cofactor | عامل مشترك |
| Cramer's Rule | قاعدة كرامر |
| Driving Point Impedance | نقطة المعاوقة المحركة |
| Transfer Impedance | معاوقة الانتقال |
| Hay Bridge | قنطرة هاي |
| Owen Bridge | قنطرة أون |
| Voltage Transfer Function | دالة انتقال الجهد |

Chapter 10

الفصل العاشر :

| | |
|---------------------|------------------|
| Node | عقدة |
| Node Voltage Method | طريقة جهد العقدة |
| Junction | نقطة اتصال |
| Reference Node | عقدة الاسناد |
| Self Admittance | مساححة ذاتية |
| Mutual Admittance | مساححة تبادلية |
| Transfer Admittance | مساححة انتقال |
| Wien Bridge | قنطرة فين |

Chapter 11

الفصل الحادي عشر :

| | |
|--------------------|--------------|
| Thevenin's Theorem | نظرية ثفينين |
| Norton's Theorem | نظرية نورتن |
| Linear Network | شبكة خطية |

Chapter 12

الفصل الثاني عشر :

| | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| Delta | دلتا |
| Star | نجمة |
| Superposition Theorem | نظرية التراكب |
| Bilateral Network | شبكة ذات جانبيين |
| Reciprocity Theorem | نظرية التبادل |
| Excitation | إثارة |
| Response | استجابة |
| Compensation Theorem | نظرية التعادل (أو المعادلة) |
| Substitution Theorem | نظرية التعويض |
| Dependent Source | مصدر غير مستقل |
| Potentiometer | مقياس الجهد |
| Maximum Power Transfer Theorem | نظريات انتقال أكبر قدرة |
| First Derivative | مشتقة تفاضلية أولى |

Chapter 13

الفصل الثالث عشر :

| | |
|-------------------|----------------------------|
| Mutual Inductance | حث تبادلي |
| Self Inductance | حث ذاتي |
| Flux | فيض |
| Magnetic Flux | فيض مغناطيسي |
| Induced e.m.f. | قوة دافعة كهربائية تأثيرية |
| Leakage | تسرب |
| Faraday's Law | قانون فارادي |
| Lenz's Law | قانون لينز |
| Heaviside Bridge | قنطرة هيفيسيد |

Chapter 14

الفصل الرابع عشر :

| | |
|----------------|----------------|
| Polyphase | متعددة الأطوار |
| Ripple | تموج |
| Phasor | مطاور |
| Line Current | تيار الفرع |
| Phasor Diagram | شكل طوري |
| Wattmeter | الواتميتر |
| Line Voltage | جهد الفرع |
| Efficiency | كفاءة |
| Out Put | مطاه |

Chapter 15

الفصل الخامس عشر :

| | |
|------------------------|-----------------------|
| Fourier Method | طريقة فوريير |
| Singular Function | دالة وحيدة |
| Finite | محدود |
| Harmonic | تردد |
| Frequency | ذبذبة |
| Trigonometric Series | متسلسلة مثلثية |
| Discontinuous | غير متصل |
| Dirichlet Conditions | شروط دريشليت |
| Converge | تتقارب |
| Exponential Series | متسلسلة أسية |
| Even Function | دالة زوجية |
| Odd Function | دالة فردية |
| Half - Wave Symmetry | تماثل نصف موجي |
| Line Spectrum | طيف خطي |
| Waveform Synthesis | تركيب الشكل الموجي |
| Effective Value | القيمة الفعالة |
| Root Mean Square Value | جذر متوسط مربع القيمة |
| Pulse | نبضة |
| L'Hospital's Rule | قاعدة لوبيتال |

Chapter 16

الفصل السادس عشر :

| | |
|-------------------------|----------------|
| Transient Interval | فترة عابرة |
| Complementary Function | دالة متممة |
| Particular Solution | حل خاص |
| Operator | مؤثر |
| Order | رتبة |
| Exponential Rise | ارتفاع أسي |
| Time Constant | ثابت الزمن |
| Decay | اضمحلال |
| Short Circuit | دائرة مغلقة |
| Homogeneous Equation | معادلة متجانسة |
| Characteristic Equation | معادلة مميزة |
| Overdamped | زائد المضاءلة |
| Critical Damped | مضاءلة حرجية |
| Underdamp | ناقص المضاءلة |

| | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| Slope | ميل |
| Complete Solution | حل تام |
| Method of Undetermined Coefficiens | طريقة المعاملات غير المحدودة |
| Simultaneous differential equations | معادلات تفاضلية أنية |

Chapter 17

الفصل السابع عشر :

| | |
|-----------------------|-------------------------|
| Laplace Transform | متحول (بديل) لابلاس |
| Time Domain | بدلالة الزمن |
| Step Function | دالة سلمية |
| Integration By Parts | تكامل بالتجزىء |
| Partial Fraction | الكسور الجزئية |
| Expansion Methods | طرق الفك |
| Quotient | خارج القسمة |
| Polynomial | كثيرة حدود |
| Degree | درجة |
| Heaviside Formula | صيغة هيفيسيد |
| Simple Poles | أقطاب بسيطة |
| Distinct | متمايزة |
| Initial Value Theorem | نظرية القيمة الابتدائية |
| Final Value Theorem | نظرية القيمة النهائية |

فهرس ابجدى

| | | | |
|-------------|--------------------------|---------|--------------------------------|
| ٢٧٩،٢٧٧ | طريقة جهازى واتمير | (١) | اتجاهات المصادر |
| ٢٨٠،٢٦٥ | طوران | ١٩٣،٤٤ | اتجاه الف |
| ٢٦٩ | فرع واحد مكافئ | ٢٤٧،٢٤٦ | اتجاه تيارات الشبكة |
| ٢٧٩،٢٧٧،٢٧٥ | قدرة | ١٤٤ | اتزان ثلاثة أطوار |
| ٢٦٦ | متابعة | ٢٦٨ | أحمال على شكل دلتا |
| ٢٦٨،٢٦٧ | متعادل | ٢٦٨ | أحمال على شكل نجمة |
| ٤٤٣ | أوم | ٢٦٩ | طريقة جهازى واتمير |
| | (ب) | ٢٧٧ | قدرة |
| ١ | بروتون | ٢٧٦ | اتساع الشريط |
| ١٢٣ | بيان المحل الهندسى | ١٢٢ | اتصال |
| ١٢٥ | تيسار | ٣٤٨،٣٤٧ | تيار عبر سعة |
| ١٢٤ | عناصر متغيرة على التوالى | ٣٤٥،٣٤٤ | تيار فى حث |
| ١٢٥ | عناصر متغيرة على التوازى | | أحمال ذو ثلاثة أطوار غير متزنة |
| | (ت) | ٢٧١ | توصيلات دلتا |
| | تحويل | ٢٧٢ | نجمة ، أربعة أسلاك |
| ٢١٦،٢١٥ | دلتا إلى نجمة | ٢٧٣،٢٧٢ | نجمة ، ثلاثة أسلاك |
| ٨٠ | مساحة - معاوقة | | أعداد |
| ١٩٣،١٩٢ | مصادر | ٤٨ | تخليية |
| ٢١٦،٢١٥ | نجمة إلى دلتا | ٤٨ | حقيقية |
| ٣٦٦،٣٦٣ | تحويلات لابلاس | ٤٨ | مركبة |
| ٣٣٧ | تذبذب ، فى فترات العبور | ٤٨ | الكثرون |
| ٢٤٦،٢٤٤ | ترابط مغناطيسى | ٢٤١ | الكثرون |
| ٨٠ | تقبليية | ١ | أمبير |
| ٨٠ | تقبليية حثية | ٢٢٠ | انتقال أكبر قدرة |
| ٣٠٢،٢٢ | تمائل | ٢٦٥ | أنظمة متعددة الأطوار |
| ٣٠٤،٢٢ | تمائل نصف موجى | ٢٦٩ | أربعة أسلاك |
| ٣٠٥،٣٠٠،٢٦ | توافقات | ٢٦٨ | توصيلات دلتا |
| | توصيلات دلتا | ٢٦٦،٢٦٥ | توليد |
| ٢٦٩،٢٦٨ | تيارات فى | ٢٦٩ | تيار الفرع |
| ٢٦٨ | حمل متزن | ٢٦٦ | ثلاثة أسلاك |
| ٢٧٢،٢٧١ | غير متزنة | ٢٦٦ | ثلاثة أطوار |
| ٢٧٥ | قدرة | ٣١ | سنة أطوار |

| | | | |
|------------------------------|---------|----------------------|--------------|
| تيار | ٢ | جذور | ٥٢ |
| تجزئ ال | ٨٠٠٧٨ | أعداد مركبة | ٢٣٦ |
| تعريف اتجاه | ٢ | تساوى | ٣٦٨٠٣٣٦ |
| دائرة توازى | ٧٨ | حقيقية | ٣٦٨٠٣٣٦ |
| دائرة توالى | ٧٧٠٣٤ | غير متساوية | ٣٦٩٠٣٣٦ |
| عابر | ٣٢٨ | مترافقة مركبة | ٣٦٩٠٣٣٦ |
| محل هندسى | ١٢٥ | مكررة | ٣٦٩٠٣٣٦ |
| مصدر | ١٩٤ | جزء تخيل لـ | ٨ |
| مصفوفة | ١٤٧ | عدد مركب | ٧٩ |
| مطاور | ٦٥ | مساحة مركبة | ٦١ |
| نطاق | ٣٦٥ | معاوقة مركبة | ١٩٤ |
| نورتن المكافئ | ١٩٤ | جمع الـ | ٢٦٩ |
| تيارات أفرع (أطوار متعددة) | ١٤٣ | أعداد المركبة | ٧٨٠٧١٠٤٠٠٧٠٤ |
| تيارات مسارات مغلقة | | تيارات | ٧٧٠٧٣٠٧١٠٤ |
| (أنظر أيضا تيار شبكية) | | جهود | ٧٧ |
| تيارات وجهود جيبيه | ٣٢ | معاوقات | ٢١ |
| تيار شبكية | ١٤٣ | ج م م (قيمة فعالة) | ٢١ |
| صيغة مصفوفية | ١٤٧ | تعريف | ٣٠٦ |
| معادلات | ١٤٤٠١٤٣ | لمتسلسلة فورير | ٢ |
| تيار طبيعى | ٢٤٧ | جهد | ٧٧ |
| تيار طبيعى (متعدد الأطوار) | ٢٦٩ | ارتفاع فى | ٢٤٤ |
| تيار متورد | | تأثيرى | ١٩٢ |
| عابر | ٣٣٧ | ثقيين المكافئ | ١٨١٠١٦١ |
| نظام ثلاثة أطوار | ٢٦٥ | دالة انتقال | ١٧٠ |
| نظام ذو طورين | ٢٦٥ | عقدة | ٢٦٧٠٢٦٦ |
| تيار مستمر | ٦ | فرع | ٢٦٨ |
| تيار مستمر عابر | ٣٢٨ | مطاور | ٧٧٠٤ |
| دائرة مقاومة ومكثف | ٣٣٢ | هبوط فى | ٤٠٢ |
| دائرة مقاومة ومكثف وملف | ٣٣٥ | جول | |
| دائرة مقاومة وملف | ٣٢٨ | | |

(ج)

| | | | |
|------------------------------|-----|---------------|--------------|
| تيار طبيعى | ٢٤٧ | جهد | ٣٢٩٠٣٢٨٠٦١٠٤ |
| تيار طبيعى (متعدد الأطوار) | ٢٦٩ | ارتفاع فى | ٣٣٧٠٣٢ |
| تيار متورد | | تأثيرى | ٤٠٣ |
| عابر | ٣٣٧ | ثقيين المكافئ | ٢٤٤ |
| نظام ثلاثة أطوار | ٢٦٥ | دالة انتقال | ١٠ |
| نظام ذو طورين | ٢٦٥ | عقدة | ١٠٠٩ |
| تيار مستمر | ٦ | فرع | ٣٣٠٠٣ |
| تيار مستمر عابر | ٣٢٨ | مطاور | |
| دائرة مقاومة ومكثف | ٣٣٢ | هبوط فى | |
| دائرة مقاومة ومكثف وملف | ٣٣٥ | جول | |
| دائرة مقاومة وملف | ٣٢٨ | | |

(ث)

(ج)

جذر متوسط مربع القيمة

| | | | |
|-------------|----------------------|----------------|---------------------------|
| ٣٠٤٠٣٠٢ | دوال زوجية | ٢٤٥ | حث معامل تبادلى |
| ٢٦٣ | سلمية | ٢٤٤ | حث تبادلى |
| ٣٠٤٠٣٠٢ | فردية | ٢٤٨ | ترميز نقطى |
| ٣٢٨ | متمة | ٢٤٦ | تساوى M 12 و M 12 |
| ٧٨٠٣٥٠٦ | دوائر توازى | ٢٥١ | توصيل على التوازى |
| ١١٨ | أصغر قيمة لتيار | ٢٥١٠٢٥٠ | توصيل على التوالى |
| ١١٨ | أكبر قيمة لمعاوقة | ٢٤٦ | قطبية الجهد |
| ١١٨ | رنين | ٣٢٨ | حل خاص |
| ١٢٥ | محل هندسى | | |
| ٨٠٠٧٩ | مساحة | (د) | |
| ٨٠٠٧٨ | معاوقة | | |
| ٨٠ | مواصلة | ١٨١٠١٦١ | دالة انتقال الجهد |
| ١٠٥٠١٠٤٠١٠٣ | قدرة وعامل قدرة | ٢٤ | دالة جيبيية |
| ١٢٢ | قيمة عامل جودة | ٢٤ | تقويم نصف موجى |
| ٣٤٠٦٠٤ | دوائر توالى | ٢٣ | تقويم موجى كامل |
| ٧٧٠٣٤ | تيار | ٢٩٨٠٢٢ | ج م م قيمة |
| ١١٨ | رنين | ٢٣٠٢٢ | دورة |
| ١٣٤٠١٢٣ | محل هندسى لمعاوقة | ٢٣ | قيمة فعالة |
| ٦٢٠٦١ | معاوقة | ٢٤ | قيمة متوسطة |
| ٨١٠٣٧ | مقاومة ومكثف | ٣٦٣ | قيمة متوسطة لنصف دورة |
| ٧٧٠٣٨ | مقاومة ومكثف وملف | ٣٢٨ | دالة سلمية |
| ٨١٠٣٦ | مقاومة وملف | | دالة متمة |
| ٢٥٠٠٢٤٤ | دوائر مترابطة | ٧٩٠٧٨ | ذائرة |
| ٢٤٤ | فيض تبادلى | ٧٧ | توازى |
| ٢٤٤ | فيض متسرب | ٢٦٨ | توالى |
| ٢٩٨٠٢١ | دورة | ٤٠٣ | ثلاثة أطوار |
| | دورى | ١١٧ | ثوابت |
| ٢٩٨٠٢١ | دوال | ٢٦٥ | رنين |
| ٢١ | شكل موجى | ٤٠٣ | طوران |
| | (ذ) | ٢٤٤ | عناصر |
| | | ٨١٠٣٣ | مترابطة |
| | ذبلبة | ٨١٠٣٣ | مقاومة |
| ١٢٢ | اتساع شريط | ٨١٠٣٤ | مقاومة ومكثف |
| ١١٨ | رنين توازى | ٣٧٤ | مقاومة وملف |
| ١١٧ | رنين توالى | ٢٦٩ | نطاق S |
| ٣٤٠ | طبيعية | ٢٥٥٠٢٠٧٠١٦٦٠٩٠ | دائرة ذات فرع واحد مكافئة |
| ٣٠٥ | طيف (طيف خطى) | | دائرة قنطرة |
| ١٢٢ | عالية ، منتصف القدرة | ٢٩٨٠٢١ | دوال |
| | | | دورية |

| | | | |
|-------------|-----------------------------|-------------|-----------------------------|
| ٣٣٤ | شحنة عابرة | ١٢٢ | دبذبة منخفضة ، منتصف القدرة |
| ٣٢٨ | شروط أساسية للفترات العابرة | ٦٥ | نطاق |
| ٢٩٩ | شروط ريشليت | | (ر) |
| | شكل موجي | | رئين |
| ٢٩٨ | تحليل فورير | ١١٩،١١٨ | دائرة توازي |
| ٣٠٥ | تركيب | ١١٧ | دائرة توالي |
| ٣٠٢،٢٢ | تمائل | | (ز) |
| ٣٠٣ | جمع | | زاوية ، سابقة أو لاحقة |
| ٢١ | ج م م القيمة | ٦٥،٣٣ | (س) |
| ٢١ | قيمة فعالة | | |
| ٢١ | قيمة متوسطة ، دورية | ٦٤ | سرعة زاوية |
| | (ص) | ٤٤٣ | |
| | صيغة أسية : | ١٣،١٢ | اتصال على التوازي |
| ٤٩ | لكيات مركبة | ١٣،١٢ | اتصال على التوالي |
| ٣٠٠ | لمتسلسلة فورير | ٣٣٤،٣ | علاقة الشحن بالتيار |
| ٦١،٤٩ | صيغة ايلر | ٨٠ | سيمنز |
| ٤٩ | صيغة قطبية لكيات مركبة | | (ش) |
| | (ط) | ٢١٣،٩٦ | شبهات غير فعالة |
| | | | شبكة |
| ١٢١،٢ | طاقة | ١٤٥ | السرع |
| | طرق فلك | ٢١٧،٢١٦ | ذات جانبيين |
| ٣٦٩ | كسور جزئية | ١٩٢ | خطية |
| ٣٧٢ | هيفيسيد | ١٤٣ | طريقة تيار الشبكة |
| ٢٧٤ | طريقة ازاحة نقطة التعادل | ١٧٠ | طريقة جهد العقدة |
| | طور | ١٥٣،٩٦ | غير فعالة |
| ١٣٥ | دائرة تغيير | ١٩٤،١٩٢ | فعالة |
| ٣٣٧،٦٤،٣٣ | زاوية | ١٤٩ | محددات ، استخدامها في |
| ٨١،٦٥،٦٤،٣٣ | سابق أو لاحق | ١٤٣ | مسارات مغلقة |
| ٨١،٦٥،٦٤ | فرق | ١٩٨،١٩٧ | مصادر تيارات ثابتة |
| ٢٦٦ | متابعة (متعدد الأطوار) | ١٥٢ | مصنوفة المعاولة |
| ٣٣٥ | طيف خطي | ١٤٣ | معادلة كيرشوف |
| | (ع) | ٢٦٣ | مكافئة لنجمة أو دلتا |
| | | ٢١٣،١٩٢ | نظريات |
| ٣٦٣ | عابر ، تيار متردد | ١٧١،١٧٠،١٤٥ | نقط اتصال |
| ٣٠٧،٣٣٩ | دائرة مقاومة ومكثف | ١٤٥ | هيكل |
| ٣٧٥،٣٤٠ | دائرة مقاومة ومكثف وملف | ٥٠ | شتينميتز ، صيغة عدد مركب |
| ٣٦٧،٣٣٧ | دائرة مقاومة وملف | ٤٤١ | شحنة |

| | | | |
|-------------|--------------------------|------------|----------------------------|
| ١٥٣٠٦٦ | قانون أوم | ٣٦٣ | عابر طريقة لابلاس |
| ٢٤٤ | قانون فاراداي | ٣٢٨ | عابر ، تيار مستمر |
| ٢٤٧ | قانون لنز | ٣٣٢ | دائرة مقاومة ومكثف |
| ٩٦٠٢١٤٤٢ | قدوة | ٣٣٥ | دائرة مقاومة ومكثف وملف |
| ٣٠٨٠٣٠٦ | توافقية | ٣٢٨ | دائرة مقاومة وملف |
| ١٠٤ | دائرة توازي | ٢٤٦ | عامل الربط |
| ١٠١ | دائرة توالي | ٢٢ | عامل الشكل |
| ٩٩٠٩٨ | ظاهرية | ١٢١ | عامل جودة |
| ٣٠٦ | غير جيبية | ١٢١ | تعريف |
| ٩٦٠٧ | لحظية | ١٢١ | دائرة مقاومة ومكثف |
| ٢٧٥ | متعدد الأطوار | ١٢١ | دائرة مقاومة ومكثف وملف |
| ٩٠-٩٦٠٢ | متوسط | ١٢١ | دائرة مقاومة وملف |
| ٩٩ | مثلث | ٩٨٠٩٧ | عامل قدرة |
| ٩٨ | مفاعلية | ١٠١ | تحسين |
| ٣٠٦ | قدرة متوسطة | ١٠١ | تصحيح |
| ١٩٣٠٨٩٠٨٨٠٢ | قطبية الجهود | ١٠٠٠٩٩ | زاوية |
| ٢٥٥ | قنطرة هيفيسيد | ٩٩ | سابق |
| | قيم لحظية | ٩٩ | لاحق |
| ٩٠٨٠٦٠٢ | للتيار والجهود | ١٤٩ | عامل مشترك |
| ٩٦٠٨٠٢ | للقدرة | ٤٨ | عدد تحويل |
| ٢١ | قيمة فعالة | | عقدة |
| ٢٤ | لدالة جيبية | ١٧٠ | أساسية (أو نقطة اتصال) |
| ٣٠٦ | لمتسلسلة فورير | ١٧٠ | اسناد |
| ٢١ | قيمة متوسطة | ١٧٠ | جهود |
| ٢١ | لدالة دورية | ١٧٠ | معادلات |
| ٣٠٠٠٢١ | لدالة غير جيبية | ٢١٦٠٣ | عناصر دائرة عطفية |
| ٢٢ | لنصف دورة موجة جيبية | | (ف) |
| | | ٤-٣ | فاراد |
| | (ك) | | فرع |
| | | ٧٩٠٣٥ | تيارات |
| | كيات مركبة | ١٢٣ | متغير |
| ٤٩ | ازاحة زاوية | ٤٠٢ | فولت |
| ٥٣ | تحويل | ٢٤٤ | ليفس متسرب |
| ٥٠ | جمع | | |
| ٤٩ | صيفة أحداثيات متعامدة لـ | | (ق) |
| ٤٩ | صيفة أسية لـ | ١٥١ | قاعدة كرامر |
| ٤٩ | صيفة حساب مثلثات لـ | ٢٤٨ | قاعدة نقطة ، ملفات مترابطة |
| ٥٠ | صيفة شتيميز لـ | ٧٨٠٧٧٠٣٥٠٤ | قانون كيرشوف |

| | | | | |
|---------|---------------------------------|---------|-----------------------|-------|
| | صيفة قطبية لـ | ٥٠ | مسطرة حاسبة | |
| ٥٢ | ضرب | ٥١ | استخدامها | |
| ٥ | قسة | ٥١ | مصادر ثابتة | |
| | لوغاريتم | ٥٢ | مصدر | |
| ١٩٤ | مقياس | ٥٠ | تيار | |
| ١٩٢ | كولوم | ٣٤١ | جهد | |
| ٣٠٧ | | | غير جيبى | |
| ٦١ | | | مركب | (ل) |
| ١٩٦-١٩٢ | | | مكافئ | |
| ١٤٧ | لاحق | | مصروفة | |
| ١٤٧ | تيار | ٣٩٠٣٤ | جمع | |
| ١٤٧ | زاوية طور | ٣٩٠٣٤ | رتبة الـ | |
| ١٤٨ | عامل قدرة | ٩٨ | ضرب | |
| ١٤٩ | | | مربعة | |
| ١٧٢ | | | مساحة | (م) |
| ١٥٣ | متتابعة ، متعدد الأطوار | | معاوقة | |
| ٣٢٨ | متجهات | ٢٧٦ | معادلات تفاضلية | |
| ٣٢٨ | متوافق عدد مركب | ٦٤٠٦٣ | معادلات تفاضلية عظمية | |
| ٣٣٢ | جدور | ٥٠ | معادلات متجانسة | |
| ٣٣٦ | متسلسلة جيب تمامية ، ج م القيمة | ٣٣٧ | معادلة مميزة | |
| ٢٨٥٠٢٨٤ | متسلسلة فوريير ، | ٢٢ | معاوقات أفرع | |
| ٣٣ | في صيفة أسية | | معاوقة | |
| ٢١٨٠١٥٤ | في صيفة نسب مثلثية | ٣٠٠ | انتقال | |
| ٦٢ | متسلسلة ماكلورين | ٢٩٨ | بيان | |
| ١٩٢ | متوسط قيمة نصف دورة | ٣٥ | تقنين المكافئة | |
| ٧٩٠٧٨ | مجال كهربائى | ٢٢ | دائرة توازى | |
| ٧٧ | مجال مغناطيسى | ٣٣٤٠٣ | دائرة توالى | |
| ١٢٣ | محدد | ٣٣١٠٣ | محل هندسى | |
| ٦١ | محددات | ١٤٩ | مركبة | |
| ١٥٣ | مساحه | ١٤٩ | مصروفة | |
| ٧٧ | انتقالية | ٨٠ | مكافئة | |
| ١٥٣ | بيان | ١٧٤ | نقطة محركة (داحلة) | |
| ١٤٠٠١١٨ | داحلة | ١١٨٠١١٧ | معاوقة عظمى | |
| ٣ | دائرة توازى | ١٧٤ | مقاوم | |
| ٦١٠٤٠٣ | دائرة توالى | ٨١٠٨٠ | مقاومة | |
| ٤٩ | مصروفة | ٨٣ | مقياس ، عدد مركب | |
| | مستوى مساحة | ١٧٢ | مكافئة | |
| ٨٠٠٧٩ | مستوى معاوقة | ١٢٤ | دوائر | |
| ٧٩ | | ١٢٤ | مساحة | |

| | | | |
|------------|--------------------|------------|----------------------|
| ٤٨ | نظام عدد مركب | ٧٧ | مكافئة معاولة |
| | نظرية | ٣ | مكثف |
| ٢١٧ | التبادل | ٣٣٤٠١٣ | طاقة مخزونة في |
| ٣٠٧٠٢١٦ | التراكب | | ملفات |
| ٢١٨ | التعويض | ١٢١ | عامل جودة |
| ٢١٣ | الشبكة الكهربائية | ٢٤٥ | فيض ممتد |
| ٣٧٢ | القيمة الابتدائية | | ممانعة |
| ٣٧٣ | القيمة النهائية | ٦٢٠٤٠ | حشية |
| ٢١٨ | المعادلة | ٦٢ | سعرية |
| ١٩٢ | تقنين | ٨٠ | مواصلة |
| ١٩٤ | نورتن | ٢٢ | موجة سن منشار |
| ٣ | نفاذية | ٢٤ | فعالة |
| ١٢٢ | نقط منتصف القدرة | ٢٤ | فعالة |
| ١٧٠٠١٤٥٠٧٨ | نقطة اتصال في شبكة | ٢٩٩ | فورير |
| | نقطة محركة | ٢٤ | متوسط |
| ١٧٤ | مساحة | ٣١٥٠٣٠٩٠٢٦ | موجة مربعة |
| ١٥٣ | معاولة | ٢٦٦٠٢٦٥ | مولد ، متعدد الأطوار |

(أ)

(ن)

| | | | |
|-----|------------------------|-------------|--------------------------------|
| ٤٤٣ | هنري | ٢١٦٠٢١٥ | نجمة - دلتا ، تحويلات |
| ١٤٥ | هيكل الشبكة الكهربائية | | نطاق |
| | | ٦٥ | ذبذبة |
| | | ٣٦٤ | ذبذبة مركبة |
| | | ٦٥ | زمن |
| ٤٤٢ | وات | ٣٧٣٠٣٦٤ | S |
| ٢٧٧ | واتميتر ، طريقة جهازى | ٢٧٢٠٢٦٩٠٢٦٦ | نظام ثلاثة أطوار - أربعة أسلاك |
| ٢٤٤ | وبير | ٤٨ | نظام عدد حقيقى |

(و)

رقم الإيداع ٨٩/٥٢٠٦

صدر أيضاً للناشر في الهندسة

- | | |
|------------|---|
| TROTT | • التبريد وتكييف الهواء |
| ELGERD | • نظرية أنظمة الطاقة الكهربائية - مقدمة |
| HAYT | • الكهرومغناطيسيات الهندسية |
| ZEMANSKY | • الحرارة والديناميكا الحرارية |
| DAUGHERTY | • ميكانيكا الموائع وتطبيقاتها الهندسية |
| SHELLEY | • الميكانيكا الهندسية - أستاذية |
| SHELLEY | • الميكانيكا الهندسية - ديناميكا |
| DOBRIN | • مقدمة في الاستكشاف الجيوفيزيائي |
| FIRTH | • تكنولوجيا الرسم الهندسي |
| BROWN | • الهندسة الميكانيكية - نظرية الصناعة والدراسات المشتركة |
| MORRIS | • الالكترونيات في خدمة التطبيقات الكهربائية |
| WOOLLARD | • الالكترونيات العملية |
| WOOLLARD | • اجهزة والحاسبات الدقيقة لطلبة الهندسة والفنيين |
| TOKHEIM | • المبادئ الرقمية - شوم |
| WILSON | • تكنولوجيا الالكترونيات - شوم |
| EDMINISTER | • الدوائر الكهربائية - شوم |
| NASAR | • الماكينات الكهربائية والكهروميكانيكيات - شوم |
| ABBOTT | • الديناميكا الحرارية - شوم |
| GILES | • ميكانيكا الموائع والهيدروليكا - شوم |
| NASH | • مقاومة المواد - شوم |

تطلب من

الناشر

الدار الدولية للنشر والتوزيع

٣٨ ش الأهرام - روكسي - مصر الجديدة

ص.ب ٥٥٩٩ هليوبوليس غرب - القاهرة

تليفون : ٢٥٨٢٨٨٧

تلكس : ٢٠٠٧١/٢٠٠٧٠ PBCRB UN

فاكس : ٠٠٢٠٢/٢٩١٨٠٥٩

9 094453 07

جميع المكتبات الكبرى بمصر والعالم العربي

Bibliotheca Alexandrina



0696573